Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Романов, Конечномерность динамики на аттракторе для нелинейных параболических уравнений, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2001, том 65, выпуск 5, 129–152

DOI: <https://doi.org/10.4213/im359>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 07:54:39

УДК 517.95

А. В. Романов

Конечномерность динамики на аттракторе для нелинейных параболических уравнений

Показано, что одномерные полулинейные параболические уравнения второго порядка обладают свойством конечномерности динамики на аттракторе. В том числе, это верно для уравнений реакции–диффузии с конвекцией на $(0, 1)$.

Найдены новые топологические критерии конечномерности динамики на инвариантных компактах для класса диссипативных уравнений параболического типа в пространствах Банаха. Динамика таких уравнений на аттракторе $\mathcal{A}$ конечномерна (описывается некоторым ОДУ), если $\mathcal{A}$ можно вложить в конечномерное C^1 -подмногообразие фазового пространства.

Библиография: 29 наименований.

Введение

Настоящая статья, как и предшествующая ей работа [1], посвящена одному новому подходу к изучению предельных режимов полулинейных параболических уравнений

$$\partial_t u = -Au + F(u), \quad u = u(t), \quad (1)$$

в банаховом пространстве X с линейным неограниченным секториальным оператором A и “относительно слабой” нелинейностью F . Предполагаем, что (1) порождает гладкий диссипативный полупоток в X^α , где $0 \leq \alpha < 1$, а $\{X^\theta\}_{\theta \in \mathbb{R}}$ – определяемая оператором A шкала пространств Банаха [2].

Обсуждаются условия, при которых динамика (1) на инвариантном компакте $\mathcal{K} \subset X^\alpha$ может быть описана обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ) с липшицевым векторным полем в $\mathbb{R}^n$, что подразумевает липшиц-сопряженность соответствующих фазовых полупотоков на $\mathcal{K}$ и некотором инвариантном для ОДУ компакте $\mathcal{K}_1 \subset \mathbb{R}^n$. В этом случае говорим о *конечномерной динамике на $\mathcal{K}$* . Если уравнение (1) обладает компактным аттрактором $\mathcal{A} \subset X^\alpha$ – инвариантным множеством, равномерно притягивающим шары $\mathcal{B} \subset X^\alpha$ при $t \rightarrow +\infty$, то наибольший интерес представляет эффект конечномерности динамики на $\mathcal{A}$, или, в терминологии [1], *конечномерности предельной динамики* (1).

Гипотезу о конечномерном характере финальных режимов нелинейных параболических уравнений высказывал уже Хопф [3]. Первые конкретные результаты в этом направлении (типа “конечности числа определяющих мод”) получили Фойяш, Проди [4] и Ладыженская [5], причем в работе [5] было установлено наличие компактного аттрактора $\mathcal{A}$ для широкого класса задач (1). Конечномерность динамики на $\mathcal{A}$ трактовалась тогда О. А. Ладыженской как возможность восстановления полных траекторий $\{u(t)\}_{t \in \mathbb{R}} \subset \mathcal{A}$ по их проекции в подходящее конечномерное подпространство $Y \subset X^\alpha$. Удобным инструментом доказательства конеч-

номерности инвариантных компактов (1) стала общая теорема Малле-Паре [6] о гладких вполне непрерывных отображениях в гильбертовом пространстве, а также ее банахова версия [7]. Различные методы оценки размерности (хаусдорфовой, фрактальной, ляпуновской) аттракторов эволюционных уравнений изложены в [8]–[10]. Целый взгляд на проблему конечнопараметрического отслеживания траекторий распределенных динамических систем представлен не так давно Чуешовым [11].

В работе Мане [12] для уравнений (1) в гильбертовом пространстве с самосопряженным оператором A было сформулировано (см. также [10], [13]) так называемое *условие спектрального скачка*, позволяющее построить инерциальное многообразие $\mathcal{M} \subset X^\alpha$. Речь идет о гладкой или липшицевой конечномерной инвариантной поверхности, содержащей аттрактор $\mathcal{A}$ и притягивающей шары $\mathcal{B} \subset X^\alpha$ с экспоненциальной скоростью. При этом $\mathcal{M}$ устроено как график, и сужение уравнения (1) на $\mathcal{M}$ дает инерциальную форму – ОДУ в $\mathbb{R}^n$, моделирующее не только точное поведение решений $u(t)$ на $\mathcal{A}$, но и (асимптотически по $t \rightarrow +\infty$) фазовую динамику (1) в X^α . Как видим, существование инерциального многообразия (“асимптотическая конечномерность”) является несколько более сильным свойством, чем конечномерность предельной динамики. К сожалению, условие спектрального скачка, предполагающее значительную разреженность спектра A , оказалось весьма ограничительным, и к настоящему моменту теория инерциальных многообразий зашла, по существу, в тупик.

В то же время есть основания полагать, что для конкретной диссипативной системы доказать конечномерность динамики на аттракторе иногда проще, чем установить наличие инерциального многообразия. В качестве первого (и, конечно, не последнего) подтверждающего примера здесь предлагаются одномерные параболические уравнения

$$u_t = u_{xx} + f(x, u, u_x), \quad x \in (0, 1), \quad (2)$$

при разделенных или периодических краевых условиях с гладкой функцией f , чьи характеристики гарантируют глобальное (по $t > 0$) существование и надлежащие оценки решений смешанной задачи. Самосопряженный полуограниченный снизу оператор $A = -\partial_{xx}$ в $X = L^2(0, 1)$ определяет гильбертову шкалу пространств $\{X^\theta\}$. Считаем, что при некотором $\alpha \in (3/4, 1)$ уравнение (2) порождает в X^α гладкий полупоток и обладает компактным аттрактором $\mathcal{A} \subset X^\alpha$. Один из главных выводов статьи (теорема 3.3) состоит в том, что фазовая динамика (2) на $\mathcal{A}$ конечномерна. Между тем, до сих пор неизвестно, всегда ли существует в данной ситуации инерциальное многообразие. Согласно [1] конечномерность предельной динамики [2] имеет такие следствия: векторное поле уравнения липшицево на $\mathcal{A}$ в X^α -метрике, а полупоток расширяется на $\mathcal{A}$ до липшицева в X^α -метрике потока; аттрактор $\mathcal{A}$ есть часть конечномерного липшицева многообразия (типа графика) $\mathcal{M} \subset X^\alpha$. С другой стороны, уравнение (2) на окружности допускает периодические по t решения $u(t, \cdot)$ и конечномерность динамики на аттракторе позволяет утверждать, что периоды таких решений ограничены снизу положительной постоянной $c = c(f)$.

Конечномерность предельной динамики можно получить также для систем уравнений вида (2) с $u(0) = u(1) = 0$ и с $(d(x)u_x)_x$ вместо u_{xx} , где $d(x) > 0$ на

$[0, 1]$ – гладкий, единый по всем компонентам системы, неоднородный “коэффициент диффузии”.

Базой доказательства теоремы 3.3 служат результаты § 1, 2 для абстрактного уравнения (1), представляющие самостоятельный интерес. Пусть A – дискретный секториальный оператор в X , функция F принадлежит $C^2(X^\alpha, X)$ при каком-то $\alpha \in [0, 1]$ и ограничена на шарах X^α , $|\cdot|_\alpha$ – норма в X^α . Теорема 1.4 устанавливает два новых, по сравнению с [1], критерия конечномерности динамики (1) на инвариантных компактах $\mathcal{K} \subset X^\alpha$. Первый из них – относительная компактность в X^α множества точек $w = (u - v)/|u - v|_\alpha$, $u, v \in \mathcal{K}$, $u \neq v$. Другой сводится к наличию для каждой точки $w \in \mathcal{K}$ такой X^α -окрестности $\mathcal{V} \supset w$ и такого конечномерного непрерывного в X^α проектора P , что

$$|u - v|_\alpha \leq c|P(u - v)|_\alpha$$

на $\mathcal{V} \cap \mathcal{K}$, $c = c(\mathcal{K}, w, P)$. Если пространство X нерефлексивно, то нужна еще непрерывность P в $X^{\alpha-1}$. Далее, теорема 1.5 описывает связь между конечномерностью динамики на инвариантном компакте $\mathcal{K} \subset X^\alpha$ и вложимостью (тождественной) $\mathcal{K}$ в достаточно регулярное конечномерное подмногообразие $\mathcal{M} \subset X^\alpha$. Именно, C^1 -гладкость $\mathcal{M}$ обеспечивает конечномерность фазовой динамики на $\mathcal{K}$; обратное же верно, если $\mathcal{M}$ – липшицево многообразие. Подчеркнем, что многообразие $\mathcal{M}$ не предполагается инвариантным.

Заметим, что для справедливости некоторых из перечисленных утверждений дополнительно требуется базисность в X^α конечномерных инвариантных подпространств оператора A , упорядоченных определенным образом.

Все эти построения носят топологический характер, но в гильбертовом случае теоремы 2.3, 2.8 дают и аналитические условия на векторное поле $G(u) = F(u) - Au$ уравнения (1), гарантирующие конечномерность его предельной динамики. Указанные условия подразумевают декомпозицию

$$G(u) - G(v) = (B_0(u, v) - B(u, v))(u - v)$$

на аттракторе $\mathcal{A} \subset X^\alpha$, где $B_0(u, v)$ – поле линейных непрерывных отображений $X^\alpha \rightarrow X^\alpha$, а $B(u, v)$ – поле линейных неограниченных секториальных операторов в X , подобных нормальным. Требуется также достаточная (но при $\alpha \neq 0$ меньшая, чем для спектра $\sigma(A)$ в условии спектрального скачка) разреженность множества $\Sigma = \bigcup_{u, v \in \mathcal{A}} \sigma(B(u, v))$. Отсюда при некоторых технических ограничениях на поля операторов B_0, B делается вывод о применимости второго критерия теоремы 1.4 и, стало быть, о конечномерности динамики на $\mathcal{A}$.

Такой сценарий успешно реализуется для одномерных полулинейных параболических уравнений (2), однако соответствующий переход к размерности ≥ 2 остается проблемным даже в “простой” ситуации $f = f(x, u)$. Не удается пока установить и конечномерность предельной динамики для двумерной системы Навье–Стокса. Между тем, аргументация работы [1; § 4] позволяет рассчитывать, в принципе, на положительное решение данной проблемы при периодических краевых условиях. Дальнейшие усилия должны быть направлены на ослабление довольно жестких предположений теорем 2.3 и 2.8, что позволит расширить список уравнений параболического типа, демонстрирующих конечномерную динамику на аттракторе.

Естественно возникающий вопрос о существовании уравнений (1), не обладающих конечномерной предельной динамикой, вряд ли решается просто. По крайней мере в сходной ситуации с асимптотической конечномерностью фазовой динамики ответ (утвердительный) на вопрос подобного рода получен лишь совсем недавно. Речь идет о предъявленном в [14] примере уравнения (1) без инерциального C^1 -многообразия $\mathcal{M} \subset X^\alpha$. Построить аналогичный контрпример с заменой класса гладкости $\mathcal{M}$ на Lip пока не удается.

Важно упомянуть весьма интересные работы Камаева [15], [16], в которых дана конструкция инвариантного C^1 -непрерывного семейства гладких устойчивых многообразий конечной коразмерности для аттрактора уравнений типа (2) и соответствующих систем уравнений. Было бы полезно выявить в общем случае зависимость между наличием такого семейства многообразий и конечномерностью предельной динамики эволюционных задач (1).

Здесь не представлены количественные оценки фазовой размерности ОДУ, описывающего предельную динамику (1), и их сравнение с известными оценками размерности аттрактора или же инерциального многообразия (если таковое имеется). Эта несомненно перспективная тема выходит за рамки настоящей публикации и может стать предметом дальнейших исследований.

§ 1. Топологические условия

Уточним ряд понятий, связанных с уравнением (1), и напомним некоторые известные свойства таких уравнений (см., в частности, [2]).

Пусть X – бесконечномерное сепарабельное банахово пространство с нормой $|\cdot|$ и $\sigma(\cdot)$, $\|\cdot\|$, $R(\lambda; \cdot)$ – спектр, норма, резольвента линейных операторов в X . Закрытый линейный оператор A в (1) с плотной областью определения $\mathcal{D}(A) \subset X$ предполагаем секториальным и дискретным. Первое означает, что при надлежащих $k > 0$ и $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ спектр $\sigma(A)$ лежит в секторе $|\operatorname{Im} \lambda| < k \operatorname{Re}(\lambda - \lambda_0)$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$, а вне его

$$\|R(\lambda; A)\| \leq M/(1 + |\lambda - \lambda_0|), \quad M = M(A, k, \lambda_0).$$

Дискретность A понимается как компактность $R(\lambda; A)$. Считаем, в дальнейшем, что $\lambda_0 = 0$, или, эквивалентно, $\operatorname{Re} \sigma(A) > 0$ (т.е. $\operatorname{Re} \lambda > 0$ на $\sigma(A)$). Это позволяет корректно определить для всех $\theta \in \mathbb{R}$ степени A^θ и банаховы пространства $X^\theta = \mathcal{D}(A^\theta)$ с нормой $|u|_\theta = |A^\theta u|$. При $\theta < 0$ операторы A^θ вполне непрерывны в X и $\mathcal{D}(A^\theta)$ есть пополнение X по норме $|\cdot|_\theta$. Кроме того: $X^0 = X$ и $X^1 = \mathcal{D}(A)$; для $\beta < \theta$ вложения $X^\theta \subset X^\beta$ вполне непрерывны; при $\beta, \theta \in \mathbb{R}$ операторы A^β изометрично отображают $X^{\theta+\beta}$ на X^θ .

Используем обозначения $BC^\nu(Y_1, Y_2)$, $\nu \in \mathbb{Z}^+$, или $BC(Y_1, Y_2)$ для классов ограниченных на шарах C^ν -гладких или непрерывных отображений $\Pi: Y_1 \rightarrow Y_2$ пространств Банаха Y_1, Y_2 .

Если $\alpha \in [0, 1)$ и $F \in BC^2(X^\alpha, X)$, то отвечающая (1) задача Коши с $u(0) = u_0 \in X^\alpha$ имеет сильное локальное решение $u(t) \in C^2((0, t^*), X^\alpha) \cap C([0, t^*), X^\alpha)$ для $t^* = t^*(u_0) > 0$, причем фактически $u(t) \in X^1$ на $(0, t^*)$. Постулируем еще диссипативность (1) в X^α , т.е. глобальное по $t > 0$ существование решений $u(t) = \Phi_t u_0$ и наличие такого (втягивающего) шара $\mathcal{B}_0 \subset X^\alpha$, что $\Phi_t \mathcal{B} \subset \mathcal{B}_0$ для каждого шара $\mathcal{B} \subset X^\alpha$ при $t > t_0(\mathcal{B})$. Тогда фазовый полупоток $\{\Phi_t\}_{t \geq 0}$ –

класса C^2 как отображение $(0, \infty) \times X^\alpha \rightarrow X^\alpha$. Для произвольного множества $\mathcal{U} \subset X^\alpha$ ограниченность образа $\Phi_t \mathcal{U}$ в X^θ при $t > 0$, $\alpha < \theta < 1$ (а значит, и относительная компактность $\Phi_t \mathcal{U}$ в X^α) следует из X^α -ограниченности трубки тока $\bigcup_{0 \leq \tau \leq t} \Phi_\tau \mathcal{U}$ с помощью доводов типа [2, теорема 3.3.6]. Отсюда явствует, что эволюционные операторы Φ_t компактны на любом шаре $\mathcal{B} \subset X^\alpha$, коль скоро $t > t_0(\mathcal{B})$.

Итак, принимаем три основные гипотезы:

(Н1) линейный оператор A дискретен и секториален, спектр $\sigma(A)$ счетен и $\operatorname{Re} \sigma(A) > 0$;

(Н2) $F \in BC^2(X^\alpha, X)$ при некотором $\alpha \in [0, 1)$;

(Н3) уравнение (1) диссипативно в X^α .

Требование счетности $\sigma(A)$ является чисто техническим. В гильбертовом пространстве предположению (Н1) удовлетворяет всякий дискретный нормальный оператор со спектром в секторе $|\operatorname{Im} \lambda| < k \operatorname{Re} \lambda$ при $k = \operatorname{const} > 0$, например любой дискретный положительно определенный оператор.

Обозначаем через $G(u)$ векторное поле $F(u) - Au$ уравнения (1). Множество $\mathcal{U} \subset X^\alpha$ инвариантно, если $\Phi_t \mathcal{U} = \mathcal{U}$ для $t > 0$ (так что, на самом деле, $\mathcal{U} \subset X^1$). Ограниченные инвариантные подмножества X^α относительно компактны. В условиях (Н1)–(Н3) фазовый полупоток $\{\Phi_t\}$ обладает (см. [8]–[10]) компактным аттрактором $\mathcal{A}$ – максимальным ограниченным инвариантным подмножеством X^α . Как показано в [1, § 4], функция $G: \mathcal{A} \rightarrow X^\alpha$ гёльдерова в X^α -метрике и $|u|_1 \leq \operatorname{const}$ на $\mathcal{A}$. Последнее справедливо и при $F \in BC^1(X^\alpha, X)$, что доказывается без труда, если перейти к интегральной форме записи в (1). Непосредственно из [1, теорема 1.4] следует

ЛЕММА 1.1. *Функция $A: \mathcal{A} \rightarrow X$ гёльдерова в X^α -метрике.*

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Гипотеза (Н1) выполняется одновременно для операторов $A: X^1 \rightarrow X$ и $A: X^{1+\beta} \rightarrow X^\beta$ с $\beta > 0$. Таким образом, заменив в (Н2), (Н3) пару пространств (X^α, X) на $(X^{\alpha+\beta}, X^\beta)$, можно перенести все вышеперечисленные свойства динамики (1) на фазовое пространство $X^{\alpha+\beta}$. То же верно и в контексте последующих построений.

Наличие втягивающего шара для полупотока $\{\Phi_t\}$ необходимо только как гарантия существования компактного аттрактора.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. Если ограничиться изучением динамики (1) на произвольных инвариантных компактах $\mathcal{K} \subset X^\alpha$, то вместо (Н3) достаточно постулировать продолжимость решений $u(t)$ на $(0, \infty)$ при всех начальных значениях $u_0 \in X^\alpha$.

Оба замечания относятся в полной мере и к результатам [1].

Для $a > 0$ обозначим через $\mathcal{P}_a$ конечномерный спектральный проектор оператора A в X , соответствующий части спектра с $\operatorname{Re} \lambda < a$. Проекторы $\mathcal{P}_a$ коммутируют с A^α и непрерывны в X и X^α .

Скажем (см. [1, определение 1.1]), что фазовая динамика (1) на инвариантном компакте $\mathcal{K} \subset X^\alpha$ *конечномерна*, если найдутся ОДУ с липшицевым векторным полем и разрешающим потоком $\{\varphi_t\}$ в $\mathbb{R}^n$, а также липшицево вложение $\Psi: \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}^n$ такие, что

$$\Psi \Phi_t u = \varphi_t \Psi u, \quad u \in \mathcal{K}, \quad t \geq 0.$$

При $\mathcal{K} = \mathcal{A}$ в том же смысле говорится о конечномерности предельной динамики уравнения (1).

Согласно [1, теорема 1.6] следующие утверждения равносильны:

(FD) фазовая динамика на $\mathcal{K}$ конечномерна;

(VF) $|G(u) - G(v)|_\alpha \leq c|u - v|_\alpha$ для $u, v \in \mathcal{K}$, $c = c(\mathcal{K})$;

(Fl) полупоток $\{\Phi_t\}$ на $\mathcal{K}$ инъективен и расширяется до липшицева в X^α -метрикe потока;

(GrF) при некотором $a > 0$ имеем оценку $|u - v|_\alpha \leq c|\mathcal{P}_a(u - v)|_\alpha$ для $u, v \in \mathcal{K}$, $c = c(\mathcal{K}, a)$;

(Gr) найдется конечномерный непрерывный в X^α (и в $X^{\alpha-1}$, если X нерефлексивно) проектор P такой, что $|u - v|_\alpha \leq c|P(u - v)|_\alpha$ при $u, v \in \mathcal{K}$, $c = c(\mathcal{K}, P)$;

(EM) метрики X^α и $X^{\alpha-1}$ на $\mathcal{K}$ эквивалентны.

Эта теорема устанавливает логический цикл (VF) $\rightarrow$ (Fl) $\rightarrow$ (GrF) $\rightarrow$ (Gr) $\rightarrow$ (EM) $\rightarrow$ (VF) и импликации (FD) $\rightarrow$ (Fl), (Gr) $\rightarrow$ (FD). При этом переход (Fl) $\rightarrow$ (GrF) требует дополнительного условия [1, предположение 1.4] на оператор A в терминах характеристик полугруппы $\{\exp(-tA)\}_{t \geq 0}$.

Сформулируем еще два критерия конечномерности динамики на инвариантных компактах.

ТЕОРЕМА 1.4. Пусть

$$\lim_{a \rightarrow \infty} |u - \mathcal{P}_a u|_\alpha = 0 \quad (3)$$

при всех $u \in X^\alpha$ и $\mathcal{K}$ — инвариантный компакт уравнения (1) в X^α . Тогда каждое из следующих утверждений равносильно конечномерности динамики на $\mathcal{K}$:

(KC) множество $\mathcal{K}^0$ точек вида $w = (u - v)/|u - v|_\alpha$ с $u, v \in \mathcal{K}$, $u \neq v$, относительно компактно в X^α ;

(GrL) для всякого $w \in \mathcal{K}$ найдутся X^α -окрестности $\mathcal{V} \supset w$ и конечномерный непрерывный в X^α (а также в $X^{\alpha-1}$, если X нерефлексивно) проектор P такие, что $|u - v|_\alpha \leq c|P(u - v)|_\alpha$ на $\mathcal{V} \cap \mathcal{K}$, $c = c(\mathcal{K}, w, P)$.

Подчеркнем, что в (GrL) ранг P может зависеть от w .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Установим логическую цепь (FD) $\rightarrow$ (KC) $\rightarrow$ (GrL) $\rightarrow$ (FD). Поскольку, как мы знаем, (FD) $\rightarrow$ (Fl), (GrF) $\rightarrow$ (Gr) $\rightarrow$ (FD), (EM) $\rightarrow$ (Fl) и, очевидно, (Gr) $\rightarrow$ (GrL), то достаточно получить импликации (Fl) $\rightarrow$ (KC) $\rightarrow$ (GrF) и (GrL) $\rightarrow$ (EM).

Покажем, что (Fl) влечет (KC). Пусть $\alpha < \theta < 1$. При $t > 0$ верна (см. [17, лемма 5.2]) оценка $|\Phi_t u - \Phi_t v|_\theta \leq c_t |u - v|_\alpha$ на $\mathcal{K}$ с $c_t = c(\mathcal{K}, \theta; t)$. Отсюда находим, пользуясь свойством (Fl) полупотока $\{\Phi_t\}$, что

$$|u - v|_\theta \leq c_1 |\Phi_{-1} u - \Phi_{-1} v|_\alpha \leq N |u - v|_\alpha, \quad N = \text{const}.$$

Итак, $|(u - v)/|u - v|_\alpha|_\theta \leq N$ на $\mathcal{K}$, множество $\mathcal{K}^0$ ограничено в X^θ и, стало быть, относительно компактно в X^α .

Установим импликацию (KC) $\rightarrow$ (GrF). Из (3) явствует, что $\|I - \mathcal{P}_a\|_\alpha \leq \text{const}^1$, следовательно (по теореме Арцела), сходимость проекторов $\mathcal{P}_a \rightarrow I$ при $a \rightarrow \infty$

¹Здесь и всюду далее $I = \text{id}$.

равномерна на относительно компактном множестве $\mathcal{K}^0 \subset X^\alpha$ и $|h - \mathcal{P}_a h|_\alpha \leq \varepsilon_a |h|_\alpha$ с $\varepsilon_a \rightarrow 0$, $h = u - v$ для $u, v \in \mathcal{K}$. Если взять $\varepsilon_a < 1$, $c = (1 - \varepsilon_a)^{-1}$, то $|h - \mathcal{P}_a h|_\alpha \leq c\varepsilon_a |\mathcal{P}_a h|_\alpha$ и $|u - v|_\alpha \leq c |\mathcal{P}_a(u - v)|_\alpha$ на $\mathcal{K}$.

Осталось показать, что $(\text{GrL}) \rightarrow (\text{EM})$. Пусть $\delta > 0$ – число Лебега [18, п. 2.13.4] открытого (будем считать конечного) покрытия компакта $\mathcal{K}$ множествами $\mathcal{U}(w) = \mathcal{V} \cap \mathcal{K}$; тогда любая пара точек $u, v \in \mathcal{K}$ с $|u - v|_\alpha < \delta$ лежит в одном из $\mathcal{U}(w)$. Действуя, как при выводе импликации $(\text{Gr}) \rightarrow (\text{EM})$ в [1, теорема 1.6], приходим к оценке $|u - v|_\alpha \leq c |u - v|_{\alpha-1}$ на X^α -замыкании каждого из множеств $\mathcal{U}(w)$ с единой константой $c > 0$. Для $u, v \in \mathcal{K}$ с $|u - v|_\alpha \geq \delta$ аналогичное соотношение также справедливо, иначе мы имели бы абсурдную ситуацию существования таких сходящихся в X^α -метрике последовательностей $\{u_l\}, \{v_l\} \subset \mathcal{K}$, что $|u_l - v_l|_\alpha \geq \delta$, но $|u_l - v_l|_{\alpha-1} \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$. Наконец, противоположное неравенство $|u - v|_\alpha \geq c' |u - v|_{\alpha-1}$ на $\mathcal{K}$ следует из непрерывности вложения $X^\alpha \subset X^{\alpha-1}$. Теорема 1.4 доказана полностью.

Теперь у нас есть расширенный логический цикл $(\text{VF}) \rightarrow (\text{Fl}) \rightarrow (\text{KC}) \rightarrow (\text{GrF}) \rightarrow (\text{Gr}) \rightarrow (\text{GrL}) \rightarrow (\text{EM}) \rightarrow (\text{VF})$ наряду с импликациями $(\text{FD}) \rightarrow (\text{Fl})$ и $(\text{Gr}) \rightarrow (\text{FD})$, где предположение (3) использовано лишь в переходе $(\text{KC}) \rightarrow (\text{GrF})$. По существу, (3) означает базисность в X^α конечномерных инвариантных подпространств оператора A , отвечающих упорядоченным по возрастанию $\text{Re } \lambda$ спектральным множествам $\{\lambda \in \sigma(A) : \text{Re } \lambda = \text{const}\}$, и заведомо выполнено, коль скоро A – спектральный [19] оператор в X , а значит, и в X^α . Когда пространство X гильбертово, в этом качестве подходят, скажем, операторы A , подобные нормальным.

Перейдем к обсуждению условия конечномерности фазовой динамики на инвариантном компакте $\mathcal{K} \subset X^\alpha$, представляющего особый интерес. Теорема 1.5 работы [1] устанавливает связь между вложимостью $\mathcal{K}$ в конечномерное (достаточно регулярное) подмногообразие $\mathcal{M} \subset X^\alpha$ и конечномерностью динамики на $\mathcal{K}$. Здесь данному утверждению будет придана форма, близкая к окончательной по порядку гладкости $\mathcal{M}$.

ТЕОРЕМА 1.5. Пусть $\mathcal{K}$ – инвариантный компакт уравнения (1) в X^α и для оператора A справедливо соотношение (3). Если $\mathcal{K} \subset \mathcal{M}$, где $\mathcal{M}$ – конечномерное C^1 -подмногообразие в X^α , то фазовая динамика на $\mathcal{K}$ конечномерна. Обратно, если динамика на $\mathcal{K}$ конечномерна, то найдется такое $a > 0$, что множество $\mathcal{K}$ принадлежит графику некоторой равномерно липшицевой функции, действующей из $\mathcal{P}_a X^\alpha$ в $(I - \mathcal{P}_a)X^\alpha$.

Эта теорема анонсирована в [20]. Отличие ее от упомянутого результата [1] состоит в понижении требуемого класса гладкости $\mathcal{M}$ с C^2 до C^1 и нюансах в ограничениях на линейный оператор A . Как видим, предельная динамика (1) конечномерна, коль скоро аттрактор $\mathcal{A}$ можно вложить в конечномерное C^1 -многообразие $\mathcal{M} \subset X^\alpha$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вторая (обратная) часть теоремы доказывается так же, как в [1]. Уточним только, что необходимая для этого импликация $(\text{FD}) \rightarrow (\text{GrF})$ верна при условии (3) на оператор A .

Далее исходим из включения $\mathcal{K} \subset \mathcal{M}$. Конечномерное C^1 -многообразие $\mathcal{M}$ в банаховом пространстве X^α локально устроено как график гладкой функции над касательным подпространством. Поэтому для каждой точки $w \in \mathcal{M}$ найдутся

непрерывный в X^α проектор P ранга $n = \dim \mathcal{M}$, постоянная $c = c(\mathcal{M}, w, P)$ и замкнутый шар $\mathcal{V} = \{u \in X^\alpha: |u - w|_\alpha \leq \varepsilon\}$ с $\varepsilon = \varepsilon(w)$ такие, что $|u - v|_\alpha \leq c|P(u - v)|_\alpha$ на $\mathcal{M}(w) = \mathcal{V} \cap \mathcal{M}$. Ясно, что $\mathcal{M}(w)$ – компактное C^1 -многообразие размерности n . Пользуясь [1, лемма 2.3], выберем непрерывный в X^α и $X^{\alpha-1}$ проектор P_0 ранга n таким образом, чтобы

$$|(P - P_0)(u - v)|_\alpha \leq (2c)^{-1}|u - v|_\alpha, \quad u, v \in \mathcal{M}(w).$$

Отсюда без труда получаем оценку $|u - v|_\alpha \leq 2c|P_0(u - v)|_\alpha$ на $\mathcal{M}(w)$. Тем самым, инвариантный компакт $\mathcal{K}$ обладает свойством (GrL), и по теореме 1.4 фазовая динамика на $\mathcal{K}$ конечномерна. Доказательство завершено.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.6. Если предельная динамика уравнения (1) конечномерна, то периоды его периодических решений ограничены снизу положительным числом.

Это есть следствие определения конечномерной динамики на аттракторе и известной оценки снизу [21] периодов периодических решений ОДУ в $\mathbb{R}^n$ через константу Липшица соответствующего векторного поля.

§ 2. Аналитический подход

Главная цель данного параграфа – нахождение конструктивных условий на коэффициенты уравнения (1) в гильбертовом пространстве X , влекущих свойство (GrL) аттрактора $\mathcal{A} \subset X^\alpha$, а значит, и конечномерность динамики на $\mathcal{A}$. Полученные условия будут затем использованы в § 3 для доказательства конечномерности предельной динамики параболических уравнений (2). Ряд необходимых для изложения вспомогательных результатов вынесен в § 4.

Там, где не указано иное, пространство X по-прежнему банахово. Введем обозначения: $\mathcal{N} = \mathcal{A} \times \mathcal{A}$; D – дифференцирование Фреше; $\mathcal{L}(X^\theta, X^\beta)$ – пространство непрерывных линейных операторов, действующих из X^θ в X^β , и $\mathcal{L}(X^\theta) = \mathcal{L}(X^\theta, X^\theta)$; $\|\cdot\|, \|\cdot\|_\alpha$ – нормы в $\mathcal{L}(X)$, $\mathcal{L}(X^\alpha)$ и $\|\cdot\|_{\alpha,0}, \|\cdot\|_{0,\alpha}$ – нормы в $\mathcal{L}(X^\alpha, X)$, $\mathcal{L}(X, X^\alpha)$. Объектом нашего внимания станут векторные (в основном операторные) поля $\Pi(u, v)$ на $\mathcal{N}$ со значениями в различных пространствах Банаха Y . Множество $\mathcal{N}$ снабдим метрикой, индуцированной из $X^\alpha \times X^\alpha$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Непрерывное поле $\Pi: \mathcal{N} \rightarrow Y$ называем *регулярным*, если для любых $u, v \in \mathcal{A}$ функция $\Pi(\Phi_t u, \Phi_t v): [0, \infty) \rightarrow Y$ – класса C^1 с равномерно по u, v ограниченной производной в нуле $\partial_t \Pi(u, v)$.

Из гладкости полупотока $\{\Phi_t\}$ и инвариантности компакта $\mathcal{A} \subset X^\alpha$ следует регулярность тождественного вложения $\mathcal{N} \rightarrow X^\alpha \times X^\alpha$, а стало быть, и регулярность всякого поля $\Pi: \mathcal{N} \rightarrow Y$, продолжимого до C^1 -отображения в $(X^\alpha \times X^\alpha)$ -окрестность множества $\mathcal{N}$. При этом

$$\partial_t \Pi(u, v) = D\Pi(u, v)(\partial_t u, \partial_t v), \quad \partial_t u = G(u) = F(u) - Au.$$

Действуем далее по плану, намеченному во введении. Для $u, v \in \mathcal{A}$ полагаем

$$T(u, v) = T_0(u, v) + \int_0^1 DF(\tau u + (1 - \tau)v) d\tau, \quad (4a)$$

$$B(u, v) = \omega I + A - T(u, v), \quad (4b)$$

где T_0 – произвольное (пока) поле операторов, ограниченное со значениями в $\mathcal{L}(X^\alpha)$ и регулярное со значениями в $\mathcal{L}(X^\alpha, X)$, а $\omega > 0$ – числовой параметр. Здесь $T = T_0 + T_1$, $T_1(u, u) = DF(u)$, и поскольку $F \in C^2(X^\alpha, X)$, то $T_1(u, v) \in \mathcal{L}(X^\alpha, X)$. Поле T_1 продолжается с $\mathcal{N}$ до C^1 -отображения $X^\alpha \times X^\alpha \rightarrow \mathcal{L}(X^\alpha, X)$, откуда вытекает регулярность поля $T: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{L}(X^\alpha, X)$. Операторы $T_0(u, v)$ в (4а) играют роль искусственной поправки, призванной “улучшить” свойства поля $B(u, v)$. Заметим, что

$$\mathcal{D}(B(u, v)) \equiv \mathcal{D}(A) = X^1, \quad B(u, v) \in \mathcal{L}(X^1, X)$$

и по интегральной теореме о среднем значении

$$G(u) - G(v) = (B_0(u, v) - B(u, v))(u - v), \quad B_0(u, v) = \omega I - T_0(u, v).$$

Пусть

$$\Sigma = \bigcup_{u, v \in \mathcal{A}} \sigma(B(u, v)), \quad \mathcal{R} = \mathbb{C} \setminus \Sigma,$$

$$\Gamma_a = \{\lambda \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} \lambda = a\}, \quad \Gamma(a, \xi) = \{\lambda \in \mathbb{C}: a - \xi \leq \operatorname{Re} \lambda \leq a + \xi\}$$

при $a > \xi > 0$. Число ω в (4б) выбирается так (см. ниже лемму 4.1), чтобы обеспечить соотношение $\operatorname{Re} \Sigma > 0$ для $\Sigma = \Sigma(\omega)$. Если $\Gamma_a \subset \mathcal{R}$, то обозначаем символом $P_a(u, v)$ непрерывный в X спектральный проектор оператора $B(u, v)$, отвечающий части спектра с $\operatorname{Re} \lambda < a$, и записываем $Q_a(u, v) = I - P_a(u, v)$. Согласно [2; § 1.4, 1.5] операторы $B(u, v)$ дискретны и секториальны в X , $\mathcal{D}(B^\alpha) = X^\alpha$, степени B^α , $B^{-\alpha}$ коммутируют с P_a , Q_a и резольвентой $R(\lambda; B)$. Проекторы $P_a(u, v)$ имеют конечный ранг $n = n(a)$ для всех $u, v \in \mathcal{A}$. Кроме того, $P_a, Q_a \in \mathcal{L}(X^\alpha)$, а формулируемые далее леммы 4.2, 4.3 гарантируют регулярность полей операторов $P_a, Q_a: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{L}(X^\alpha)$, $B^\alpha: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{L}(X^\alpha, X)$, $B^{-\alpha}: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{L}(X, X^\alpha)$. Регулярность поля P_a имеет следствием оценку

$$\|\partial_t P_a(u, v)\|_\alpha \leq m(a) \quad (5)$$

на $\mathcal{N}$ с $m(a) < \infty$. Сформулируем еще одно важное понятие.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. В случае гильбертова пространства X будем говорить, что поле $B: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{L}(X^1, X)$ *равномерно скалярного типа*, если $B(u, v) = S^{-1}(u, v)H(u, v)S(u, v)$ на $\mathcal{N}$, где линейные операторы $H(u, v)$ нормальны в X , поле $S: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{L}(X)$ регулярно, а поле $S^{-1}: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{L}(X)$ ограничено.

В данной формулировке $B(u, v)$ – операторы скалярного типа (см. [19]) при всех $u, v \in \mathcal{A}$. Для случая $T_0 = 0$, $u = v$ представление $B = S^{-1}HS$ из определения 2.2 фактически использовалось Камаевым [15], [16] в связи с изучением фазовой динамики вблизи аттрактора уравнений (скалярных или векторных) чуть более широкого класса, чем (2). В цитированных работах к линеаризации правой части уравнения применялось либо обычное преобразование Лиувилля, либо [16] некоторая его модификация.

В контексте определения 2.2 отметим неравенства

$$\|S(u, v)\| \leq \gamma, \quad \|S^{-1}(u, v)\| \leq \gamma, \quad \|\partial_t S(u, v)\| \leq \gamma_1 \quad (6)$$

на $\mathcal{N}$ с $\gamma, \gamma_1 = \text{const}$. Ясно, что $\sigma(B) = \sigma(H)$ и $P'_a = SP_aS^{-1}$, $Q'_a = SQ_aS^{-1}$ – ортогональные спектральные проекторы нормальных операторов H . Подчеркнем, что область определения $\mathcal{D}(H) = S\mathcal{D}(B) = SX^1$ зависит, вообще говоря, от u, v .

Если X – гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ и при каком-то $a > \omega$ прямая Γ_a лежит в $\mathcal{R}$, то для $u, v \in \mathcal{A}$, $h = u - v$ принимаем

$$p = S(u, v)B^\alpha(u, v)P_a(u, v)h, \quad q = S(u, v)B^\alpha(u, v)Q_a(u, v)h,$$

$$W_a(u, v) = \frac{1}{2}(|q|^2 - |p|^2).$$

Векторные поля $p(u, v), q(u, v)$ регулярны со значениями в X (как комбинации регулярных полей), а значит, регулярно и числовое поле $W_a(u, v)$. Существенным в дальнейшем оказывается следующее предположение о динамике уравнения (1):

$$\partial_t W_a(u, v) + 2(a - \omega)W_a(u, v) \leq 0 \quad (7)$$

для $u, v \in \mathcal{A}$. Поскольку $Q'_aS = SQ_a$, $Q_aB^\alpha = B^\alpha Q_a$ и $Q_a^2 = Q_a$, то

$$Q'_a q = Q'_a S B^\alpha Q_a h = S B^\alpha Q_a h = q.$$

Точно так же $P'_a p = p$, и ортогональность проекторов P'_a, Q'_a приводит к равенству $(p, q) = 0$. Соотношение (7) есть нелинейный аналог сходного по форме требования [13, теорема 5], позволяющего построить инерциальное многообразие для уравнения (1) с самосопряженной линейной частью. При $|q| \geq |p|$ и соответственно при $|q| \leq |p|$ неравенство (7) дает нелинейные обобщения хорошо известных в теории эволюционных систем “свойства сдвливания” и “условия конуса” [10, гл. 8].

Пусть L, N – зависящие лишь от A, F, T_0 постоянные из лемм 4.1, 4.3 (см. ниже) и $\|T_0(u, v)\|_\alpha \leq K$ на $\mathcal{N}$.

ТЕОРЕМА 2.3. *Допустим, что пространство X гильбертово, оператор A обладает свойством (3) и $\text{Re } \Sigma > 0$ для $\Sigma = \Sigma(\omega)$. Предположим, что:*

- а) $B: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{L}(X^1, X)$ есть поле операторов равномерно скалярного типа;
- б) множество $\mathcal{R}$ содержит полосу $\Gamma(a, \xi)$ с $a > \omega$, $\xi \geq \gamma\gamma_1 + \gamma^2 N + \gamma^2 L^2(K + m(a))$.

Тогда справедливо соотношение (7) и предельная динамика уравнения (1) конечномерна.

Заметим, что в оценке ξ лишь величина m зависит от a . Ключевым для вывода теоремы является следующее утверждение.

ЛЕММА 2.4. *Условия теоремы 2.3 влекут неравенство (7).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Опускаем в обозначениях векторных полей на $\mathcal{N}$ зависимость от $u, v \in \mathcal{A}$ и, как правило, от a . Например, $P_a(u, v) = P$, $Q_a(u, v) = Q$. Для регулярных полей операторов на $\mathcal{N}$ записываем, кратко, $\partial_t S(u, v) = S_t$ и т.д. Если $h = u - v$, то $\partial_t h = \partial_t u - \partial_t v = \omega h - T_0 h - B h$. При этом $h \in X^1$, а поскольку $\partial_t h = G(u) - G(v) \in X^\alpha$ и $T_0 h \in X^\alpha$, то $B h \in X^\alpha$. Но $X^\alpha = \mathcal{D}(B^\alpha)$, так что² $h \in \mathcal{D}(B^{1+\alpha})$ и $B^\alpha h \in X^1$.

² $h \in \mathcal{D}(B^2)$ при $T_0 \in \mathcal{L}(X^1)$, в частности при $T_0 = 0$.

Исходим из выражения $\partial_t W_a = (\partial_t q, q) - (\partial_t p, p)$ с $q = SB^\alpha Qh$, $p = SB^\alpha Ph$, $p + q = SB^\alpha h$. Преобразуем сначала величину $(\partial_t q, q)$. Положим $V = SB^\alpha Q$ и $U = B^{-\alpha} S^{-1}$; тогда $q = Vh$, $h = U(p + q)$, $\partial_t q = V_t h + V \partial_t h$ или, подробнее,

$$\partial_t q = (V_t U + \omega V U - V T_0 U - V B U)(p + q).$$

Будем пользоваться равенствами $QB^\alpha = B^\alpha Q$, $QB^{-\alpha} = B^{-\alpha} Q$, $B = S^{-1} H S$ и $Q = S^{-1} Q' S$, а также $Q' p = 0$, $Q' q = q$. Как видим, $SB^\alpha h \in SX^1 = \mathcal{D}(H)$, значит, $q = SB^\alpha Qh = Q' SB^\alpha h \in \mathcal{D}(H)$ и $p = SB^\alpha h - q \in \mathcal{D}(H)$. Легко находим, что $VU(p + q) = q$, $VB U(p + q) = Hq$, $VT_0 U = Q' U_1$ с $U_1 = SB^\alpha T_0 B^{-\alpha} S^{-1}$. Далее, $Q_t + P_t = 0$ и

$$V_t = S_t B^\alpha Q + S(B^\alpha)_t Q - SB^\alpha P_t = J_1 + J_2 - J_3.$$

Элементарные выкладки приводят к формулам: $J_1 U = V_1 Q'$, где $V_1 = S_t S^{-1}$; $J_2 U = V_2 Q'$ с $V_2 = S(B^\alpha)_t B^{-\alpha} S^{-1}$; $J_3 U = V_3$ с $V_3 = SB^\alpha P_t B^{-\alpha} S^{-1}$. Таким образом, $(J_1 U)(p + q) = V_1 q$, $(J_2 U)(p + q) = V_2 q$ и

$$(\partial_t q, q) = ((V_1 + V_2)q, q) - (V_3(p + q), q) - (U_1(p + q), q) + ((\omega I - H)q, q).$$

Мы воспользовались тем, что $(Q')^* = Q'$ в X и, следовательно, $(Q' U_1(p + q), q) = (U_1(p + q), q)$.

Действуя вполне аналогично, приходим к выводу, что

$$(\partial_t p, p) = ((V_1 + V_2)p, p) + (V_3(p + q), p) - (U_1(p + q), p) + ((\omega I - H)p, p).$$

Из неравенств (6) и неравенства (22), приведенного в приложении, явствуют оценки $\|V_1\| \leq \gamma \gamma_1$, $\|V_2\| \leq \gamma^2 N$. Кроме того, $\|V_3\| \leq \gamma^2 \|B^\alpha P_t B^{-\alpha}\|$. Очевидные тождества

$$\begin{aligned} \|B^\alpha P_t B^{-\alpha}\| &= \|A^{-\alpha} B^\alpha P_t B^{-\alpha} A^\alpha\|_\alpha, \quad \|A^{-\alpha} B^\alpha\|_\alpha = \|B^\alpha A^{-\alpha}\|, \\ \|B^{-\alpha} A^\alpha\|_\alpha &= \|A^\alpha B^{-\alpha}\| \end{aligned}$$

обеспечивают с учетом (5), (6), (18) неравенство $\|V_3\| \leq \varkappa = \gamma^2 L^2 m(a)$. Уже отмечалось, что $(p, q) = 0$, поэтому

$$|(V_3(p + q), p + q)| \leq \varkappa(|p|^2 + |q|^2).$$

Та же техника дает оценку $\|U_1\| \leq \varkappa_0 = \gamma^2 L^2 K$ и, тем самым,

$$|(U_1(p + q), p) - (U_1(p + q), q)| \leq \varkappa_0 |p + q| \cdot |p - q| = \varkappa_0(|p|^2 + |q|^2).$$

Наконец, $(Hq, q) \geq (a + \xi)|q|^2$ и $(Hp, p) \leq (a - \xi)|p|^2$, так как оператор H нормален, $q \in Q'X$, $p \in P'X$. Обозначая $\varkappa_1 = \gamma \gamma_1 + \gamma^2 N$, $\varkappa_2 = \varkappa + \varkappa_0$ и суммируя все сказанное, получаем в итоге

$$\begin{aligned} \partial_t W_a + 2(a - \omega)W_a &= (\partial_t q, q) - (\partial_t p, p) + (a - \omega)(|q|^2 - |p|^2) \\ &\leq \varkappa_1 |q|^2 + \varkappa_2(|p|^2 + |q|^2) - \xi |q|^2 + \varkappa_1 |p|^2 - \xi |p|^2 \\ &= (\varkappa_1 + \varkappa_2 - \xi)(|p|^2 + |q|^2) \leq 0, \end{aligned}$$

ибо $\xi \geq \varkappa_1 + \varkappa_2$ по предположению леммы. Доказательство завершено.

Иногда ограничение на ξ в теореме 2.3 можно упростить.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.5. Если $\alpha = 0$, $T_0 = 0$ и операторы $B(u, v)$ нормальны, то в условии б) теоремы 2.3 имеем $\xi \geq m(a)$.

Здесь постоянные γ_1, K, N равны нулю и γ, L равны 1. Подобная ситуация возникает для уравнений реакции-диффузии $u_t = \Delta u + f(x, u)$ в конечных областях $\mathbb{R}^l$, $l \geq 1$.

ЛЕММА 2.6. Пусть пространство X рефлексивно, $\mathcal{K}$ – инвариантный компакт уравнения (1) в X^α и оператор A удовлетворяет предположению (3). Если при некотором $a > 0$ прямая $\Gamma_a \subset \mathcal{K}$ и

$$|Q_a(u, v)(u - v)|_\alpha \leq c|P_a(u, v)(u - v)|_\alpha \quad (8)$$

для $u, v \in \mathcal{K}$, $c = c(\mathcal{K}, a)$, то фазовая динамика на $\mathcal{K}$ конечномерна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагаем $P_a(w) = P_a(w, w)$ при $w \in \mathcal{K} \subset \mathcal{A}$. По лемме 4.2 поле проекторов $P_a: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{L}(X^\alpha)$ непрерывно в $(X^\alpha \times X^\alpha)$ -метрике. Для каждого $w \in \mathcal{K}$ возьмем такую X^α -окрестность $\mathcal{V} \supset w$, что

$$\|P_a(w) - P_a(u, v)\|_\alpha \leq (2 + 2c)^{-1}$$

на $\mathcal{V} \cap \mathcal{K}$. Коль скоро $h = u - v$, то

$$\begin{aligned} |h|_\alpha &\leq |P_a(u, v)h|_\alpha + |Q_a(u, v)h|_\alpha \\ &\leq (1 + c)|P_a(u, v)h|_\alpha \leq \frac{1}{2}|h|_\alpha + (1 + c)|P_a(w)h|_\alpha, \end{aligned}$$

откуда $|u - v|_\alpha \leq (2 + 2c)|P_a(w)(u - v)|_\alpha$ для $u, v \in \mathcal{V} \cap \mathcal{K}$. Это означает, что компакт $\mathcal{K}$ обладает свойством (GrL) и по теореме 1.4 динамика на $\mathcal{K}$ конечномерна. Лемма доказана.

Таким образом, получен еще один (достаточный) критерий конечномерности динамики (1) на инвариантных компактах.

Осталось сделать совсем немного, чтобы завершить доказательство теоремы 2.3. Вновь опускаем кое-где в обозначениях зависимость от $u, v \in \mathcal{A}$ и $a > \omega$. Аттрактор $\mathcal{A}$ – инвариантное множество, значит, всякое решение $u(t)$ уравнения (1) с $u(0) = u_0 \in \mathcal{A}$ продолжается по t на $\mathbb{R}$ и $u(t) \in \mathcal{A}$. Пока не утверждается, что это продолжение единственно при $t < 0$. В силу тождеств $B^\alpha Q = QB^\alpha$, $SQ = Q'S$ и ограниченности $\mathcal{A}$ в X^α имеем

$$2W_a(u, v) \leq |q|^2 = |SB^\alpha Qh|^2 = |Q'SB^\alpha h|^2 \leq \gamma^2 L^2 |h|_\alpha^2 \leq \text{const}$$

для $u, v \in \mathcal{A}$ и $h = u - v$. Здесь использованы ортогональность проектора Q' в X и неравенства (6), (18). Если теперь $u_0, v_0 \in \mathcal{A}$, $\zeta(t) = W_a(u(t), v(t))$ и $\lambda = 2(a - \omega) > 0$, то из (7) вытекает, что $\zeta(0) \leq e^{\lambda t} \zeta(t)$, $t < 0$. Но $\zeta(t) \leq \text{const}$, поэтому $\zeta(0) \leq 0$, т.е. $W_a(u, v) \leq 0$ на $\mathcal{N}$ или же $|q| \leq |p|$ с $q = SB^\alpha Qh$, $p = SB^\alpha Ph$. Опять учитывая (6) и (18), находим

$$|p| \leq \gamma |B^\alpha Ph| \leq \gamma L |Ph|_\alpha.$$

С другой стороны,

$$|Qh|_\alpha = |A^\alpha Qh| = |A^\alpha B^{-\alpha} S^{-1} q| \leq \gamma L |q|.$$

Отсюда выводим оценку (8) с $c = \gamma^2 L^2$, по лемме 2.6 фазовая динамика на $\mathcal{A}$ конечномерна и теорема 2.3 доказана полностью.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.7. В гильбертовом случае соотношение (7) влечет оценку (8), а также неравенство $W_a(u, v) \leq 0$ на $\mathcal{N}$.

Вясним, как связано условие б) теоремы 2.3 с геометрией совокупного (по $u, v \in \mathcal{A}$) спектра Σ операторов $B(u, v)$. При этом будет обсуждаться ситуация, когда дополнение $\mathcal{R} = \mathbb{C} \setminus \Sigma$ содержит вертикальные полосы $\Gamma(a, \xi)$ со сколь угодно большими значениями a, ξ . Считаем, что надлежащий выбор числа $\omega > 0$ в (46) и параметров $k > 0, 0 \leq \theta \leq 1$ позволяет локализовать множество Σ в области

$$\Omega(k, \theta) = \{x + iy \in \mathbb{C} : x > 0, |y| < kx^\theta\}.$$

При $\theta = 1$ это всегда возможно согласно лемме 4.1. При $\theta < 1$ такая локализация Σ характерна для полулинейных параболических уравнений с частными производными в конечных областях $\mathbb{R}^l$.

Из условия а) теоремы 2.3 следует оценка

$$\|R(\lambda; B)\| \leq \gamma^2/r(\lambda), \quad B = B(u, v),$$

где $r(\lambda)$ – расстояние³ от точки $\lambda \in \mathcal{R}$ до Σ , а γ – постоянная в (6). Действительно, $R(\lambda; B) = S^{-1}R(\lambda; H)S$ и $\|R(\lambda; H)\| \leq 1/r(\lambda)$ в силу нормальности операторов $H = H(u, v)$. Для $u, v \in \mathcal{A}$ и $\Gamma_a \subset \mathcal{R}$ лемма 4.2 дает представление

$$\partial_t P_a(u, v) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} E(\lambda; u, v) d\lambda \quad (9)$$

с голоморфным по $\lambda \in \mathcal{R}$ ядром $E(\lambda; u, v) \in \mathcal{L}(X^\alpha)$, причем

$$\|E(\lambda; u, v)\|_\alpha \leq \frac{M}{r^2(\lambda)} (|\lambda|^\alpha + r^\alpha(\lambda)) \quad (10)$$

с $M = M(A, F, T_0)$.

Исходя из включений $\Sigma \subset \Omega(k, \theta)$ и $\mathcal{R} \supset \Gamma(a, \xi)$ при некоторых $a > \xi > \omega$, оценим величину $m(a)$ в (5) через параметры a, ξ, θ . Пусть $\chi(y)$ – такая положительная миноранта функции $r(a + iy)$ на $\mathbb{R}$, что $\chi(y) \leq |a + iy|$; тогда для $\lambda = a + iy$ правая часть (10) мажорируется выражением $2M|a + iy|^\alpha/\chi^2(y)$. Если еще $\chi(y) = \chi(-y)$, то

$$m(a) \leq \frac{2M}{\pi} \int_0^\infty \frac{|a + iy|^\alpha}{\chi^2(y)} dy. \quad (11)$$

Будем обозначать через $c, c_1, \dots$ положительные постоянные, зависящие лишь от k, θ, M . Увеличив при необходимости числа ω и k , имеем $\Sigma \subset \Omega(k, \theta) \cap \Omega(k, 1)$. Значения a, ξ предполагаем столь большими, сколь требуют нижеследующие рассуждения.

Начнем анализ правой части (11) со случая $\theta = 0$. Полагаем $\chi(y) = \xi$ на $[0, k]$, $\chi(y) = (\xi^2 + (y - k)^2)^{1/2}$ на (k, ∞) и $\chi(y) = \chi(-y)$ при $y < 0$. Понятно, что $\chi(y) \leq r(a + iy)$, $\chi(y) \leq |a + iy|$ для всех $y \in \mathbb{R}$. Пользуясь оценками $|a +$

³Нетрудно показать, что Σ замкнуто, а потому $r(\lambda) > 0$.

$|iy|^\alpha \leq a^\alpha + k^\alpha$ при $0 \leq y \leq k$, $|a + iy|^\alpha \leq a^\alpha + k^\alpha + (y - k)^\alpha$ при $y > k$ и производя интегрирование, получаем неравенство

$$m(a) \leq ca^\alpha / \xi.$$

Далее, пусть $\theta = 1$. Положим $\chi(y) = \xi$ на $[0, 2ka]$, $\chi(y) = (y - ka)/(1 + k^2)^{1/2}$ на $(2ka, \infty)$ и $\chi(y) = \chi(-y)$ при $y < 0$. При $y > 2ka$ величина $\chi(y)$ есть расстояние от точки $a + iy$ до границы сектора $\Omega(k, 1)$, поэтому $\chi(y) \leq r(a + iy)$, $\chi(y) \leq |a + iy|$ на $\mathbb{R}$. Записав

$$|a + iy|^\alpha \leq a^\alpha (1 + (2k)^\alpha)$$

при $0 \leq y \leq 2ka$,

$$|a + iy|^\alpha \leq a^\alpha + (ka)^\alpha + (y - ka)^\alpha$$

при $y > 2ka$ и интегрируя в (11), выводим оценку

$$m(a) \leq ca^{\alpha+1} / \xi^2.$$

В случае $0 < \theta < 1$ обозначим $\nu = \theta^{-1} > 1$ и $\varkappa = k^{-\nu}$. Для $x_0 > a$ и $y_0 = kx_0^\theta$ нормаль к параболе $y = kx^\theta$ в (x_0, y_0) пересекает прямую $x = a$ в точке с ординатой

$$y_1 = z(x_0) = y_0 + \nu \varkappa^2 y_0^{2\nu-1} - \nu \varkappa a y_0^{\nu-1},$$

или, что то же, $z(x_0) = kx_0^\theta + \nu k^{-1}(x_0 - a)x_0^{1-\theta}$. Таким образом, $z'(x_0) > 0$, $y_0 < y_1$. Считаем, не теряя общности, $y_0 > 1$. Если $z(a + \xi) \leq 2ka$, то найдем x_0 (а затем y_0) из условия $z(x_0) = y_1$, $y_1 = 2ka$; тогда $a(2k + cy_0^{\nu-1}) \geq c_1 y_0^{2\nu-1}$, $a \geq c_2 y_0^\nu$. Если же $z(a + \xi) > 2ka$, то принимаем $y_0 = k(a + \xi)^\theta$, $y_1 = z(a + \xi)$. Так или иначе, $1 < y_0 < y_1$, $y_0 \leq c_3 a^\theta$ и $y_1 \geq 2ka$. Простые геометрические доводы, учитывающие вогнутость функции $y = kx^\theta$, показывают, что расстояние от любой точки $\lambda = a + iy$, $y_0 \leq y \leq y_1$, до ветви параболы с $x \geq a + \xi$ превосходит величину $\rho(y) = (\xi^2 + (y - y_0)^2)^{1/2}$. Тем более это верно при $0 \leq x < a - \xi$.

Полагаем $\chi(y) = \xi$ на $[0, y_0]$, $\chi(y) = \rho(y)$ на $(y_0, y_1]$, $\chi(y) = (y - ka)/(1 + k^2)^{1/2}$ при $y > y_1$ и $\chi(y) = \chi(-y)$ при $y < 0$. Как видим, $\chi(y) \leq r(a + iy)$ при $y_0 < y \leq y_1$. На $[0, y_0]$ подобная оценка очевидна, а для $y > y_1$ установлена ранее.

С другой стороны, $\chi(y) \leq |a + iy|$ на $\mathbb{R}$. Имеем также $|a + iy|^\alpha \leq a^\alpha + y_0^\alpha$ при $0 \leq y \leq y_0$, $|a + iy|^\alpha \leq a^\alpha + y_0^\alpha + (y - y_0)^\alpha$ при $y_0 < y \leq y_1$ и $|a + iy|^\alpha \leq a^\alpha + (ka)^\alpha + (y - ka)^\alpha$ при $y > y_1$. Оценивая теперь правую часть (11), приходим к неравенству

$$m(a) \leq c_4 a^\alpha / \xi + c_5 a^{\alpha+\theta} / \xi^2.$$

Во всех трех случаях мы использовали декларируемую выше свободу выбора параметров a, ξ .

Итак, условие на ξ в теореме 2.3 при достаточно больших $a > 0$ обретает такую форму: $\xi \geq ca^{\alpha/2}$ для $0 \leq \theta \leq \alpha/2$ и $\xi \geq ca^{(\alpha+\theta)/3}$ для $\alpha/2 < \theta \leq 1$, где $c = c(A, F, T_0)$. Пороговое значение $\theta = \alpha/2$ возникает из равенства $(\alpha + \theta)/3 = \alpha/2$.

Получаем, тем самым, важное следствие теоремы 2.3.

ТЕОРЕМА 2.8. Пусть пространство X гильбертово, оператор A обладает свойством (3) и выполнено предположение а) теоремы 2.3. Допустим еще, что множество $\mathcal{R}$ содержит полосы $\Gamma(a_n, \xi_n)$ с $a_n, \xi_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ и $\Sigma \subset \Omega(k, \theta) \cap \Omega(k, 1)$ для некоторых $k > 0$, $\theta \in [0, 1]$. Возьмем $\beta = \alpha/2$ при $0 \leq \theta \leq \alpha/2$ и $\beta = (\alpha + \theta)/3$ для $\alpha/2 < \theta \leq 1$.

Тогда если $a_n^\beta = o(\xi_n)$ при $n \rightarrow \infty$, то динамика уравнения (1) на аттракторе конечномерна и справедливо соотношение (7) с подходящим $a > 0$.

Отметим, что $\beta \leq (\alpha + 1)/3 < 2/3$. Кроме того, $\theta = 0$, коль скоро $\Sigma \subset \mathbb{R}$.

Если A – самосопряженный положительный оператор в гильбертовом пространстве X , то нетрудно установить (варьируя параметр ω) включение $\Sigma \subset \Omega(k, \alpha)$ с надлежащим $k > 0$, так что в теореме 2.8 имеем $a_n^{2\alpha/3} = o(\xi_n)$ при $n \rightarrow \infty$. Известное же условие спектрального скачка (см. [12], [10], [13]), гарантирующее существование инерциального многообразия уравнения (1), дает здесь в сопоставимых терминах более жесткое (для значений $\alpha > 0$) ограничение $a_n^\alpha = o(\xi_n)$ при $n \rightarrow \infty$. Таким образом, в классе эволюционных систем (1) конечномерность предельной динамики выглядит свойством более общего порядка, чем наличие инерциального многообразия.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.9. Предположение а) теоремы 2.3 относительно поля операторов $B(u, v)$ можно ослабить, заменив требование $\mathcal{L}(X^\alpha)$ -ограниченности корректирующего поля T_0 в (4а) на $\mathcal{L}(X^\alpha, X^{\alpha-\varepsilon})$ -ограниченность с достаточно малым $\varepsilon > 0$. Соответствующая версия теоремы 2.8 должна привести к новым приложениям развитой здесь и в [1] теории.

§ 3. Уравнение в частных производных

Покажем, что полученные результаты позволяют установить конечномерность предельной динамики уравнений (2). Дифференциальный оператор $\partial_{xx}h = h_{xx}$ в $L^2(0, 1)$ рассматриваем либо с краевыми условиями Штурма

$$h(0) \cos \mu_0 + h_x(0) \sin \mu_0 = 0, \quad h(1) \cos \mu_1 + h_x(1) \sin \mu_1 = 0 \quad (12a)$$

при $\mu_0, \mu_1 \in (-\pi/2, \pi/2]$, либо с периодическими условиями

$$h(0) = h(1), \quad h_x(0) = h_x(1). \quad (12b)$$

Необходимые для дальнейшего изложения сведения о пространствах дифференцируемых функций можно найти в [22]–[24].

Пусть $\mathcal{I} = [0, 1]$ в случае (12а) и $\mathcal{I}$ – окружность длины 1 в случае (12б). Обозначаем через $\mathcal{H}^s = \mathcal{H}^s(\mathcal{I})$ обобщенные L^2 -пространства Соболева с произвольными $s \geq 0$. Заметим, что при $s > 1/2$ пространство $\mathcal{H}^s$ суть банахова алгебра [22, п. 2.8.3]. Оператор $u \rightarrow u_x$ непрерывен из $\mathcal{H}^{s+1}$ в $\mathcal{H}^s$. Используя теоремы вложения, нетрудно заключить, что для целых s , $\nu \geq 1$ и гладкой функции $g: \mathcal{I} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ отображение $u \rightarrow g(x, u, u_x)$ принадлежит классу $BC^\nu(\mathcal{H}^{s+1}, \mathcal{H}^s)$ при $g \in C^{s+\nu}$ и классу⁴ $BC(\mathcal{H}^{s+1}, \mathcal{H}^s)$ при $g \in C^s$.

Требования к функции $f(x, u, p): \mathcal{I} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ в (2) выглядит так.

⁴Классы отображений BC^ν , BC определены в § 1.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 3.1. *Функция f принадлежит C^3 . Если в случае (12а) $\mu_j = 0$ для $j = 0$ или $j = 1$, то $f(j, 0, p) = 0$ для всех $p \in \mathbb{R}$.*

Сведем уравнение (2) к виду (1) с $X = L^2(\mathcal{J})$. Линейный оператор ∂_{xx} самосопряжен в X . При надлежащем выборе числа $\varkappa \geq 0$ оператор $A = \varkappa I - \partial_{xx}$ положительно определен [25, гл. 1] и дискретен, удовлетворяет, тем самым, гипотезе (Н1) и порождает гильбертову полушкалу $\{X^\alpha\}_{\alpha \geq 0}$. Как известно [23, гл. 5], X^α – замкнутые подпространства (с эквивалентной нормой) в $\mathcal{H}^{2\alpha}$, причем $X^\alpha = \mathcal{H}^{2\alpha}$ в случае (12б). Последнее верно и в ситуации (12а) для $\alpha \leq 1/4$ (для $\alpha \leq 3/4$, когда $\mu_0, \mu_1 \neq 0$). При $\alpha > 3/4$ имеют место непрерывные вложения $X^\alpha \subset C^1(\mathcal{J})$, $X^{\alpha+1/2} \subset C^2(\mathcal{J})$. Непрерывно, конечно, и вложение $C(\mathcal{J}) \subset X$. Отсюда, в частности, делаем вывод, что $F \in BC^3(X^\alpha, X)$ для отображения $F: u \rightarrow \varkappa u + f(x, u, u_x)$. Если при каком-то $\alpha \in (3/4, 1)$ уравнение (2) диссипативно в X^α , то для его абстрактной формы $\partial_t u = -Au + F(u)$ справедливы основные гипотезы (Н1)–(Н3), а стало быть, и все конструкции § 1, 2. При этом фактически избыточное по сравнению с (Н2) предположение 3.1 о нелинейной части (2) влечет дополнительные качества фазовой динамики. Пусть $\mathcal{A}$ – аттрактор и $\{\Phi_t\}$ – диссипативный полупоток (2) в X^α , $\mathcal{N} = \mathcal{A} \times \mathcal{A}$, Y – пространство Банаха.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. В предположениях 3.1 и (Н3) с $\alpha \in (3/4, 1)$ уравнение (2) обладает следующими свойствами:

а) аттрактор $\mathcal{A}$ ограничен в $X^{3/2}$ или в X^2 при условиях (12а) или (12б) соответственно;

б) регулярно всякое непрерывное в $(X^\alpha \times X^\alpha)$ -метрике поле $\Pi: \mathcal{N} \rightarrow Y$, продолжимое до C^1 -отображения $X^1 \times X^1 \rightarrow Y$.

В самом деле, принимая во внимание связь между X^s и $\mathcal{H}^{2s}$, находим из 3.1, что $F \in BC^2(X^1, X^{1/2})$, а в случае (12б), сверх того, $F \in BC^1(X^{3/2}, X^1)$. Замечания 1.2, 1.3 позволяют теперь установить компактность $\mathcal{A}$ в X^1 и гладкость отображения $(t, u) \rightarrow \Phi_t u: (0, \infty) \times X^1 \rightarrow X^1$, что обеспечивает регулярность (см. определение 2.1) тождественного вложения $\mathcal{N} \rightarrow X^1 \times X^1$, а значит, и свойство б). Наконец, утверждения а) следуют из указанных замечаний непосредственно.

Различные признаки X^α -диссипативности (2) можно получать на основе известных априорных оценок [26], [9], [27] решений таких уравнений с помощью абстрактных функционально-аналитических методов [2], [9], [28]. Например, рассмотренные в [9, гл. 1, § 7] ограничения $f(x, u, 0) \operatorname{sign} u \rightarrow -\infty$ при $|u| \rightarrow \infty$ равномерно по $x \in \mathcal{J}$,

$$|f| + |f_x| + |f_u| \leq M(u)(1 + p^2), \quad |f_p| \leq M(u)(1 + |p|),$$

на удовлетворяющую предположению 3.1 функцию $f(x, u, p)$ гарантируют X^α -диссипативность (при $3/4 < \alpha < 1$) задач (2), (12а) с $\mu_0 = \mu_1 = 0$ и периодической задачи (2), (12б). Действительно, при каждом $u_0 \in X^\alpha \subset C^1(\mathcal{J})$ уравнение (2) имеет локальное решение $u(t) \in C([0, t^*), X^\alpha)$, $u(t) \in X^1$ на $(0, t^*)$. Если же $u_0 \in X^1$, то в силу замечания 1.2 $u(t) \in C([0, t^*), X^1)$. В любом случае $u(t) \in X^{3/2}$ для $t \in (0, t^*)$, т.е. $u(t)$ принадлежит классу Гёльдера $C^{2+\delta}(\mathcal{J})$ с некоторым $0 < \delta < 1$, и применимы теоремы 1.7.2, 2.5.1 из [9]. Хотя цитированные утверждения подразумевают граничное условие Дирихле, все необходимые для их

вывода рассуждения проходят и в периодической ситуации. Так или иначе, для уравнений (2) устанавливается глобальное по $t > 0$ существование решений

$$u(t) = \Phi_t u_0 \in X^\alpha \cap C^{2+\delta}(\mathcal{J}), \quad u_0 \in X^\alpha,$$

а также равномерная $(C(\mathcal{J}), C(\mathcal{J}))$ -ограниченность по $t \geq 0$ фазового полупотока $\{\Phi_t\}$ в X^α и наличие инвариантного компакта $\mathcal{A} \subset X^\alpha$, являющегося $(C(\mathcal{J}), C^{2+\delta}(\mathcal{J}))$ -аттрактором. Здесь сохранена удобная терминология [9]. Далее, вложения $X^\alpha \subset C(\mathcal{J})$ и $C^{2+\delta}(\mathcal{J}) \subset \mathcal{H}^2$ непрерывны, значит, $\mathcal{A}$ есть (X^α, X^1) -аттрактор ($\mathcal{A}$ равномерно притягивает шары $\mathcal{B} \subset X^\alpha$ при $t \rightarrow +\infty$ по норме X^1), откуда с запасом следует диссипативность (2) в X^α .

Поясним, почему для задач (2), (12) не удается построить инерциальное многообразие. Если занумеровать собственные числа λ_n оператора A по возрастанию и положить $a_n = (\lambda_{n+1} + \lambda_n)/2$, $\xi_n = (\lambda_{n+1} - \lambda_n)/2$ для $n \geq 1$, то [25] $a_n \sim cn^2$ и $\xi_n \sim cn$ при $n \rightarrow \infty$, $c = \text{const}$. Условие спектрального скачка $a_n^\alpha = o(\xi_n)$, обеспечивающее “асимптотическую конечномерность” фазовой динамики, подразумевало бы тут неравенство $\alpha < 1/2$, принципиально невозможное даже в самых жестких ограничениях на зависящую от u_x нелинейность f .

Между тем, предельная динамика уравнения (2) конечномерна.

ТЕОРЕМА 3.3. *Допустим, функция $f: \mathcal{J} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет предположению 3.1 и $\alpha \in (3/4, 1)$. Тогда если уравнение (2) с каким-то из краевых условий (12) диссипативно в X^α , то его фазовая динамика на аттракторе конечномерна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО сводится к проверке требований теоремы 2.8. Соотношение (3), разумеется, выполнено для положительно определенного оператора A . Если $u, h \in X^\alpha$, то

$$DF(u)h = \varkappa h + f_u(x, u, u_x)h + f_p(x, u, u_x)h_x.$$

Полагаем

$$b(x; u, v) = \int_0^1 f_p(x, w, w_x) d\tau, \quad b_0(x; u, v) = \int_0^1 f_u(x, w, w_x) d\tau \quad (13)$$

при $u, v \in X^\alpha$, $w = \tau u + (1-\tau)v$. Данные выражения удобно трактовать как интегралы Бохнера со значениями в тех или иных функциональных пространствах, что позволяет применять к их анализу соответствующую технику [29, гл. 3]. Так как $f \in C^3$, то $f_p, f_u \in C^2$ и отображения $\Pi_1: u \rightarrow f_p(x, u, u_x)$, $\Pi_2: u \rightarrow f_u(x, u, u_x)$ принадлежат классу $BC(\mathcal{H}^3, \mathcal{H}^2)$. Согласно замечанию 3.2, а) выпуклая оболочка $\mathcal{A}^c$ аттрактора $\mathcal{A}$ ограничена в $X^{3/2} \subset \mathcal{H}^3$, следовательно, множества $\Pi_1 \mathcal{A}^c$, $\Pi_2 \mathcal{A}^c$ ограничены в $\mathcal{H}^2$. Это влечет равномерную по $(u, v) \in \mathcal{N}$ ограниченность функций b , b_0 (а также b^2) в нормах банаховых алгебр $\mathcal{H}^2$ и $C^1(\mathcal{J})$. В случае (12б), исходя из X^2 -ограниченности $\mathcal{A}$, получаем таким же образом равномерную $\mathcal{H}^3$ -ограниченность указанных функций.

Запишем, следуя формату (4),

$$T(u, v)h = T_0(u, v)h + \varkappa h + b_0(x; u, v)h + b(x; u, v)h_x, \quad (14a)$$

$$B(u, v) = (\omega + \varkappa)I - \partial_{xx} - T(u, v) \quad (14б)$$

для $u, v \in \mathcal{A}$. Напомним, что поле операторов T_0 на $\mathcal{N}$ должно быть ограничено со значениями в $\mathcal{L}(X^\alpha)$ и регулярно со значениями в $\mathcal{L}(X^\alpha, X)$. Возьмем сперва $T_0 = 0$ и выберем число $\omega > 0$ с помощью леммы 4.1. Обозначим через $S(u, v)$ непрерывный в $X = L^2(\mathcal{I})$ оператор умножения на положительную функцию $\psi(x; u, v) \in C^2[0, 1]$ такую, что $(\ln \psi)_x = b/2$ и $\psi|_{x=0} = 1$. В периодическом случае, вообще говоря, $\psi|_{x=1} \neq 1$ и $\psi \notin C(\mathcal{I})$. Преобразование $\eta = S(u, v)h$ для $h \in X^1$ дает возможность представить операторы $B = B(u, v)$ в виде $B = S^{-1}HS$, где $H = H(u, v)$,

$$H(u, v)\eta = \omega\eta - \eta_{xx} - q(x; u, v)\eta \quad (15)$$

и $q = b_0 - b^2/4 - b_x/2$. Функции $q \in \mathcal{H}^1 \subset C(\mathcal{I})$ равномерно по $u, v \in \mathcal{A}$ ограничены в норме $\mathcal{H}^1$. Для операторов H область определения $\mathcal{D}(H)$ совпадает с $S\mathcal{D}(B)$, где $\mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(A) = X^1$, т.е. при переходе от B к H краевые условия могут измениться. Тем не менее, тип (12а) в целом сохраняется и операторы $H(u, v)$ оказываются самосопряженными в X . Условия же (12б) трансформируются в $\eta(1) = \rho\eta(0)$, $\eta_x(1) = \rho\eta_x(0)$ с $\rho = \psi|_{x=1}$ (ибо функции f_p, b периодичны по x), и тут $H(u, v)$ при $\rho \neq 1$ не являются даже нормальными. В обоих случаях⁵ $\|S\| = |\psi|_C$, регулярность поля операторов $S: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{L}(X)$ будет следовать из регулярности поля функций $\psi(\cdot; u, v): \mathcal{N} \rightarrow C[0, 1]$, а последняя, в свою очередь, из регулярности поля функций $b(\cdot; u, v): \mathcal{N} \rightarrow C(\mathcal{I})$. Пользуясь C^1 -гладкостью нелинейного оператора $(u, v) \rightarrow f_p(x, w, w_x): X^\alpha \times X^\alpha \rightarrow C(\mathcal{I})$ с $w = \tau u + (1-\tau)v$, $\tau \in [0, 1]$ и дифференцируя под знаком интеграла в (13) по параметру $(u, v) \in X^\alpha \times X^\alpha$, заключаем, что отображение $\Pi: (u, v) \rightarrow b(\cdot; u, v)$ принадлежит классу $C^1(X^\alpha \times X^\alpha, C(\mathcal{I}))$, а значит, его сужение на $\mathcal{N}$ регулярно. Точно так же доказывается регулярность поля функций $b_0: \mathcal{N} \rightarrow C(\mathcal{I})$ в (13), а регулярность поля $b^2: \mathcal{N} \rightarrow C(\mathcal{I})$ явствует из регулярности b и мультипликативной структуры $C(\mathcal{I})$.

Итак, в случае Штурма (12а) операторы $H(u, v)$ самосопряжены, поле S регулярно и $\|S^{-1}\| = |\psi^{-1}|_C \leq \text{const}$ на $\mathcal{N}$, следовательно, $B: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{L}(X^1, X)$ есть поле операторов равномерно скалярного типа в смысле определения 2.2. Так как совокупный спектр $\Sigma = \Sigma(B) \subset \mathbb{R}^+$, то условие $\Sigma \subset \Omega(k, \theta) \cap \Omega(k, 1)$ теоремы 2.8 выполняется тривиально с $\theta = 0$ и любым $k > 0$.

Установим необходимую разреженность Σ . Пользуясь асимптотикой [25, гл. 1] собственных чисел операторов вида (15), обнаруживаем, что в терминах теоремы 2.8 здесь можно взять $a_n = \pi^2 n^2 + cn$, $\xi_n = \pi^2 n + c_1$ с $n \geq n_0$, где величины c, c_1, n_0 зависят от μ_0, μ_1 и общей мажоранты $\mathcal{H}^1$ -норм функций $q(\cdot; u, v)$. В этих же терминах $\beta = \alpha/2 < 1/2$, $a_n^\beta = o(\xi_n)$ при $n \rightarrow \infty$ и для задач (2), (12а) теорема 3.3 доказана.

Обратимся к периодическому случаю (12б). Положим теперь $T_0(u, v)h = -q(x; u, v)h$ в равенстве (14а). Соответственно изменится поле операторов $B(u, v)$ в (14б). В данной ситуации пространство $X^\alpha = \mathcal{H}^{2\alpha}$ – банахова алгебра и, как уже говорилось, функции b, b_0, b^2 равномерно по $(u, v) \in \mathcal{N}$ ограничены в норме $\mathcal{H}^3$, а потому $|q(\cdot; u, v)|_1 \leq \text{const}$. Тем более, $|q(\cdot; u, v)|_\alpha \leq \text{const}$, так что мультипликаторы $T_0(u, v)$ принадлежат $\mathcal{L}(X^\alpha)$ и $\|T_0(u, v)\|_\alpha \leq \text{const}$ для $u, v \in \mathcal{A}$. Из (14б), (15) следует представление $B = S^{-1}H_0S$, в котором $S(u, v)$ – операторы, определенные выше, а $H_0 = H_0(u, v) = \omega I - \partial_{xx}$ с краевыми условиями

⁵ $|\cdot|_C$ – норма в $C[0, 1]$.

$h(1) = \rho h(0)$, $h_x(1) = \rho h_x(0)$ и $\rho = \rho(u, v) = \psi(x; u, v)|_{x=1} > 0$. При этом собственные числа λ и собственные функции $\chi(x)$ оператора $(-\partial_{xx})$ легко вычисляются:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= -\ln^2 \rho, & \lambda_{n,1} &= (2\pi n - i \ln \rho)^2, & \lambda_{n,2} &= (2\pi n + i \ln \rho)^2, \\ \chi_0 &= \rho^x, & \chi_{n,1} &= \rho^x e^{2\pi n i x}, & \chi_{n,2} &= \rho^x e^{-2\pi n i x} \end{aligned} \quad (16)$$

для $n \geq 1$. Система функций $\{\chi_0, \chi_{n,1}, \chi_{n,2}\}$ полна и ортогональна в $L^2(\mathcal{J})$ с весом ρ^{-2x} , значит, $H_0 = S_0^{-1} H_1 S_0$, где операторы $H_1 = H_1(u, v)$ нормальны в X , $\mathcal{D}(H_1) = \mathcal{D}(A) = X^1$, $S_0(u, v)h = \rho^{-x}h$ для $h \in X$. Как видим, $B = S_1^{-1} H_1 S_1$ с $S_1 = S_0 S$, причем $\|S_1^{-1}\| \leq \|S^{-1}\| \cdot \|S_0^{-1}\| \leq \text{const}$ на $\mathcal{N}$.

В контексте требований теоремы 2.8 и определения 2.2 нам нужна регулярность полей операторов $S_1: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{L}(X)$, $T_0: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{L}(X^\alpha, X)$. Доказанная выше регулярность полей ψ, S влечет то же свойство для полей $S_0, S_1: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{L}(X)$. Вложение $X^\alpha \subset C(\mathcal{J})$ непрерывно, так что $\|T_0\|_{\alpha,0} \leq c|q|$ (тут $|\cdot|$ – норма в X , постоянная c не зависит от q) и поле T_0 регулярно, коли таковым является поле функций $q: \mathcal{N} \rightarrow X$, $q = b_0 - b^2/4 - b_x/2$. Поля функций b_0, b^2 на $\mathcal{N}$ регулярны со значениями в $C(\mathcal{J})$ и, тем более, со значениями в X .

Пусть $\Pi_\tau(u, v) = (f_p(x, w, w_x))_x$ с $w = \tau u + (1 - \tau)v$, $\tau \in [0, 1]$ и произвольными $u = u(x)$, $v = v(x) \in X^1$, а $\Pi(u, v)$ – результат интегрирования $\Pi_\tau(u, v)$ по τ . Ясно, что $\Pi(u, v) = (b(x; u, v))_x$ для $u, v \in \mathcal{A} \subset X^1$, поэтому в силу замечания 3.2, б) регулярность поля функций $b_x: \mathcal{N} \rightarrow X$ будет следствием включений $\Pi|_{\mathcal{N}} \in C(\mathcal{N}, X)$, $\Pi \in C^1(X^1 \times X^1, X)$. Поскольку $f \in C^3$ и $f_p \in C^2$, то отображение $u \rightarrow f_p(x, u, u_x)$ принадлежит классу $BC^1(X^1, X^{1/2})$, стало быть, $\Pi_\tau \in C^1(X^1 \times X^1, X)$. Дифференцируя интегральное выражение для Π по параметру $(u, v) \in X^1 \times X^1$, находим, что $\Pi \in C^1(X^1 \times X^1, X)$. Далее, операторы $u \rightarrow g(x, u, u_x)$, $g = f_{px}$, f_{pu} , f_{pp} , действуют непрерывно из X^α в $C(\mathcal{J})$ и $(f_p(x, u, u_x))_x = f_{px} + f_{pu}u_x + f_{pp}u_{xx}$ для $u \in \mathcal{A}^c \subset X^1$. По лемме 1.1 функция $u \rightarrow Au: \mathcal{A} \rightarrow X$, $Au = \varkappa u - u_{xx}$, непрерывна в X^α -метрике. Последнее верно и для отображений $u \rightarrow u_{xx}$, $u \rightarrow u_x$ множества $\mathcal{A}^c$ в X . Таким образом, $\Pi_\tau, \Pi|_{\mathcal{N}} \in C(\mathcal{N}, X)$, поля b_x, q, T_0 регулярны и $B(u, v)$ – поле операторов равномерно скалярного типа на $\mathcal{N}$.

Остается уточнить значение ω в (14б) и найти достаточно широкие лакуны во множестве $\Sigma = \Sigma(B) \subset \mathbb{C} = \{x + iy\}$. Пусть $\omega > \ln^2 \rho(u, v) + 1$ на $\mathcal{N}$; тогда из (16) следует, что $\Sigma \subset \Omega(k, \theta)$, $\theta = 1/2$, $k = 2(\omega - 1)^{1/2}$. Фактически же Σ принадлежит области $|y| \leq k(x - 1)^\theta$, а значит, $\Sigma \subset \Omega(k_1, 1)$ с $k_1 = k_1(\omega) > 0$. При этом в формате теоремы 2.8 естественно взять $a_n = 4\pi^2(n^2 + n + 1/2)$, $\xi_n = 2\pi^2(n + 1/2)$ для $n > \omega/2\pi^2$. Кроме того, $\theta > \alpha/2$ и $\beta = (\alpha + \theta)/3 < 1/2$, ибо $\alpha < 1$, а потому $a_n^\beta = o(\xi_n)$ при $n \rightarrow \infty$. Как результат получаем конечномерность предельной фазовой динамики для задачи (2), (12б). Теорема 3.3 доказана полностью.

Отметим, что теорема 2.8 обеспечивает еще свойство (7) динамики (2) на аттракторе $\mathcal{A}$, причем структура числовой формы W_a и значение параметра a в (7) зависят от выбора T_0, ω в (14).

Конечномерной предельной динамикой обладает, например, уравнение реакции–диффузии с нелинейной конвекцией

$$u_t = u_{xx} + (g(x, u))_x + g_0(x, u), \quad x \in (0, 1),$$

при стандартных условиях в $x = 0, 1$. Ограничения на гладкие функции g, g_0 диктуются предположением 3.1 и требованием диссипативности данного уравнения в X^α с $\alpha \in (3/4, 1)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. Теорема 3.3 обобщается на одномерные системы

$$u_t^j = (d(x)u_x^j)_x + f_j(x, u, u_x), \quad 1 \leq j \leq l,$$

с $u = (u^1, u^2, \dots, u^l)$, граничным условием Дирихле и гладким на $[0, 1]$ коэффициентом $d(x) > 0$, если использовать в доказательстве упоминавшийся уже аналог преобразования Лиувилля [16].

По-видимому, конечномерность предельной динамики может быть доказана также для полулинейных параболических уравнений на $(0, 1)$ порядка выше двух при не слишком патологических граничных условиях и подходящих ограничениях на нелинейную часть. Это предполагает, однако, определенную модификацию построений § 2 (см. замечание 2.9) и настоящего параграфа.

§ 4. Приложение

Здесь собраны технического рода утверждения, связанные со свойствами производной векторного поля $F(u) - Au$ уравнения (1) в банаховом пространстве X . Как и ранее, исходим из основных гипотез (Н1)–(Н3). Записываем $\lambda = x + iy$ для $\lambda \in \mathbb{C}$. Напоминаем, что $\mathcal{A}$ – аттрактор (1) в X^α , $\mathcal{N} = \mathcal{A} \times \mathcal{A}$, спектр $\sigma(A)$ принадлежит сектору $\Omega = \{\lambda: |y| < kx\}$ с $k > 0$ и $\|R(\lambda; A)\| \leq M/(1 + |\lambda|)$ в $\Omega_1 = \mathbb{C} \setminus \Omega$ для резольвенты $R(\lambda; A) = (A - \lambda I)^{-1}$. Обозначения пространств и норм линейных операторов соответствуют обозначением, принятым в § 2. Поля операторов T, B на $\mathcal{N}$ задаются равенствами (4а), (4б) с $\omega \geq \omega_0$, где ω_0 – постоянная из нижеследующей леммы, причем поле $T: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{L}(X^\alpha, X)$ регулярно в смысле определения 2.1.

ЛЕММА 4.1. Для $\omega \geq \omega_0 > 0$ и $B = B(u, v)$ с $u, v \in \mathcal{A}$ спектр $\sigma(B) \subset \Omega$,

$$\|R(\lambda; B)\| \leq \frac{M_1}{1 + |\lambda|} \quad (17)$$

при $\lambda \in \Omega_1$ и

$$\|A^\alpha B^{-\alpha}\| \leq L, \quad \|B^\alpha A^{-\alpha}\| \leq L. \quad (18)$$

Константы M_1, L зависят лишь от A . Постоянная ω_0 зависит от A, F, T_0 , где T_0 – поле операторов в (4а).

Будем использовать неравенство моментов [2, теорема 1.4.4]

$$\|A^\alpha V\| \leq \Theta \|AV\|^\alpha \|V\|^{1-\alpha} \quad (19)$$

для секториального оператора A с $V, AV \in \mathcal{L}(X)$ и $\Theta = \Theta(k, M)$. Всюду дальше $c, c_1, \dots$ – константы, зависящие только от A, F, T_0 . Условимся отождествлять зависимость тех или иных величин от оператора A и от его параметров (k, M) , хотя последние и выбираются по A неоднозначно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Регулярность поля операторов $T = T(u, v)$ влечет соотношение $\|TA^{-\alpha}\| \leq c$ на $\mathcal{N}$. Пусть $R = R(\lambda; A)$ для $\lambda \in \Omega_1$; тогда (формально) $R(\lambda; A - T) = R(I - TR)^{-1}$ и $\lambda \notin \sigma(A - T)$, если $\|TR\| < 1$. Ясно, что

$$\|TR\| = \|TA^{-\alpha}A^{\alpha}R\| \leq c\|A^{\alpha}R\|.$$

Так как $AR = I + \lambda R \in \mathcal{L}(X)$, то (19) обеспечивает неравенство

$$\|A^{\alpha}R\| \leq \Theta\|AR\|^{\alpha}\|R\|^{1-\alpha}.$$

Отсюда явствует, что

$$\|TR\| \leq c\Theta(\|R\|^{1-\alpha} + |\lambda|^{\alpha}\|R\|).$$

Используя оценку на $R(\lambda; A)$, получаем

$$\|TR\| \leq c_1(1 + |\lambda|)^{\alpha-1}, \quad c_1 = c\Theta(M^{1-\alpha} + M).$$

Таким образом, $\|TR\| \leq 1/2$ при $|\lambda|^{1-\alpha} \geq 2c_1$ и геометрические соображения показывают, что для всех $u, v \in \mathcal{A}$ спектр $\sigma(A - T(u, v))$ лежит в секторе $|y| < k(x + \omega_0)$ с $\omega_0 = \rho\kappa$, $\rho^{1-\alpha} = 2c_1$, $\kappa = (1 + k^{-2})^{1/2}$, где $\omega_0 = \omega_0(k, M, T)$, т.е. фактически ω_0 зависит от A, F, T_0 . Вне указанного сектора $\|TR\| \leq 1/2$ и $\|(I - TR)^{-1}\| \leq (1 - \|TR\|)^{-1} \leq 2$, а потому

$$\|R(\lambda; A - T)\| \leq 2\|R(\lambda; A)\| \leq 2M/(1 + |\lambda|).$$

Если теперь $\omega \geq \omega_0$ в (46), то $\sigma(B(u, v)) \subset \Omega$ и $\|R(\lambda; B)\| \leq 2M/(1 + |\lambda - \omega|)$ на Ω_1 . Решив простую задачу на экстремум, находим

$$|\lambda| \leq \kappa|\lambda - \omega|, \quad \|R(\lambda; B)\| \leq M_1(1 + |\lambda|)$$

с $M_1 = 2\kappa M$ при $\lambda \in \Omega_1$. Ограниченность в X операторов $A^{\alpha}B^{-\alpha}$, $B^{\alpha}A^{-\alpha}$ вытекает из [2, теорема 1.4.6]. Внимательный анализ соответствующих выкладок [2] показывает, что нормы данных операторов оцениваются через величины k, M , $M_1 = M_1(k, M)$. Это завершает доказательство леммы.

Напомним еще, что $r(\lambda)$ – расстояние от $\lambda \in \mathbb{C}$ до совокупного спектра $\Sigma = \Sigma(B)$, $\mathcal{R} = \mathbb{C} \setminus \Sigma$ и Γ_a – прямая $x = a$ в $\mathbb{C}$. Как только что установлено, $\Sigma \subset \Omega$, $\mathcal{R} \supset \Omega_1$. Проекторы P_a определены в § 2.

ЛЕММА 4.2. Если $\Gamma_a \subset \mathcal{R}$ при некотором $a > 0$ и

$$\|R(\lambda; B)\| \leq \frac{c}{r(\lambda)} \quad \text{на } \mathcal{R} \tag{20}$$

для $B = B(u, v)$, $u, v \in \mathcal{A}$, то поле проекторов $P_a: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{L}(X^{\alpha})$ регулярно, а для $\partial_t P_a(u, v)$ справедливо интегральное представление (9) с голоморфным по $\lambda \in \mathcal{R}$ и удовлетворяющим оценке (10) ядром $E(\lambda; u, v) \in \mathcal{L}(X^{\alpha})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем в $\mathbb{C}$ треугольный положительно ориентированный контур $\Gamma \subset \mathcal{R}$ с вершинами $(0, 0)$, $(a, -ka)$ и (a, ka) , где k – параметр секториального оператора A . Пусть $(u, v) \in \mathcal{N}$, $T = T(u, v)$, $R = R(\lambda; B) = R(\lambda; u, v)$ для $\lambda \in \mathcal{R}$. Исходим из формулы Рисса

$$P_a(u, v) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R(\lambda; u, v) d\lambda. \quad (21)$$

Поскольку $BR = I + \lambda R$, то $BR \in \mathcal{L}(X)$, $B^\alpha R \in \mathcal{L}(X)$ и $R \in \mathcal{L}(X, X^\alpha)$. С учетом (18) имеем

$$\|R\|_{0,\alpha} = \|A^\alpha R\| = \|A^\alpha B^{-\alpha} B^\alpha R\| \leq L \|B^\alpha R\|.$$

Положив $V = R$ в неравенстве (19) и заменив A на секториальный оператор B , выводим оценку

$$\|B^\alpha R\| \leq \Theta(\|R\|^{1-\alpha} + |\lambda|^\alpha \|R\|),$$

причем по лемме 4.1 $\Theta = \Theta(k, M_1) = \Theta(A)$.

Как видим из (20),

$$\|R\|_{0,\alpha} \leq c_1(\|R\|^{1-\alpha} + |\lambda|^\alpha \|R\|) \leq K(\Lambda)$$

на $\Lambda \times \mathcal{N}$ для произвольного замкнутого множества $\Lambda \subset \mathcal{R}$. Регулярность поля $T: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{L}(X^\alpha, X)$ в сочетании со вторым резольвентным тождеством [24, п. 3.2.1] позволяют установить при каждом $\lambda \in \Lambda$ регулярность поля операторов $R: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{L}(X, X^\alpha)$ наряду с соотношением $\partial_t R = R \partial_t T R$ и неравенством

$$\|\partial_t R\|_{0,\alpha} \leq c_2(\|R\|^{1-\alpha} + |\lambda|^\alpha \|R\|)^2 \leq K_1(\Lambda).$$

Отметим, что для $\Lambda = (-\infty, 0]$ доводы текущего абзаца верны и без условия (20), если использовать вместо него оценку (17).

Итак, $\|R(\lambda; u, v)\|_{0,\alpha} \leq \text{const}$ на $\Gamma \times \mathcal{N}$. Упомянутое резольвентное тождество дает возможность перенести непрерывность поля $R: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{L}(X, X^\alpha)$ с $\lambda \in \Gamma$ на поле $P_a: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{L}(X, X^\alpha)$. Функция $\partial_t T(\Phi_t u, \Phi_t v): (u, v, t) \rightarrow \mathcal{L}(X^\alpha, X)$ ограничена на $\mathcal{N} \times [0, \infty)$ и непрерывна по $t \geq 0$, значит, функция $\partial_t R(\lambda; \Phi_t u, \Phi_t v): (\lambda, u, v, t) \rightarrow \mathcal{L}(X, X^\alpha)$ ограничена на $\Gamma \times \mathcal{N} \times [0, \infty)$ и непрерывна по $t \geq 0$. Тем самым, интеграл (21) можно дифференцировать по параметру t в силу уравнения (1) и поле проекторов P_a регулярно со значениями в $\mathcal{L}(X, X^\alpha)$, а тем более со значениями в $\mathcal{L}(X^\alpha)$. Для производной в нуле $\partial_t P_a(u, v)$ получаем пока выражение типа (9) с голоморфным на $\mathcal{R}$ ядром

$$E(\lambda) = E(\lambda; u, v) = -\partial_t R(\lambda; u, v) \in \mathcal{L}(X^\alpha)$$

и контуром интегрирования Γ . В силу (18) и тождества $RB^\alpha = B^\alpha R$ находим, что

$$\|R\|_\alpha = \|A^\alpha B^{-\alpha} R B^\alpha A^{-\alpha}\| \leq L^2 \|R\|.$$

Поскольку $\|\partial_t T\|_{\alpha,0} \leq c_3$, то

$$\|E(\lambda)\|_\alpha \leq c_3 \|R\|_{0,\alpha} \|R\|_\alpha \leq c_4(\|R\|^{2-\alpha} + |\lambda|^\alpha \|R\|^2)$$

на $\mathcal{R}$ и искомая оценка (10) следует из неравенства (20). Согласно (17) при $\lambda \rightarrow \infty$ в Ω_1 величина $\|R(\lambda; B)\| = O(|\lambda|^{-1})$, а потому $\|E(\lambda)\|_\alpha = O(|\lambda|^{\alpha-2})$, $\alpha < 1$. Отсюда, учитывая голоморфность $E(\lambda)$, выводим для $\partial_t P_a(u, v)$ окончательное представление (9) с контуром интегрирования Γ_a . Лемма доказана.

ЛЕММА 4.3. Пусть $B = B(u, v)$, $u, v \in \mathcal{A}$; тогда поля операторов $B^{-\alpha}: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{L}(X, X^\alpha)$ и $B^\alpha: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{L}(X^\alpha, X)$ регулярны. Справедлива оценка

$$\|(\partial_t B^\alpha)B^{-\alpha}\| \leq N \quad (22)$$

на $\mathcal{N}$ с постоянной $N = N(A, F, T_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Считаем, не теряя общности, что $\alpha > 0$. Тогда, как известно [2, § 1.4],

$$B^{-\alpha} = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \int_{-\infty}^0 |\lambda|^{-\alpha} R(\lambda; B) d\lambda \quad (23)$$

для $B = B(u, v)$. При $\lambda \leq 0$ промежуточные результаты предыдущего доказательства гарантируют регулярность поля $R(\lambda; B): \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{L}(X, X^\alpha)$ и равенство $\partial_t R = R \partial_t T R$. Найденные там же оценки на R и $\partial_t R$ запишем с помощью (17) в виде

$$\|R\|_{0,\alpha} \leq c_1(1 + |\lambda|)^{\alpha-1}, \quad \|\partial_t R\|_{0,\alpha} \leq c_2(1 + |\lambda|)^{2\alpha-2}.$$

Подчеркнем, что все это верно без условия (20) на $R(\lambda; B)$. Второе резольвентное тождество позволяет перенести непрерывность поля $R: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{L}(X, X^\alpha)$ с $\lambda \leq 0$ на поле $B^{-\alpha}: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{L}(X, X^\alpha)$. Функция $\psi(\lambda) = |\lambda|^{-\alpha}(1 + |\lambda|)^{2\alpha-2}$ интегрируема на $(-\infty, 0)$. Применяя теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла и рассуждая, как выше, заключаем, что выражение (23) можно дифференцировать по параметру t в силу уравнения (1) и поле $B^{-\alpha}$ регулярно. Пользуясь (18), имеем

$$\|B^\alpha \partial_t R\| = \|B^\alpha A^{-\alpha} A^\alpha \partial_t R\| \leq L \|\partial_t R\|_{0,\alpha} \leq c_3(1 + |\lambda|)^{2\alpha-2}.$$

Из (23) следует теперь неравенство $\|B^\alpha \partial_t B^{-\alpha}\| \leq N$ для $u, v \in \mathcal{A}$ с $N = N(A, F, T_0)$.

Осталось заметить, что $B^\alpha B^{-\alpha} = I$ и $\|B^\alpha\|_{\alpha,0} = \|B^\alpha A^{-\alpha}\| \leq L$. Регулярность поля B^α получаем из регулярности $B^{-\alpha}$ с помощью очевидных операторных преобразований. При этом $(\partial_t B^\alpha)B^{-\alpha} + B^\alpha \partial_t B^{-\alpha} = 0$, стало быть, $\|(\partial_t B^\alpha)B^{-\alpha}\| = \|B^\alpha \partial_t B^{-\alpha}\| \leq N$ и лемма доказана.

Список литературы

1. Романов А. В. Конечномерная предельная динамика диссипативных параболических уравнений // Матем. сб. 2000. Т. 191. № 3. С. 99–112.
2. Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. М.: Мир, 1985.
3. Hopf E. A mathematical example displaying features of turbulence // Comm. Pure Appl. Math. 1948. V. 1. № 4. P. 303–322.
4. Foias C., Prodi G. Sur le comportement global des solutions non-stationnaires des equations de Navier–Stokes en dimension 2 // Rend. Semin. Mat. Univ. Padova. 1967. V. 39. P. 1–34.
5. Ладыженская О. А. О динамической системе, порождаемой уравнениями Навье–Стокса // Записки научн. семин. ЛОМИ. 1972. Т. 27. С. 91–115.
6. Mallet-Paret J. Negatively invariant sets of compact maps and an extension of a theorem of Cartwright // J. Differ. Equat. 1976. V. 22. № 2. P. 331–348.
7. Mane R. On the dimension of the compact invariant sets of certain non-linear maps // Lecture Notes in Math. V. 898. N. Y.: Springer-Verlag, 1981. P. 230–242.

8. *Ладыженская О. А.* О нахождении минимальных глобальных аттракторов для уравнений Навье–Стокса и других уравнений с частными производными // УМН. 1987. Т. 42. № 6. С. 25–60.
9. *Бабин А. В., Вилиш М. И.* Аттракторы эволюционных уравнений. М.: Наука, 1989.
10. *Tetam R.* Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics. 2-nd ed. N.Y.: Springer-Verlag, 1997.
11. *Чуешов И. Д.* Теория функционалов, однозначно определяющих асимптотическую динамику бесконечномерных диссипативных систем // УМН. 1998. Т. 53. № 4. С. 77–125.
12. *Mane R.* Reduction semilinear parabolic equations to finite dimensional C^1 flows // Lecture Notes in Math. V. 597. N. Y.: Springer-Verlag, 1977. P. 361–378.
13. *Романов А. В.* Точные оценки размерности инерциальных многообразий для нелинейных параболических уравнений // Изв. РАН. Сер. матем. 1993. Т. 57. № 4. С. 36–54.
14. *Романов А. В.* Три контрпримера в теории инерциальных многообразий // Матем. заметки. 2000. Т. 68. № 3. С. 439–447.
15. *Камаев Д. А.* Семейства устойчивых многообразий одномерных параболических уравнений // Матем. заметки. 1996. Т. 60. № 1. С. 11–23.
16. *Камаев Д. А.* Семейства устойчивых многообразий инвариантных множеств систем параболических уравнений // УМН. 1992. Т. 47. № 5. С. 179–180.
17. *Brunovsky P., Teresca I.* Regularity of invariant manifolds // J. Dyn. Differ. Equat. 1991. V. 3. № 3. P. 313–337.
18. *Борисович Ю. Г., Близняков Н. М., Израилевич Я. А., Фоменко Т. Н.* Введение в топологию. 2-е изд. (доп.). М.: Наука, 1995.
19. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Т. 3. Спектральные операторы. М.: Мир, 1974.
20. *Романов А. В.* Конечномерность динамики на аттракторе для полулинейных параболических уравнений // Международная конференция, посвященная 90-летию со дня рождения Л. С. Понтрягина. Тезисы докладов. Оптимальное управление и добавления. М.: Изд-во МГУ, 1998. С. 324–325.
21. *Yorke J. A.* Periods of periodic solutions and the Lipschitz constant // Proc. Amer. Math. Soc. 1969. V. 22. № 2. P. 509–512.
22. *Трибель Х.* Теория функциональных пространств. М.: Мир, 1986.
23. *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.
24. *Функциональный анализ. Справочная математическая библиотека / Ред. С. Г. Крейн.* М.: Наука, 1973.
25. *Левитан Б. М., Саргсян И. С.* Введение в спектральную теорию. М.: Наука, 1970.
26. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
27. *Amann H.* Global existence for semilinear parabolic systems // J. Reine Angew. Math. 1985. V. 360. P. 47–83.
28. *Hoshino H., Yamada Y.* Solvability and smoothing effect for semilinear parabolic equations // Funkc. Ekv. 1991. V. 34. № 3. P. 475–494.
29. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. М.: ИЛ, 1962.

Поступило в редакцию
20.VII.2000