Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Н. Туманов, Асимптотические формулы для вещественных собственных значений задачи Штурма–Лиувилля с двумя точками поворота, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2001, том 65, выпуск 5, 153–166

DOI: <https://doi.org/10.4213/im360>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 17:11:40

УДК 517.43

С. Н. Туманов

**Асимптотические формулы
для вещественных собственных значений задачи
Штурма–Лиувилля с двумя точками поворота**

Рассмотрено асимптотическое поведение вещественного спектра при больших значениях параметра, доказано существование бесконечного числа членов асимптотики при условии аналитичности коэффициентов уравнения.

Библиография: 6 наименований.

§ 1. Введение

В данной работе рассматривается индифинитная задача Штурма–Лиувилля с двумя простыми точками поворота. Основной результат работы состоит в доказательстве асимптотических формул для положительных собственных значений этой задачи:

$$u_m \asymp A_1 m + A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{-k}}{m^k}, \quad m \rightarrow \infty.$$

При этом для коэффициентов A_n имеются явные рекуррентные формулы.

В случае гладких коэффициентов и одной простой точки поворота А. А. Дородницын [2] нашел первые три члена асимптотики. Недавно А. В. Дьяченко [3] показал, что в условиях работы [2] существует бесконечно много членов асимптотики. Им же показано, что первые три члена асимптотики существуют и для двух точек поворота. Ранее в общем случае главный член был найден Ф. В. Аткинсоном и А. Б. Мингарелли [1].

Итак, рассмотрим следующую краевую задачу:

$$\begin{aligned} y'' &= (u^2 f + g)y, \quad u > 0, \\ y(b_1) &= y(b_2) = 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь u – спектральный параметр, функции f и g аналитичны в некоторой окрестности Ω отрезка $[b_1, b_2]$ и вещественны, а для f потребуем, чтобы она имела два простых нуля a_1 и a_2 , $b_1 < a_1 < a_2 < b_2$, и была отрицательной на интервале (a_1, a_2) , вне замыкания которого она предполагается положительной. Предполагаем, что эти условия, наложенные на функции f и g , выполнены везде в настоящей работе, в том числе в формулировках теорем.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ (№ 98-01-01000) и “Университеты России” (№ 992238).

Работа основывается на методе линий и графов Стокса, описание которого можно найти в монографии М. В. Федорюка [6]. Главным отличием построений, используемых нами, от построений, приведенных в [6], является локальность в определении асимптотических решений уравнения (1.1). Мы не требуем аналитичности рассматриваемых нами функций во всей комплексной плоскости, хотя это приводит к более сложному виду асимптотических разложений решений и матриц перехода.

В данной работе все асимптотические формулы, если это не указано явно, имеют место при $u \rightarrow +\infty$.

§ 2. Граф Стокса

Напомним ряд основных определений теории графов Стокса.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. *Точками поворота порядка n задачи (1.1) называются нули функции f кратности n ; простыми точками поворота называются точки поворота первого порядка.*

Для любой точки поворота a можно ввести многозначную функцию

$$S(a, z) = \int_a^z \sqrt{f(\zeta)} d\zeta.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. *Линией Стокса уравнения (1.1), выходящей из точки поворота a , называется кривая, для которой $\operatorname{Re} S(a, z) = 0$.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. *Комплексом Стокса уравнения (1.1) называется всякое максимальное связное множество, состоящее из линий Стокса. Комплекс Стокса называется простым, если включает лишь одну точку поворота. В противном случае комплекс называется сложным.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. *Графом Стокса уравнения (1.1) называется совокупность всех комплексов Стокса.*

Справедливы следующие несложные утверждения, на доказательстве которых мы не будем останавливаться (ср. [6]).

Рис. 1. Граф Стокса исходного уравнения

ЛЕММА 2.1. Из всякой простой точки поворота выходят ровно три линии Стокса под углами $\pm 2\pi/3$ по отношению друг к другу.

ЛЕММА 2.2. Граф Стокса вещественной функции f симметричен относительно вещественной оси.

ЛЕММА 2.3. Пусть функции f и g удовлетворяют условиям § 1; тогда граф Стокса в Ω представляет собой сложный комплекс Стокса, состоящий из отрезка $[a_1, a_2]$ и четырех кривых, попарно выходящих из точек a_1 и a_2 под углами $\pm 2\pi/3$ по отношению к отрезку (см. рис. 1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО автоматически следует из предыдущих лемм и отрицательности f на $[a_1, a_2]$.

Введем ряд обозначений: пусть l_1, l_2, l_3 – линии Стокса, выходящие из точки a_2 (нумерация против часовой стрелки, $l_2 = [a_1, a_2]$); l_4, l_5, l_6 – линии Стокса, выходящие из точки a_1 (нумерация против часовой стрелки, $l_4 = [a_1, a_2]$).

Через D_j обозначим области в Ω , ограниченные линиями Стокса, содержащие внутри лишь одну линию Стокса l_j . Например, D_1 ограничена линиями $l_5, l_4 = l_2, l_3$ и содержит l_1 , а область D_2 ограничена линиями l_5, l_6, l_3, l_1 и содержит линию Стокса $l_2 = [a_1, a_2]$. В дальнейшем мы будем называть эти области *каноническими*. Отметим, что автор понятия канонических областей, М. В. Федорюк, вводит их несколько иным способом в [6, гл. 3, § 3], хотя суть понятия при этом не меняется, что показывает следующая

ЛЕММА 2.4. Существует прямоугольная окрестность Ω' отрезка $[b_1, b_2]$, содержащаяся в Ω и такая, что в областях $D'_j = D_j \cap \Omega'$, $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, функция $S(a_k, z)$, $k = 1, 2$, однолистка.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что S имеет лишь две особые точки a_1 и a_2 , вне которых $S' \neq 0$. Ввиду монотонности функции $S(a_2, z)$ на $[a_2, b_2 + \varepsilon)$ можно гарантировать ее однолистность в некоторой прямоугольной окрестности отрезка $[a_2 + \delta, b_2]$, не содержащей окрестности точки a_2 (аналогично, функция $S(a_1, z)$ однолистка в окрестности $[b_1, a_1 - \delta]$). Далее доказательство идейно повторяет доказательство леммы об однолистности в канонических областях [4]. Лемма доказана.

Без ограничения общности мы можем считать $\Omega' = \Omega$, так как в противном случае уменьшим исходную прямоугольную окрестность.

§ 3. Канонические пары решений

В этом параграфе мы построим пары независимых решений, разлагающихся в некоторых областях в асимптотические ряды, и найдем формулы для определения коэффициентов асимптотических разложений. Напомним ряд важных определений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Области D_j будем называть *каноническими*. Тройка (a_j, l_j, D_j) *каноническая*, если $a_j \in l_j \subset D_j$, где a_j – точка поворота, l_j – линия Стокса, лежащая в D_j .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Однозначную аналитическую ветвь $S_j(z)$ функции $S(a_j, z)$ в области D_j назовем *канонической*, если $\text{Im } S_j(l_j) \subset \mathbb{R}_+$.

Итак, пусть $D_j \subset \Omega$ – некоторая каноническая область. Выделим каноническую ветвь S_j , которая согласно лемме 2.4 будет однолистной в D_j , что, в свою очередь, позволит произвести аналитическую замену переменных (выполнить преобразование Лангера) и перейти к новому уравнению. Положим

$$\xi = \xi(z) = S_j(z), \quad y = z^{\frac{1}{2}} w.$$

Здесь дифференцирование идет по новой независимой переменной ξ . В результате такой замены уравнение (1.1) примет вид

$$w'' = (u^2 + \psi)w, \quad \psi(\xi) = g z^2 + z^{\frac{1}{2}} \frac{d^2}{d\xi^2} z^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.1)$$

Пусть $O_j = S_j(D_j)$ – область изменения новой переменной ξ . Очевидно, что при такой замене ψ становится аналитической функцией аргумента ξ в O_j .

ТЕОРЕМА 3.1. Уравнение (3.1) имеет следующие формальные асимптотические решения (см. [5, гл. 10, § 2]):

$$w_{\pm} \sim \exp\left(\pm u\xi + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{E_k(\xi)}{(\pm u)^k}\right) \sim e^{\pm u\xi} \sum_{s=0}^{\infty} (\pm 1)^s \frac{A_s(\xi)}{u^s}.$$

Для коэффициентов имеются следующие рекуррентные формулы:

$$\begin{aligned} E_1(\xi) &= \frac{1}{2} \int \psi(\xi) d\xi, & E_2(\xi) &= -\frac{1}{4} \psi(\xi), \\ E_{k+1}(\xi) &= -\frac{1}{2} E'_k(\xi) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k-1} \int E'_j(\xi) E'_{k-j}(\xi) d\xi, & k &\geq 2; \\ A_0(\xi) &= \text{const}, & A_{s+1}(\xi) &= -\frac{1}{2} A'_s(\xi) + \frac{1}{2} \int \psi(\xi) A_s(\xi) d\xi, & s &\geq 0. \end{aligned}$$

Имеет место формула связи между коэффициентами:

$$E_k(\xi) = A_k(\xi) - \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k-1} j A_{k-j}(\xi) E_j(\xi).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все формулы получаются подстановкой формальных рядов в уравнение (3.1) с последующим приравнованием коэффициентов при одинаковых степенях u . Теорема доказана.

Обратим внимание на то, что теорема утверждает лишь выполнимость формальных равенств для степенных рядов, но не гарантирует никаких оценок на остаточные члены. Обратим также внимание на отсутствие пределов в интегралах, которые достаточно считать неопределенными.

Изучим асимптотические свойства решений. Определение и теорема, следующие ниже, приведены в [5, гл. 10, § 3].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Множества $\Xi_j^\pm(u, d_j^\pm) \subset O_j$ будем называть *областями справедливости асимптотических разложений*, если для всех ξ из $\Xi_j^\pm(u, d_j^\pm)$ найдутся контуры $Q_j^\pm$, соединяющие $d_j^\pm$ с ξ и лежащие в O_j , такие, что $\operatorname{Re}(uv)$ не убывает, когда v изменяется вдоль Q_j^+ , и не возрастает, когда v изменяется вдоль Q_j^- .

ТЕОРЕМА 3.2. Уравнение (3.1) имеет для всякого $u > 0$ и $n \in \mathbb{N}$ решения $w_{nj}^\pm$, аналитические в O_j , зависящие от точек $d_j^\pm$ и имеющие вид

$$w_{nj}^+(u, \xi) = e^{u\xi} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{A_s(\xi)}{u^s} + \varepsilon_{nj}^+(u, \xi),$$

$$w_{nj}^-(u, \xi) = e^{-u\xi} \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s \frac{A_s(\xi)}{u^s} + \varepsilon_{nj}^-(u, \xi).$$

Коэффициенты $A_s(\xi)$ определяются рекуррентно соотношениями

$$A_0(\xi) = 1, \quad A_{s+1}(\xi) = -\frac{1}{2}A'_s(\xi) + \frac{1}{2} \int \psi(\xi) A_s(\xi) d\xi,$$

и при $\xi \in \Xi_j^\pm(u, d_j^\pm)$ справедливы оценки на остаточные члены:

$$|\varepsilon_{nj}^\pm|, \left| \frac{\partial \varepsilon_{nj}^\pm}{u \partial \xi} \right| \leq 2|e^{\mp u\xi}| \exp\left(\frac{2 \operatorname{Var}_{d_j^\pm, \xi}(A_1)}{|u|}\right) \frac{\operatorname{Var}_{d_j^\pm, \xi}(A_n)}{|u^n|}.$$

Заметим, что из [5, гл. 10, § 6] следует существование решений, представляющихся асимптотическими рядами.

ЛЕММА 3.1. Существует прямоугольная окрестность Ω' отрезка $[b_1, b_2]$, содержащаяся в Ω и такая, что образы областей $D'_j = D_j \cap \Omega'$ функции S_j содержатся в областях справедливости асимптотических разложений.

Рис. 2. Строение образов канонических областей

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно провести доказательство для D_1 и D_2 . При малой ширине Ω в образ D_1 можно вписать угол, а в образ D_2 – прямоугольник (см. рис. 2), которые, очевидно, содержатся в областях справедливости. Заметим, что найдется прямоугольная окрестность Ω' такая, что образы D'_j содержатся в соответствующих углах и прямоугольниках. Лемма доказана.

Таким образом, не ограничивая общности, мы можем считать асимптотические формулы справедливыми всюду в образах канонических областей. Отметим, что из доказательства видно, что соответствующие асимптотические формулы справедливы для растущего по u решения вплоть до левого берега разрезов, а для убывающего – вплоть до правого.

Из только что доказанной леммы, теоремы 3.2 и теоремы 3.1 автоматически следует

ТЕОРЕМА 3.3. *Уравнение (3.1) имеет для всякого $u > 0$ и $n \in \mathbb{N}$ решения $w_{nj}^\pm$, аналитические в O_j и представляющиеся в O_j асимптотическими формулами*

$$w_{nj}^\pm(u, \xi) = \exp\left(\pm u\xi + \sum_{s=1}^{n-1} (\pm 1)^s \frac{E_s(\xi)}{u^s} + O\left(\frac{1}{u^n}\right)\right),$$

где коэффициенты $E_s(\xi)$ находятся рекуррентно согласно формулам, приведенным в теореме 3.1.

Основываясь на этом утверждении, будем строить решения уравнения (1.1).

ТЕОРЕМА 3.4. *Пусть D – каноническая область, (a, l, D) – каноническая тройка, S – каноническая ветвь. Тогда найдется пара решений U и V , аналитических в Ω и представляющихся асимптотическими рядами при $z \in D$. Асимптотические формулы для U также справедливы на линии Стокса, выходящей из точки a , расположенной слева от l , а для V – на линии Стокса, выходящей из точки a , расположенной справа от l ,*

$$\begin{aligned} U &\asymp cf^{-1/4} e^{us} \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{u^k} \int^z \alpha_k(\zeta) d\zeta\right), \\ V &\asymp cf^{-1/4} e^{-us} \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{u^k} \int^z \alpha_k(\zeta) d\zeta\right), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= -\frac{1}{4} \frac{f'}{f}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{2} \frac{g}{\sqrt{f}} + \frac{1}{8} \frac{f''}{\sqrt{f^3}} - \frac{5}{32} \frac{(f')^2}{\sqrt{f^5}}, \\ \alpha_{s+1} &= -\frac{1}{2\sqrt{f}} \left(\alpha'_s + \sum_{j=0}^s \alpha_j \alpha_{s-j} \right), \quad s > 0, \end{aligned} \tag{3.2}$$

а константа c выбрана так, чтобы

$$|c| = 1, \quad \lim_{l \ni z \rightarrow a} \arg(cf^{-1/4}) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим рекуррентные формулы для $E_s(\xi)$. Положим $\beta_j = E'_j$. В результате такого обозначения получим рекуррентные соотношения

$$\beta_1 = \frac{1}{2}\psi, \quad \beta_2 = -\frac{1}{4}\psi', \quad \beta_{s+1} = -\frac{1}{2}\beta'_s - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s-1}\beta_j\beta_{s-j}.$$

В силу конформности $\xi(z)$ имеем $\xi'(z) = f^{1/2}(z) \neq 0$. Положим $\alpha_j(z) = \beta_j(\xi(z))\xi' = \beta_j(\xi(z))f^{1/2}$. В итоге получим

$$E_j(\xi) = \int^\xi \beta_j(\xi) d\xi = \int^z \alpha_j(\zeta) d\zeta.$$

После замены, обратной к преобразованию Лангера, и умножения на нормировочный множитель c получим пару независимых (при больших u) решений U и V . Соотношения на α_j следуют из соотношений на β_j после выражения ψ через исходные функции:

$$\psi(\xi) = \frac{g}{f} - \frac{1}{f^{3/4}} \frac{d^2}{dz^2} \frac{1}{f^{1/4}},$$

и введения дополнительно $\alpha_0 = -\frac{1}{4}\frac{f'}{f}$. Теорема доказана.

ЛЕММА 3.2. При изменении ветви $\sqrt{f}$ знак α_j меняется на $(-1)^j$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $j = 0$ и $j = 1$ утверждение очевидно. Далее по индукции имеем

$$\alpha_{s+1}^- = -\frac{1}{-2\sqrt{f}} \left((-1)^s (\alpha_s^+)' + \sum_{j=1}^s (-1)^j (-1)^{s-j} \alpha_j^+ \alpha_{s-j}^+ \right) = (-1)^{s+1} \alpha_{s+1}^+,$$

где выбор $+$ или $-$ в $\alpha_s^\pm$ зависит от выбора ветви $\sqrt{f}$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Коэффициенты α_{2k} над Ω распадаются на однозначные голоморфные ветви.

Будем считать α_{2k} однозначной функцией, а α_{2k+1} — двузначной. Введем следующее обозначение: $\alpha_k^{(j)}$ — ветвь в канонической области D_j , в формулах определения которой фигурирует именно та ветвь $\sqrt{f}$, которая участвует в определении S_j .

Для каждой канонической тройки (a_j, l_j, D_j) введем точки z_j^- и z_j^+ , лежащие на соседних с l_j линиях Стокса, выходящих из a_j (z_j^- — слева от l_j , а z_j^+ — справа), причем так, чтобы для двух линий Стокса l_j, l_{j+1} (l_{j+1} слева от l_j) $z_{j+1}^- = z_j^+$ (см. рис. 3).

Пусть $\gamma_j^\pm(z)$ — контур, соединяющий $z_j^\mp$ с z , лежащий в канонической области D_j .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4. Пара решений дифференциального уравнения (1.1) U_j и V_j , определенных в Ω , называется канонической парой (или парой канонических

Рис. 3. Пути для канонических решений

решений) в канонической области D_j , если для всех $z \in D_j$ выполнены асимптотические соотношения

$$U_j(u, z) \asymp c_j f^{-1/4} e^{uS_j(z)} \exp\left(\sum_{s=1}^{\infty} u^{-s} \int_{\gamma_j^+(z)} \alpha_s^{(j)}(\zeta) d\zeta\right),$$

$$V_j(u, z) \asymp c_j f^{-1/4} e^{-uS_j(z)} \exp\left(\sum_{s=1}^{\infty} (-u)^{-s} \int_{\gamma_j^-(z)} \alpha_s^{(j)}(\zeta) d\zeta\right),$$

где c_j и $\alpha_s^{(j)}$ выбраны, как и в теореме 3.4, а контуры интегрирования определены в предыдущем абзаце.

Канонические решения являются аналитическими всюду в Ω , но в асимптотические ряды раскладываются только в соответствующих канонических областях. Нашей дальнейшей задачей будет изучение поведения этих пар в других областях.

§ 4. Формулы перехода

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Пусть заданы пары канонических решений и канонические области: (U_j, V_j) , D_j и (U_k, V_k) , D_k . Так как произвольное решение w уравнения (1.1) разлагается в линейную комбинацию фундаментальных решений, то

$$w = \alpha_j U_j + \beta_j V_j = \alpha_k U_k + \beta_k V_k,$$

где α_l и β_l зависят лишь от параметра u . Имеем

$$\begin{pmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \end{pmatrix} = \Omega_{jk}(u) \begin{pmatrix} \alpha_j \\ \beta_j \end{pmatrix}.$$

Следуя [6], будем называть матрицы $\Omega_{jk}(u)$ матрицами перехода от канонической тройки (a_j, l_j, D_j) к тройке (a_k, l_k, D_k) .

Нетрудно понять, что справедливо следующее соотношение:

$$\begin{pmatrix} U_j(u, z) \\ V_j(u, z) \end{pmatrix} = \Omega_{jk}^T(u) \begin{pmatrix} U_k(u, z) \\ V_k(u, z) \end{pmatrix}.$$

Мы построим матрицы перехода между областями двух типов. Остальные будут выражаться как композиция основных.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть a – простая точка поворота, l_1, l_2, l_3 – линии Стокса с началом в точке a . Пусть l_{j+1} располагается слева от l_j ($j \bmod 3$), а канонические области выбраны так, чтобы часть D_j , лежащая слева от l_j , совпадала с частью D_{j+1} , лежащей справа от l_{j+1} . Обозначим $\Omega_{j,j+1}$ матрицу перехода от (a, l_j, D_j) к (a, l_{j+1}, D_{j+1}) . Тогда

$$\Omega_{j,j+1} = e^{-i\frac{\pi}{6}} \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{j,j+1}^{-1} \\ \beta_{j,j+1} & i\alpha_{j+1,j+2}/\beta_{j+2,j} \end{pmatrix},$$

$\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} = \beta_{12}\beta_{23}\beta_{31} = 1 + o(1)$ при $u \rightarrow +\infty$. Для элементов матрицы перехода имеют место асимптотические формулы

$$\begin{aligned} \alpha_{j,j+1} &\asymp \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} (-u)^{-k} \int_{\gamma_{z_j^+ z_{j+1}^-}} \alpha_k^{(j)} dt\right), \\ \beta_{j,j+1} &\asymp \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} u^{-k} \int_{\gamma_{z_j^- z_{j+1}^+}} \alpha_k^{(j)} dt\right), \end{aligned}$$

где контуры интегрирования $\gamma_{z_j^+ z_{j+1}^-}$ и $\gamma_{z_j^- z_{j+1}^+}$ соединяют точки, обозначенные в индексах, причем первый контур огибает точку поворота по часовой стрелке, ветвь $\alpha_k^{(j)}$ продолжается из области D_j в окрестность точки поворота a без разреза l_{j+2} , а контур $\gamma_{z_j^- z_{j+1}^+}$ полностью расположен в $D_j \cap D_{j+1}$ и тоже ориентирован по часовой стрелке.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введенные канонические пары разлагаются в асимптотические ряды (см. определение 3.4). Пусть $D_{j,j+1} = D_j \cap D_{j+1}$ – область, в которой справедливы разложения для обеих канонических пар.

В предположении совпадения ветвей $f^{-1/4}$ получим $c_j = e^{-i\frac{\pi}{6}} c_{j+1}$. Положим

$$\begin{aligned} Q_{j,j+1} &= \begin{pmatrix} q_{11}^{(j)} & q_{12}^{(j)} \\ q_{21}^{(j)} & q_{22}^{(j)} \end{pmatrix} = e^{i\frac{\pi}{6}} \Omega_{j,j+1}^T, \\ \eta_k^+ &= \frac{U_k}{c_k f^{-1/4} e^{uS_k}}, \quad \eta_k^- = \frac{V_k}{c_k f^{-1/4} e^{-uS_k}}, \quad \eta_k^\pm \sim 1. \end{aligned}$$

Получим следующее соотношение:

$$\begin{pmatrix} e^{uS_j} \eta_j^+ \\ e^{-uS_j} \eta_j^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{11}^{(j)} & q_{12}^{(j)} \\ q_{21}^{(j)} & q_{22}^{(j)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{uS_{j+1}} \eta_{j+1}^+ \\ e^{-uS_{j+1}} \eta_{j+1}^- \end{pmatrix}.$$

Отметим, что всюду в $D_{j,j+1}$ выполнено равенство $S_{j+1} = -S_j$. Рассмотрим первую строчку данного соотношения и, учитывая это замечание и домножив обе стороны равенства на $e^{uS_{j+1}}$, получим

$$\eta_j^+ = q_{11}^{(j)} e^{2uS_{j+1}} \eta_{j+1}^+ + q_{12}^{(j)} \eta_{j+1}^-.$$

Заметим, что из этого соотношения немедленно следует ограниченность $q_{12}^{(j)}$. Если бы это было не так, то, взяв $z \in D_{j,j+1}$, мы бы получили

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{q_{11}^{(j)}}{q_{12}^{(j)}} = 0,$$

что, очевидно, не выполнено при $z \in l_{j+1}$. (Асимптотическое соотношение для U_j выполнено вплоть до l_{j+1} .)

Из этого вытекает, что существует $\beta > 0$ такое, что $|q_{11}^{(j)}| \leq Ce^{-\beta^2 u}$, и, более того, всюду в $D_{j,j+1}$ существует $\beta > 0$ такое, что $|q_{11}^{(j)} e^{2uS_{j+1}}| \leq Ce^{-\beta^2 u}$. Это неравенство говорит о том, что вклад первого слагаемого равен асимптотическому нулю и $\eta_j^+ \asymp q_{12}^{(j)} \eta_{j+1}^-$. Отсюда немедленно следует разложение

$$q_{12}^{(j)} \asymp \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} u^{-k} \int_{\gamma_{z_j^-}^{z_{j+1}^+}} \alpha_k^{(j)} dt \right).$$

Вместо U_j мы рассмотрим новое решение $W_j = e^{-i\pi/6} q_{12}^{(j)} V_{j+1}$, асимптотическое разложение которого совпадает с U_j , и, следовательно, W_j является каноническим. В итоге матрицу $Q_{j,j+1}$ мы представим в виде

$$Q_{j,j+1} = \begin{pmatrix} 0 & q_j(u) \\ a_j(u) & b_j(u) \end{pmatrix}.$$

Будем строить матрицы перехода так, чтобы было выполнено естественное соотношение

$$\Omega_{j,j+1}^T \Omega_{j+1,j+2}^T \Omega_{j+2,j}^T = I,$$

из которого немедленно следуют эквивалентные ему равенства

$$\forall j \pmod{3} \begin{cases} a_j q_{j+1} b_{j+2} = i, \\ b_j b_{j+1} b_{j+2} = -i, \end{cases}$$

а вводя новые обозначения $a_j = \alpha_{j,j+1}^{-1}$ и $q_j = \beta_{j,j+1}$, получим вид матрицы перехода такой же, как и в условии теоремы. Из приведенной выше системы и введенных обозначений немедленно следует мультипликативное соотношение на $\alpha_{k,k+1}$ и $\beta_{k,k+1}$.

Отметим, что данное соотношение дает нам $\alpha_{j,j+1} \sim 1$, из чего следует асимптотическое равенство

$$e^{uS_{j+1}} \eta_j^+ \asymp \frac{1}{\alpha_{j,j+1}} e^{uS_{j+1}} \eta_{j+1}^+,$$

которое и дает представление для $\alpha_{j,j+1}$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть $\Omega_{j,j+1}$ – матрица перехода от тройки $(a_j, l = l_j, D = D_j)$ к тройке $(a_{j+1}, l = l_{j+1}, D = D_{j+1})$, т.е. l соединяет точки поворота a_j и a_{j+1} . Тогда $\Omega_{j,j+1}$ представляется в виде

$$\Omega_{j,j+1} = e^{i\psi} \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{j,j+1}e^{-iua} \\ \beta_{j,j+1}e^{iau} & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} a &= \left| \int_{a_j}^{a_{j+1}} \sqrt{f(\zeta)} d\zeta \right|, \\ \alpha_{j,j+1} &\asymp \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} (-u)^{-k} \int_{\gamma_{z_j^+ z_{j+1}^-}} \alpha_k^{(j)} dt \right), \\ \beta_{j,j+1} &\asymp \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} u^{-k} \int_{\gamma_{z_j^- z_{j+1}^+}} \alpha_k^{(j)} dt \right), \end{aligned}$$

где через $\gamma_{z_1 z_2}$ обозначается контур, соединяющий z_1 и z_2 , обозначенные в индексах, и целиком лежащий в области D .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Во-первых, обратим внимание на равенство $S_{j+1}(z) = ia - S_j(z)$, которое немедленно следует из определения 3.2 канонической ветви. Во-вторых, области справедливости асимптотических формул для пар U_k и V_k при $k = j, j+1$ совпадают, что позволит нам искать решения в виде

$$U_j = p(u)V_{j+1}, \quad V_j = q(u)U_{j+1}.$$

Пусть $c_j = e^{i\psi} c_{j+1}$. Тогда из приведенного выше соотношения выведем асимптотики для коэффициентов аналогично процедуре, использованной в теореме 4.1. Теорема доказана.

§ 5. Асимптотика собственных значений

Теперь мы вернемся к тем обозначениям, которые были введены в § 2. Для определения собственных значений нашей задачи необходимо и достаточно решить следующее уравнение:

$$\Delta = \begin{vmatrix} U_1(u, b_1) & V_1(u, b_1) \\ U_1(u, b_2) & V_1(u, b_2) \end{vmatrix} = 0,$$

где Δ – характеристический определитель системы (1.1). Так как фундаментальные решения U_1 и V_1 нам известны своими асимптотиками только в области D_1 , содержащей b_2 , то нам придется выражать эти решения через каноническую пару U_5, V_5 , для которой известно асимптотическое поведение в области D_5 , содержащей точку b_1 , т.е. найти матрицу перехода Ω_{15} . Очевидно, что

$$\Omega_{15}^T = \Omega_{12}^T \Omega_{24}^T \Omega_{45}^T,$$

где вид матриц Ω_{12} и Ω_{45} следует из теоремы 4.1, а вид матрицы Ω_{24} следует из теоремы 4.2. Таким образом,

$$\Omega_{15}^T = e^{i\gamma} \begin{pmatrix} 0 & \beta_{12} \\ \alpha_{12}^{-1} & i\alpha_{23}/\beta_{31} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \beta_{24}e^{iua} \\ \alpha_{24}e^{-iua} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \beta_{45} \\ \alpha_{45}^{-1} & i\alpha_{56}/\beta_{64} \end{pmatrix},$$

что после вычислений дает

$$\Omega_{15}^T = e^{i\gamma} \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{24}\beta_{12}\beta_{45}e^{-iua} \\ -\frac{\beta_{24}}{\alpha_{12}\alpha_{45}}e^{iua} & i\frac{\alpha_{56}\beta_{24}}{\alpha_{12}\beta_{64}}e^{iua} + i\frac{\alpha_{23}\alpha_{24}\beta_{45}}{\beta_{31}}e^{-iua} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix} = \Omega_{15}^T \begin{pmatrix} U_5 \\ V_5 \end{pmatrix}.$$

Теперь можно расписать характеристический определитель и получить уравнение

$$\omega_{11}U_5(b_1)V_1(b_2) + \omega_{21}V_5(b_1)V_1(b_2) = \omega_{12}U_5(b_1)U_1(b_2) + \omega_{22}V_5(b_1)U_1(b_2). \quad (5.1)$$

Очевидно, что $\operatorname{Re} S_1(b_2) > 0$ и $\operatorname{Re} S_5(b_1) < 0$, т.е. $\operatorname{Re}(-S_4(b_1) + S_1(b_2))$ – наибольшее из чисел $\operatorname{Re}(\pm S_4(b_1) \pm S_1(b_2))$, где первый и второй знаки выбираются произвольно. Вывод: в (5.1) главным является слагаемое $\omega_{22}V_5(b_1)U_1(b_2)$. Таким образом, при больших значениях u это уравнение эквивалентно более простому: $\omega_{22} = 0$, или

$$\frac{\alpha_{56}\beta_{24}}{\alpha_{12}\beta_{64}}e^{2iua} + \frac{\alpha_{23}\alpha_{24}\beta_{45}}{\beta_{31}} = 0,$$

что, в свою очередь, эквивалентно

$$\frac{\beta_{24}}{\alpha_{24}} \frac{\alpha_{56}}{\beta_{64}\beta_{45}} \frac{\alpha_{31}}{\beta_{12}\beta_{23}} e^{2iua} = -1. \quad (5.2)$$

Удобно ввести обозначения: $\alpha_k = \alpha_k^{(1)}$, $\gamma_{[a_1, a_2]}$ – замкнутый контур в Ω , обходящий отрезок $[a_1, a_2]$ в направлении против часовой стрелки.

ЛЕММА 5.1. *При $u \rightarrow +\infty$ справедливо следующее асимптотическое уравнение на положительные собственные значения оператора Штурма–Лиувилля с двумя точками поворота:*

$$e^{2iua} \asymp -\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{u^k} \oint_{\gamma_{[a_1, a_2]}} \alpha_k dt\right). \quad (5.3)$$

Доказательство следует из уравнения (5.2) после подстановки асимптотических формул для всех α_{ij} и β_{ij} , введенных в § 4.

ЛЕММА 5.2. *Пусть $\rho_m \rightarrow +\infty$ при $m \rightarrow \infty$. Тогда из асимптотического уравнения*

$$e^{2i\rho_m a} + 1 \asymp \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k}{\rho_m^k}$$

следует представление для ρ_m в виде асимптотического ряда:

$$\rho_m \asymp A_1 m + A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{-k}}{m^k},$$

где коэффициенты A_s определяются рекуррентно через p_k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем некоторое натуральное k . Тогда асимптотическое равенство можно переписать в виде

$$e^{2i\rho_m a - 2\pi i(m-s) - \pi i} = 1 + \frac{-p_1}{\rho_m} + \dots + \frac{-p_k}{\rho_m^k} + o\left(\frac{1}{\rho_m^k}\right),$$

где $s \in \mathbb{Z}$; логарифмируя равенство, получаем следующую формулу:

$$2i\rho_m a - 2\pi i(m-s) - \pi i = \frac{q_1}{\rho_m} + \dots + \frac{q_k}{\rho_m^k} + o\left(\frac{1}{\rho_m^k}\right),$$

или

$$\rho_m = b_0(m-s) + b_1 + \frac{r_1}{\rho_m} + \dots + \frac{r_k}{\rho_m^k} + o\left(\frac{1}{\rho_m^k}\right).$$

Выразим m из правой части равенства и возведем его в отрицательные целые степени, после чего получим следующую систему равенств:

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} &= \frac{s_{11}}{\rho_m} + \frac{s_{12}}{\rho_m^2} + \dots + \frac{s_{1k}}{\rho_m^k} + o\left(\frac{1}{\rho_m^k}\right), \\ \frac{1}{m^2} &= \frac{s_{22}}{\rho_m^2} + \dots + \frac{s_{2k}}{\rho_m^k} + o\left(\frac{1}{\rho_m^k}\right), \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{1}{m^k} &= \frac{s_{kk}}{\rho_m^k} + o\left(\frac{1}{\rho_m^k}\right). \end{aligned}$$

Данная система разрешима относительно обратных степеней ρ_m , в частности, имеем

$$\frac{1}{\rho_m} = \frac{d_1}{m} + \dots + \frac{d_k}{m^k} + o\left(\frac{1}{m^k}\right),$$

но $o\left(\frac{1}{\rho_m^k}\right) = o\left(\frac{1}{m^k}\right)$, а обращение получившегося равенства уже не вызывает сомнения. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 5.1. Для положительных собственных значений оператора Штурма–Лиувилля с двумя простыми точками поворота справедливо асимптотическое представление

$$u_m \asymp A_1 m + A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{-k}}{m^k}, \quad m \rightarrow \infty,$$

в частности, с точностью до $O(m^{-3})$,

$$\begin{aligned} u_m &= \frac{1}{\int_{a_1}^{a_2} \sqrt{-f} dt} \left(\pi m + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{m} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{[a_1, a_2]}} \left(\frac{1}{2} \frac{g}{f^{1/2}} + \frac{1}{8} \frac{f''}{f^{3/2}} - \frac{5}{32} \frac{(f')^2}{f^{5/2}} \right) dt \\ &\quad + \frac{1}{m^2} \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{\pi} \int_{a_1}^{a_2} \sqrt{-f} dt \oint_{\gamma_{[a_1, a_2]}} \alpha_2 dt - \frac{1}{2} \oint_{\gamma_{[a_1, a_2]}} \alpha_1 dt \right) + O\left(\frac{1}{m^3}\right), \end{aligned}$$

где ветвь $f^{1/2}$ положительна при $z > a_2$, значения $\sqrt{-f}$ положительны на всем интервале (a_1, a_2) , замкнутый контур $\gamma_{[a_1, a_2]}$ лежит в Ω и обходит $[a_1, a_2]$ против часовой стрелки; α_j определены формулами (3.2), ветвь $\sqrt{f(z)}$ в определении α_j положительна при $z > a_2$.

Для определения остальных коэффициентов достаточно выписать асимптотическое разложение u_m с неопределенными коэффициентами, подставить в (5.3) и разрешить получившееся уравнение, приравнявая слагаемые, стоящие при равных степенях m .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение теоремы немедленно следует из предыдущей леммы. Для определения коэффициентов разложения u_m будем выписывать его с неопределенными коэффициентами и подставлять в (5.3). Например,

$$e^{2iu_m a} = -1 + O(u^{-1}),$$

что дает

$$u_m = \frac{1}{a} \left(\pi(m - m_0) + \frac{\pi}{2} \right) + O(m^{-1}),$$

где согласно [1] $m_0 = 0$. Для вычисления коэффициента A_{-1} подставим выражение

$$u_m = \frac{1}{a} \left(\pi m + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{A_{-1}}{m} + O(m^{-2})$$

в (5.3) и приравняем коэффициенты при m^{-1} . Тогда получим

$$A_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{[a_1, a_2]}} \alpha_1 dt.$$

Зная выражения для коэффициентов A_0 , A_{-1} , находим A_{-2} , а затем и последующие коэффициенты. Теорема доказана.

Автор благодарит проф. А. А. Шкаликова за постановку задачи, ценные замечания и советы.

Список литературы

1. Atkinson F. V., Mingarelli A. B. Asymptotic of the number of zeros and of eigenvalues of general weight Sturm–Liouville problems // J. reine ang. Math. 1987. V. 375. P. 380–393.
2. Дородницын А. А. Асимптотические законы распределения собственных значений для некоторых особых видов дифференциальных уравнений второго порядка // УМН. 1952. Т. 7. № 6. С. 3–96.
3. Дьяченко А. В. Асимптотика собственных значений индифинитной задачи Штурма–Лиувилля // Матем. заметки. 2000. Т. 68. № 1. С. 139–143.
4. Евграфов М. А., Федорюк М. В. Асимптотика решений уравнения $w'' - p(z, \lambda)w = 0$ при $\lambda \rightarrow \infty$ в комплексной плоскости // УМН. 1966. Т. 21. № 1. С. 3–50.
5. Олвер Ф. Асимптотика и специальные функции. М.: Наука, 1990.
6. Федорюк М. В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983.

Поступило в редакцию
1.VIII.2000