Общероссийский математический портал

Б. Н. Хабибуллин, Двойственное представление суперлинейных функционалов и его применения в теории функций. II, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2001, том 65, выпуск 5, 167–190

DOI: <https://doi.org/10.4213/im361>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 17:15:43

УДК 517.982.1+517.53+517.55

Б. Н. Хабибуллин

Двойственное представление суперлинейных функционалов и его применения в теории функций. II

Только § 7 настоящей статьи использует результаты первой части работы (см. [1]). Последующие результаты следуют из § 7. Даются новые двойственные постановки ряда задач для весовых пространств голоморфных функций одной и многих переменных, определенных в области из $\mathbb{C}^n$, а именно нетривиальность заданного пространства; описание нулевых множеств; описание множеств (не)единственности; существование голоморфных функций-мультипликаторов из определенных классов, “погашающих” рост заданной голоморфной функции; представление мероморфных функций отношением голоморфных функций из заданного пространства.

Библиография: 23 наименования.

§ 7. О существовании (плюри)субгармонической миноранты из выпуклого конуса

В этом параграфе из теорем 5.1 и 6.1 будут получены новые варианты утверждений, противоположных теореме о наименьшей мажоранте из работы [2].

Пусть G – область в $\mathbb{R}^k$, $k \geq 1$, $\text{SH}(G)$ – конус всех субгармонических в G функций, исключая функцию, тождественно равную $-\infty$ (при $k = 1$ субгармоническая функция – это выпуклая функция, не принимающая значение $+\infty$).

Через $\mathcal{M}(G)$ и (соответственно $\mathcal{M}^+(G)$ и $\mathcal{A}\mathcal{M}^+(G)$) обозначаем множество всех (соответственно положительных и положительных абсолютно непрерывных относительно меры Лебега) мер Радона с компактным носителем в области G .

Пусть H – подконус в $\text{SH}(G)$, ν и μ из $\mathcal{M}^+(G)$. Пишем $\nu \prec_H \mu$ и говорим, что μ – *выметание меры ν относительно H* , если

$$\int v d\nu \leq \int v d\mu, \quad v \in H. \quad (7.1)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.1. Пусть F – полунепрерывная (снизу или сверху) функция в области G , $v \in H$, $v(x) \leq F(x)$ при всех $x \in G$, и фиксированная мера $\nu \in \mathcal{M}^+(G)$ такова, что $\int v d\nu > -\infty$ для любой функции $v \in H$. Тогда

$$-\infty < \inf \left\{ \int F d\mu : \nu \prec_H \mu \right\}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 00-01-00770) и Конкурсного Центра фундаментального естествознания при Санкт-Петербургском государственном университете (проект № 01-960-000936).

Доказательство в силу (7.1) сразу следует из цепочки неравенств

$$c < \int v d\nu \leq \int v d\mu \leq \int F d\mu, \quad \nu \prec_H \mu,$$

где c – постоянная.

Более глубокой является приводимая ниже теорема 7.1, в определенной степени обратная к предложению 7.1.

Пусть $\{u_n\}$ – последовательность субгармонических в G функций, равномерно локально ограниченных сверху (т.е. на компактах) в G . Через $\overline{\lim}^* u_n$ будем обозначать полунепрерывную сверху регуляризацию (поточечного) верхнего предела последовательности $\{u_n\}$, которая, в свою очередь, вновь является субгармонической функцией, если только $\overline{\lim}_n u_n(x) \not\equiv -\infty$ [3, приложение I].

Через $\rho(x, \partial G)$ обозначим евклидово расстояние от точки $x \in G$ до границы ∂G области G .

Далее m – мера Лебега на $\mathbb{R}^k$, а мера $m^{(r)}$ получена сужением меры m на шар $B(r) = \{y \in \mathbb{R}^k : |y| < r\}$ с последующей нормировкой $m^{(r)}(B(r)) = 1$. Заметим, что для субгармонической в G функции v по определению субгармоничности $v(x) \leq (v * m^{(r)})(x)$, если число $r > 0$ достаточно мало (в таком варианте здесь и ниже $*$ – операция свертки).

Через $m_z^{(r)}$ обозначаем сдвиг меры $m^{(r)}$ в точку z , т.е. $m_z^{(r)}(A) = m^{(r)}(A - z)$, A – измеримое по m множество.

Функция f называется *строго положительной* (соответственно *строго отрицательной*) на G , если $f(x) > 0$, $x \in G$ (соответственно $f(x) < 0$, $x \in G$).

ТЕОРЕМА 7.1. Пусть G – область в $\mathbb{R}^k$, $k \geq 1$, ν – фиксированная мера из $\mathcal{M}^+(G)$, выпуклый конус $H \subset \text{SH}(G)$ содержит отрицательную (≤ 0) функцию, F – функция из $L_{\text{loc}}^1(G)$ со значениями в $[-\infty, +\infty]$.

Допустим, что:

(M) для любого компакта $K \subset G$ и любой постоянной C существует функция $v \in H$ такая, что $v \leq C$ на K ,

и выполнено хотя бы одно из следующих двух условий:

(L*) для любой локально ограниченной сверху последовательности $\{v_n\} \subset H$ выполнено $\overline{\lim}^* v_n \in H$, если только $\overline{\lim}_n v_n(x) \not\equiv -\infty$;

(CL) конус H секвенциально замкнут в $L_{\text{loc}}^1(G)$.

Если при этом

$$-\infty < \inf \left\{ \int F d\mu : \nu \prec_H \mu, \mu \in \mathcal{AM}^+(G) \right\}, \quad (7.2)$$

то для любой непрерывной строго положительной функции

$$r = r(x) < \rho(x, \partial G), \quad x \in G, \quad (7.3)$$

найдется функция $v \in H$ такая, что

$$v(x) \leq F^{(r)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{B(r(x))} F(x+y) dm^{(r(x))}(y), \quad x \in G. \quad (7.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть функция r выбрана, как в (7.3), и мера μ – выметание меры ν относительно H . Рассмотрим меру $\mu^{(r)}$, полученную интегрированием меры $m_x^{(r(x))}$ по мере μ (см. [4]). Другими словами, мера $\mu^{(r)}$ действует на каждую функцию $f \in C(G)$ по правилу

$$\int f d\mu^{(r)} = \iint_{|y| < r(x)} f(x+y) dm^{(r(x))}(y) d\mu(x).$$

Определение корректно, так как носитель меры $\mu^{(r)}$ содержится во множестве

$$\overline{\bigcup \{x + B(r(x)) : x \in \text{supp } \mu\}},$$

которое в силу условия (7.3) компактно вложено в G .

ЛЕММА 7.1. Если ν и μ – меры из $\mathcal{M}^+(G)$ и функция r выбрана, как в (7.3), то из $\nu \prec_H \mu$ следует $\nu \prec_H \mu^{(r)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v \in H$. По определению субгармоничности имеем

$$v(x) \leq \int_{|y| < r(x)} v(x+y) dm^{(r(x))}(y),$$

так как справа стоит среднее по шару $B(r(x))$. Значит,

$$\int v d\nu \leq \int v d\mu \leq \iint_{|y| < r(x)} v(x+y) dm^{(r(x))}(y) d\mu(x) = \int v d\mu^{(r)}.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 7.2. Если $\mu \in \mathcal{M}^+(G)$ и число $t > 0$ достаточно мало, то семейство мер-сверток

$$\mu^{(t)} \stackrel{\text{def}}{=} \mu * m^{(t)} \in \mathcal{AM}^+(G), \quad t > 0,$$

слабо сходится к мере μ при $t \rightarrow 0$ и каждая мера $\mu^{(t)}$, $t > 0$, – выметание меры μ относительно H .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При достаточно малом $t > 0$ нетрудно построить функцию $r(x)$ так, что $r(x) \equiv t$ в определенной окрестности носителя $\text{supp } \mu$, и при этом $\mu^{(r)} = \mu^{(t)}$. Очевидно, $\mu \prec_H \mu$, и по предыдущей лемме для $\nu = \mu$ получаем последнее утверждение леммы 7.2. Два других факта доказаны в [5, введение, § 1, 5d)].

По лемме 7.1 и условию (7.2) имеем

$$\begin{aligned} -\infty &< \inf \left\{ \int F d\mu^{(r)} : \nu \prec_H \mu, \mu \in \mathcal{AM}^+(G) \right\} \\ &= \inf \left\{ \int \left(\int_{|y| < r(x)} F(x+y) dm^{(r)}(y) \right) d\mu(x) : \nu \prec_H \mu, \mu \in \mathcal{AM}^+(G) \right\}, \end{aligned}$$

или в обозначениях (7.4)

$$-\infty < c \leq \inf \left\{ \int F^{(r)} d\mu : \nu \prec_H \mu, \mu \in \mathcal{AM}^+(G) \right\},$$

где c – постоянная. Нетрудно показать, что функция $F^{(r)}$ непрерывна в силу непрерывности функции r и локальной интегрируемости F .

Избавимся от требования $\mu \in \mathcal{AM}^+(G)$ в последнем соотношении.

Если $\nu \prec_H \mu$, $\mu \in \mathcal{M}^+(G)$, то по лемме 7.2 в силу транзитивности отношения $\prec_H$ тем более $\nu \prec_H \mu^{(t)}$ при $0 < t < t(\mu)$ и меры $\mu^{(t)}$ абсолютно непрерывны по m . Значит, для всех таких μ имеем

$$-\infty < c \leq \int F^{(r)} d\mu^{(t)}, \quad \nu \prec_H \mu \in \mathcal{M}^+(G), \quad 0 < t < t(\mu).$$

Устремляя t к нулю, в силу слабой сходимости по лемме 7.2 мер $\mu^{(t)}$ к μ и непрерывности $F^{(r)}$ получаем

$$-\infty < c \leq \inf \left\{ \int F^{(r)} d\mu : \nu \prec_H \mu, \mu \in \mathcal{M}^+(G) \right\}. \quad (7.5)$$

Предположим пока, что мера ν абсолютно непрерывна относительно меры Лебега.

Выберем, как в примере 3 из [1, § 4],

$$X = L_{\text{loc}}^1(G) = \varprojlim L^1(\overline{G}_n)p_n, \quad Y = C(G) = \varprojlim C(\overline{G}_n)p_n,$$

$T = \nu$ – линейный положительный функционал на $L_{\text{loc}}^1(G)$ ввиду абсолютной непрерывности меры ν . Из условия (M) легко следует, что каждый конус H_n , являющийся проекцией конуса H на $L^1(\overline{G}_n)$, – минорирующий для пространства $Y_n = C(\overline{G}_n)$.

Кроме того, по определению положительного ростка функционала T на H (см. [1, § 4])

$$\text{Spr}_Y(T, H) = \{\mu : \nu \prec_H \mu\}. \quad (7.6)$$

Далее рассмотрим случаи выполнения или условия (L*), или условия (CL).

1. *Случай (L*)*. Покажем, что выполнено условие (L), сформулированное в замечании в конце § 5 [1].

Если субгармонические функции последовательности $\{v_n\} \subset H$ ограничены сверху некоторой функцией $f \in L_{\text{loc}}^1(G)$ и ограничены снизу функцией из $L_{\text{loc}}^1(G)$ (т.е. почти всюду по мере Лебега), то для любого компакта $K \subset G$ при некотором фиксированном достаточно малом числе $t > 0$ по определению субгармоничности имеем

$$v_n(x) \leq (v_n * m^{(t)})(x) \leq (f * m^{(t)})(x), \quad x \in K, \quad (7.7)$$

где справа стоит непрерывная в K функция. Следовательно, эта последовательность локально ограничена сверху на G и при этом $\overline{\lim}_n v_n(x) \neq -\infty$. Отсюда

по условию (L^*) получаем $\overline{\lim}^* v_n \in H$. Но, как известно [3, приложение I, замечание (1)], $\overline{\lim}^* v_n$ отличается от $\overline{\lim}_n v_n$ лишь на множестве лебеговой меры нуль. Таким образом, в смысле пространства $L^1_{\text{loc}}(G)$ эти пределы неразличимы, и в $L^1_{\text{loc}}(G)$ имеем $\overline{\lim}_n v_n \in H$, т.е. из условия (L^*) следует условие (L) . Как указано в замечании из [1, § 5], это означает выполнение условий 1) и 2) теоремы 5.1.

Выполнено также и условие 3) теоремы 5.1, так как для любой убывающей последовательности полунепрерывных сверху в G функций $\{v_n\}$ (см. [6])

$$\inf_n \int v_n d\nu = \int \inf_n v_n d\nu.$$

Таким образом, в рассматриваемой ситуации выполнены все условия теоремы 5.1.

2. *Случай (CL)*. Условие (R) теоремы 6.1 (см. [1]) выполнено для любого не более чем счетного множества $B = \{v_n\}$ субгармонических в G функций, ограниченного сверху некоторой функцией $f \in L^1_{\text{loc}}(G)$ и удовлетворяющего условию

$$\inf_n \int v_n d\nu > -\infty. \quad (7.8)$$

Действительно, в этом случае из (7.7) следует, что B локально ограничено сверху и в силу условия (7.8) не содержит последовательности, равномерно сходящейся к $-\infty$ на каждом компакте из G . Отсюда множество субгармонических функций B предкомпактно в каждом пространстве $L^1(\overline{G}_n)$ [7, теорема 4.1.9], [8].

Замкнутость конуса H в $L^1_{\text{loc}}(G)$ составляет содержание условия (CL) .

Таким образом, в рассматриваемой ситуации выполнены все условия теоремы 6.1.

Вернемся к доказательству леммы. По условию конус H содержит отрицательный элемент. Так как $F^{(r)} \in Y = C(G)$, то в каждом из случаев соответственно по теореме 5.1 или 6.1 с учетом (7.6) имеем

$$q_{H,T}(F^{(r)}) = \inf\{\mu(F^{(r)}): \mu \in \text{Spr}_Y(T, H)\} = \inf\left\{\int F^{(r)} d\mu: \nu \prec_H \mu\right\}.$$

Отсюда ввиду (7.5) и по определению супремального функционала получаем

$$q_{H,T}(F^{(r)}) = \sup\{\nu(v): v \leq F^{(r)}, v \in H\} > -\infty, \quad (7.9)$$

т.е. найдется функция $v \in H$ такая, что $v \leq F^{(r)}$, и для абсолютно непрерывной меры ν теорема доказана. Снимем это дополнительное условие.

Если ν — произвольная мера из $\mathcal{M}^+(G)$, то для некоторого фиксированного достаточно малого числа $t > 0$ по лемме 7.2 имеем $\nu \prec_H \nu^{(t)}$ и

$$(\nu^{(t)} \prec_H \mu) \implies (\nu \prec_H \mu).$$

Отсюда и из условия (7.2) теоремы получаем

$$\begin{aligned} \inf \left\{ \int F d\mu: \nu^{(t)} \prec_H \mu, \mu \in \mathcal{AM}^+(G) \right\} &\geq \\ &\geq \inf \left\{ \int F d\mu: \nu \prec_H \mu, \mu \in \mathcal{AM}^+(G) \right\} > -\infty, \end{aligned}$$

где $\nu^{(t)}$ – уже абсолютно непрерывная мера. Но в этом случае теорема доказана. Следовательно, она доказана и для произвольной меры $\nu \in \mathcal{M}^+(G)$, т.е. и в этом случае выполнено (7.9).

Приведем следствие теоремы 7.1 в удобной для дальнейшего применения форме. В этом частном случае предложение 7.1 и теорему 7.1 объединим в виде критерия.

Пусть H – подконус в $\text{SH}(G)$ и $\mu \in \mathcal{M}^+(G)$, $z \in G$. Если $\delta_z \prec_H \mu$, где δ_z – мера Дирака (единичная масса в точке z), т.е.

$$v(z) \leq \int v d\mu, \quad v \in H, \quad (7.10)$$

то мера μ называется *мерой Йенсена* для точки z относительно конуса H .

ТЕОРЕМА 7.2. Пусть G – область в $\mathbb{C}^n$, $n \geq 1$ (соответственно область в $\mathbb{R}^k$, $k \geq 1$), $u \in \text{SH}(G)$, $M \in C(G)$, H – выпуклый подконус в $\text{PSH}(G)$ (соответственно в $\text{SH}(G)$), содержащий строго отрицательную в G функцию, и для H выполнено одно из условий (L^*) или (CL) .

Тогда следующие четыре утверждения попарно эквивалентны:

1) существует функция $v \in H$ такая, что

$$u(z) + v(z) \leq M(z), \quad z \in G; \quad (7.11)$$

2) существуют точка $z_0 \in G$ и постоянная C такие, что

$$\int u d\mu \leq \int M d\mu + C \quad (7.12)$$

при всех мерах Йенсена μ для z_0 относительно H ;

3) для любой точки $z \in G \setminus E$, где E – некоторое плюриполярное (соответственно полярное) множество в G , существует постоянная C такая, что (7.12) выполнено при всех мерах Йенсена μ для z относительно H ;

4) для любой точки $z \in G$ и числа $t < \rho(z, \partial G)$ существует постоянная C такая, что (7.12) выполнено при всех выметаниях μ меры $m_z^{(t)}$ относительно H .

При этом в каждом из утверждений 2)–4) можно ограничиться абсолютно непрерывными по m мерами μ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация $1) \Rightarrow 4)$ – прямое следствие предложения 7.1 при $F = M - u$ и при $\nu = m_z^{(t)}$.

Если существует функция $v \in H$, удовлетворяющая неравенству (7.11), то для некоторого плюриполярного (соответственно полярного) множества E в G при $z \in G \setminus E$ имеем $v(z) > -\infty$. Следовательно, из определения (7.10) меры Йенсена и неравенства (7.11) получаем

$$v(z) \leq \int v d\mu \leq \int (M - u) d\mu, \quad z \in G \setminus E,$$

при всех мерах Йенсена μ для точки z , что доказывает импликацию $1) \Rightarrow 3)$.

Импликация $3) \Rightarrow 2)$ очевидна.

Для доказательства импликаций $2) \Rightarrow 1)$ и $4) \Rightarrow 1)$ воспользуемся теоремой 7.1.

Полагаем $F = M - u$. Пусть v_0 – строго отрицательная функция из H . В силу полунепрерывности сверху функции v_0 для любого компакта $K \subset G$ найдется число $\varepsilon > 0$ такое, что $v_0 \leq -\varepsilon$ на K . Отсюда выполнено условие (M), так как для любого компакта $K \subset G$ и любой постоянной C для функции $\lambda v_0 \in H$ при достаточно большой постоянной $\lambda > 0$ справедливо неравенство $\lambda v_0 \leq C$ на K . По той же причине ввиду непрерывности M всегда можно подобрать строго положительную функцию $r = r(z) < \rho(z, \partial G)$, $z \in G$, так, что в обозначениях (7.4) выполнено

$$M^{(r)}(z) \leq M(z) - v_0(z), \quad z \in G. \quad (7.13)$$

Выполнены все условия теоремы 7.1 для $\nu = \delta_{z_0}$ в случае справедливости утверждения 2) и для $\nu = m_z^{(t)}$ при посылке 4). При этом можно считать, что все меры μ абсолютно непрерывны по m . Следовательно, найдется функция $w \in H$, для которой

$$w \leq F^{(r)} = M^{(r)} - u^{(r)} \quad \text{на } G.$$

Отсюда, учитывая субгармоничность u и (7.13), получаем

$$u + w \leq u^{(r)} + w \leq M^{(r)} \leq M - v_0 \quad \text{на } G.$$

Последнее для функции $v = w + v_0$ из H даёт (7.11), и теорема доказана.

В заключение параграфа приведем простые примеры выпуклых подконусов в $\text{SH}(G)$, $G \subset \mathbb{R}^n$ или $G \subset \mathbb{C}^n$, удовлетворяющих условию (L*) или (CL) и в итоге условиям теоремы 7.2. Эти примеры легко получаются из основных свойств (плюри)субгармонических и (плюри)гармонических функций.

ПРИМЕР 7.1. Конусы $\text{SH}(G)$, $\text{PSH}(G)$ и конус всех выпуклых в G функций удовлетворяют обоим этим условиям и являются конусами с вершиной в нуле, содержащими строго отрицательную функцию (например, тождественную -1), т.е. удовлетворяет всем условиям теоремы 7.2 [3, приложение I, замечание (2)].

ПРИМЕР 7.2. Конус с вершиной в нуле (пространство) всех (плюри)гармонических в G функций удовлетворяет второму условию, но не первому, и содержит функцию, тождественную -1 , т.е. удовлетворяет условиям теоремы 7.2. То же самое верно для пространства всех (плюри)гармонических многочленов степени не выше некоторого $k \in \mathbb{N}$.

ПРИМЕР 7.3. Пусть $0 \in G$ и непрерывная действительная функция $\varphi \leq 0$ определена на некотором открытом множестве $A \subset G$. Подконус каждого из конусов примера 7.1, состоящий из функций, мажорируемых на A функцией вида $\lambda\varphi$, где $\lambda > 0$, и содержащий при этом строго отрицательную на G функцию, удовлетворяет всем условиям теоремы 7.2. При этом подконус может и не быть конусом с вершиной в нуле и, более того, может вообще не содержать постоянных.

ПРИМЕР 7.4. Пусть Ψ – некоторый класс гомеоморфизмов G на G . Подконус каждого из конусов примеров 7.1 и 7.2, выделяемый условием инвариантности относительно Ψ , т.е. условием $v(\psi(z)) = v(z)$, $\psi \in \Psi$, $z \in G$, наследует отмеченные в этих примерах свойства. Таковыми являются, например, подконусы периодических функций в $\text{SH}(G)$ или в $\text{PSH}(G)$ с фиксированным периодом.

Еще один достаточно общий пример конусов из $\text{SH}(G)$, удовлетворяющих первой паре условий, содержится в [2, § 1, замечание 1].

§ 8. К описанию нулевых множеств

Положительная мера Радона μ с компактным носителем в области $G \subset \mathbb{C}^n$ называется *представляющей мерой для точки* $z_0 \in G$ (см. пример 1 из [1, § 4]), если для любой плюригармонической в G функции h выполнено равенство

$$h(z_0) = \int h d\mu.$$

Как видно из (7.10), такая мера – то же самое, что и мера Йенсена для конуса (пространства) $\text{PH}(G)$.

Известно [9], что дивизор нулей голоморфной в односвязной области G функции f является дивизором нулей некоторой функции f^* из $H(G, M)$, если и только если найдется плюригармоническая в G функция h такая, что

$$\log |f(z)| + h(z) \leq M(z), \quad z \in G. \quad (8.1)$$

Действительно, $h \in \text{PH}(G)$ тогда и только тогда, когда найдется функция $g \in H(G)$ такая, что $h = \text{Re } g$ и $f^* = f \exp g$.

Таким образом, следующая теорема дает двойственную постановку задачи описания дивизоров нулей функций из $H(G, M)$ в терминах функции $f \in H(G)$, порождающей этот дивизор. Только для $G = \mathbb{C}^n$, $n \geq 1$, ранее эта теорема и последующая теорема 8.2 были установлены в [10], причем в более слабой форме.

ТЕОРЕМА 8.1. Пусть f – голоморфная в односвязной области G функция, $M \in C(G)$. Для существования плюригармонической в G функции h такой,

что выполнено (8.1), необходимо и достаточно, чтобы нашлась постоянная C такая, что

$$\int \log |f| d\mu \leq \int M d\mu + C \quad (8.2)$$

при всех представляющих мерах μ для некоторой фиксированной точки $z_0 \in G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим в качестве конуса H в теореме 7.2 пространство $\text{PH}(G)$. Известно, что всякая сходящаяся в $L^1_{\text{loc}}(G)$ последовательность гармонических функций сходится и в $C(G)$. Отсюда сразу следует секвенциальная замкнутость конуса $H = \text{PH}(G)$ в $L^1_{\text{loc}}(G)$, т.е. выполнено условие (CL) теоремы 7.1. Очевидно, выполнено и условие (M) теоремы 7.1, так как конус $H = \text{PH}(G)$ содержит все вещественные постоянные. Таким образом, выполнены условия теоремы 7.2 и эквивалентность, которую требуется доказать в теореме 8.1, следует из равносильности утверждений 1) и 2) теоремы 7.2 при $u = \log |f|$.

В случае одной переменной возможен вариант, более явно связанный с описанием нулевых множеств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.1. Пусть G – область в $\mathbb{C}$, $0 \in G$. Субгармоническую в $G \setminus \{0\}$ функцию V называем *представляющей функцией* (для точки 0 и области G), если $V \equiv 0$ вне некоторого компакта из G и

$$V(z) \leq -\log |z| + O(1), \quad z \rightarrow 0. \quad (8.3)$$

Последовательность точек $\Lambda = \{\lambda_n\} \subset G \subset \mathbb{C}$ называется *нулевым множеством* для подмножества $K \subset H(G)$, если существует функция $f \in K$ такая, что кратность нуля функции f в каждой точке $\lambda \in G$ равна числу повторений этой точки в последовательности Λ .

ТЕОРЕМА 8.2. Пусть G – односвязная область в $\mathbb{C}$, $0 \in G$, последовательность точек $\Lambda = \{\lambda_n\} \subset G$ и $0 \notin \Lambda$, $\lambda_n \rightarrow \partial G$ при $n \rightarrow +\infty$, а M – субгармоническая непрерывная в G функция с распределением масс Рисса ν_M . Последовательность Λ является нулевым множеством для $H(G, M)$ тогда и только тогда, когда найдется постоянная D такая, что

$$\sum_n V(\lambda_n) \leq \int V d\nu_M + D \quad (8.4)$$

для всех представляющих функций V (для точки 0 и области G).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Далее обозначаем через $\mathcal{M}_0(G)$ класс всех представляющих мер для точки $0 \in G$, а через $\mathcal{P}_0(G)$ – класс всех представляющих функций для точки $0 \in G$.

Потенциалом представляющей меры μ будем называть (см. [10]) функцию

$$V_\mu(\zeta) = \int \log |z - \zeta| d\mu(z) - \log |\zeta|, \quad \zeta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Справедливы

ЛЕММА 8.1 [11, предложение 1.4]. Пусть $\mu \in \mathcal{M}_0(G)$. Для любой субгармонической в односвязной области G , $0 \in G$, функции u_ν с распределением масс Рисса ν такой, что $u_\nu(0) \neq -\infty$, имеет место равенство

$$\int u_\nu d\mu = \int V_\mu d\nu + u_\nu(0).$$

ЛЕММА 8.2 [11, предложение 1.1]. Для любой односвязной области G , $0 \in G$, если $\text{supp } \mu \subset G$ и $\mu \in \mathcal{M}_0(\mathbb{C})$, то $\mu \in \mathcal{M}_0(G)$.

Отметим также, что для $\mu \in \mathcal{M}_0(G)$ всегда $V_\mu \in \mathcal{P}_0(G)$ (см. предложение 1.3 и часть доказательства предложения 1.5 из [11]). Другими словами, отображение P , определенное по правилу

$$P(\mu) = V_\mu, \quad \mu \in \mathcal{M}_0(G), \quad (8.5)$$

действует из класса $\mathcal{M}_0(G)$ в класс $\mathcal{P}_0(G)$. Более того, имеет место

ЛЕММА 8.3. Отображение $P: \mathcal{M}_0(G) \rightarrow \mathcal{P}_0(G)$, определенное в (8.5), биективно.

При $G = \mathbb{C}$ аналогичное утверждение для мер и функций Йенсена доказано в [11, предложение 4.1].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 8.3. То, что P – инъекция, устанавливается так же, как и при доказательстве [11, предложение 4.1].

Пусть V – произвольная представляющая функция. Покажем, что найдется представляющая мера μ такая, что $V(\zeta) = V_\mu(\zeta)$, $\zeta \neq 0$.

Обозначим через μ_0 распределение масс субгармонической в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ функции V . Функция $V \equiv 0$ вне некоторого компакта из G , следовательно, $\text{supp } \mu_0 \subset G$. Далее, точно так же, как при доказательстве [11, предложение 4.1], можно показать, что мера $\mu = \mu_0 + (1 - \mu_0)\delta \geq 0$, где δ – мера Дирака в нуле, есть представляющая мера для 0 и $\mathbb{C}$ с носителем в G , следовательно, по лемме 8.2 $\mu \in \mathcal{M}_0(G)$. Лемма доказана.

По лемме 8.1 для субгармонической функции M имеем

$$\int M d\mu = \int V_\mu d\nu_M + M(0), \quad \mu \in \mathcal{M}_0(G). \quad (8.6)$$

Пусть f_Λ – голоморфная функция с нулевым множеством Λ , $f_\Lambda(0) = 1$, которая существует по теореме Вейерштрасса. По лемме 8.1 для субгармонической функции $\log |f_\Lambda|$ имеем

$$\int \log |f_\Lambda| d\mu = \sum_n V_\mu(\lambda_n), \quad \mu \in \mathcal{M}_0(G). \quad (8.7)$$

Отсюда и из (8.6) следует, что (8.2) эквивалентно (после замены f на f_Λ) системе неравенств

$$\sum_n V_\mu(\lambda_n) \leq \int V_\mu d\nu_M + M(0) + C, \quad \mu \in \mathcal{M}_0(G). \quad (8.8)$$

Следовательно, по лемме 8.3 последняя система неравенств – в точности (8.4) при $D = M(0) + C$ для всех $V \in \mathcal{P}_0(G)$. Таким образом, теорема 8.2 эквивалентна теореме 8.1 при $f = f_\Lambda$, и тем самым она доказана.

ПРИМЕР 8.1. Проиллюстрируем применение теоремы 8.2 в простейшей ситуации пространства $H(\mathbb{D}, 0)$, где $\mathbb{D}$ – единичный круг в $\mathbb{C}$, а $M(z) \equiv 0$. Уже в этом случае особенности нового подхода просматриваются достаточно рельефно.

Классическая теорема Неванлинны показывает, что *последовательность* $\Lambda = \{\lambda_n\} \subset \mathbb{D}$ *есть нулевое множество для* $H(\mathbb{D}, 0)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\sum_n (1 - |\lambda_n|) < +\infty. \quad (8.9)$$

Получим ее как следствие теоремы 8.2.

Не умаляя общности, можно считать, что $0 \notin \Lambda$.

Пусть Λ – нулевое множество для $H(\mathbb{D}, 0)$. Тогда по теореме 8.2 для представляющих функций

$$V_r(\zeta) = \log^+ \frac{r}{|\zeta|}, \quad r < 1, \quad (8.10)$$

где $\log^+(t) \stackrel{\text{def}}{=} \max\{\log t, 0\}$, имеем

$$\sum_{|\lambda_n| \leq r} \log \frac{r}{|\lambda_n|} \leq D, \quad r < 1, \quad (8.11)$$

где постоянная D не зависит от $r < 1$. Последнее тривиальным образом эквивалентно (8.9) [12, гл. 6, § 5].

Обратно, пусть выполнено (8.9), т.е. (8.11). Пусть V – произвольная представляющая функция для 0 и $\mathbb{D}$. Тогда функция V тождественно равна нулю вне круга $\mathbb{D}(r) = \{\zeta: |\zeta| < r\}$ при некотором $r < 1$. Функция V_r из (8.10) гармонична в $\mathbb{D}(r) \setminus \{0\}$, значит, по определению 8.1 представляющей функции функция $V - V_r$ субгармонична в $\mathbb{D}(r) \setminus \{0\}$ и равна нулю при $|\zeta| = r$. В силу условия (8.3) она ограничена сверху в проколотой окрестности нуля, следовательно, точка 0 – устранимая особенность для функции $V - V_r$ [6, гл. III, § 2] и она продолжается как субгармоническая на все $\mathbb{D}(r)$. По принципу максимума $V - V_r \leq 0$ на $\mathbb{D} \setminus \{0\}$, откуда согласно (8.11) получаем

$$\sum_n V(\lambda_n) \leq \sum_n V_r(\lambda_n) = \sum_{|\lambda_n| \leq r} \log \frac{r}{|\lambda_n|} \leq D, \quad r < 1.$$

По теореме 8.2 это означает, что Λ есть нулевое множество для $H(\mathbb{D}, 0)$.

В последующем предполагается развить дальнейшие применения теорем 8.1 и 8.2 к конкретным пространствам функций.

§ 9. Переход к голоморфным функциям

В этом параграфе на основе классической теоремы Хёрмандера о решении $\bar{\partial}$ -задачи исследуются возможности замены плюрисубгармонической функции, минорирующей заданную, логарифмом модуля голоморфной функции, обладающей почти тем же свойством.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.1. Пусть G – псевдовыпуклая область в $\mathbb{C}^n$, $n \geq 1$, функция M непрерывна на G и $u \in \text{SH}(G)$. Если для некоторой плюрисубгармонической в G функции v выполнено неравенство

$$u(z) + v(z) \leq M(z), \quad z \in G, \quad (9.1)$$

то найдется голоморфная в G функция $q(z) \not\equiv 0$, удовлетворяющая неравенствам

$$u(z) + \log |q(z)| \leq \sup_{|z-\zeta| \leq \sigma_1} M(\zeta) + (n+2) \log(1+|z|+\sigma_1) - n \log \sigma_1 + C_1 \quad (9.2)$$

и

$$\log |q(z)| \leq \sup_{|z-\zeta| \leq \sigma_2} v(\zeta) + (n+2) \log(1+|z|+\sigma_2) - n \log \sigma_2 + C_2 \quad (9.3)$$

при любых σ_k , $0 < \sigma_k < \rho(z, \partial G)$, где постоянные C_k не зависят от σ_k и z , $k = 1, 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства потребуется

ЛЕММА 9.1. Допустим, что $Q^2 \in \text{SH}(G)$ и функция p на G принимает значения в $[-\infty, +\infty)$. Если

$$I = \int_G Q^2 \exp(-2p) dm < +\infty,$$

то

$$\log |Q(z)| \leq \sup_{|z-\zeta| \leq \sigma} p(\zeta) - n \log \sigma + C$$

для любого $z \in G$ и любого σ такого, что

$$0 < \sigma < \rho(z, \partial G), \quad (9.4)$$

где постоянная C не зависит от σ и z .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из субгармоничности функции Q^2 следует, что значение ее в каждой точке z при условии (9.4) не превышает среднего от этой функции по шару $z + B(\sigma)$, т.е.

$$Q^2(z) \leq \frac{A}{\sigma^{2n}} \int_{|z-\zeta| \leq \sigma} Q^2(\zeta) dm(\zeta),$$

где A – постоянная, зависящая только от n . Это влечет неравенства

$$\begin{aligned} Q^2(z) &\leq \frac{A}{\sigma^{2n}} \int_{|z-\zeta| \leq \sigma} Q^2(\zeta) \exp\left(-2p(\zeta) + 2 \sup_{|z-\zeta| \leq \sigma} p(\zeta)\right) dm(\zeta) \\ &\leq \exp\left(2 \sup_{|z-\zeta| \leq \sigma} p(\zeta)\right) \cdot \frac{A}{\sigma^{2n}} \int_{|z-\zeta| \leq \sigma} Q^2(\zeta) \exp(-2p(\zeta)) dm(\zeta) \\ &\leq \exp\left(2 \sup_{|z-\zeta| \leq \sigma} p(\zeta)\right) \cdot AI\sigma^{-2n}. \end{aligned}$$

Следовательно, мы имеем

$$2 \log |Q(z)| \leq 2 \sup_{|z-\zeta| \leq \sigma} p(\zeta) - 2n \log \sigma + \log AI.$$

Лемма доказана.

Согласно [3, теорема 5.12, следствие 5.11] и [2, лемма 2.1] существует функция $q \not\equiv 0$ такая, что

$$I = \int_{\mathbb{C}} |q(z)|^2 \exp(-2(v(z) + (n+2) \log(1+|z|))) dm(z) < +\infty. \quad (9.5)$$

Так как для $Q = |q|$ функция Q^2 субгармонична, по лемме 9.1 имеем (9.3) для любого $z \in G$ и любого σ_2 , удовлетворяющего условию (9.4), где постоянная C_2 не зависит от σ_2 и z .

По условию (9.1) $\exp(2u - 2M) \leq \exp(-2v)$. Следовательно, неравенство (9.5) влечет неравенство

$$I = \int_G (|q(z)|e^{u(z)})^2 \exp(-2(M(z) + (n+2) \log(1+|z|))) dm(z) < +\infty.$$

Так как неотрицательная функция $Q = |q|e^u = \exp(u + \log |q|)$ субгармонична, то такова же и функция Q^2 , следовательно, по лемме 9.1 выполнено (9.2) при требуемых условиях на σ_1 с соответствующей постоянной C_1 . Предложение доказано.

В случае $G = \mathbb{C}$ предложение 9.1 допускает следующее усиление.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.2. Пусть функции $M \in C(\mathbb{C})$ и $u \in \text{SH}(\mathbb{C})$. Если для некоторой субгармонической в $G = \mathbb{C}$ функции v выполнено неравенство (9.1), то для любого числа $\sigma > 0$ найдется целая функция $q(z) \not\equiv 0$ такая, что

$$\log |q(z)| \leq \sup_{|z-\zeta| \leq \sigma} v(\zeta), \quad z \in \mathbb{C}, \quad (9.6)$$

$$u(z) + \log |q(z)| \leq \sup_{|z-\zeta| \leq \sigma} M(\zeta), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (9.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для субгармонической функции v через μ_v обозначаем распределение масс Рисса функции v .

Мера $s^{(\sigma)}$ образована равномерным распределением единичной массы на окружности радиуса σ с центром в нуле.

а) Сначала рассмотрим случай $\mu_v(\mathbb{C}) < +\infty$. В этом случае можем записать v в виде (см. [11, с. 1109, 2а)])

$$v = v_R + \text{Re } g_R, \quad (9.8)$$

где g_R — целая функция, и для фиксированной константы $\sigma > 0$ имеем

$$v * s^{(\sigma)}(z) \geq -C, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (9.9)$$

где C – постоянная. Отсюда функция g_R из (9.8) удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} g_R(z) &= (\operatorname{Re} g_R * s^{(\sigma)})(z) = (v * s^{(\sigma)} - v_R * s^{(\sigma)})(z) \\ &\leq \sup_{|z-\zeta| \leq \sigma} v(\zeta) + C, \quad z \in \mathbb{C}. \end{aligned} \quad (9.10)$$

Так как функции u и v субгармонические, согласно (9.1) имеем

$$u + v * s^{(\sigma)} \leq u * s^{(\sigma)} + v * s^{(\sigma)} \leq M * s^{(\sigma)} \text{ на } \mathbb{C}.$$

Ввиду (9.9) это влечет неравенство

$$\begin{aligned} (u + \operatorname{Re} g_R)(z) &= (u + \operatorname{Re} g_R * s^{(\sigma)})(z) \\ &= (u + v * s^{(\sigma)} - v_R * s^{(\sigma)})(z) \leq \sup_{|z-\zeta| \leq \sigma} M(\zeta) + C. \end{aligned} \quad (9.11)$$

Согласно (9.10) и (9.11) функция $q = a \exp g_R$, где a – достаточно малая положительная постоянная, и есть искомая.

б) Теперь рассмотрим случай, когда функция v удовлетворяет условию $\mu_v(\mathbb{C}) = +\infty$. В этой ситуации найдется субгармоническая функция $w \not\equiv -\infty$ такая, что (см. [11, с. 1110, 26])

$$3 \log(1 + |z|^2) + w(z) \leq v(z), \quad |z| > R_1. \quad (9.12)$$

Тогда существует (см. [3, теорема 5.12, следствие 5.11]) целая функция $g \not\equiv 0$ такая, что

$$I = \int_{\mathbb{C}} |g(z)|^2 \exp(-2(w(z) + 2 \log(1 + |z|))) dm(z) < +\infty. \quad (9.13)$$

Так как функция $Q = |g|$ субгармоническая, по лемме 9.1 и условию (9.12) имеем

$$\begin{aligned} \log |g(z)| &\leq \sup_{|z-\zeta| \leq \sigma} w(\zeta) + 2 \log(1 + |z| + \sigma) - \log \sigma + C \\ &\leq \sup_{|z-\zeta| \leq \sigma} v(\zeta) + C_1, \quad z \in \mathbb{C}, \end{aligned} \quad (9.14)$$

где C_1 – постоянная.

По условиям (9.1) и (9.12)

$$u(z) - M(z) + 3 \log(1 + |z|^2) \leq -v(z) + 3 \log(1 + |z|^2) \leq -w(z), \quad |z| \geq R_1.$$

Следовательно, неравенство (9.13) влечет неравенство

$$\int_{\mathbb{C}} (|g(z)| e^{u(z)})^2 \exp(-2M(z)) dm < +\infty.$$

Так как функция $Q = |g|e^u = \exp(u + \log |g|)$ субгармоническая, по лемме 9.1 получаем для любого $\sigma > 0$ неравенство

$$u(z) + \log |g(z)| \leq \sup_{|z-\zeta| \leq \sigma} M(\zeta) + C_2, \quad z \in \mathbb{C},$$

где $C_2 \geq 0$ – постоянная. Следовательно, учитывая (9.14), получим, что функция $q = a g \exp(-C_2)$, где a – достаточно малая положительная постоянная, и есть искомая. Предложение доказано.

**§ 10. Задача о мультипликаторе и нетривиальность
весовых пространств голоморфных функций**

Пусть G – область в $\mathbb{C}^n$ и непрерывная действительная функция φ определена на некотором открытом множестве $A \subset G$ при всех $z \in A$. Полагаем

$$K(\varphi, A) \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in \text{PSH}(G): \text{ для некоторого числа } \lambda > 0 \quad v(z) \leq \lambda \varphi(z), \quad z \in A\}.$$

Мы допускаем, что $A = \emptyset$. В этом случае $K(\varphi, A) = \text{PSH}(G)$. Класс $K(\varphi, A)$ – выпуклый конус. Вообще говоря, конус $K(\varphi, A)$ может оказаться и пустым множеством (например, $G = A = \mathbb{C}^n$ и $\varphi \rightarrow -\infty$ при $z \rightarrow \infty$). Если $\varphi(z) \equiv 0$, то, очевидно, этот конус непуст и содержит строго отрицательную функцию (например, тождественно равную -1).

Полагаем:

1) для ограниченной области G

$$l_G(z) \stackrel{\text{def}}{=} \log \frac{1}{\rho(z, \partial G)};$$

2) для $G = \mathbb{C}^n$

$$l_G(z) \stackrel{\text{def}}{=} \log(2 + |z|);$$

3) для неограниченной области $G \neq \mathbb{C}^n$

$$l_G(z) \stackrel{\text{def}}{=} \max \left\{ \log(2 + |z|), \log \frac{1}{\rho(z, \partial G)} \right\}.$$

Введем пространство голоморфных в G функций

$$\text{HK}(\varphi, A) \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in H(G): \text{ существует число } \lambda > 0 \text{ такое, что} \\ \log |f(z)| \leq \lambda \varphi(z) + \text{const } l_G(z) + \text{const}, \quad z \in A\}.$$

Для функции $\varphi \in C(A)$ и для чисел $\alpha \geq 1$ и $\gamma \geq 0$ полагаем

$$\varphi_{\alpha, \gamma}(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sup \{ \varphi(\zeta): |z - \zeta| \leq \min \{ (2 + |z|)^{-\gamma}, (\rho(z, \partial G)/2)^\alpha \} \}. \quad (10.1)$$

Очевидно, последняя функция определена на множестве

$$A_{\alpha, \gamma} \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in A: \rho(z, \partial A) > \min \{ (2 + |z|)^{-\gamma}, (\rho(z, \partial G)/2)^\alpha \} \}.$$

ТЕОРЕМА 10.1. Пусть G – псевдовыпуклая область в $\mathbb{C}^n$, $n \geq 1$, $0 \in G$, $u \in \text{SH}(G)$, $M \in C(G)$, непрерывная действительная функция φ определена на некотором открытом множестве $A \subset G$, $\varphi(z) \leq 0$ на A , и выпуклый конус $K(\varphi, A) \subset \text{PSH}(G)$ содержит строго отрицательную в G функцию.

Если существует постоянная $C \in \mathbb{R}$ такая, что неравенство

$$\int u \, d\mu \leq \int M \, d\mu + C \quad (10.2)$$

выполнено при любой мере Йенсена μ для 0 относительно конуса $K(\varphi, A)$, то найдется голоморфная в G функция $q(z) \not\equiv 0$ такая, что для любых $\alpha_1 \geq 1$ и $\gamma_1 \geq 0$ выполнено неравенство

$$u(z) + \log |q(z)| \leq M_{\alpha_1, \gamma_1}(z) + \text{const } l_G(z) + \text{const}, \quad z \in G, \quad (10.3)$$

а функция M_{α_1, γ_1} определена по правилу (10.1) на всем G . При этом для любых $\alpha_2 \geq 1$ и $\gamma_2 \geq 0$ функция q принадлежит пространству $\text{HK}(\varphi_{\alpha_2, \gamma_2}, A_{\alpha_2, \gamma_2})$.

Эта теорема при $u = \log |f|$, где f – голоморфная функция, в терминах мер Йенсена дает условия существования мультипликатора q из пространства $\text{HK}(\varphi_{\alpha_2, \gamma_2}, A_{\alpha_2, \gamma_2})$, переводящего при умножении функцию f в пространство $H(G, M_{\alpha_1, \gamma_1} + \text{const } l_G)$. Теорема имеет смысл только в том случае, когда границы A и G имеют непустое пересечение или $A = \emptyset$ (в последнем случае $K(\varphi, A) = \text{PSH}(G)$ и $\text{HK}(\varphi_{\alpha_2, \gamma_2}, A_{\alpha_2, \gamma_2}) = H(G)$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 10.1. Как уже отмечалось в примере 7.3, выпуклый конус $H = K(\varphi, A)$ при $\varphi \leq 0$ удовлетворяет условиям теоремы 7.2. По условию (10.2) из импликации 2) $\Rightarrow$ 1) теоремы 7.2 найдется функция $v \in K(\varphi, A)$ такая, что

$$u(z) + v(z) \leq M(z), \quad z \in G. \quad (10.4)$$

По предложению 9.1, где (9.1) совпадает с (10.2), найдется голоморфная в G функция $q(z) \not\equiv 0$, для которой выполнено (9.2) и (9.3), и при этом σ_k можно выбирать независимо от q .

Полагаем

$$\sigma_k = \min \{ (2 + |z|)^{-\gamma_k}, (\rho(z, \partial G)/2)^{\alpha_k} \}, \quad k = 1, 2.$$

Тогда, как нетрудно установить, из оценок (9.2) и (9.3) вытекают соответственно неравенство (10.3) и условие $q \in \text{HK}(\varphi_{\alpha_2, \gamma_2}, A_{\alpha_2, \gamma_2})$. Теорема доказана.

В случае $G = \mathbb{C}$ теорема 10.1 допускает следующее уточнение.

ТЕОРЕМА 10.2. Пусть $M \in C(\mathbb{C})$, $u \in \text{SH}(\mathbb{C})$, непрерывная действительная функция φ определена на некотором открытом множестве $A \subset \mathbb{C}$, $\varphi(z) \leq 0$ на A , и выпуклый конус $K(\varphi, A) \subset \text{SH}(G)$ содержит строго отрицательную в G функцию.

Если существует постоянная $C \in \mathbb{R}$ такая, что неравенство (10.2) выполнено при любой мере Йенсена μ для 0 относительно конуса $K(\varphi, A)$, то для любого числа $\sigma > 0$ найдется голоморфная в G функция $q(z) \not\equiv 0$ такая, что

$$\log |q(z)| \leq \sup_{|z-\zeta| \leq \sigma} \varphi(\zeta), \quad z \in A(\sigma),$$

где

$$A(\sigma) \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in A: \rho(z, \partial A) > \sigma\} \quad (10.5)$$

и

$$u(z) + \log |q(z)| \leq \sup_{|z-\zeta| \leq \sigma} M(\zeta), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (10.6)$$

Доказательство опускаем. Оно аналогично доказательству теоремы 10.1, только вместо предложения 9.1 следует использовать предложение 9.2. Отметим здесь

СЛЕДСТВИЕ 10.1. Пусть $M \in C(\mathbb{C})$, $u \in \text{SH}(\mathbb{C})$, A – открытое множество $\mathbb{C}$. Если существует постоянная C такая, что неравенство (10.2) выполнено при любой мере Йенсена μ для 0 относительно конуса $K(0, A)$ всех отрицательных на A субгармонических функций, то для любого числа $\sigma > 0$ найдется голоморфная в G функция $q(z) \not\equiv 0$ такая, что выполнена оценка (10.6) и функция q ограничена на определенном в (10.5) множестве $A(\sigma)$.

Для получения следствия достаточно выбрать в теореме 10.2 функцию $\varphi(z) \equiv 0$, $z \in A$, и учесть, что конус $K(\varphi, A)$ в этом случае содержит функцию, тождественно равную -1 .

Следующее следствие дает условия нетривиальности весовых пространств голоморфных функций.

СЛЕДСТВИЕ 10.2. Пусть G – псевдовыпуклая область в $\mathbb{C}^n$, $n \geq 1$, $0 \in G$, $M \in C(G)$, непрерывная действительная функция φ определена на открытом множестве $A \subset G$, $\varphi(z) \leq 0$ на A , и выпуклый конус $K(\varphi, A) \subset \text{PSH}(G)$ содержит строго отрицательную в G функцию.

Если

$$\inf \int M d\mu \geq -\infty,$$

где $\inf$ берется по всем мерам Йенсена μ для 0 относительно конуса $K(\varphi, A)$, то найдется функция $q(z) \not\equiv 0$ такая, что для любых $\alpha_k \geq 1$ и $\gamma_k \geq 0$, $k = 1, 2$,

$$q \in H(G, M_{\alpha_1, \gamma_1} + \text{const } l_G) \cap \text{HK}(\varphi_{\alpha_2, \gamma_2}, A_{\alpha_2, \gamma_2}).$$

Это следствие сразу следует из теоремы 10.1 при $u(z) \equiv 0$.

Частный случай этого следствия при $A = \emptyset$ дает условие нетривиальности пространства $H(G, M_{\alpha_1, \gamma_1} + \text{const } l_G)$.

§ 11. О дивизорах неединственности для весовых пространств голоморфных функций

Дивизором в области $G \subset \mathbb{C}^n$ (см. [9, гл. IV]) называем пару $D = (\Lambda, k)$, составленную из аналитического множества Λ коразмерности 1 (носителя дивизора) и целочисленной функции k (порядка дивизора), непрерывной на множестве Λ^* регулярных точек Λ .

Положительный дивизор Λ на G называем дивизором неединственности для заданного пространства $P \subset H(G)$, если существует функция $f \in P$ с дивизором

нулей $\Lambda_f \geq \Lambda$ (последнее означает, что дивизор $\Lambda_f - \Lambda$ положителен). В противном случае Λ – дивизор единственности для P .

Если вторая проблема Кузена разрешима для любого покрытия области G , то для любого положительного дивизора Λ найдется голоморфная в G функция с дивизором нулей, совпадающим с Λ . Всякую такую функцию будем называть *определяющей функцией для дивизора Λ* .

Из следующей теоремы получим необходимые условия для дивизора неединственности в пространстве $H(G, M)$ и достаточные условия для дивизора неединственности в весовом пространстве, близком к $H(G, M)$. Несколько более слабый вариант этой теоремы для $G = \mathbb{C}^n$, $n \geq 1$, был использован ранее для описания дивизоров (не-)единственности и решения ряда экстремальных задач в конкретных классах целых функций в работах [13]–[17].

ТЕОРЕМА 11.1. Пусть G – псевдовыпуклая область, для любого покрытия которой разрешима вторая проблема Кузена, и Λ – дивизор на G с определяющей функцией f_Λ , $M \in C(G)$.

Если Λ – дивизор неединственности для $H(G, M)$, то для любой точки $z \in G$ и числа $t < \rho(z, \partial G)$ (соответственно для любой точки $z \in G \setminus E$, где E – некоторое плюриполярное множество в G) существует постоянная $C \in \mathbb{R}$ такая, что неравенство

$$\int \log |f_\Lambda| d\mu \leq \int M d\mu + C \quad (11.1)$$

выполнено при всех выметаниях μ меры $m_z^{(t)}$ (соответственно при всех мерах Йенсена μ для $z \in G \setminus E$) относительно $\text{PSH}(G)$.

Обратно, если существуют точка $z \in G$ и постоянная C такие, что (11.1) выполнено при всех мерах Йенсена μ для z относительно $\text{PSH}(G)$, то для любых чисел $\alpha \geq 1$ и $\gamma \geq 0$ Λ – дивизор неединственности для пространства $H(G, M_{\alpha, \gamma} + \text{const } l_G)$ (в обозначениях § 10).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Λ – дивизор неединственности для $H(G, M)$. Значит, $\Lambda \leq \Lambda_f$, где f – некоторая функция из $H(G, M)$. Не умаляя общности, можно считать, что (поделив, если это необходимо, f на постоянную)

$$\log |f(z)| \leq M(z), \quad z \in G. \quad (11.2)$$

Так как $\Lambda_f - \Lambda \geq 0$ и для любого покрытия G разрешима вторая проблема Кузена, функция $q = f/f_\Lambda$ голоморфна в G . Отсюда $f_\Lambda q = f$ и из (11.2) следует

$$\log |f_\Lambda(z)| + \log |q(z)| \leq M(z), \quad z \in G.$$

Из последнего соотношения при $u = \log |f_\Lambda|$ и $v = \log |q(z)|$ в силу импликации 1) $\Rightarrow$ 4) (соответственно 1) $\Rightarrow$ 3)) теоремы 7.2 получаем первую часть теоремы 11.1.

Обратно, не умаляя общности, во второй части теоремы можно считать $z = 0$. Воспользуемся частным случаем теоремы 10.1 при $A = \emptyset$ (в этом случае $K(\varphi, A) = \text{PSH}(G)$) и при $u = \log |f_\Lambda|$, $\alpha_1 = \alpha$ и $\gamma_1 = \gamma$. Заключение (10.3) теоремы 10.1

означает, что некоторая голоморфная функция $f = f_\Lambda q$, где $q \not\equiv 0$, принадлежит пространству $H(G, M_{\alpha, \gamma} + \text{const } l_G)$ и ее дивизор нулей $\Lambda_f \geq \Lambda$. Теорема доказана.

В случае одной переменной возможен вариант этой теоремы, более явно связанный с дивизором (последовательностью) Λ . Последовательность $\Lambda \subset G$ называем *множеством неединственности* для пространства $P \subset H(G)$, если существует функция $f \in P$, $f \not\equiv 0$, такая, что кратность нуля функции f в каждой точке $\lambda \in G$ не меньше числа повторений этой точки в последовательности Λ (пишем $f(\Lambda) = 0$). В противном случае Λ – *множество единственности* для P . Эти определения при $n = 1$ полностью согласуются с определением дивизоров (не)единственности для P .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11.1. Пусть G – область в $\mathbb{C}$, $0 \in G$. Субгармоническую положительную (≥ 0) в $G \setminus \{0\}$ функцию V называем *функцией Йенсена* (для точки 0 и области G), если $V \equiv 0$ вне некоторого компакта из G и

$$V(z) \leq -\log |z| + O(1), \quad z \rightarrow 0. \quad (11.3)$$

ТЕОРЕМА 11.2. Пусть G – односвязная область в $\mathbb{C}$, $0 \in G$, M – субгармоническая непрерывная функция в G с распределением масс Рисса ν_M , $\Lambda = \{\lambda_n\}$ – последовательность комплексных чисел из G , $0 \notin \Lambda$, $\lambda_n \rightarrow \partial G$ при $n \rightarrow +\infty$.

Если Λ – множество неединственности для пространства $H(G, M)$, то найдется постоянная D такая, что

$$\sum_n V(\lambda_n) \leq \int V d\nu_M + D \quad (11.4)$$

для всех функций Йенсена V (для точки 0 и области G).

Обратно, если найдется постоянная D такая, что (11.4) выполнено для всех функций Йенсена V (для 0 и области G), то для любых чисел $\alpha \geq 1$ и $\gamma \geq 0$ Λ – множество неединственности для пространства $H(G, M_{\alpha, \gamma} + \text{const } l_G)$ (в обозначениях § 10).

Более тонкий вариант этой теоремы для $G = \mathbb{C}$ был получен ранее в [11, основная теорема и предложение 4.2].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Далее обозначаем через $\mathfrak{M}(G)$ класс всех мер Йенсена для точки $0 \in G$, а через $\mathcal{J}(G)$ – класс всех функций Йенсена для точки $0 \in G$. Отметим, что меры Йенсена и функции Йенсена – частный случай соответственно представляющих мер и представляющих функций (см. § 8). Поэтому для любой меры $\mu \in \mathfrak{M}(G)$ справедлива лемма 8.1.

Рассмотрим отображение P , заданное по правилу

$$P(\mu) = V_\mu, \quad \mu \in \mathfrak{M}(G),$$

где V_μ – потенциал меры Йенсена μ , определенный при доказательстве теоремы 8.2. Оно действует из класса $\mathfrak{M}(G)$ в класс $\mathcal{J}(G)$ [11, предложения 1.3 и 1.5]. Имеет место

ЛЕММА 11.1. *Отображение $P: \mathfrak{M}(G) \rightarrow \mathcal{J}(G)$ биективно.*

Эта лемма получается из [11, предложения 1.1 и 4.1].

ЛЕММА 11.2. *Пусть f_Λ – голоморфная функция с нулевым множеством Λ , $f_\Lambda(0) = 1$. Тогда следующие два соотношения эквивалентны:*

$$\sup_{V \in \mathcal{J}(G)} \left(\sum_n V(\lambda_n) - \int V d\nu_M \right) < +\infty, \quad (11.5)$$

$$\sup_{\mu \in \mathfrak{M}(G)} \left(\int \log |f_\Lambda| d\mu - \int M d\mu \right) < +\infty. \quad (11.6)$$

Эта лемма сразу следует из соотношений (8.6)–(8.8) для $\mu \in \mathfrak{M}(G)$ с учетом леммы 11.1.

Если Λ – множество неединственности для $H(G, M)$, то

$$f = f_\Lambda q \in H(G, M), \quad (11.7)$$

где q – голоморфная в G функция. Не умаляя общности, можно считать, что $q(0) \neq 0$. В противном случае достаточно поделить $q(z)$ на степенную функцию z^k , где k – кратность корня функции q в нуле.

В силу (11.7) $\log |f_\Lambda| - M \leq \log |q|$, где C – постоянная. Интегрируя это неравенство по всем мерам $\mu \in \mathfrak{M}$, ввиду

$$\int 1 d\mu = 1, \quad \int -\log |q| d\mu \leq -\log |q(0)|$$

получаем (11.6). Из импликации (11.6) $\Rightarrow$ (11.5) леммы 11.2 первая часть теоремы доказана.

Обратно, если для всех $\mu \in \mathfrak{M}(G)$ выполнено (11.4), т.е. имеет место (11.5), то по лемме 11.2 выполнено и (11.6). Это совпадает с неравенством (11.1) для всех $\mu \in \mathfrak{M}(G)$. Следовательно, по теореме 11.1 Λ – множество неединственности для $H(G, M_{\alpha, \gamma} + \text{const } l_G)$. Теорема доказана.

§ 12. О представлении мероморфных функций как частного голоморфных функций

Пусть f – мероморфная в области $G \subset \mathbb{C}^n$ функция, представленная в виде отношения $f = p_0/q_0$ двух фиксированных функций p_0 и q_0 из $H(G)$, взаимно простых в каждой точке $z \in G$ [18]. При $n = 1$ это означает, что функции p_0 и q_0 не имеют общих нулей. Такое представление мероморфной функции в G всегда возможно для любой области G , в которой вторая проблема Кузена разрешима для любого покрытия области G (при $n = 1$ это всегда так).

Традиционные характеристики роста мероморфной функции f (такие, как характеристики Неванлинны, Симидзу–Альфорса) выражаются интегралами от субгармонических функций $\max\{\log |p_0|, \log |q_0|\}$ или $\log(|p_0|^2 + |q_0|^2)^{1/2}$. Всюду в этом параграфе обе последние функции обозначаем одним символом u_f .

Из следующей теоремы получим двойственную постановку задачи о представлении мероморфной функции в виде отношения голоморфных функций из $H(G, M)$, взаимно простых в каждой точке $z \in G$. Более слабый вариант этой теоремы для $G = \mathbb{C}^n$ был доказан в [10].

ТЕОРЕМА 12.1. Пусть f – мероморфная функция в односвязной области $G \subset \mathbb{C}^n$, $n \geq 1$, функция M принадлежит $C(G)$ и для любого покрытия области G разрешима вторая проблема Кузена. Для существования голоморфных в G функций p и q таких, что $f = p/q$, функции p и q принадлежат $H(G, M)$ и взаимно просты в каждой точке $z \in G$, необходимо и достаточно, чтобы нашлась постоянная C такая, что

$$\int u_f d\mu \leq \int M d\mu + C \quad (12.1)$$

при всех представляющих мерах μ для некоторой фиксированной точки $z_0 \in G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть функции p и q таковы, что $f = p/q$, функции p и q принадлежат $H(G, M)$ и взаимно просты в каждой точке $z \in G$. Тогда $f = p_0/q_0 = p/q$, где введенные в начале параграфа функции p_0 и q_0 принадлежат $H(G)$ и взаимно просты в каждой точке $z \in G$. В силу взаимной простоты функций p_0 и q_0 $p/p_0 = q/q_0 = g$ – голоморфная в G функция. Аналогично, в силу взаимной простоты функций p и q $p_0/p = q_0/q = 1/g$ – тоже голоморфная в G функция. Следовательно,

$$p = p_0 g, \quad q = q_0 g \in H(G, M), \quad g \in H(G), \quad g \text{ не имеет нулей в } G. \quad (12.2)$$

Полагаем

$$h = \log |g| = \operatorname{Re} \log g \quad (12.3)$$

– плюригармоническая в G функция, так как g не имеет нулей в G . Из (12.2) субгармоническая функция u_f , определенная выше, удовлетворяет условию

$$u_f + h \leq M + \text{const на } G. \quad (12.4)$$

Рассмотрим в качестве конуса H в теореме 7.2 конус $\operatorname{PH}(G)$, $u = u_f$. Как и при доказательстве теоремы 8.1, убеждаемся, что выполнены условия этой теоремы. Тогда из (12.4) ввиду импликации 1) $\Rightarrow$ 2) теоремы 7.2 получаем (12.1) при всех представляющих мерах μ для некоторой фиксированной точки $z_0 \in G$.

Обратно, при том же выборе конуса H и функции u при выполнении (12.1) ввиду импликации 2) $\Rightarrow$ 1) получаем (12.4) для некоторой плюригармонической функции h , и при этом найдется голоморфная в G функция g , удовлетворяющая (12.3) и не имеющая нулей в G . Выберем функции p и q , как в (12.2). При таком выборе ввиду (12.2) $f = p/q$ и функции p и q взаимно просты в каждой точке из G , и в силу (12.4) обе эти функции принадлежат $H(G, M)$. Теорема доказана.

Если не требовать, чтобы функции p и q в предыдущей теореме были взаимно просты в каждой точке, то имеет место

ТЕОРЕМА 12.2. Пусть f – мероморфная функция в области $G \subset \mathbb{C}^n$, $n \geq 1$, функция M принадлежит $C(G)$ и для любого покрытия области G разрешима вторая проблема Кузена. Для существования голоморфных в G функций p и q таких, что $f = p/q$ и функции p и q принадлежат $H(G, M)$, необходимо, чтобы нашлась постоянная C такая, что

$$\int u_f d\mu \leq \int M d\mu + C \quad (12.5)$$

при всех мерах Йенсена μ для некоторой фиксированной точки $z_0 \in G$ относительно $\text{PSH}(G)$.

Обратно, если существует точка $z_0 \in G$ и постоянная C такие, что (12.5) выполнено при всех мерах Йенсена μ для точки $z_0 \in G$ относительно $\text{PSH}(G)$, то для любых чисел $\alpha \geq 1$ и $\gamma \geq 0$ найдется представление функции $f = p/q$, где голоморфные в G функции p и q принадлежат (в обозначениях § 10) пространству $H(G, M_{\alpha, \gamma} + \text{const } l_G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f = p/q$ и функции p и q принадлежат $H(G, M)$. Тогда $f = p_0/q_0 = p/q$, где введенные в начале параграфа функции p_0 и q_0 из $H(G)$ взаимно просты в каждой точке $z \in G$. В силу взаимной простоты функций p_0 и q_0 $p/p_0 = q/q_0 = g$ – голоморфная в G функция, $g \neq 0$. При этом $p = p_0 g \in H(G, M)$ и $q = q_0 g \in H(G, M)$, откуда в силу определения функции u_f имеем

$$u_f + \log |g| \leq M + \text{const} \quad \text{на } G.$$

Из последнего соотношения ввиду импликации $1) \Rightarrow 2)$ теоремы 7.2 (при $u = u_f$ и $v = \log |g| \in \text{PSH}(G)$) получаем (12.5) при всех мерах Йенсена μ для некоторой фиксированной точки $z_0 \in G$ относительно $\text{PSH}(G)$.

Обратно, пусть выполнено (12.5) в смысле второй части теоремы. Не умаляя общности, во второй части теоремы можно считать $z = 0$. Воспользуемся частным случаем теоремы 10.1 при $A = \emptyset$ (в этом случае $K(\varphi, A) = \text{PSH}(G)$) и при $u = u_f$, $\alpha_1 = \alpha$ и $\gamma_1 = \gamma$. Заключение (10.3) теоремы 10.1 означает, что для некоторой голоморфной в G функции $g \neq 0$ выполнено неравенство

$$u_f(z) + \log |g(z)| \leq M_{\alpha, \gamma}(z) + \text{const } l_G(z) + \text{const}, \quad z \in G.$$

По определению функции u_f это означает, что как функция $p = p_0 g$, так и функция $q = q_0 g$ принадлежат пространству $H(G, M_{\alpha, \gamma} + \text{const } l_G)$. Теорема доказана.

Более слабые варианты этой теоремы были использованы для получения новых результатов о представлении мероморфных функций на $\mathbb{C}^n$, $n \geq 1$, в виде частного целых функций с ограничениями на их рост через классические характеристики Неванлинны и Симицзу–Альфorsa в работах [13], [16].

Ограничимся здесь применением предыдущей теоремы 12.1 для доказательства классической теоремы Неванлинны о представлении мероморфных функций ограниченной характеристики в единичном круге $\mathbb{D} \in \mathbb{C}$.

ПРИМЕР 12.1. Пусть f – мероморфная функция ограниченной характеристики в $\mathbb{D}$. Это означает, что характеристика Неванлинны

$$T_f(r) \leq \text{const} \quad \text{при всех } r < 1. \quad (12.6)$$

Для простоты считаем, что $f(0) = 1$. Один из вариантов определения характеристики Неванлинны таков:

$$T_f(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_f(re^{i\theta}) d\theta, \quad (12.7)$$

где $u_f = \max\{\log |p_0|, \log |q_0|\}$, $f = p_0/q_0$ и голоморфные функции p_0 и q_0 не имеют общих нулей, $p_0(0) = q_0(0) = 1$.

Пусть μ – представляющая мера для точки 0 в $\mathbb{D}$ с носителем в круге радиуса меньше некоторого $r < 1$, т.е. в $\mathbb{D}(r)$. Рассмотрим выметание μ^b (в классическом смысле [5]) меры μ на границу круга $\mathbb{D}(r)$. По свойствам выметания при этом для любой субгармонической функции u имеем

$$\int u d\mu \leq \int u d\mu^b, \quad u \in \text{SH}(\mathbb{D}). \quad (12.8)$$

Так как μ – представляющая мера для точки 0 в $\mathbb{D}$, то в силу (12.8) мера μ^b также является представляющей мерой для точки 0 в $\mathbb{D}$ и сосредоточена на окружности радиуса r с центром в нуле. Таким образом, меру μ^b можно считать зависящей только от аргумента θ для $z = re^{i\theta}$, и имеют место равенства

$$\int_0^{2\pi} e^{ik\theta} d\mu^b(\theta) = 0, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad \int_0^{2\pi} 1 d\mu^b(\theta) = 1.$$

Последнее означает, что $d\mu^b(\theta) = \frac{1}{2\pi} d\theta$. Отсюда согласно (12.8), (12.7) и (12.6) получаем

$$\int u_f d\mu \leq \text{const}$$

при всех представляющих мерах μ для точки 0. Следовательно, при $M \equiv 0$ выполнено условие (12.1) теоремы 12.1 и функция f представляется в виде отношения двух голоморфных функций: $f = p/q$, не имеющих общих нулей, причем $|p| \leq 1$ и $|q| \leq 1$ на $\mathbb{D}$.

Часть результатов настоящей работы была анонсирована в [19].

Добавление при корректуре. После того как первоначальные варианты первой [1] и второй части настоящей работы были направлены в печать, были опубликованы статьи Б. Коула и Т. Рансфорда [20], Ф. Ларуссона и Р. Сигурдссона [21] и пока недоступные, к сожалению, нам работы Е. А. Полецкого [22]–[23], которые наряду с работами, упомянутыми во введении, в частном случае конуса $H = \text{SH}(G)$ или $H = \text{PSH}(G)$ имеют непустое пересечение с результатами первой части [1, теоремы 5.1 и 6.1] и с теоремами 7.1 и 7.2. Так, основные типы огибающих из этих работ (см., например, [21, основная теорема]) можно трактовать как супремальные функционалы (см. [1, § 4]), построенные по специальным отношениям (пред)порядка, определяемого через обычный поточечный порядок, форму Леви или число Лелона. Мы не имеем возможности остановиться здесь на более подробной расшифровке отмеченных взаимосвязей.

Список литературы

1. Хабибуллин Б. Н. Двойственное представление суперлинейных функционалов и его применения в теории функций. I // Изв. РАН. Сер. матем. 2001. Т. 65. № 4. С. 205–224.
2. Хабибуллин Б. Н. Наименьшая плюрисупергармоническая мажоранта и мультипликаторы целых функций. I // Сиб. матем. журн. 1992. Т. 33. № 1. С. 173–178.
3. Лелон П., Груман Л. Целые функции многих комплексных переменных. М.: Мир, 1989.
4. Бурбаки Н. Меры, интегрирование мер. М.: Наука, 1967.
5. Ландкоф Н. С. Основы современной теории потенциала. М.: Наука, 1966.
6. Брело М. Основы классической теории потенциала. М.: Мир, 1964.
7. Хёрмандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. I. М.: Мир, 1986.
8. Азарин В. С. Об асимптотическом поведении субгармонических функций конечного порядка // Матем. сб. 1979. Т. 108. № 2. С. 147–167.
9. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. Ч. II. М.: Наука, 1985.
10. Хабибуллин Б. Н. О нулевых множествах для целых функций и представлении мероморфных функций // Матем. заметки. 1996. Т. 59. № 4. С. 611–617.
11. Хабибуллин Б. Н. Множества единственности в пространствах целых функций одной переменной // Изв. АН СССР. Серия матем. 1991. Т. 55. № 5. С. 1101–1123.
12. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. М.: Наука, 1968.
13. Хабибуллин Б. Н. Наименьшая плюрисупергармоническая мажоранта и мультипликаторы целых функций. II. Алгебры функций конечного λ -типа // Сиб. матем. журн. 1992. Т. 33. № 3. С. 186–191.
14. Хабибуллин Б. Н. О типе целых и мероморфных функций // Матем. сб. 1992. Т. 183. № 11. С. 35–44.
15. Хабибуллин Б. Н. Оценки объема нулевых множеств голоморфных функций // Изв. вузов. Математика. 1992. № 3(358). С. 58–63.
16. Хабибуллин Б. Н. Теорема о наименьшей мажоранте и ее применения. II. Целые и мероморфные функции конечного порядка // Изв. РАН. Сер. матем. 1993. Т. 57. № 3. С. 70–91.
17. Хабибуллин Б. Н. Неконструктивные доказательства теоремы Берлинга–Мальявена о радиусе полноты и теоремы неединственности для целых функций // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. № 4. С. 125–148.
18. Хёрмандер Л. Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных. М.: Мир, 1968.
19. Хабибуллин Б. Н. Двойственное представление суперлинейных функционалов // Комплексный анализ, дифференциальные уравнения, численные методы и приложения. I. Комплексный анализ. Уфа: РАН и Институт математики с ВЦ, 1996. С. 122–131.
20. Cole B. J., Ransford T. J. Subharmonicity without upper semicontinuity // J. Funct. Anal. 1997. V. 147. P. 420–442.
21. Larusson F., Sigurdsson R. Plurisubharmonic functions and analytic discs on manifolds // J. reine angew. Math. 1998. V. 501. P. 1–39.
22. Poletsky E. A. Disk envelopes of functions. I // Complex Analysis in Contemporary Mathematics / Ed. E. M. Chirka. М.: Fasis, 1997. V. 42. № 1. P. 85–144.
23. Poletsky E. A. Disk envelopes of functions. II // J. Funct. Anal. 1999. V. 163. P. 111–132.

Башкирский государственный университет,
 математический факультет
 E-mail: algeom@bsu.bashedu.ru,
khabib-bulat@mail.ru

Поступило в редакцию
 25.VI.1997