Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Щиголев, Конечная базисуемость T -пространств над полями нулевой характеристики, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2001, том 65, выпуск 5, 191–224

DOI: <https://doi.org/10.4213/im362>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 18:34:30

УДК 519.48

В. В. Шиголев

Конечная базлируемость T -пространств над полями нулевой характеристики

Доказывается конечная базлируемость произвольного T -пространства над полем нулевой характеристики. Этот результат обобщает результат Кемера о конечной базлируемости любой системы ассоциативных тождеств над полем нулевой характеристики.

Библиография: 16 наименований.

§ 1. Введение

Эта работа посвящена доказательству аналога проблемы Шпехта для T -пространств. Пусть $F = \Phi\langle S \rangle$ – свободная счетно порожденная ассоциативная алгебра без единицы над коммутативным кольцом с единицей Φ . T -пространством алгебры F назовем любой Φ -подмодуль L в F , замкнутый относительно действия всех эндоморфизмов Φ -алгебры F , т.е. подстановок вида $s \rightarrow f_s$, где $s \in S$ и $f_s \in F$. Если существует такое конечное множество многочленов $f_1, \dots, f_n$ из L , что минимальное T -пространство, содержащее все f_i , совпадает с L , то L называется *конечно базлируемым T -пространством*. В случае, когда L есть идеал, T -пространство L называется *T -идеалом*. Легко проверить, что любое T -пространство, являющееся односторонним идеалом, есть двусторонний идеал, т.е. T -идеал. Примером T -пространства, не являющегося T -идеалом, является множество центральных полиномов. В этой статье мы рассматриваем в основном случай, когда Φ – поле нулевой характеристики.

Теория T -идеалов хорошо развита, и теорема Кемера [6] утверждает, что любой T -идеал над полем нулевой характеристики конечно базлируем (как T -идеал). При этом техника А.Р. Кемера существенно использует структурную теорию и тот факт, что изучаемые объекты являются идеалами. Однако возникает подозрение, что требование замкнутости относительно умножения не является необходимым и можно доказывать конечную базлируемость T -пространств. Впервые такие вопросы конечной базлируемости изучались А.В. Гришиным в [8], [9]. Следует отметить, что в своих исследованиях Гришин ограничился локальным случаем, т.е. случаем, когда все многочлены зависят от конечного множества переменных. Однако А.Р. Кемер разработал технику Z_2 -градуированных тождеств, используя теорию представления симметрической группы, и свел проблему Шпехта к локальному случаю, заменив T -идеалы на T_2 -идеалы. T_2 -идеалы – это идеалы свободной алгебры, замкнутые относительно некоторой подполугруппы полугруппы всех подстановок. Вводим понятие T_2 -пространства, аналогичное понятию T_2 -идеала,

и доказываем похожие локализационные утверждения. При этом приходится вводить понятие T' -пространства, для которого полугруппа инвариантных подстановок, вообще говоря, уже, чем полугруппа всех подстановок. Все результаты, описывающие локализацию для T -пространств, изложены в § 2–4.

В той части настоящей работы, где рассматривается локализованный случай, мы используем введенную в работах [8], [9] технику квазимногочленов. При этом используются различные фильтрации, символические степени, а также метод ширины, аналогично тому, как это делалось в работах [8], [9]. Детали некоторых доказательств § 6, 8 читатель может найти в вышеупомянутых работах А. В. Гришина.

Другим важным соображением является лемма Артина–Рисса, способ применения которой к проблемам конечной базиремости был замечен А. Я. Беловым. Для согласования последнего подхода с методом ширины А. В. Гришина автор вводит понятие бесконечно погружающейся последовательности относительно фильтрации. Этому посвящен § 7. При этом доказывается некоторая редукция одной проблемы А. В. Гришина для свободных алгебр над кольцом целых чисел. Выбранный подход позволяет в § 8 быстро завершить доказательство следующего основного результата.

ТЕОРЕМА. *Любое T -пространство алгебры $K\langle X \rangle$, где X – счетный алфавит и K – поле нулевой характеристики, конечно базируемо.*

Заметим, что полученное доказательство не использует теорему Кемера о конечной базиремости T -идеалов. Единственное место, где есть на нее ссылка, это лемма 2, но сама она в доказательстве не участвует.

В случае, когда характеристика основного поля положительна, ситуация с конечной базиремостью совсем другая. Как показал А. Р. Кемер в работе [7], в локальном случае над бесконечным полем любой T -идеал конечно базируем. Однако существуют бесконечно базируемые локальные T -пространства над любыми полями положительной характеристики. Соответствующие примеры построены автором в [4]. Там же строятся примеры бесконечно базируемых T -пространств, имеющих по каждой переменной степень p , над любыми полями характеристики $p > 2$. До этого А. В. Гришиным [10] были построены аналогичные примеры в случае характеристики 2. Примеры бесконечно базируемых T -идеалов построены А. Я. Беловым, а также автором и А. В. Гришиным в работах [10], [11], [5] и [16]. Таким образом, выше упомянутые работы демонстрируют связь и различие между понятиями T -пространства и T -идеала.

Автор благодарит В. Н. Латышева, А. В. Гришина и А. Я. Белова за полезные обсуждения и внимание, проявленное к данной работе.

§ 2. T -пространства, не содержащие ненулевых T -идеалов

1. Общие соглашения. Пусть K – поле нулевой характеристики, $X = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ – основной счетный алфавит и $F = K\langle X \rangle$ – свободная ассоциативная алгебра без единицы. Через T обозначим полугруппу эндоморфизмов F , а через P обозначим множество полилинейных многочленов из F .

Для однородного многочлена f любой свободной ассоциативной алгебры через $\text{vr}(f)$ обозначим множество переменных, от которых зависит f , т.е. множество переменных, по которым f имеет ненулевую степень. В частности, $\text{vr}(0) = \emptyset$. Пусть далее $P^{(n)} = \{f \in P: \text{vr}(f) = \{x_1, \dots, x_n\}\}$. Хорошо известно, что для нулевой характеристики основного поля любое T -пространство L алгебры F порождается пространствами $P^{(n)} \cap L$, $n \in \mathbb{N}$. Для двух слов u и v считаем $u \sim_c v$, если слова u и v получаются друг из друга циклическим сдвигом. Очевидно, $\sim_c$ есть отношение эквивалентности на словах. Везде ниже, в §2–4, через S_n будем обозначать симметрическую группу степени n . При этом S_0 – единичная группа.

Введем одно соглашение, которое будет действовать до конца §3. Пусть встречается выражение

$$\sum_{k=1}^m f_k(g_{k,1}, \dots, g_{k,n(k)}),$$

о значении которого утверждается, что оно принадлежит некоторой свободной ассоциативной алгебре (не обязательно F), и f_k – полилинейные многочлены. Обозначим значение данного выражения через h . Тогда мы считаем дополнительно, что для любого $k = 1, \dots, m$ многочлены $g_{k,1}, \dots, g_{k,n(k)}$ полилинейные, $\text{vr}(g_{k,1}), \dots, \text{vr}(g_{k,n(k)}) \subset \text{vr}(h)$, и если все многочлены $g_{k,1}, \dots, g_{k,n(k)}$ ненулевые, то $\text{vr}(g_{k,1}) \sqcup \dots \sqcup \text{vr}(g_{k,n(k)}) = \text{vr}(h)$. Напомним, что выражение $A_1 \sqcup \dots \sqcup A_n = A$ означает $A_1 \cup \dots \cup A_n = A$ и $i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$.

2. Получение тождеств. Введем еще одно обозначение. Пусть $f \in P$, $x_1 \in \text{vr}(f)$ и $g \in P^{(m)}$. Для $k \geq 2$ через $C_{k,m}(g)$ обозначим полином, получающийся из g заменой $x_i \rightarrow x_{i+1+m(k-2)}$, $i = 1, \dots, m$. Пусть $A \subset X$. Через $C(f, g)$ и $C_A(f, g)$ обозначим полиномы, полученные из f заменами $x_i \rightarrow C_{i,m}(g)$, $i \in \text{vr}(f) \setminus \{x_1\}$ и $x_i \rightarrow C_{i,m}(g)$, $i \in \text{vr}(f) \setminus (\{x_1\} \cup A)$ соответственно.

Ранее в [4] были доказаны следующие утверждения.

ЛЕММА 1. Пусть $h = \sum_{i=1}^k g_i f g'_i \in L \cap P$, где L – некоторое T -пространство алгебры F . Тогда $\sum_{i=1}^k g_i [t, x_k] g'_i \in L$ для любой переменной $t \in X$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $h = \sum_{i=1}^k g_i x_l f g'_i \in L \cap P$, где L – некоторое T -пространство алгебры F . Тогда $\sum_{i=1}^k g_i x_l f t g'_i \in L$ для любой переменной $t \in X$.

Докажем сначала теорему, позволяющую сказать, содержит ли данное T -пространство ненулевой T -идеал. Через L_0 обозначим T -пространство, порожденное коммутатором $[x_1, x_2]$, и пусть $L_0^{(n)} = P^{(n)} \cap L_0$. Имеет место

ТЕОРЕМА 1. Пусть L – некоторое T -пространство алгебры F . Следующие условия эквивалентны:

- а) L не содержит ненулевых T -идеалов;
- б) $L \subset L_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. б) $\implies$ а). Предположим, что существует ненулевой T -идеал $I \subset L \subset L_0$. Пусть $0 \neq f \in I$. Выберем $x_k \notin \text{vr}(f)$. Пусть $f = \sum_{i=1}^m \alpha_i u_i$, где $u_1, \dots, u_m$ – попарно различные слова и $\alpha_i \in K$. Имеем

$$x_k f = \sum_{i=1}^m \alpha_i x_k u_i \in I \subset L_0.$$

В этом представлении различные слова $x_k u_i$ лежат в различных классах эквивалентности относительно $\sim_c$ и, следовательно, все α_i равны нулю. Отсюда получаем $f = 0$. Противоречие.

а) $\implies$ б). Предположим, что L не подмножество L_0 . Тогда существует однородный многочлен $f \in L \setminus L_0$. Можно считать, что $\text{vr}(f) = \{x_1, \dots, x_m\}$ и $\deg_{x_i} f = n_i$, $i = 1, \dots, m$. Пусть f' – полная линейаризация многочлена f . Если получается, что $f' \in L_0$, то, подставляя вместо каждой переменной этого многочлена ту переменную x_i , из которой она получилась в процессе линейаризации, получим $n_1! \dots n_k! f \in L_0$. В силу того, что $\text{char } K = 0$, имеем $f \in L_0$, что не так. Таким образом, можно считать, что $f' \in (L \cap P^{(n)}) \setminus L_0$ для некоторого n .

В силу определения полинома $C(f, g)$ получаем, что $C(f', f')$ является линейной комбинацией полиномов вида

$$C_{i_1, n}(f') \dots C_{i_{k-1}, n}(f') x_1 C_{i_{k+1}, n}(f') \dots C_{i_n, n}(f'),$$

где $\{i_1, \dots, i_{k-1}, i_{k+1}, \dots, i_n, 1\} = \{1, \dots, n\}$.

Так как $C_{i_l, n}(f') \in L$, то по лемме 1 имеем $[C_{i_l, n}(f'), t] \in L$ для любой переменной $t \in X$. Следовательно,

$$\begin{aligned} & C_{i_1, n}(f') \dots C_{i_{k-1}, n}(f') x_1 C_{i_{k+1}, n}(f') \dots C_{i_n, n}(f') \\ &= C_{i_2, n}(f') \dots C_{i_{k-1}, n}(f') x_1 C_{i_{k+1}, n}(f') \dots C_{i_n, n}(f') C_{i_1, n}(f') \pmod{L}. \end{aligned}$$

Здесь надо выполнить подстановку $t \rightarrow C_{i_2, n}(f') \dots C_{i_{k-1}, n}(f') x_1 C_{i_{k+1}, n}(f') \dots C_{i_n, n}(f')$. Продолжая процесс переброски вправо выражений $C_{i_j, n}(f')$, стоящих перед x_1 , получаем

$$\begin{aligned} & C_{i_1, n}(f') \dots C_{i_{k-1}, n}(f') x_1 C_{i_{k+1}, n}(f') \dots C_{i_n, n}(f') \\ &= x_1 C_{i_{k+1}, n}(f') \dots C_{i_n, n}(f') C_{i_1, n}(f') \dots C_{i_{k-1}, n}(f') \pmod{L}. \end{aligned}$$

Таким образом, $C(f', f') = x_1 h \pmod{L}$ для соответствующего h . Так как $f' \notin L_0$, то $h \neq 0$. В силу следствия 1 имеем $x_1 h g \in L$ для любого многочлена g из F . Поэтому T -идеал, порожденный многочленом $x_1 h$, содержится в L . Теорема доказана.

Для T -идеала I через $[I, F]$ обозначим подпространство алгебры F , состоящее из линейных комбинаций коммутаторов вида $[f, h]$, где $f \in I$ и $h \in F$. Легко проверить, что $[I, F]$ есть T -пространство. Имеет место

ТЕОРЕМА 2. Пусть L – ненулевое T -пространство. Тогда $[I, F] \subset L$ для некоторого ненулевого T -идеала I .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если L не содержится в L_0 , то утверждение следует из теоремы 1. Считаем теперь, что $L \subset L_0$. Пусть f – ненулевой многочлен из $L \cap P^{(n)}$. Тогда справедливо представление $f = \sum_{i=2}^n [f_i, x_i]$, так как множество многочленов $\{[g, x_i] : i = 2, \dots, n \text{ и } \text{vr}(g) = \{x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n\}\}$ порождает $L_0 \cap P_n$ как линейное пространство. Так как $f \neq 0$, то существует $i_0 \geq 2$ такое, что $f_{i_0} \neq 0$. Пусть f' – полином, полученный из f заменой x_{i_0} на $x_l x_{i_0}$ для произвольного числа $l \geq n(n-1) + 2$. Тогда имеем

$$f' = \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq i_0}}^n [f'_i, x_i] + [f_{i_0}, x_l x_{i_0}] = \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq i_0}}^n [f'_i, x_i] + [f_{i_0} x_l, x_{i_0}] + [x_{i_0} f_{i_0}, x_l].$$

Так как $f_{i_0} \neq 0$ и $x_{i_0} \notin \text{vr}(f_{i_0})$, то $x_{i_0} f_{i_0} \notin L_0$. По лемме 1 имеем

$$C_{\{x_l\}}(f', f) = [C_{i_0, n}(f) C(f_{i_0}, f), x_l] \pmod{L}.$$

Пусть $f_{i_0} = \sum_{\sigma \in S'} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n-1)}$, где S' – множество биекций из $\{1, \dots, n-1\}$ в $\{1, \dots, i_0-1, i_0+1, \dots, n\}$. Положим $n(\sigma) = \sigma^{-1}(1)$, $\sigma \in S'$. Фактически $n(\sigma)$ равно номеру слева позиции в мономе $x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n-1)}$, на которой стоит x_1 . В силу леммы 1 имеем $[f, x_l] \in L$. Еще раз применяя лемму 1, получаем $[[f, t], x_l] \in L$ для любой переменной $t \in X$.

Отсюда, перенося вправо выражения вида $C_{i_j, n}(f)$, стоящие перед x_1 , аналогично тому, как мы это делали при доказательстве теоремы 1, получаем

$$\begin{aligned} & [C_{i_0, n}(f) C_{\sigma(1), n}(f) \dots C_{\sigma(n(\sigma)-1), n}(f) x_1 C_{\sigma(n(\sigma)+1), n}(f) \dots C_{\sigma(n-1), n}(f), x_l] \\ & = [x_1 h_\sigma, x_l] \pmod{L}, \end{aligned}$$

где $h_\sigma = C_{\sigma(n(\sigma)+1), n}(f) \dots C_{\sigma(n-1), n}(f) C_{i_0, n}(f) C_{\sigma(1), n}(f) \dots C_{\sigma(n(\sigma)-1), n}(f)$. Тогда $[x_1 g, x_l] \in L$, где $g = \sum_{\sigma \in S'} \alpha_\sigma h_\sigma$. Так как $x_{i_0} f_{i_0} \notin L_0$, то $g \neq 0$.

По следствию 1 получаем $[I, F] \subset L$, где I есть T -идеал, порожденный многочленом $x_1 g$. Теорема доказана.

Заметим, что справедлив следующий результат, который есть непосредственное следствие теоремы Кемера.

ЛЕММА 2. *Любая возрастающая цепочка T -пространств $L_0 \subset L_1 \subset \dots \subset L_i \subset \dots \subset F$ стабилизируется.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $f \in L_i \cap P^{(n)}$, то $f = x_1 g \pmod{L_0}$ для некоторого g . Через L'_i обозначим T -пространство, порожденное всеми такими многочленами $x_1 g$, для всевозможных $f \in L_i \cap P^{(n)}$ и $n \in \mathbb{N}$. Легко заметить, что любое L'_i есть T -идеал. Тогда цепочка $L'_1 \subset \dots \subset L'_i \subset \dots \subset F$ стабилизируется по теореме Кемера [6], т.е. $L'_r = L'_s$ при $r \geq s$ для некоторого фиксированного s . Пусть теперь $f \in L_r \cap P^{(n)}$ и $f = x_1 g \pmod{L_0}$. Тогда $x_1 g \in L'_s$, и так как $L'_s \subset L_s$, то имеем $x_1 g \in L_s$. Так как $L_0 \subset L_s$, то $f \in L_s$ и $L_r = L_s$. Лемма доказана.

3. T' -пространства. Пусть $Y = \{y_1, \dots, y_n, \dots\}$ – еще одно множество переменных и z_0 – новая переменная. При этом мы считаем, что $X \cap Y = \emptyset$ и $z_0 \notin X \cup Y$. Положим $F' = K\langle X \cup Y \rangle$ и $F'' = K\langle X \cup Y \cup \{z_0\} \rangle$. Тогда $F \subset F' \subset F''$. Аналогично тому, как это было сделано для алгебры F , вводятся множество полилинейных многочленов P' и P'' алгебр F' и F'' соответственно и множество переменных $\text{vr}(f)$, от которых зависит однородный многочлен f из F' или F'' .

Линейное пространство $L \subset F'$ назовем T' -пространством, если $\varphi(L) \subset L$ для любого эндоморфизма φ алгебры F' такого, что $\varphi(F) \subset F$. Полугруппу таких эндоморфизмов алгебры F' обозначим через H' . Для изучения порождающих T -пространств, содержащихся в L_0 , введем понятие присоединенного T' -пространства.

До конца §3 для любого T -пространства L алгебры F через L'' обозначаем T -пространство алгебры F'' , порожденное L . Очевидно, $L'' \cap F = L$.

Пусть теперь $L \subset L_0$. Присоединенное T' -пространство $A(L)$ для T -пространства L породим как T' -пространство многочленами $f \in P'$ такими, что

$$[f, z_0] + \sum_{k=1}^m [f_k, x_{i_k}] \in L'' \cap P''$$

для некоторых f_k и i_k . Множество таких многочленов f обозначим через $B(L)$.

ЛЕММА 3. $B(L) = A(L) \cap P'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неформально говоря, требуется показать, что любое полилинейное T' -следствие из $B(L)$ лежит в $B(L)$.

Пусть f и g – ненулевые многочлены из $B(L)$, $\text{vr}(f) = \text{vr}(g)$ и $\alpha, \beta \in K$. Имеем $[f, z_0] + \sum_{k=1}^m [f_k, x_{i_k}] \in L'' \cap P''$ и $[g, z_0] + \sum_{k=1}^l [g_k, x_{j_k}] \in L'' \cap P''$ для некоторых $f_i, g_j \in P''$. Тогда

$$[\alpha f + \beta g, z_0] + \sum_{k=1}^m [\alpha f_k, x_{i_k}] + \sum_{k=1}^m [\beta g_k, x_{j_k}] \in L'' \cap P''.$$

Этим доказано, что $\alpha f + \beta g \in B(L)$.

Пусть теперь f – ненулевой многочлен из $B(L)$, $\varphi \in H'$ и $\varphi(f) \in P'$. Достаточно считать, что $\varphi(x_i) = u_i$, $\varphi(y_i) = v_i$, где u_i, v_i – полилинейные слова и множества переменных $\text{vr}(u_i), \text{vr}(v_j)$ попарно не пересекаются. По определению H' имеем $u_i \in F$.

Так как $f \in B(L)$, то имеем $[f, z_0] + \sum_{k=1}^m [f_k, x_{i_k}] \in L'' \cap P''$ для некоторых $f_k \in P''$. Определим эндоморфизм ψ алгебры F'' по правилу: $\psi(z_0) = z_0$ и $\psi(t) = \varphi(t)$ для любой переменной $t \in X \cup Y$. Тогда

$$\psi\left([f, z_0] + \sum_{k=1}^m [f_k, x_{i_k}]\right) = [\varphi(f), z_0] + \sum_{k=1}^m [\psi(f_k), u_{i_k}] \in L'' \cap P''.$$

Учитывая формулу

$$[y, x_1 \dots x_n] = [yx_1 \dots x_{n-1}, x_n] + [x_n yx_1 \dots x_{n-2}, x_{n-1}] + \dots + [x_2 \dots x_n y, x_1],$$

представим каждый полином $[\psi(f_k), u_{i_k}]$ в виде суммы полиномов вида $[h, x_i]$. Отсюда получаем $\varphi(f) \in B(L)$. Лемма доказана.

Докажем теперь теорему, связывающую порождающие L и $A(L)$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\{g_j: j \in \Lambda\}$ – ненулевые полилинейные многочлены из F' , порождающие $A(L)$ как T' -пространство. Пусть также

$$h_j = [g_j, z_0] + \sum_{k=1}^{m_j} [g_{j,k}, x_{l(j,k)}] \in L'' \cap P''$$

и $\psi_j: F'' \rightarrow F$, $j \in \Lambda$, – гомоморфизмы, переводящие переменные из $X \cup Z \cup \{z_0\}$ в переменные из X , такие, что $\psi_j|_X$ есть тождественное отображение X в себя и $\psi_j|_{\text{vr}(h_j)}$ инъективно.

Тогда полиномы $\{\psi_j(h_j): j \in \Lambda\}$ порождают L как T -пространство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Через M обозначим T -пространство алгебры F , порождаемое полиномами $\{\psi_j(h_j): j \in \Lambda\}$. Все эти полиномы принадлежат L , и, следовательно, $M \subset L$. Отсюда $A(M) \subset A(L)$. С другой стороны, все h_j принадлежат $M'' \cap P''$. Поэтому $g_j \in A(M)$. По условию леммы тогда $A(M) = A(L)$.

Предположим, что $M \neq L$. Тогда существует такое $n \geq 1$, для которого выполнено $(L \cap P^{(n)}) \setminus M \neq \emptyset$. Положим

$$i_0 = \max \left\{ i'_0 : \text{существует } \sum_{k=0}^{m'} [f'_k, x_{i'_k}] \in (L \cap P^{(n)}) \setminus M \text{ и } i'_0 < \dots < i'_{m'} \right\}. \quad (1)$$

Пусть $f \in (L \cap P^{(n)}) \setminus M$ и $f = \sum_{k=0}^m [f_k, x_{i_k}]$ для некоторых i_k таких, что $i_0 < i_1 < \dots < i_m$. Из условия (1) следует, что $f_0 \neq 0$.

Пусть $\psi: F \rightarrow F''$ – гомоморфизм такой, что $\psi(x_i) = y_i$ при $i = 1, \dots, i_0 - 1$, $\psi(x_{i_0}) = z_0$ и $\psi(x_i) = x_i$ при $i = i_0 + 1, \dots, n$. Тогда

$$\psi(f) = [\psi(f_0), z_0] + \sum_{k=1}^m [\psi(f_k), x_{i_k}] \in L'' \cap P''.$$

Отсюда $\psi(f_0) \in B(L) \subset A(L) = A(M)$. Следовательно, $\psi(f_0) \in A(M) \cap P'$. По лемме 3 имеем $A(M) \cap P' = B(M)$. Отсюда $\psi(f_0) \in B(M)$. По определению операции B имеем

$$h = [\psi(f_0), z_0] + \sum_{k=1}^{m_0} [g_k, x_{j_k}] \in M'' \cap P''.$$

Если предположить, что для некоторого $k = 1, \dots, m_0$ выполнено $j_k \leq i_0$, то в силу соглашения, сформулированного в начале этого параграфа, $j_k \in \text{vr}(h)$. Так как $\psi(f_0) \neq 0$, то в силу того же соглашения $\psi(f_0)$ зависит от переменной x_{j_k} . Так как $j_k \leq i_0$, то приходим к противоречию со сделанным предположением. Поэтому для любого k имеем $j_k > i_0$. Пусть $\psi': F'' \rightarrow F$ – гомоморфизм такой, что $\psi'(y_i) = x_i$ при $i = 1, \dots, i_0 - 1$, $\psi'(z_0) = x_{i_0}$ и $\psi'(x_i) = x_i$ при $i = i_0 + 1, \dots, n$. Такой

гомоморфизм ψ' связан с гомоморфизмом ψ соотношением $(\psi'\psi)|_{P(n)} = \text{id}_{P(n)}$. Имеем

$$\begin{aligned}\psi'(h) &= [f_0, x_{i_0}] + \sum_{k=1}^{m_0} [\psi'(g_k), x_{j_k}] \in M \cap P, \\ f - \psi'(h) &= \sum_{k=1}^m [f_k, x_{i_k}] - \sum_{k=1}^{m_0} [\psi'(g_k), x_{j_k}] \in L \cap P^{(n)}.\end{aligned}$$

Согласно выбору i_0 получаем $f - \psi'(h) \in M$. Но $\psi'(h) \in M$, отсюда $f \in M$. Противоречие. Теорема доказана.

§ 3. Супероризация для T -пространств

1. Основные факты теории представлений симметрической группы. В настоящей работе тензорное произведение $\otimes$ понимается в смысле $\otimes_K$, т.е. над основным полем K . Набор целых чисел $(l_1, \dots, l_s)$ называется *разбиением числа* l , если $l_1 \geq \dots \geq l_s \geq 1$ и $\sum_{i=1}^s l_i = l$. Пусть D – таблица Юнга, соответствующая разбиению $(l_1, \dots, l_s)$ (l_i – длина i -ой строки). Любому заполнению клеток этой таблицы неповторяющимися числами от 1 до l соответствует диаграмма Юнга C . В данном случае пишем $D = \text{tab}(C)$. Обозначим через $|D|$ и $|C|$ количество клеток в таблице D и в диаграмме C . В наших обозначениях это число равно l . Через D^* обозначим диаграмму Юнга, в i -ой строке которой слева направо стоят числа $\sum_{j=1}^{i-1} l_j + 1, \dots, \sum_{j=1}^i l_j$. Группа P_C (соответственно Q_C) состоит из всех подстановок, оставляющих инвариантными все строки (столбцы) диаграммы C . Пусть

$$e_C = \sum_{\substack{p \in P_C \\ q \in Q_C}} (\text{sgn } q) pq$$

– симметризатор Юнга. Левый идеал алгебры KS_l , порожденный элементом e_C , обозначим через J_C , т.е. $J_C = KS_l e_C$. Более подробно теория представлений симметрической группы изложена в [12].

В дальнейшем будем использовать следующие факты об алгебре $KS_n \otimes KS_m$:

1) кольца $KS_n \otimes KS_m$ и $K(S_n \times S_m)$ изоморфны и левый $(KS_n \otimes KS_m)$ -модуль $KS_n \otimes KS_m$ вполне приводим;

2) левый идеал алгебры $KS_n \otimes KS_m$, порожденный элементом $e_{C_1} \otimes e_{C_2}$, обозначим через J_{C_1, C_2} , тогда $J_{C_1, C_2} = J_{C_1} \otimes J_{C_2}$.

Справедлива

ЛЕММА 4 (о представлениях). *Левые идеалы J_{C_1, C_2} являются минимальными.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $e_{C_1} \otimes e_{C_2} \neq 0$ и идеал J_{C_1, C_2} ненулевой. Пусть f – ненулевой элемент из J_{C_1, C_2} . Возможно представление $f = a_1 \otimes b_1 + \dots + a_s \otimes b_s$, где элементы $b_1, \dots, b_s$ линейно независимы над K , а элементы $a_1, \dots, a_s$ не равны нулю. Так как J_{C_2} – неприводимый KS_m -модуль и любой его эндоморфизм есть умножение на элемент поля K , то по теореме плотности [13] существует такой $r \in$

KS_m , что $rb_1 = e_{C_1}$, $rb_2 = 0, \dots, rb_s = 0$. Тогда $(1 \otimes r)f = a_1 \otimes e_{C_2} \neq 0$. В силу минимальности идеалов J_{C_1} и J_{C_2} элемент $a_1 \otimes e_{C_2}$ порождает весь идеал J_{C_1, C_2} . Лемма доказана.

2. Основное утверждение. Пусть $\gamma = (i_1, \dots, i_k)$, где каждое i_l есть либо 0, либо 1. Пусть $|\gamma| = k$ – длина набора $|\gamma|$, $|\gamma|_X$ – число нулей в наборе γ и $|\gamma|_Y$ – число единиц в наборе γ .

Пусть n и m – натуральные числа, не равные одновременно нулю, $\gamma = (i_1, \dots, i_{n+m})$, $n = |\gamma|_X$ и $m = |\gamma|_Y$. Через $P(\gamma)$ обозначим подпространство алгебры F' , натянутое на полилинейные слова u такие, что:

- 1) $\text{vr}(u) = \{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m\}$;
- 2) в слове u на l -ой позиции слева стоит переменная из X , если $i_l = 0$, и переменная из Y , если $i_l = 1$.

Если в данном определении опустить условие 2), то получим определение пространства $P(n, m)$. Пространство $P(n, m)$ является $(KS_n \otimes KS_m)$ -модулем. При этом элемент $\sigma_1 \otimes \sigma_2$, где $\sigma_1 \in S_n$, $\sigma_2 \in S_m$, действует на произвольный многочлен $f \in P(n, m)$ по формуле $t(\sigma_1 \otimes \sigma_2)f$, где $t(\sigma_1 \otimes \sigma_2)$ – эндоморфизм алгебры F' такой, что

$$t(\sigma_1 \otimes \sigma_2)(x_i) = x_{\sigma_1(i)}, \quad i = 1, \dots, n, \quad t(\sigma_1 \otimes \sigma_2)(y_j) = y_{\sigma_2(j)}, \quad j = 1, \dots, m.$$

Очевидно, что $P(n, m) = \bigoplus \{P(\gamma) : |\gamma|_X = n, |\gamma|_Y = m\}$ и любое пространство $P(\gamma)$ является $(KS_n \otimes KS_m)$ -подмодулем модуля $P(n, m)$.

Введем на множестве переменных $X \cup Y \cup \{z_0\}$ порядок следующим образом: $x_i < x_j$ при $i < j$, $y_i < y_j$ при $i < j$, $x_i < y_j$, $z_0 < x_i$, $z_0 < y_i$.

Выражения $\max$ и $\min$, примененные к множествам переменных из $X \cup Y \cup \{z_0\}$, будем далее понимать именно в смысле введенного порядка $<$. Далее в этом параграфе считаем, что $\min(\emptyset) = \max(\emptyset) = z_0$.

Пусть $f \in P''$. Предположим, что $A = \{t_1, \dots, t_k\}$ – непустое подмножество множества $\text{vr}(f)$ и $t_1 < \dots < t_k$. Для $\sigma \in S_k$ определим гомоморфизм $p_A(\sigma) : F' \rightarrow F'$ по формулам $p_A(\sigma)(t) = t$, если $t \in (X \cup Y \cup \{z_0\}) \setminus A$, и $p_A(\sigma)(t_i) = t_{\sigma(i)}$, $i = 1, \dots, k$. Положим

$$S_A f = \sum_{\sigma \in S_k} p_A(\sigma)(f),$$

$$\Lambda_A f = \sum_{\sigma \in S_k} (\text{sgn } \sigma) p_A(\sigma)(f).$$

Если $A = \emptyset$, то считаем $S_A f = \Lambda_A f = f$.

Используя технику работы [2], докажем следующую лемму.

ЛЕММА 5. Пусть L и Γ – ненулевые T -пространства алгебры F такие, что $L \subset \Gamma \subset L_0$. Тогда существуют числа r и t , зависящие только от L , обладающие следующим свойством: если $f \in L_0 \cap P$ и для любого разбиения

$$A_1 \sqcup \dots \sqcup A_r \sqcup B_1 \sqcup \dots \sqcup B_t = \text{vr}(f)$$

выполнено $S_{A_1} \dots S_{A_r} \Lambda_{B_1} \dots \Lambda_{B_t} f \in \Gamma$, то $f \in \Gamma$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $L \not\subset L_0$, то по теореме 1 существует ненулевой T -идеал $\Gamma \subset L$. Предложение 1 из работы [2] фактически означает справедливость аналога данной леммы для T -пространства L такого, что $L \not\subset L_0$. Это следует из того, что в этом случае имеется оценка для коразмерностей $\dim(P^{(n)}|L \cap P^{(n)}) \leq d^n$ при некотором d .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 2 T' -пространство $A(\Gamma)$ содержит некоторый ненулевой полилинейный многочлен вида $y_1 g_0 y_2$, где g_0 зависит только от переменных из Y . Это значит, что $A(L)$ содержит ненулевой T -идеал алгебры F' , порожденный многочленом $y_1 g_0 y_2$. Из теоремы Регева тогда следует, что существует $d \geq 1$ такое, что

$$\dim(P(n, m)|A(L) \cap P(n, m)) \leq d^{n+m}.$$

Пусть Γ – некоторое T -пространство, удовлетворяющее условию леммы. Тогда так как $L \subset \Gamma$, то $\dim(P(n, m)|A(\Gamma) \cap P(n, m)) \leq d^{n+m}$.

Для таблицы D , содержащей l клеток, определим однородную компоненту

$$U_D = +\{M \subset KS_l : M \text{ изоморфен } J_{D^*} \text{ как } KS_l\text{-модуль}\}.$$

Тогда $U_D = +\{J_C : D = \text{tab}(C)\}$ и $KS_l = \bigoplus \{U_D : |D| = l\}$.

Для таблиц D_1 и D_2 , содержащих соответственно n и m клеток, положим

$$U_{D_1, D_2} = +\{J_{C_1, C_2} : D = \text{tab}(C_1), D = \text{tab}(C_2)\}.$$

Очевидно, $U_{D_1, D_2} = U_{D_1} \otimes U_{D_2}$ и $KS_n \otimes KS_m = \bigoplus \{U_{D_1, D_2} : |D_1| = n, |D_2| = m\}$.

Пусть M – некоторый подмодуль модуля $KS_n \otimes KS_m$ и $\gamma = (i_1, \dots, i_{n+m})$ – последовательность нулей и единиц такая, что $|\gamma|_X = n$ и $|\gamma|_Y = m$. Через $e(\gamma)$ обозначим моном из $P(\gamma)$, у которого на l -ом слева месте стоит x_j , если i_l является j -ым слева нулем в γ , или y_k , если i_l является k -ой слева единицей в γ . Положим $M(\gamma) = Me(\gamma)$. При этом если M – минимальный подмодуль, то $M(\gamma)$ – минимальный подмодуль модуля $P(n, m)$. Вообще-то, все минимальные подмодули модуля $P(n, m)$ не исчерпываются модулями $M(\gamma)$.

Пусть $U_D^{(X)} = (U_D \otimes KS_0)(\gamma_l^{(0)})$ и $U_D^{(Y)} = (KS_0 \otimes U_D)(\gamma_l^{(1)})$, где $l = |D|$, $\gamma_l^{(0)}$ – последовательность из l нулей и $\gamma_l^{(1)}$ – последовательность из l единиц. Таким образом построенные пространства $U_D^{(X)}$ и $U_D^{(Y)}$ являются каноническими реализациями модуля U_D в пространствах $P(l, 0)$ и $P(0, l)$ соответственно.

При таких определениях получаем $U_{D_1, D_2}(\gamma) = U_{D_1, D_2}P(\gamma)$ в силу того, что U_{D_1, D_2} – двусторонний идеал, и $U_{D_1, D_2}P(n, m) = \bigoplus \{U_{D_1, D_2}(\gamma) : |\gamma|_X = n, |\gamma|_Y = m\}$.

Если p, q – натуральные числа, то через $D(p, q)$ обозначим таблицу Юнга, состоящую из p равных столбцов длины q . Положим $b_{p, q} = \dim J_{D(p, q)^*}$. Из формулы крюков для размерности неприводимых модулей следует, что

$$b_{p, q} = \frac{(pq)!}{(q!)^p r_p(q)},$$

где $r_p(q)$ – многочлен с рациональными коэффициентами от q , степень и коэффициенты которого зависят только от p . Отсюда, воспользовавшись формулой Стирлинга, нетрудно получить, что

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \frac{b_{p,q}}{(p-1)^{pq}} = \infty. \quad (2)$$

Положим $t_0 = d^2$, а число r_0 возьмем таким, чтобы выполнялось неравенство

$$b_{t_0+1, r_0+1} > d^{2(t_0+1)(r_0+1)+1},$$

что возможно в силу формулы (2). Положим $m_0 = (t_0 + 1)(r_0 + 1)$, $r = 2r_0 + 1$ и $t = 2t_0$. Выбор этих чисел r и t зависит только от числа d , которое определяется по T -пространству L . Поэтому мы будем считать, что r и t являются именно теми числами, существование которых утверждается доказываемой леммой.

Пусть теперь $f \in L_0$ удовлетворяет условиям леммы. Многочлен f полилинейный, и существует некоторый многочлен

$$g = [f_0, z_0] + \sum_{k=1}^s [f_k, x_{i_k}] \in P'', \quad (3)$$

получающийся из f переименованием переменных. Нам достаточно доказать, что $g \in \Gamma''$.

При этом можно считать, что выполнено следующее условие. Пусть имеется некоторый многочлен

$$g' = [f'_0, z_0] + \sum_{k=1}^{s'} [f'_k, x_{i'_k}] \in P'',$$

и при этом $\max(\text{vr}(g') \cap X) < \max(\text{vr}(g) \cap X)$. Пусть также для любого разбиения $A_1 \sqcup \dots \sqcup A_r \sqcup B_1 \sqcup \dots \sqcup B_t = \text{vr}(g')$ выполняется

$$S_{A_1} \dots S_{A_r} \Lambda_{B_1} \dots \Lambda_{B_t} g' \in \Gamma''.$$

Тогда $g' \in \Gamma''$.

Выполнение такого условия, очевидно, эквивалентно проведению индукции по величине $\max(\text{vr}(g) \cap X)$.

Можно считать, что $f_0 \in P(n, m)$ для некоторых n и m . Действительно, пусть $\text{vr}(g) = \{t_1, \dots, t_c, t_{c+1}, \dots, t_{c+d}, z_0\}$, где $t_1 < \dots < t_{c+d}$, $t_1, \dots, t_c \in X$ и $t_{c+1}, \dots, t_{c+d} \in Y$. Рассмотрим такой гомоморфизм $\varphi: F'' \rightarrow F''$, что $\varphi(z_0) = z_0$, $\varphi(t_k) = x_k$, $k = 1, \dots, c$, и $\varphi(t_{c+k}) = y_k$, $k = 1, \dots, d$. Тогда в представлении, получающемся из представления (3) действием гомоморфизма φ , индукционный параметр $\max(\text{vr}(\varphi(g)) \cap X)$ не превосходит исходного индукционного параметра $\max(\text{vr}(g) \cap X)$. С другой стороны, условия $g \in \Gamma''$ и $\varphi(g) \in \Gamma''$ эквивалентны.

В силу формулы $KS_n \otimes KS_m = \bigoplus \{U_{D_1, D_2} : |D_1| = n, |D_2| = m\}$ для того чтобы показать, что $f_0 \in A(\Gamma)$, достаточно доказать, что для любых двух таблиц D_1 и D_2 , состоящих соответственно из n и m клеток, выполнено $U_{D_1, D_2} f_0 \in A(\Gamma)$.

Следуя схеме доказательства работы [1], рассмотрим два случая.

СЛУЧАЙ 1. В одну из таблиц D_1 или D_2 вкладывается таблица D_{t_0+1, r_0+1} .

В этом случае размерность любого модуля J_{C_1, C_2} , где $D_1 = \text{tab}(C_1)$ и $D_2 = \text{tab}(C_2)$, больше, чем d^{2m_0+1} . Это означает, что при $n + m \leq 2m_0 + 1$ для любого набора γ такого, что $|\gamma|_X = n$ и $|\gamma|_Y = m$, выполняется $U_{D_1, D_2}(\gamma) \subset A(\Gamma)$.

Подслучай а). D_{t_0+1, r_0+1} вкладывается в таблицу D_1 .

Пусть

$$\sum_{\sigma \in S_{m_0}} \alpha_{\sigma} x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(m_0)} \in U_{D_{t_0+1, r_0+1}}^{(X)}.$$

Тогда понятно, что

$$\sum_{\sigma \in S_{m_0}} \alpha_{\sigma} y_1 x_{\sigma(1)} y_2 \dots y_{m_0} x_{\sigma(m_0)} y_{m_0+1} \in (U_{D_{t_0+1, r_0+1}} \otimes KS_{m_0+1})(\gamma')$$

для $\gamma' = (1, 0, \dots, 0, 1)$, где $|\gamma|_X = m_0$ и $|\gamma|_Y = m_0 + 1$. Разлагая KS_{m_0+1} на однородные компоненты U_D и пользуясь замечанием в начале рассмотрения случая 1, получаем $(U_{D_{t_0+1, r_0+1}} \otimes KS_{m_0+1})(\gamma') \subset A(\Gamma)$ и

$$\sum_{\sigma \in S_{m_0}} \alpha_{\sigma} y_1 x_{\sigma(1)} y_2 \dots y_{m_0} x_{\sigma(m_0)} y_{m_0+1} \in A(\Gamma). \quad (4)$$

Подслучай б). D_{t_0+1, r_0+1} вкладывается в таблицу D_2 .

Пусть

$$\sum_{\sigma \in S_{m_0}} \alpha_{\sigma} y_{\sigma(1)} \dots y_{\sigma(m_0)} \in U_{D_{t_0+1, r_0+1}}^{(Y)}.$$

Тогда по теореме ветвления (или по результатам работ [1] и [2]) имеем

$$\sum_{\sigma \in S_{m_0}} \alpha_{\sigma} y_{m_0+1} y_{\sigma(1)} y_2 \dots y_{m_0} y_{\sigma(m_0)} y_{2m_0+1} \in \bigoplus_{\substack{D_{t_0+1, r_0+1} \subset D \\ |D|=2m_0+1}} U_D^{(Y)}.$$

Размерность любого неприводимого подмодуля модуля $U_D^{(Y)}$ из данной формулы больше, чем d^{2m_0+1} . Поэтому $U_D^{(Y)} \subset A(\Gamma)$. Следовательно, мы имеем

$$\sum_{\sigma \in S_{m_0}} \alpha_{\sigma} y_{m_0+1} y_{\sigma(1)} y_2 \dots y_{m_0} y_{\sigma(m_0)} y_{2m_0+1} \in A(\Gamma). \quad (5)$$

Так как $A(\Gamma)$ инвариантно относительно замен переменных из Y на любые многочлены из F' , то в силу формул (4) и (5) получаем, что $U_{D_1, D_2}(\gamma) \subset A(\Gamma)$ для любого γ такого, что $|\gamma|_X = n$ и $|\gamma|_Y = m$. Отсюда имеем $U_{D_1, D_2} f_0 \subset A(\Gamma)$.

СЛУЧАЙ 2. Нив одну из таблиц D_1 или D_2 не вкладывается таблица D_{t_0+1, r_0+1} .

Аналогично тому, как это сделано в [1], легко показать, что в этом случае любой элемент из $U_{D_1, D_2} f_0$ представляется в виде линейной комбинации полиномов вида

$$(\sigma_1 \otimes \sigma_2) S_{A_1} \dots S_{A_{2r_0}} \Lambda_{B_1} \dots \Lambda_{B_{2t_0}} f_0, \quad (6)$$

где $\sigma_1 \in S_n$, $\sigma_2 \in S_m$, $A_1 \sqcup \dots \sqcup A_{r_0} \sqcup B_1 \sqcup \dots \sqcup B_{t_0} = \{x_1, \dots, x_n\}$ и $A_{r_0+1} \sqcup \dots \sqcup A_{2r_0} \sqcup B_{t_0+1} \sqcup \dots \sqcup B_{2t_0} = \{y_1, \dots, y_m\}$.

Положим $A_r = \{z_0\}$, $V = S_{A_1} \dots S_{A_{2r_0}} \Lambda_{B_1} \dots \Lambda_{B_{2t_0}}$ и $V' = S_{A_1} \dots S_{A_r} \Lambda_{B_1} \dots \Lambda_{B_t}$.

Имеем по условию леммы

$$V'g = [Vf_0, z_0] + \sum_{k=1}^a [g_k, x_{j_k}] \in \Gamma'' \cap P''.$$

Отсюда $Vf_0 \in A(\Gamma)$ и $U_{D_1, D_2} f_0 \subset A(\Gamma)$.

Таким образом, оба случая рассмотрены и доказано, что $f_0 \in A(\Gamma)$. Тогда по лемме 3

$$h = [f_0, z_0] + \sum_{k=1}^b [h_k, x_{l_k}] \in \Gamma'' \cap P''.$$

Если $\text{vr}(g) \cap X = \emptyset$, что соответствует случаю $n = 0$, то $g = h \in \Gamma''$.

Пусть теперь $n \geq 1$. Согласно сделанному ранее индукционному предположению многочлен $\bar{g}$, получающийся из многочлена $g - h$ заменой $z_0 \rightarrow y_{m+1}$, $x_n \rightarrow z_0$, лежит в Γ'' . Отсюда $g - h \in \Gamma''$ и $g \in \Gamma''$. Лемма доказана.

§ 4. T_2 -пространства

1. Обозначения. Введем теперь обозначения, не зависящие от обозначений, введенных в §2, 3, которые мы будем использовать до конца работы. Пусть X и Z – счетные непересекающиеся множества переменных, $X = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$, $Z = \{z_1, \dots, z_n, \dots\}$, K – поле нулевой характеристики, $F = K\langle X \cup Z \rangle$ – алгебра без единицы и L_0 есть T -пространство алгебры F , порожденное коммутатором $[x_1, x_2]$. Аналогично, через P обозначим множество полилинейных многочленов алгебры F , а через T полугруппу эндоморфизмов алгебры F . Для любого однородного многочлена $f \in F$ через $\deg_Z f$ обозначим число $\sum_{i=1}^{\infty} \deg_{z_i} f$. Это число назовем z -степенью многочлена f . Через F_0 обозначим подпространство алгебры F , натянутое на слова четной z -степени, а через F_1 подпространство, натянутое на слова нечетной z -степени. Тогда (F, F_0, F_1) есть Z_2 -градуированная алгебра в смысле работы [3]. Через M_0 обозначим подпространство алгебры F , натянутое на буквы из X , а через M_1 подпространство, натянутое на буквы из Z .

Далее, следуя работе [3], введем следующие определения.

Через T_2 (S_2) обозначим полугруппу таких эндоморфизмов φ алгебры F , что $\varphi(x_i) \in F_0$ и $\varphi(z_j) \in F_1$ ($\varphi(x_i) \in M_0$ и $\varphi(z_j) \in M_1$) для любых i и j .

Пространство L назовем T_2 -пространством (S_2 -пространством), если из $f \in L$ и $\varphi \in T_2$ ($\varphi \in S_2$) следует, что $\varphi(f) \in L$.

2. Инволюция Кемера. Для двух подпространств L_1 и L_2 эквивалентность $L_1 \simeq_{\mathfrak{Z}} L_2$ считаем выполненной, если наибольшие $\mathfrak{Z}$ -пространства, содержащиеся в L_1 и в L_2 соответственно, совпадают. Здесь знак $\mathfrak{Z}$ обозначает один из символов T или T^* .

Пусть $Z = \bigsqcup_{i=1}^t T_i$, где T_i – счетные множества. Обозначим через I_r идеал алгебры F , порожденный переменными $\{x_{r+1}, x_{r+2}, \dots\}$, а через J_i идеал алгебры F , порожденный многочленами $a_1 f a_2 + a_2 f a_1$, где $a_1, a_2 \in T_i$ и $f \in F \cup \{1\}$. Через J обозначим идеал алгебры F , порожденный переменными из Z . Имеем $J_i \subset J$ для любого $i = 1, \dots, t$.

Имеет место

ЛЕММА 6. Пусть $r \geq 3$. Тогда $L_0 + I_r + J \simeq_T L_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть V – наибольшее T -пространство, содержащееся в $L_0 + I_r + J$, и f – полилинейный многочлен из V , зависящий от переменной x_1 . Представим f в виде $f = x_1 g + f_1$, где $f_1 \in L_0$ и $x_1 \notin \text{vr}(g)$. Пусть $\varphi: F \rightarrow K\langle x_1, x_2, x_3 \rangle \subset F$ – гомоморфизм такой, что $\varphi(x_1) = x_1$ и $\varphi(x_i) \in K\langle x_2, x_3 \rangle$ при $i \geq 2$. Тогда $\varphi(f) = x_1 \varphi(g) + \varphi(f_1) \in V \subset L_0 + I_r + J$. Так как $\text{vr}(\varphi(f)) \subset \{x_1, x_2, x_3\}$, то $\varphi(f) \in L_0$. Но $\varphi(f_1) \in L_0$, и поэтому $x_1 \varphi(g) \in L_0$. Так как $\varphi(g)$ не зависит от x_1 , то $\varphi(g) = 0$. Вследствие произвольности φ , удовлетворяющего перечисленным выше условиям, и того, что свободная двупорожденная алгебра не является РИ-алгеброй, получаем $g = 0$. Отсюда $f = f_1 \in L_0$. Когда полином $f \in V$ произвольный, нужно разложить его на однородные компоненты f_i , каждая из которых принадлежит V , а затем рассмотреть полиномы f'_i , являющиеся полными линейаризациями полиномов f_i . Тогда $f'_i \in V$ и по доказанному $f'_i \in L_0$. Отсюда в силу нулевой характеристики основного поля все $f_i \in L_0$ и $f \in L_0$. Следовательно, $V = L_0$. Лемма доказана.

Доказательство предыдущей леммы изложено так подробно потому, чтобы показать способ работы с отношениями $\simeq_T$ и $\simeq_{T^*}$, который будет применяться в этом параграфе.

Справедлива

ТЕОРЕМА 4. Для любого ненулевого T -пространства $L \subset L_0$ существуют такие числа r и t , что для любого T -пространства Γ , для которого $L \subset \Gamma \subset L_0$, выполнена эквивалентность

$$\Gamma + I_r + J_t \simeq_T \Gamma.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем числа r и t в соответствии с леммой 5 так, чтобы $r \geq 3$. Пусть V – наибольшее T -пространство, содержащееся в $\Gamma + I_r + J_t$. Имеем $\Gamma + I_r + J_t \subset L_0 + I_r + J$. Тогда по лемме 6 получаем $V \subset L_0$. Теперь мы находимся в условиях леммы 5 и получаем, что $V = \Gamma$. Теорема доказана.

На множестве P определим операцию sgn следующим образом. Пусть $u = u_0 z_{i_{\sigma(1)}} u_1 \dots u_{n-1} z_{i_{\sigma(n)}} u_n \in P$, где $u_0, \dots, u_n$ – слова над алфавитом X , $i_1 < \dots < i_n$ и $\sigma \in S_n$. Тогда положим $\text{sgn}(u) = \text{sgn}(\sigma)$ и продолжим sgn по линейности на все P . Для $f \in P$ положим также $f^* = \text{sgn}(f)f$. Если L есть T_2 -пространство,

то через L^* обозначим T_2 -пространство, порожденное как S_2 -пространство множеством $(P \cap L)^*$. Пусть φ – эндоморфизм алгебры F такой, что для любых букв x из X и z из Z многочлен $\varphi(x)$ есть слово из F_0 , а многочлен $\varphi(z)$ есть слово из F_1 . Рассмотрим полилинейное слово $u = u_0 z_{i_{\sigma(1)}} u_1 \dots u_{n-1} z_{i_{\sigma(n)}} u_n$, где $u_0, \dots, u_n$ – слова над алфавитом X , $i_1 < \dots < i_n$ и $\sigma \in S_n$. Пусть v – слово, полученное некоторой перестановкой букв слова $u_0 \dots u_n$, такое, что номера индексов при x в слове v возрастают слева направо. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(\varphi(u)) &= \operatorname{sgn}(\varphi(u_0 \dots u_n z_{i_{\sigma(1)}} \dots z_{i_{\sigma(n)}})) = \operatorname{sgn}(\sigma) \operatorname{sgn}(\varphi(v z_{i_1} \dots z_{i_n})) \\ &= \operatorname{sgn}(\varphi(v z_{i_1} \dots z_{i_n})) \operatorname{sgn}(u). \end{aligned}$$

Домножая это равенство на $\varphi(u)$, получаем

$$\begin{aligned} \varphi(u)^* &= \operatorname{sgn}(\varphi(u)) \varphi(u) = \operatorname{sgn}(\varphi(v z_{i_1} \dots z_{i_n})) \operatorname{sgn}(u) \varphi(u) \\ &= \operatorname{sgn}(\varphi(v z_{i_1} \dots z_{i_n})) \varphi(u^*). \end{aligned}$$

При этом моном $v z_{i_1} \dots z_{i_n}$ зависит только от $\operatorname{vr}(u)$. Следовательно, верна

ЛЕММА 7. Если L есть T_2 -пространство, то L^* тоже T_2 -пространство.

Если в этой лемме заменить выражение “ T_2 -пространство” на выражение “ T_2 -идеал”, то получится утверждение, доказанное в [3]. T_2 -пространство L назовем T^* -пространством, если $L = M^*$ для некоторого T -пространства M .

Пусть $I_{r,t}$ – идеал алгебры F , порожденный переменными

$$\{x_{r+1}, \dots\} \cup \{z_{t+1}, \dots\}.$$

Справедлива

ТЕОРЕМА 5. Для любого ненулевого T -пространства $L \subset L_0$ существуют такие числа r и t , что для любого T -пространства Γ , для которого $L \subset \Gamma \subset L_0$, выполнено

$$\Gamma^* + I_{r,t} \simeq_{T^*} \Gamma^*.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем числа r и t в соответствии с теоремой 4. Следуя работе [3], введем обозначения: $I_{X,r+1}^-$ – идеал алгебры F , порожденный элементами

$$\sum_{\sigma \in S_{r+1}} \operatorname{sgn} \sigma u_0 x_{i_{\sigma(1)}} u_1 \dots u_r x_{i_{\sigma(r+1)}} u_{r+1},$$

$I_{Z,t+1}^-$ – идеал алгебры F , порожденный элементами

$$\sum_{\sigma \in S_{t+1}} \operatorname{sgn} \sigma v_0 z_{j_{\sigma(1)}} v_1 \dots v_r z_{j_{\sigma(t+1)}} v_{t+1},$$

где $u_0, \dots, u_{r+1}, v_0, \dots, v_{t+1} \in F \cup \{1\}$. Тогда $\Gamma^* + I_{X,r+1}^- + I_{Z,t+1}^- \simeq_{T^*} \Gamma^*$. Пусть U – наибольшее T^* -пространство, содержащееся в $\Gamma^* + I_{r,t}$. Используя стандартные соображения о полиномах Капелли (см. [3]), получаем $U \subset \Gamma^* + I_{X,r+1}^- + I_{Z,t+1}^-$. Так как U является T^* -идеалом, то $U = \Gamma^*$. Теорема доказана.

3. Редукция к локальному случаю. Пусть u, v – мономы алгебры F . Через $[u, v]_2$ обозначим полином $[u, v]$, если $\deg_Z u \cdot \deg_Z v$ – четное число, или $uv + vu$, если $\deg_Z u \cdot \deg_Z v$ – нечетное число. Для произвольных полиномов f и g выражение $[f, g]_2$ определим по линейности. Имеет место соотношение $([f, g])^* = [f^*, g^*]_2$, где $f, g \in P$ и $\text{vr}(f) \cap \text{vr}(g) = \emptyset$.

Для T -идеала I алгебры F через $[I, F]$ обозначим подпространство алгебры F , порожденное как линейное пространство элементами вида $[g, f]$, где $g \in I$ и $f \in F$. Легко проверить, что $[I, F]$ есть T -пространство. Аналогично, для любого T_2 -идеала Γ алгебры F через $[\Gamma, F]_2$ обозначим подпространство алгебры F , порожденное как линейное пространство элементами вида $[g, f]_2$, где $g \in \Gamma$ и $f \in F$. Легко проверить, что $[\Gamma, F]_2$ есть T_2 -пространство. Действительно, имеем $[\Gamma, F]_2 = ([\Gamma^*, F])^*$. Здесь $[\Gamma^*, F]$ есть T_2 -пространство, и, применяя операцию $*$, опять получаем T_2 -пространство в силу леммы 7. Имеем также $[I, F] \in L_0$ и $[\Gamma, F]_2 \in L_0^*$.

Через M_n обозначим T -идеал алгебры F , состоящий из тождеств алгебры матриц размера $n \times n$ над полем нулевой характеристики K .

Пусть $0 \neq L_1 \subset \dots \subset L_i \subset \dots$ – цепочка T -пространств. Если существует i такое, что $L_i \setminus L_0 \neq \emptyset$, то по теореме 1 получаем, что L_i содержит ненулевой T -идеал. Возможен также случай, когда все L_i содержатся в L_0 . Мы будем доказывать стабилизацию только во втором случае, так как решение в первом случае получается некоторым упрощением конструкции. Более формальный способ – свести все ко второму случаю, профильтровать по L_0 и воспользоваться леммой 2 и теоремой Кемера.

Проблему стабилизации цепочек T -пространств, каждое из которых содержится в L_0 (т. е. второй случай), назовем *ограниченной проблемой Шпехта*.

Следуя работе [3], докажем следующий вариант редукции ограниченной проблемы Шпехта.

ТЕОРЕМА 6. *Предположим, что для любых чисел n, r, t и для любой возрастающей цепочки T_2 -пространств $[M_n, F]_2 \subset V_1 \subset \dots \subset V_i \subset \dots$ цепочка пространств $V_1 \cap A \subset \dots \subset V_i \cap A \subset \dots$, где $A = K\langle x_1, \dots, x_r, z_1, \dots, z_t \rangle$, стабилизируется. Тогда ограниченная проблема Шпехта решается положительно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, и пусть $0 \neq L_1 \subset \dots \subset L_i \subset \dots \subset L_0$ – бесконечная строго возрастающая цепочка T -пространств. Так как $L_1 \neq 0$, то по теореме 2 существует ненулевой T -идеал I такой, что $[I, F] \subset L_1$. Тогда $[I^*, F]_2 \subset L_1^*$. По теореме 5 и предложению 2 из работы [3] существуют натуральные числа r и t такие, что для любого $i \geq 1$ имеем $L_i^* + I_{r,t} \simeq_{T^*} L_i^*$ и $I^* + I_{r,t} \simeq_{T^*} I^*$.

Пусть $A = K\langle x_1, \dots, x_r, z_1, \dots, z_t \rangle$ – подалгебра алгебры F . Тогда $L_i^* + I_{r,t} = L_i^* \cap A + I_{r,t}$ (в силу однородности) и цепочка пространств

$$L_1^* \cap A \subset \dots \subset L_i^* \cap A \subset \dots$$

строго возрастает. Действительно, если $L_i^* \cap A = L_{i+1}^* \cap A$, то $L_i^* + I_{r,t} = L_{i+1}^* + I_{r,t}$. Отсюда имеем $L_{i+1}^* \subset L_i^* + I_{r,t}$ и, следовательно, $L_{i+1}^* = L_i^*$. Поэтому

$L_{i+1} = L_i$. Противоречие. Пусть V_i – наибольшее T_2 -пространство, содержащееся в $(L_i^* + I_{r,t}) \cap L_0^*$. Тогда $V_i \cap A = L_i^* \cap A$ и цепочка $V_1 \cap A \subset \dots \subset V_i \cap A \subset \dots$ строго возрастает. Пусть также Γ – наибольший T -идеал, содержащийся в $I^* + I_{r,t}$. Как показано в лемме 7 работы [3], существует n такое, что $M_n \subset \Gamma$. Для того чтобы прийти к противоречию, надо показать, что $[M_n, F]_2 \subset V_1$. Так как $[M_n, F]_2$ есть T_2 -пространство и $[M_n, F]_2 \subset L_0^*$, то достаточно показать, что $[M_n, F]_2 \subset L_1^* + I_{r,t}$.

Пусть $g \in M_n \cap A$, а $f \in A$. Так как $M_n \cap A \subset I^*$, то $g \in I^*$ и $[g, f]_2 \in [I^*, F]_2$. Вспоминая, что $[I^*, F]_2 \subset L_1^*$, получаем $[M_n, F]_2 \subset L_1^* + I_{r,t}$ и $[M_n, F]_2 \subset V_1$. Теорема доказана.

§ 5. Квазимногочлены

1. Определение квазимногочленов. Выделим в T подполугруппу T'_2 подстановок вида $x \rightarrow gxh$, где $x \in X \cup Z$, а $\deg_Z g$ и $\deg_Z h$ – четные числа. Очевидно, $T'_2 \subset T_2$. Подстановка $\alpha \in T$ называется *однородной*, если $\alpha(y)$ – однородный многочлен для любого $y \in X \cup Z$.

Пусть $X_r = \{x_k^{(i,j)} : k \in \mathbb{N}, 1 \leq i, j \leq r\}$ и $Z_r = \{z_k^{(i,j)} : k \in \mathbb{N}, 1 \leq i, j \leq r\}$ – множества коммутативных переменных, а $K[X_r \cup Z_r]$ – свободная коммутативная алгебра с единицей. Обозначим через $\text{GM}(r)$ подалгебру алгебры $K[X_r \cup Z_r]$, порожденную матрицами

$$\bar{x}_k = \sum_{1 \leq i, j \leq r} x_k^{(i,j)} e_{ij}, \quad \bar{z}_k = \sum_{1 \leq i, j \leq r} z_k^{(i,j)} e_{ij}$$

и единичной матрицей. Алгебра $\text{GM}(r)$ естественным образом наделяется структурой T -пространства (см. [9]).

Пусть $\Theta = \{\sigma_1, \tau_1, \dots, \sigma_n, \tau_n, \dots\}$, и пусть $Q(r) = \text{GM}(r) *_K K\langle \Theta \rangle$ – свободное произведение алгебр. Элементы этой алгебры называются *квазимногочленами*. Пусть $Q_0(r)$ – подпространство $Q(r)$, натянутое на квазимногочлены вида $f\theta$, где $f \in Q(r)$, а $\theta \in \Theta$. Для любого однородного квазимногочлена f через $\deg_\Theta f$ обозначим количество вхождений букв из множества Θ в произвольный моном из f , если $f \neq 0$, а иначе положим $\deg_\Theta f = 0$. Это число назовем *θ -степенью* квазимногочлена f .

Для $n \in \mathbb{N}$ через Θ_n обозначим подпространство алгебры $Q(r)$, натянутое на однородные квазимногочлены f такие, что $\deg_\Theta f \geq n$. Очевидно, каждое Θ_n – идеал алгебры $Q(r)$ и $\Theta_0 = Q(r)$.

Далее будем считать, что $x_i = \bar{x}_i + \sigma_i$ и $z_j = \bar{z}_j + \tau_j$. Такие равенства не противоречат свободе переменных $x_i, z_j, \sigma_i, \tau_j$ и индуцируют вложение $F \subset Q(r)$. Отображение $y: \Theta \rightarrow X \cup Z$ зададим формулами $y(\sigma_i) = x_i$ и $y(\tau_j) = z_j$, и пусть $\theta = y^{-1}$. Пусть $\lambda: F \rightarrow \text{GM}(r)$ – гомоморфизм, определенный формулами $\lambda(x_i) = \bar{x}_i$ и $\lambda(z_i) = \bar{z}_i$.

Мы считаем, что переменные $x_k^{(i,j)}, \sigma_k$ соответствуют переменной x_k , а переменные $z_k^{(i,j)}, \tau_k$ переменной z_k . Для любого однородного элемента f любой из алгебр $\text{GM}(r)$ или $Q(r)$ его *z -степенью* ($\deg_Z f$) назовем суммарную степень f по всем переменным, соответствующим переменным из Z .

2. Действия полугрупп T и T_2 . Если $\alpha \in T$ – подстановка типа $y \rightarrow g_y$, где $y \in X \cup Z$ и $g_y \in F$, то положим $\lambda(y)^\alpha = \lambda(g_y)$ и $\theta(y)^\alpha = g_y - \lambda(g_y)$. Это действие превращает $Q(r)$ и все его идеалы Θ_n в T -пространства. При этом таким образом определенное действие на F совпадает с обычным действием T на F .

Определим теперь действие на $Q_0(r)$, отличное от только что введенного. Пусть $g\theta$ – элемент из $Q_0(r)$, где $\theta \in \Theta$, g – однородный квазимногочлен и $\alpha \in T_2$ – подстановка. Положим $\beta = (-1)^{\deg_Z g}$. Предположим сначала, что $\alpha(y(\theta)) = y_1 \dots y_k$, где $y_i \in X \cup Z$. Для $j = 1, \dots, k$ положим $n_j = \deg_Z y_1 \dots y_j$ и $m_j = \deg_Z y_{j+1} \dots y_k$. Тогда

$$(g\theta)^{(\alpha)} = \sum_{j=1}^k \beta^{m_j} (-1)^{m_j n_j} y_{j+1} \dots y_k g^\alpha y_1 \dots y_{j-1} \theta(y_j).$$

Теперь пусть $\alpha(y(\theta)) = \gamma_1 y_1 + \dots + \gamma_k y_k$, где $\gamma_i \in K$. Тогда

$$(g\theta)^{(\alpha)} = \sum_{j=1}^k g^\alpha (\gamma_1 \theta(y_1) + \dots + \gamma_k \theta(y_k)).$$

Действие всего T_2 на $Q_0(r)$ определим, продолжая приведенные выше частные случаи так, чтобы $Q_0(r)$ было KT_2 -модулем.

Подпространство пространства $Q_0(r)$, замкнутое относительно такого действия для любого $\alpha \in T_2$, назовем *ограниченным T_2 -пространством*.

Введем следующее определение. Пусть имеется элемент из L_0^*

$$f = \sum_{i=1}^k [g_i, y_i]_2, \quad (7)$$

где $g_i \in F$, а $y_i \in X \cup Z$ и $f_0 = \sum_{i=1}^k g_i \theta(y_i)$. Тогда считаем, что $f \rightarrow_R f_0$. Квазимногочлен f_0 строится однозначно по представлению (7). Вообще говоря, могут существовать различные f_1, f_2 , для которых $f \rightarrow_R f_1$ и $f \rightarrow_R f_2$. Однако если $f_1 \rightarrow_R f_0$ и $f_2 \rightarrow_R f_0$, то $f_1 = f_2$.

Важную связь между F и $Q_0(r)$ устанавливает

ЛЕММА 8. Пусть $f \in F$, $f \rightarrow_R f_0$ и $f_0 = \sum_{i=1}^l g_i \theta_i$, где $g_i \in Q(r)$, $\theta_i \in \Theta$ и $i_1 \neq i_2 \implies \theta_{i_1} \neq \theta_{i_2}$. Тогда все g_i принадлежат F .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеет место представление $f = \sum_{i=1}^k [g'_i, y'_i]$, где $g'_i \in F$, $y'_i \in X \cup Z$ и $f_0 = \sum_{i=1}^k g'_i \theta(y'_i)$. Группируя элементы $g'_i \theta(y'_i)$ по последней справа переменной, получаем, что каждое g_i есть сумма некоторых g'_j , т.е. принадлежит F . Лемма доказана.

Имеет место

ЛЕММА 9. Пусть $f \rightarrow_R f_0$, $\alpha \in T_2$ и $f_0^{(\alpha)} = \sum_{i=1}^k h_i \theta_i$, где $h_i \in Q(r)$, $\theta_i \in \Theta$ и $i_1 \neq i_2 \implies \theta_{i_1} \neq \theta_{i_2}$. Тогда $f^\alpha = \sum_{i=1}^k [h_i, y(\theta_i)]_2$ и $h_i \in F$. При этом $f^\alpha \rightarrow_R f_0^{(\alpha)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f_0 = \sum_{j=1}^l g_j \theta'_j$, где $g_j \in F$, $\theta'_j \in \Theta$, и $f = \sum_{j=1}^l [g_j, y(\theta'_j)]_2$. Легко проверить, что если $g \in F$ – однородный полином и $u = y_1 \dots y_k$ – моном, где $y_i \in X \cup Z$, то справедлива формула

$$[g, u]_2 = \sum_{j=1}^k \beta^{m_j} (-1)^{m_j n_j} [y_{j+1} \dots y_k g y_1 \dots y_{j-1}, y_j]_2, \quad (8)$$

где $m_j = \deg_Z y_{j+1} \dots y_k$, $n_j = \deg_Z y_1 \dots y_j$ и $\beta = (-1)^{\deg_Z g}$.

Выполним теперь подстановку $^\alpha$ в многочлене f и воспользуемся формулой (8) для преобразования коммутаторов. После этого сгруппируем члены $[\cdot, \cdot]_2$ по второму аргументу. Переходя от f^α , представленном в таком виде, к f' такому, что $f^\alpha \rightarrow_R f'$, получаем $f' = f_0^{(\alpha)} = \sum_{i=1}^k h_i \theta_i$. Отсюда ясно, что $h_i \in F$ (лемма 8) и $f^\alpha = \sum_{i=1}^k [h_i, y(\theta_i)]_2$. Лемма доказана.

Эта лемма показывает, что действия $^\alpha$ и $(^\alpha)$ в некотором смысле согласованы.

Пусть теперь $L \subset L_0^*$ – некоторое T_2 -пространство. Положим $R(L) = \{g \in Q_0(r) : \text{существует } f \in L \text{ такое, что } f \rightarrow_R g\}$. По лемме 9 получаем, что $R(L)$ есть ограниченное T_2 -пространство.

ЛЕММА 10. Пусть $L_1, L_2 \subset L_0^*$ суть T_2 -пространства и $R(L_1) \subset R(L_2)$. Тогда $L_1 \subset L_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in L_1$. Тогда $f \rightarrow_R f_0$ для некоторого f_0 . По определению $R(L_1)$ имеем $f_0 \in R(L_1)$. Но тогда $f_0 \in R(L_2)$ и существует $g \in L_2$ такое, что $g \rightarrow_R f_0$. Сравнивая $f \rightarrow_R f_0$ и $g \rightarrow_R f_0$, получаем, что $f = g \in L_2$. Лемма доказана.

А.В. Гришин в работе [8] доказал следующий результат.

ЛЕММА 11. $F \cap \Theta_n = M_r^n$.

Из этой леммы и леммы 8 получаем, что справедлива

ЛЕММА 12. $R(L_0^*) \cap \Theta_2 = R([M_r, F]_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \rightarrow_R f_0$ и $f_0 = \sum_{i=1}^k g_i \theta_i \in \Theta_2$, где $i_1 \neq i_2 \implies \theta_{i_1} \neq \theta_{i_2}$. По лемме 8 получаем, что все g_i принадлежат $F \cap \Theta_1 = M_r$. Следовательно, $f = \sum_{i=1}^k [g_i, y(\theta_i)]_2 \in [M_r, F]_2$ и $f_0 \in R([M_r, F]_2)$. Наоборот, если $f = \sum_{i=1}^k [g_i, y_i]_2$ и $f_0 = \sum_{i=1}^k g_i \theta(y_i)$, где $g_i \in M_r$ и $y_i \in X \cup Z$, то $g_i \in F \cap \Theta_1$. Отсюда $f_0 \in R(L_0^*) \cap \Theta_2$. Лемма доказана.

3. Разделение переменных по позициям. В дальнейшем удобно считать, что элементы некоторой алгебры следов коммутируют не только с общими матрицами, но и с элементами из Θ . Согласно [9] сделаем это следующим образом. Введем множества переменных $X_{r,s} = \{x_{k,s}^{(i,j)} : k \in \mathbb{N}, 1 \leq i, j \leq r\}$ и $Z_{r,s} = \{z_{k,s}^{(i,j)} : k \in \mathbb{N}, 1 \leq i, j \leq r\}$. Положим

$$x_k^{(s)} = \sum_{1 \leq i, j \leq r} x_{k,s}^{(i,j)} e_{ij}, \quad z_k^{(s)} = \sum_{1 \leq i, j \leq r} z_{k,s}^{(i,j)} e_{ij}.$$

Обозначим через $\text{GM}(r, s)$ подалгебру алгебры $K[X_{r,s} \cup Z_{r,s}]_r$, порожденную элементами $x_k^{(s)}$, $z_k^{(s)}$ и единичной матрицей. Через $\text{Tr}(r, s)$ обозначим подалгебру алгебры $K[X_{r,s} \cup Z_{r,s}]$, порожденную элементами $\text{tr } u$ и $\text{tr } v \text{ tr } w$, где $u, v, w \in \text{GM}(r, s)$ и $\deg_Z u$, $\deg_Z v + \deg_Z w$ – четные числа. Наконец, пусть $\text{Tr GM}(r, s)$ – подалгебра алгебры $K[X_{r,s} \cup Z_{r,s}]_r$, порожденная алгебрами $\text{GM}(r, s)$ и $\text{Tr}(r, s)$. Пусть $\lambda_i: F \rightarrow \text{GM}(r_i, i)$ – гомоморфизм, определенный формулами $\lambda_i(x_k) = x_k^{(i)}$ и $\lambda_i(z_k) = z_k^{(i)}$.

Считаем, что переменные $x_{k,s}^{(i,j)}$, σ_k соответствуют переменной x_k , а переменные $z_{k,s}^{(i,j)}$, τ_k соответствуют переменной z_k . *Степенью* некоторого однородного квазимногочлена или многочлена f относительно переменной $y \in X \cup Z$ (множества переменных H) назовем его суммарную степень по всем переменным, соответствующим переменной y (переменным из H), и обозначим это число через $\deg_y f$ ($\deg_H f$).

Для $\alpha \in T_2$ и $f \in \text{Tr GM}(r, s)$ или $f \in \text{Tr}(r, s)$ через f^α обозначим естественное действие α , когда переменной x_k соответствует матрица $x_k^{(s)}$, а переменной z_k – матрица $z_k^{(s)}$ (см. [9]).

Пусть $r_1, \dots, r_n$ – натуральные числа. Через $R\langle r_1, \dots, r_n \rangle$ обозначим линейное пространство, натянутое на элементы вида $f_1 \theta_1 \dots f_n \theta_n$, где $f_i \in \text{Tr GM}(r_i, i)$ и $\theta_i \in \Theta$. Элементы этого пространства также назовем *квазимногочленами*. Через $\text{Tr}\langle r_1, \dots, r_n \rangle$ обозначим подалгебру алгебры $K[\bigcup_{i=1}^n (X_{r_i,i} \cup Z_{r_i,i})]$, порожденную алгебрами $\text{Tr}(r_i, i)$, $i = 1, \dots, n$. Полугруппа T_2 стандартным образом действует на $\text{Tr}\langle r_1, \dots, r_n \rangle$.

Если $a = a_1 \dots a_n \in \text{Tr}\langle r_1, \dots, r_n \rangle$ и $f = f_1 \theta_1 \dots f_n \theta_n \in R\langle r_1, \dots, r_n \rangle$, где $a_i \in \text{Tr}(r_i, i)$, $f_i \in \text{Tr GM}(r_i, i)$ и $\theta_i \in \Theta$, то положим $a \cdot f = a_1 f_1 \theta_1 \dots a_n f_n \theta_n$. Как показал А. В. Гришин в работе [9], продолжая это действие по линейности, мы получим, что $R\langle r_1, \dots, r_n \rangle$ есть унитарный $\text{Tr}\langle r_1, \dots, r_n \rangle$ -модуль.

Теперь определим действие полугруппы T_2 на $R\langle r_1, \dots, r_n \rangle$, аналогичное действию T_2 на $Q_0(r)$. Однако определим это действие, используя некоторое обобщение пространства $R\langle r_1, \dots, r_n \rangle$. Предположим, что мы имеем алгебры $A_1, \dots, A_n$ и гомоморфизмы $\varphi_i: F \rightarrow A_i$, $i = 1, \dots, n$. Предположим дополнительно, что все алгебры $A_1, \dots, A_n$ являются левыми KT_2 -модулями и что все φ_i есть KT_2 -гомоморфизмы. Результат действия эндоморфизма $\alpha \in T_2$ на элемент $a_i \in A_i$ мы обозначим через a^α . Мы считаем, что все алгебры A_i являются Z_2 -градуированными, т.е. $A_i = A_i^0 \oplus A_i^1$, где A_i^0 и A_i^1 есть T_2 -инвариантные подпространства такие, что $A_i^0 A_i^0 \subset A_i^0$, $A_i^0 A_i^1 \subset A_i^1$, $A_i^1 A_i^0 \subset A_i^1$, $A_i^1 A_i^1 \subset A_i^1$, $\varphi_i(F_0) \subset A_i^0$ и $\varphi_i(F_1) \subset A_i^1$.

Примерами таких отображений и алгебр служат отображения λ_i и алгебры $\text{Tr GM}(r_i, i)$. Определим $R\langle A_1, \varphi_1, \dots, A_n, \varphi_n \rangle$ как линейное пространство, натянутое на элементы вида $a = a_1 \theta_1 \dots a_n \theta_n$, где $a_i \in A_i$ и $\theta_i \in \Theta$. Элемент a назовем *однородным*, если каждое a_i принадлежит либо A_i^0 , либо A_i^1 . Для однородного a определим $\beta(a) = 1$, если a – четный элемент, и $\beta(a) = -1$, если a нечетный.

Действие KT_2 на $R\langle A_1, \varphi_1, \dots, A_n, \varphi_n \rangle$ определим следующим образом.

Для монома $u = y_1 \dots y_l$ алгебры F , где $y_j \in X \cup Z$, и для $i = 1, \dots, n - 1$

ПОЛОЖИМ

$$\theta^{(i)}(u) = \sum_{j=1}^l \varphi_i(y_1) \dots \varphi_i(y_{j-1}) \theta(y_j) \varphi_{i+1}(y_{j+1}) \dots \varphi_{i+1}(y_l). \quad (9)$$

Для произвольного $f \in F$ выражение $\theta^{(i)}(f)$ определим из соображений линейности.

Пусть $\alpha \in T_2$ – подстановка типа $y \rightarrow g_y$, $y \in X \cup Z$ и $a = a_1 \theta_1 \dots a_n \theta_n$ – однородный элемент, где $a_i \in A_i$ и $\theta_i \in \Theta$. Предположим сначала, что $\alpha(y(\theta_n)) = y_1 \dots y_l$, где $y_i \in X \cup Z$.

Тогда положим

$$\begin{aligned} a^{(\alpha)} &= \sum_{j=1}^l \beta(a)^{m_j} (-1)^{m_j n_j} \varphi_1(y_{j+1} \dots y_l) \left(\prod_{i=1}^{n-1} a_i^\alpha \theta^{(i)}(\alpha(y(\theta_i))) \right) \\ &\quad \times \varphi_n(y_1 \dots y_{j-1}) \theta(y_j), \end{aligned} \quad (10)$$

где $m_j = \deg_Z y_{j+1} \dots y_l$ и $n_j = \deg_Z y_1 \dots y_j$.

Теперь пусть $\alpha(y(\theta)) = \gamma_1 y_1 + \dots + \gamma_l y_l$, где $\gamma_i \in K$ и $y_i \in X \cup Z$. Тогда

$$a^{(\alpha)} = \prod_{i=1}^n a_i^\alpha \theta(\alpha(y(\theta_i))). \quad (11)$$

Действие T_2 на $R\langle A_1, \varphi_1, \dots, A_n, \varphi_n \rangle$ определим, продолжая приведенные выше частные случаи, так, чтобы $R\langle A_1, \varphi_1, \dots, A_n, \varphi_n \rangle$ было KT_2 -модулем.

Любое подпространство L пространства $R\langle A_1, \varphi_1, \dots, A_n, \varphi_n \rangle$, замкнутое относительно такого действия, как и в случае подпространств пространства $Q_0(r)$, будем называть *ограниченным T_2 -пространством*. Пусть $H \subset X \cup Z$. Если при этом L порождено как ограниченное T_2 -пространство элементами, являющимися линейными комбинациями элементов вида $a_1 \theta_1 \dots a_n \theta_n$, где $y(\theta_i) \in H$ и $a_i \in \varphi(K\langle H \rangle)$, то L называется *ограниченным H -зависящим T_2 -пространством*.

Предположим, что у нас теперь имеются алгебры $B_1, \dots, B_n$ и гомоморфизмы $\psi_1, \dots, \psi_n$, аналогичные алгебрам $A_1, \dots, A_n$ и гомоморфизмам $\varphi_1, \dots, \varphi_n$.

Пусть $\pi_i: A_i \rightarrow B_i$ – такие гомоморфизмы, являющиеся KT_2 -гомоморфизмами, что диаграммы

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\varphi_i} & A_i \\ & \searrow \psi_i & \downarrow \pi_i \\ & & B_i \end{array}$$

коммутативны.

Рассмотрим отображение $\pi: R\langle A_1, \varphi_1, \dots, A_n, \varphi_n \rangle \rightarrow R\langle B_1, \psi_1, \dots, B_n, \psi_n \rangle$, заданное формулой $\pi(a_1 \theta_1 \dots a_n \theta_n) = \pi_1(a_1) \theta_1 \dots \pi_n(a_n) \theta_n$, где $a_i \in A_i$ и $\theta_i \in \Theta$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Отображение π является KT_2 -гомоморфизмом.*

Любое подпространство пространства $R\langle r_1, \dots, r_n \rangle$, замкнутое относительно такого действия, назовем, как и случае пространства $Q_0(r)$, *ограниченным T_2 -пространством*.

Пусть s и d – натуральные числа. Положим $G = \{x_1, \dots, x_s, z_1, \dots, z_d\}$. Пусть $H \subset X$. Через $R(H)$, $\text{Tr}(H)$, $\text{Tr GM}_i(H)$ и $\text{GM}_i(H)$ обозначим подпространства пространств $R\langle r_1, \dots, r_n \rangle$, $\text{Tr}\langle r_1, \dots, r_n \rangle$, $\text{Tr GM}(r_i, i)$ и $\text{GM}(r_i, i)$ соответственно, состоящие из квазимногочленов (многочленов), зависящих только от переменных, соответствующих переменным из $G \cup H$ и имеющих относительно каждой переменной из H степень, не большую единицы.

Пользуясь теоремой 6, получаем, что для решения ограниченной проблемы Шпехта достаточно для любой цепочки ограниченных T_2 -пространств $L_1 \subset \dots \subset L_i \subset \dots \subset R\langle r_1, \dots, r_n \rangle$ доказать, что стабилизируется цепочка $L_1 \cap R(\emptyset) \subset \dots \subset L_i \cap R(\emptyset) \subset \dots$ для любого конечного G . При этом надо учесть лемму 10 и лемму 12, замечая, что $Q_0(r)/\Theta_2$ изоморфно вкладывается в $R\langle r \rangle$ как KT_2 -модуль.

§ 6. Старшие части квазимногочленов

В этом параграфе мы используем метод ширины, введенный А. В. Гришиным в работе [8].

1. Элементарные подпространства. Через F^e обозначим алгебру, получающуюся из F внешним присоединением единицы, а через $\overline{F}$ подалгебру алгебры F^e , натянутую как линейное пространство на мономы, зависящие только от переменных из G и имеющие четную z -степень. При этом продолжим гомоморфизмы γ_j на все $\overline{F}$, полагая $\gamma_j(1_{\overline{F}})$ равной единичной матрице размера $r_j \times r_j$.

Пусть $t \in X \cup Z$ – некоторая переменная и $g \in F$. Тогда $\alpha(t, g) \in T$ – такой эндоморфизм, что $\alpha(t, g)(y) = y$ при $y \in (X \cup Z) \setminus \{t\}$ и $\alpha(t, g)(t) = tg$. Заметим, что если $\deg_Z g$ – четное число, то $\alpha \in T'_2$.

Фиксируем некоторое бесконечное множество переменных $S \subset X$ такое, что $S \cap G = \emptyset$.

Через $a = (a_1, \dots, a_k)$ будем обозначать упорядоченные наборы. Величину k будем называть *длиной набора* a и обозначать через $|a|$. Через $\bar{a}$ обозначим неупорядоченное множество элементов, из которых состоит набор a . Для $i = 1, \dots, n$ через i^+ обозначим число от 1 до n , равное $i+1$ по модулю n . *Расстановкой числа n* назовем множество $\{j_1, \dots, j_q\}$ такое, что $1 \leq j_1 < \dots < j_q \leq n$.

Пусть теперь $\eta = (t_1, \dots, t_q)$ – набор различных переменных из S , $\sigma = \{j_1, \dots, j_q\}$ – расстановка числа n , где $j_1 < \dots < j_q$, и ξ, μ – некоторые подмножества S такие, что $\xi \cup \bar{\eta} \subset \mu$, $\xi \cap \bar{\eta} = \emptyset$ и $|\xi| \leq n$. Тогда через $R^{(\sigma, \eta, \xi, \mu)}$ обозначим подпространство пространства $R(\mu)$, натянутое на такие квазимногочлены $f = f_1 \theta_1 \dots f_n \theta_n$, где $f_i \in \text{Tr GM}(r_i, i)$, $\theta_i \in \Theta$, что выполнены условия:

- 1) квазимногочлен f имеет по каждой переменной из μ степень 1;
- 2) для $i = 1, \dots, q$ многочлен f_{j_i} зависит от t_i ;
- 3) выполнена эквивалентность $(t \in \xi) \iff (\theta(t) = \theta_j \text{ для некоторого } j = 1, \dots, n \text{ и } t \in S)$.

Пусть $\sigma_0 = \emptyset$, $\eta_0 = \emptyset$, $\xi_0 = \emptyset$, $\mu_0 = \emptyset$ – пустые наборы и множества. Тогда $R^{(\sigma_0, \eta_0, \xi_0, \mu_0)} = R(\emptyset)$.

Следуя работе [8], позиции в квазимногочлене f с номерами $j_1, \dots, j_q$ назовем *активными*, а остальные *пассивными* относительно расстановки σ .

Пусть $j = 1, \dots, n$. Положим $\sigma_j = (j_1, \dots, j_{m-1}, j, j_m, \dots, j_q)$ и $m(\sigma, j) = m$, если $j_{m-1} < j < j_m$ для некоторого m , и $\sigma_j = \sigma$ и $m(\sigma, j) = 0$, если такого m не существует.

2. Операторы дифференцирования и умножения. Пусть теперь имеют-ся попарно различные переменные $t_1, \dots, t_k \in S \setminus \mu$. Определим оператор дифференцирования $D_{t_1, \dots, t_k}^\sigma$.

Пусть $f = f_1 \theta_1 \dots f_n \theta_n \in R^{(\sigma, \eta, \xi, \mu)}$ – однородный квазимногочлен, где $f_i \in \text{Tr GM}(r_i, i)$, $\theta_i \in \Theta$. Пусть α – подстановка типа $y \rightarrow y(1 + t_1 + \dots + t_k)$, $y \in G$. Через h обозначим квазимногочлен, полученный из f аналогично квазимногочлену $f^{(\alpha)}$ по формулам (9)–(11), с тем лишь отличием, что операция α применяется только к многочленам f_i , стоящим на пассивных позициях относительно расстановки σ . Тогда пусть $D_{t_1, \dots, t_k}^\sigma f$ обозначает компоненту квазимногочлена h , линейную по переменным $t_1, \dots, t_k$. Для произвольного $f \in R^{(\sigma, \eta, \xi, \mu)}$ квазимногочлен $D_{t_1, \dots, t_k}^\sigma f$ определим по линейности.

Пусть $t \in \mu$ и имеется однородный многочлен $g \in \overline{F}$. При $\deg g \geq 1$ будем считать, что $g = \sum_{l=1}^s \gamma_l y_{1,l} \dots y_{k,l} \in \overline{F}$, где $\gamma_l \in K$ и $y_{i,l} \in G$. При $\deg g \leq 0$ считаем, что $g = \gamma \cdot 1_{\overline{F}}$, где $\gamma \in K$.

Определим тогда оператор умножения $C_{t,g}^\sigma$, действующий на $R^{(\sigma, \eta, \xi, \mu)}$ следующим образом. Пусть $f = f_1 \theta_1 \dots f_n \theta_n \in R^{(\sigma, \eta, \xi, \mu)}$ – квазимногочлен, где $f_i \in \text{Tr GM}(r_i, i)$, $\theta_i \in \Theta$.

Возможны два случая.

1. Существует j такое, что f_j зависит от переменных, соответствующих переменной t .

Рассмотрим подслучаи:

а) $j \in \sigma$; тогда $C_{t,g}^\sigma f = 0$, если $\deg g \geq 1$, и $C_{t,g}^\sigma f = \gamma f$, если $\deg g \leq 0$;

б) $j \notin \sigma$; тогда $C_{t,g}^\sigma f = f^{(\alpha(t,g))}$.

2. Существует j такое, что $y(\theta_j) = t$.

Рассмотрим подслучаи:

а) $j, j^+ \in \sigma$; тогда $C_{t,g}^\sigma f = 0$, если $\deg g \geq 1$, и $C_{t,g}^\sigma f = \gamma f$, если $\deg g \leq 0$;

б) $j \in \sigma$, $j^+ \notin \sigma$; тогда

$$C_{t,g}^\sigma f = f_1 \theta_1 \dots f_j \theta_j \lambda_{j+1}(g) f_{j+1} \theta_{j+1} \dots f_n \theta_n,$$

если $j < n$, или

$$C_{t,g}^\sigma f = \lambda_1(g) f,$$

если $j = n$;

с) $j \notin \sigma$, $j^+ \in \sigma$; тогда

$$C_{t,g}^\sigma f = f_1 \theta_1 \dots f_j \left(\sum_{l=1}^s \gamma_l \lambda_j(t y_{1,l} \dots y_{k-1,l}) \theta(y_{k,l}) \right) f_{j+1} \theta_{j+1} \dots f_n \theta_n,$$

если $\deg g \geq 1$, и $C_{t,g}^\sigma f = \gamma f$, если $\deg g \leq 0$;

д) $j, j^+ \notin \sigma$; тогда $C_{t,g}^\sigma f = f^{(\alpha(t,g))}$.

Заметим, что $C_{t,1}^\sigma$ – тождественный оператор.

Оператор $D_{t_1, \dots, t_k}^\sigma$ осуществляет дифференцирование и таким образом помещает переменные, соответствующие переменным $t_1, \dots, t_k$, на некоторые позиции в квазимногочленах. В свою очередь, оператор $C_{t,g}^\sigma$ осуществляет действие на квазимногочлены через переменные, соответствующие переменной t .

Пусть $f \in R^{(\sigma, \eta, \xi, \mu)}$ – некоторый квазимногочлен и $g_1, \dots, g_k \in \bar{F}$ – однородные многочлены. Выберем различные переменные $t_1, \dots, t_k \in S \setminus \mu$. Тогда $E_{g_1, \dots, g_k}^\sigma f$ определим как квазимногочлен, получающийся из квазимногочлена $C_{t_1, g_1}^\sigma \dots C_{t_k, g_k}^\sigma D_{t_1, \dots, t_k}^\sigma f$ заменами $t_i \rightarrow 1$, $i = 1, \dots, k$ ($t_i \rightarrow 1$ означает замену $\lambda_j(t_i) \rightarrow e_{r_j}$, $j = 1, \dots, n$, и $\theta(t_i) \rightarrow 0$, где e_{r_j} – единичная матрица размера $r_j \times r_j$). Для произвольного $f \in R(S)$ квазимногочлен $E_{g_1, \dots, g_k}^\sigma f$ определим по линейности.

Назовем $E_{g_1, \dots, g_k}^\sigma f$ *символической σ -степенью* квазимногочлена f относительно многочленов $g_1, \dots, g_k$. Если при этом $\sigma = \sigma_0$, то $E_{g_1, \dots, g_k}^\sigma f$ называется просто *символической степенью* квазимногочлена f .

Введем также понятие *символической степени* многочлена $f \in \bar{F}$ относительно многочленов $g_1, \dots, g_k \in \bar{F}$. Выберем различные переменные $t_1, \dots, t_k \in S$. Рассмотрим компоненту h многочлена, получающегося из многочлена f заменой $y \rightarrow y(1 + t_1 + \dots + t_k)$, $y \in G$, имеющую первую степень по переменным $t_1, \dots, t_k$. Тогда через $f^{(g_1, \dots, g_k)}$ обозначим многочлен, получающийся из многочлена h заменой $t_i \rightarrow g_i$, $i = 1, \dots, k$.

Отметим следующие свойства введенной выше операции символической σ -степени.

1. Любое выражение вида $E_1 \dots E_k f$, где $E_1, \dots, E_k$ – операторы взятия символической σ -степени, есть линейная комбинация выражений вида $E f$, где E – оператор взятия символической σ -степени.

2. Для различных t_1 и t_2 из множества S операторы $C_{t_1, g}^\sigma$ и $C_{t_2, h}^\sigma$ коммутируют и $C_{t, g_1}^\sigma C_{t, g_2}^\sigma = C_{t, g_1 g_2}^\sigma$.

3. Любое выражение вида $E_{g_1, \dots, g_k}^\sigma C_{t, g}^\sigma f$, где $f \in R^{(\sigma, \eta, \xi, \mu)}$ и $t \in \mu$, есть линейная комбинация выражений вида $C_{t, h}^\sigma E_{h_1, \dots, h_l}^\sigma f$.

4. Пусть $f \in R^{(\sigma, \eta, \xi, \mu)}$ – некоторый квазимногочлен и $g_1, \dots, g_k, h_1, \dots, h_l \in \bar{F}$ – однородные многочлены. Рассмотрим различные переменные $t_1, \dots, t_l \in S \setminus \mu$. Тогда квазимногочлен, полученный из квазимногочлена $C_{t_1, h_1}^\sigma \dots C_{t_l, h_l}^\sigma E_{g_1, \dots, g_k}^\sigma \times D_{t_1, \dots, t_l}^\sigma f$ заменами $t_i \rightarrow 1$, $i = 1, \dots, l$, равен линейной комбинации выражений вида $E f$, где E – оператор взятия символической σ -степени.

Эти свойства легко доказать методами, использованными в работе [8].

Непосредственным следствием предыдущих пунктов является

5. Пусть $f \in R^{(\sigma, \eta, \xi, \mu)}$ – некоторый квазимногочлен. Рассмотрим некоторые операторы $E_1, \dots, E_k$, являющиеся произведениями операторов взятия символических σ -степеней. Возьмем различные переменные $t_1, \dots, t_l \in S \setminus \mu$. Пусть также $C_0, \dots, C_k$ – операторы, являющиеся произведениями операторов вида $C_{t_i, h}^\sigma$. Тогда квазимногочлен, полученный из квазимногочлена $C_0 E_1 C_1 \dots C_{k-1} E_k C_k \times D_{t_1, \dots, t_l}^\sigma f$ заменами $t_i \rightarrow 1$, $i = 1, \dots, l$, равен линейной комбинации выражений

вида Ef , где E – оператор взятия символической σ -степени.

Основным техническим моментом при доказательстве свойств 1–5 являются следующие предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $f \in R^{(\sigma, \eta, \xi, \mu)}$ – некоторый однородный квазимногочлен. Предположим, что f зависит только от одной переменной y из G и имеет по ней первую степень. Пусть $t \notin \mu$ и $g, h \in \bar{F}$ – однородные многочлены. Тогда квазимногочлен, получающийся из $C_{t,h}^\sigma E_g^\sigma D_t^\sigma f$ заменой $t \rightarrow 1$, равен $E_{gh}^\sigma f$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $f \in R^{(\sigma, \eta, \xi, \mu)}$ – некоторый однородный квазимногочлен. Предположим, что f не зависит ни от одной переменной из G . Пусть $t \in \mu$ и $g_1, \dots, g_k, h \in \bar{F}$ – однородные многочлены. Тогда $E_{g_1, \dots, g_k}^\sigma C_{t,h}^\sigma f = C_{t,h(g_1, \dots, g_k)}^\sigma$.

3. Ширина квазимногочленов. Пусть имеется однородный квазимногочлен степени a вида

$$f = f_1 \theta_1 \dots f_n \theta_n \in R(S), \quad (12)$$

где $f_i \in \text{Tr GM}(r_i, i)$, $\theta_i \in \Theta$.

Тогда положим $b_\sigma(f) = a - \sum_{j \in \sigma} \deg_G f_j$. Это число назовем σ -шириной квазимногочлена f (см. [8]). Произвольный однородный элемент $g \in R(S)$ можно представить в виде несократимой суммы: $g = g_1 + \dots + g_k$, где каждое g_i имеет вид (12).

Тогда положим

$$b_\sigma(g) = \max_{i=1, \dots, k} b_\sigma(g_i), \quad p_\sigma(g) = \sum \{g_i : b_\sigma(g_i) = b_\sigma(g)\}.$$

Квазимногочлен $p_\sigma(g)$ назовем σ -старшей частью g . Однородный квазимногочлен g , являющийся суммой квазимногочленов вида (12), имеющих одинаковую σ -ширину k , называется σ -однородным квазимногочленом. Число k при этом называется σ -шириной g . Естественным образом вводится понятие σ -однородной компоненты.

Введенное выше понятие символической σ -степени связано с понятием σ -ширины следующим образом. Пусть f есть σ -однородный квазимногочлен и $\sigma' \subset \sigma$. Предположим также, что все квазимногочлены $g_1, \dots, g_k \in \bar{F}$ имеют степень, большую нуля. Тогда квазимногочлен $E_{g_1, \dots, g_k}^\sigma f$ равен σ -однородной компоненте квазимногочлена $E_{g_1, \dots, g_k}^{\sigma'} f$, имеющей σ -ширину, равную σ -ширине f . При этом если $E_{g_1, \dots, g_k}^\sigma f$ не равен нулю, то $E_{g_1, \dots, g_k}^\sigma f = p_\sigma(E_{g_1, \dots, g_k}^{\sigma'} f)$.

Подпространство M пространства $R(S)$ назовем σ -однородным, если оно однородно в обычном смысле и любая σ -однородная компонента любого квазимногочлена из M принадлежит M .

σ -однородное подпространство пространства $R(S)$, замкнутое относительно взятия символических σ -степеней, назовем (T_2, σ) -пространством.

Пусть M – некоторое однородное подпространство пространства $R(S)$. Тогда через $\Delta_\sigma(M)$ обозначим пространство, натянутое на элементы $p_\sigma(f)$, где f – однородный многочлен из M . Легко видеть, что $\Delta_\sigma(M)$ σ -однородно.

Справедлива

ЛЕММА 13. Пусть $M \subset R(S)$ есть (T_2, σ') -пространство и $\sigma' \subset \sigma$. Тогда $\Delta_\sigma(M)$ есть (T_2, σ) -пространство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g_1, \dots, g_k \in \overline{F}$ — однородные многочлены. Без ограничения общности можно считать, что $g_1, \dots, g_l$ суть константы и $\deg g_{l+1}, \dots, \deg g_k \geq 1$. Пусть $f \in M$ — однородный квазимногочлен. Нам достаточно показать, что $E_{g_1, \dots, g_k}^\sigma p_\sigma(f) \in \Delta_\sigma(M)$. Учитывая, что квазимногочлен $p_\sigma(f)$ σ -однороден, получим, что $E_{g_1, \dots, g_k}^{\sigma_j} p_\sigma(f) = \alpha E_{g_{l+1}, \dots, g_k}^\sigma p_\sigma(f)$, где $\alpha \in K$.

Теперь легко проверить, что либо $E_{g_{l+1}, \dots, g_k}^\sigma p_\sigma(f) = 0$, либо

$$E_{g_{l+1}, \dots, g_k}^\sigma p_\sigma(f) = p_\sigma(E_{g_{l+1}, \dots, g_k}^{\sigma'} p_\sigma(f)) = p_\sigma(E_{g_{l+1}, \dots, g_k}^{\sigma'} f).$$

Лемма доказана.

4. Построение пространств $L^{(\sigma, \eta)}$. Фиксируем попарно различные переменные $\{t_{j,i} : j = 1, \dots, n, i = 1, \dots, n+1\} \subset S$. Пусть $S_q = \{t_{j,i} : j \leq q, i \leq n+1\}$.

Пусть теперь $L \subset R(\emptyset)$ — произвольное (T_2, σ_0) -пространство. Построим по индукции некоторую систему подпространств

$$L^{(\sigma, \eta)} \subset +\{R^{(\sigma, \eta, \xi, S_p)} : \xi \subset S_p, \xi \cap \overline{\eta} = \emptyset\},$$

где $p = |\sigma|$ и $|\overline{\eta} \cap \{t_{k,i} : i = 1, \dots, n+1\}| = 1$ для $k = 1, \dots, p$. Набор η , удовлетворяющий этому свойству, назовем *допустимым*, и пару (σ, η) также назовем *допустимой*.

Положим $L^{(\sigma_0, \eta_0)} = L$. Предположим, что $L^{(\sigma, \eta)}$ уже построено и что $|\sigma| = q - 1 < n$.

Пусть

$$B = D_{t_{q,1}, \dots, t_{q,n+1}}^\sigma.$$

Через $CL^{(\sigma, \eta)}$ обозначим замыкание пространства $BL^{(\sigma, \eta)}$ относительно взятия операций $C_{t_{q,i}, g}^\sigma$, где $i = 1, \dots, n+1$ и $g \in \overline{F}$, и взятия символических σ -степеней.

Пусть $A_0 = \{1, \dots, n\} \setminus \sigma$. Через A обозначим множество пар (i, j) , где $j \in A_0$ и $i = 1, \dots, n+1$.

Положим по определению

$$K_{i,j} = +\{R^{(\sigma_j, \eta_{i,j}, \xi, S_q)} : \exists \xi \subset S_q, \xi \cap \overline{\eta} = \emptyset, t_{q,i} \notin \xi, t_{q,i+1}, \dots, t_{q,n+1} \in \xi\},$$

где набор $\eta_{i,j}$ получается из набора η вставкой переменной $t_{q,i}$ между местом $m(\sigma, j) - 1$ и местом $m(\sigma, j)$ слева.

Тогда имеем

$$CL^{(\sigma, \eta)} \subset K, \quad K = \bigoplus_{(i,j) \in A} K_{i,j}.$$

Считаем, что $(i_1, j_1) < (i_2, j_2)$, если первая пара меньше второй лексикографически. Через $P_{i,j}$ обозначим проектор пространства K на $K_{i,j}$.

Положим

$$C_{i,j}L^{(\sigma,\eta)} = P_{i,j} \left(CL^{(\sigma,\eta)} \cap \bigoplus_{\substack{(i,j) \leq (i',j') \\ (i',j') \in A}} K_{i',j'} \right).$$

Легко видеть, что пространство $C_{i,j}L^{(\sigma,\eta)}$ замкнуто относительно действия операторов $C_{t_q,i,g}^\sigma$, $g \in \overline{F}$, а также относительно взятия символических σ -степеней. Действительно, пространство, стоящее под знаком оператора $P_{i,j}$ в формуле, определяющей $C_{i,j}L^{(\sigma,\eta)}$, и пространства $K_{i,j}$, где $(i,j) \leq (i',j')$, замкнуты относительно этих операций. Наконец, положим $L^{(\sigma_j, \eta_{i,j})} = \Delta_{\sigma_j}(C_{i,j}L^{(\sigma,\eta)})$.

По лемме 13 если $L^{(\sigma,\eta)}$ есть (T_2, σ) -пространство, то $L^{(\sigma_j, \eta_{i,j})}$ есть (T_2, σ_j) -пространство. Кроме того, $L^{(\sigma_j, \eta_{i,j})}$, как и $C_{i,j}L^{(\sigma,\eta)}$, замкнуто относительно действия эндоморфизмов $\alpha(t_{q,i}, g)$, где $g \in \overline{F}$.

Отсюда получаем, что справедлива

ЛЕММА 14. Пусть $L \subset R(\emptyset)$ есть (T_2, σ_0) -пространство и $\eta = (t_1, \dots, t_q)$. Тогда пространство $L^{(\sigma,\eta)}$, построенное описанным выше способом, есть (T_2, σ) -пространство, замкнутое относительно действия эндоморфизмов $\alpha(t_i, g)$, где $i = 1, \dots, q$ и $g \in \overline{F}$.

Пусть J_i — некоторый T_2 -идеал алгебры $\text{Tr GM}(r_i, i)$, $i = 1, \dots, n$. Через $I(J_1, \dots, J_n)$ обозначим подпространство пространства $R(S)$, натянутое на квазимногочлены вида $h_1 f_1 h'_1 \theta_1 \dots h_n f_n h'_n \theta_n$, где $f_i \in \text{Tr GM}_i(\emptyset) \cap J_i$, $h_i, h'_i \in \text{Tr GM}_i(S)$, $\theta_i \in \Theta$. Заметим, что T_2 -идеалы J_i однородные в силу бесконечности поля K .

Докажем следующее утверждение, устанавливающее связь между L и пространствами $L^{(\sigma,\eta)}$.

ЛЕММА 15. Пусть L , L_1 и $L_2 \subset R(\emptyset)$ есть (T_2, σ_0) -пространства. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если $L_1 \subset L_2$, то $L_1^{(\sigma,\eta)} \subset L_2^{(\sigma,\eta)}$;
- 2) $L_1^{(\sigma,\eta)} + L_2^{(\sigma,\eta)} \subset (L_1 + L_2)^{(\sigma,\eta)}$;
- 3) пусть $L_1 \subset L_2$ и для любой допустимой пары (σ, η) такой, что $|\sigma| = |\eta| = n$, выполнено $L_1^{(\sigma,\eta)} = L_2^{(\sigma,\eta)}$; тогда $L_1 = L_2$;
- 4) если $L \subset I(J_1^{s_1}, \dots, J_n^{s_n})$, то $L^{(\sigma,\eta)} \subset I(J_1^{s_1-r}, \dots, J_n^{s_n-r})$, $r = |\sigma|(n+1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1) очевидно по построению.

2) В силу п. 1) получаем $L_1^{(\sigma,\eta)} \subset (L_1 + L_2)^{(\sigma,\eta)}$ и $L_2^{(\sigma,\eta)} \subset (L_1 + L_2)^{(\sigma,\eta)}$. Из того, что $(L_1 + L_2)^{(\sigma,\eta)}$ есть линейное пространство, получаем требуемое утверждение.

3) Воспользуемся здесь системой обозначений, введенной при построении пространств $L^{(\sigma_j, \eta_{i,j})}$. Достаточно показать, что если для всех $(i, j) \in A$ выполнено $L_1^{(\sigma_j, \eta_{i,j})} = L_2^{(\sigma_j, \eta_{i,j})}$, то $L_1^{(\sigma,\eta)} = L_2^{(\sigma,\eta)}$. Стандартные рассуждения о старших частях и фильтрациях показывают, что $C_{i,j}L_1^{(\sigma,\eta)} = C_{i,j}L_2^{(\sigma,\eta)}$. Аналогичные рассуждения дают $CL_1^{(\sigma,\eta)} = CL_2^{(\sigma,\eta)}$.

Пусть $f \in L_2^{(\sigma, \eta)}$ – σ -однородный квазимногочлен. Тогда $Bf \in BL_2^{(\sigma, \eta)} \subset CL_2^{(\sigma, \eta)} = CL_1^{(\sigma, \eta)}$. Пусть g – квазимногочлен, получающийся из Bf в результате подстановки $t_{|\sigma|+1, i} \rightarrow 1$, $i = 1, \dots, n+1$. Учитывая, что $L_1^{(\sigma, \eta)}$ есть (T_2, σ) -пространство (см. [9], унитарный принцип), получаем $g \in L_1^{(\sigma, \eta)}$. С другой стороны, непосредственное вычисление с учетом σ -однородности f дает $g = \alpha f$, где α – ненулевой элемент K . Здесь для того, чтобы заключить, что $\alpha \neq 0$, нужно воспользоваться фактом $\text{char } K = 0$. Тогда $f \in L_1^{(\sigma, \eta)}$ и $L_1^{(\sigma, \eta)} = L_2^{(\sigma, \eta)}$.

4) Так как $L^{(\sigma, \eta)} \subset R(S_q)$, где $q = |\sigma|$ и $|S_q| = r = q(n+1)$, то максимальное количество “испорченных” элементов из идеалов J_i не превзойдет r . Тот факт, что элементы T_2 -идеалов J_i не разрушаются при взятии операции $\Delta_{\sigma'}$, следует из вышеупомянутой однородности J_i . Лемма доказана.

§ 7. Абстрактное линейное следование

1. Общая теория. Пусть V – произвольный модуль над коммутативным кольцом Φ с единицей. Предположим, что у нас имеется некоторое отношение “следования” $\rightarrow$, которое применяется в виде $U \rightarrow a$, где U – подмодуль модуля V и $a \in V$. Если U и W – подмодули модуля V и $U \rightarrow w$ для любого $w \in W$, то считаем, что $U \rightarrow W$.

Предположим, что отношение $\rightarrow$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) если $U \rightarrow W$ и $W \rightarrow a$, то $U \rightarrow a$;
- 2) если $U_1 \subset U_2$ и $U_1 \rightarrow a$, то $U_2 \rightarrow a$;
- 3) если $a \in V$, то $V \rightarrow a$;
- 4) если $U_1 \rightarrow a_1, \dots, U_k \rightarrow a_k$ и $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \Phi$, то $U_1 + \dots + U_k \rightarrow \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k$.

Непосредственным следствием п. 4) является

- 5) если $U \rightarrow a + b$ и $U \rightarrow b$, то $U \rightarrow a$.

Здесь мы не обсуждаем независимости аксиоматики 1)–4).

Пусть S – подмножество элементов V . Через S_Φ обозначим подмодуль модуля V , порожденный множеством S и нулем. Таким образом, $\emptyset_\Phi = 0$.

Пусть U – некоторый подмодуль в V . Считаем, что последовательность $v_1, \dots, v_i, \dots$ элементов V является *конечно базлируемой по модулю U* , если существует некоторое t такое, что для всех $i > t$ выполнено $\{v_1, \dots, v_t\}_\Phi \rightarrow v_i + u_i$ для некоторого $u_i \in U$. Само множество $\{v_1, \dots, v_t\}$ называется *базой* всей последовательности по модулю U . В случае $U = 0$ сохраняем те же названия, только опускаем выражение “по модулю U ”.

Пусть теперь $V = V_1 \supset \dots \supset V_n \supset \dots$ – некоторая счетная фильтрация. Последовательность $v_1, \dots, v_i, \dots$ назовем *бесконечно погружающейся* относительно данной фильтрации, если для любого i выполнено $v_i \in V_{n_i}$ и $\lim_{i \rightarrow \infty} n_i = \infty$.

Имеет место

ЛЕММА 16. Пусть $v_1, \dots, v_i, \dots$ – последовательность, конечно базлируемая по модулю любого V_n . Пусть также любая бесконечно погружающаяся относительно фильтрации $V = V_1 \supset \dots \supset V_n \supset \dots$ последовательность конечно базлируема. Тогда исходная последовательность $v_1, \dots, v_i, \dots$ конечно базлируема.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим элементы $w_{i,j} \in V_i$, где $j \geq m_i$, такие, что

$$\{v_1, \dots, v_{m_i-1}\}_{\Phi} \rightarrow v_j + w_{i,j} \text{ для } j \geq m_i, \quad (13)$$

где $i_1 < i_2 \implies m_{i_1} < m_{i_2}$. Считаем также, что $m_1 = 1$.

Диагональная последовательность

$$w_{1,1}, \dots, w_{1,m_2-1}, \dots, w_{k,m_k}, \dots, w_{k,m_{k+1}-1}, \dots$$

является бесконечно погружающейся и поэтому конечно базирuема.

Пусть $S = \{w_{i,j} : i \leq r, m_i \leq j \leq m_{i+1} - 1\}$ – база этой последовательности и $U = S_{\Phi}$. Из формулы (13) получаем $\{v_1, \dots, v_{m_i-1}, v_j\}_{\Phi} \rightarrow w_{i,j}$ для $j \geq m_i$. Тогда справедливо соотношение $V = \{v_1, \dots, v_{m_{r+1}-1}\}_{\Phi} \rightarrow U$.

Докажем индукцией по $i \geq r + 1$ следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. $V \rightarrow v_j$ для $m_i \leq j \leq m_{i+1} - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. База индукции: $i = r + 1$. Пусть $m_{r+1} \leq j \leq m_{r+2} - 1$. Так как $w_{i,j} \in U$, то $V \rightarrow w_{i,j}$. По формуле (13) имеем $V \rightarrow v_j + w_{i,j}$. Тогда $V \rightarrow v_j$.

Предположим, что для некоторого $i \geq r + 1$ утверждение выполнено и $m_{i+1} \leq k \leq m_{i+2} - 1$. По формуле (13) имеем $V' = \{v_1, \dots, v_{m_{i+1}-1}\}_{\Phi} \rightarrow v_k + w_{i+1,k}$. По предположению индукции $V \rightarrow V'$ и $V \rightarrow v_k + w_{i+1,k}$. Так как $w_{i+1,k} \in U$, то $V \rightarrow w_{i+1,k}$ и $V \rightarrow v_k$. Утверждение доказано.

Из свойства 3) получаем $V \rightarrow v_j$ для $j \leq m_{r+1} - 1$. Таким образом, множество $\{v_1, \dots, v_{m_{r+1}-1}\}$ есть база последовательности $v_1, \dots, v_n, \dots$. Лемма доказана.

Из этого утверждения получаем

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть отношение $\rightarrow$ удовлетворяет условиям:

а) любая последовательность конечно базирuема по модулю V_n для любого n ;

б) любая бесконечно погружающаяся относительно фильтрации $V = V_1 \supset \dots \supset V_n \supset \dots$ последовательность конечно базирuема.

Тогда любая последовательность конечно базирuема.

2. Один частный случай. Применим результаты предыдущего пункта к некоторому частному случаю, который не будет использоваться в дальнейшем.

Пусть $A = Z\langle x_1, \dots, x_n, \dots \rangle$ и $A_m = Z_m\langle x_1, \dots, x_n, \dots \rangle$ – свободные ассоциативные алгебры над кольцом целых чисел Z и кольцом Z_m вычетов по модулю m соответственно. Пусть также $\varphi_m : A \rightarrow A_m$ – естественная проекция.

В работе [10] А.В. Гришин поставил следующий вопрос: верно ли, что любая последовательность многочленов $f_1, \dots, f_i, \dots \in A$ такая, что для любого числа $m \in \mathbb{N}$ последовательность $\varphi_m(f_1), \dots, \varphi_m(f_i), \dots$ порождает конечно базирuемое T -пространство в A_m , порождает конечно базирuемое T -пространство в A ?

Определим отношение $\rightarrow$ следующим образом: $U \rightarrow v$, где U есть Z -подмодуль в A и $v \in A$, если v принадлежит T -пространству, порожденному пространством U . Легко видеть, что условия 1)–5) выполнены.

Рассмотрим цепочку чисел $m_1, \dots, m_i, \dots$ такую, что $m_1 = 1$, при $i_1 < i_2$ число m_{i_2} делится на m_{i_1} и для любого простого числа p показатель при p в разложении m_i на простые числа стремится к бесконечности, когда i стремится к бесконечности. Очевидно, такие последовательности существуют.

Фиксируем фильтрацию $V_i = m_i A$, $i \in \mathbb{N}$. Пусть имеется последовательность $f_1, \dots, f_i, \dots \in A$ такая, что для любого числа $m \in \mathbb{N}$ последовательность $\varphi_m(f_1), \dots, \varphi_m(f_i), \dots$ порождает конечно базлируемое T -пространство. Лемма 16 показывает, что для того чтобы сказать, что исходная последовательность порождает конечно базлируемое T -пространство, достаточно установить, что любая бесконечно погружающаяся относительно фильтрации $V_1 \supset \dots \supset V_n \supset \dots$ последовательность $g_1, \dots, g_i, \dots$ конечно базлируема.

Но последовательность $g_1, \dots, g_i, \dots$ бесконечно погружающаяся относительно фильтрации $V_1 \supset \dots \supset V_n \supset \dots$ тогда и только тогда, когда для любого простого числа p и произвольного натурального числа k в последовательности $\varphi_{p^k}(f_1), \dots, \varphi_{p^k}(f_i), \dots$ существует лишь конечное число членов, отличных от нуля.

Таким образом, мы получаем следующую эквивалентную переформулировку проблемы А. В. Гришина: верно ли, что любая последовательность многочленов $f_1, \dots, f_i, \dots \in A$ такая, что для любого простого числа p и произвольного натурального числа k в последовательности $\varphi_{p^k}(f_1), \dots, \varphi_{p^k}(f_i), \dots$ существует лишь конечное число членов, отличных от нуля, порождает конечно базлируемое T -пространство в A ?

Все сказанное в этом пункте верно, если выражение “ T -пространство” заменить на выражение “ T -идеал”. Заметим, что примеры из работ [4], [5], [10], [11] показывают, что не любая цепочка многочленов из A порождает конечно базлируемое T -пространство (T -идеал). Однако природа этих примеров такова, что существует некоторое простое p такое, что проекции этих цепочек на A_p порождают бесконечно базлируемые T -пространства (T -идеалы). Таким образом, поставленный выше вопрос пока открыт.

§ 8. Доказательство основного результата

В этом параграфе мы используем лемму Артина–Рисса [14], способ применения которой к доказательству конечной базлируемости был замечен А. Я. Беловым.

Применим теперь следствие 2 к случаю, когда $V = R(\emptyset)$, а $U \rightarrow f$ тогда и только тогда, когда f принадлежит T_2 -пространству алгебры F , порожденному U , где U – линейное подпространство в $R(\emptyset)$ и $f \in R(\emptyset)$.

Легко проверить, что для таким образом определенного “следования” условия 1)–5) выполнены.

Для $i = 1, \dots, n$ и $r_i \geq 2$ через C_i обозначим T_2 -идеал алгебры $\text{Tr GM}_i(r_i, i)$, порожденный элементами

$$\text{tr}(c_{r_i^2}(u_1, \dots, u_{r_i^2}, v_1, \dots, v_{r_i^2})), \quad (14)$$

$$\text{tr}(c_{r_i^2}(u'_1, \dots, u'_{r_i^2}, v'_1, \dots, v'_{r_i^2})) \text{tr}(c_{r_i^2}(u''_1, \dots, u''_{r_i^2}, v''_1, \dots, v''_{r_i^2})), \quad (15)$$

где $u_i, u'_i, u''_i, v_i, v'_i, v''_i \in \text{GM}_i(r_i, i)$ – однородные элементы и $\deg_Z u_1 \dots u_{r_i^2} v_1 \dots v_{r_i^2}, \deg_Z u'_1 \dots u'_{r_i^2} v'_1 \dots v'_{r_i^2} + \deg_Z u''_1 \dots u''_{r_i^2} v''_1 \dots v''_{r_i^2}$ суть четные числа. В случае $r_i = 1$ положим $C_i = \text{Tr GM}(1, i)$.

В этих формулах $c_{r_i^2}$ означает полином Капелли, и все эти определения корректны, так как полиномы (14) и (15) суть центральные полиномы Размыслова (см., например, [15]).

Пусть $U_m = I(C_1^m, \dots, C_n^m) \cap R(\emptyset)$. Фиксируем фильтрацию

$$R(\emptyset) \supset U_1 \supset \dots \supset U_i \supset \dots \quad (16)$$

и применим следствие 2.

Проверим условие а). Имеет место

ЛЕММА 17. Пусть $\overline{C}_i$ – идеал алгебры $\text{Tr GM}_i(\emptyset)$, порожденный элементами $\text{tr}(c_{r_i^2}(u_1, \dots, u_{r_i^2}, v_1, \dots, v_{r_i^2}))$, где $u_i, v_i \in \text{GM}_i(\emptyset)$. Тогда для любого m имеем $\overline{C}_i^{2m} \subset C_i^m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f = \prod_{j=1}^{2m} f_j$, где $f_j = \text{tr}(c_{r_i^2}(u_{j,1}, \dots, u_{j,r_i^2}, v_{j,1}, \dots, v_{j,r_i^2}))$ – однородный квазинногочлен и $u_{j,i}, v_{j,i} \in \text{GM}(\emptyset)$. В силу коммутативности следов с общими матрицами такие элементы f порождают $\overline{C}_i^{2m}$ как идеал. По крайней мере одно из чисел $\deg_Z f_j, \deg_Z f_{j+1}, \deg_Z f_j + \deg_Z f_{j+1}$ четное. Тогда хотя бы один элемент $f_j, f_{j+1}, f_j f_{j+1}$ имеет вид (14) или (15). Отсюда $f_j f_{j+1} \in C_i$ и $f \in C_i^m$. Лемма доказана.

Эта лемма показывает, что алгебра $\text{Tr GM}_i(\emptyset)/C_i^m \cap \text{Tr GM}_i(\emptyset)$ имеет матричную сложность строго меньше, чем r_i .

Назовем *индексом* набора $r_1, \dots, r_n$ бесконечный набор $\text{ind}(r_1, \dots, r_n) = (s_2, s_3, \dots)$, где s_i – количество чисел из набора $r_1, \dots, r_n$, равных i . Два индекса будем сравнивать антилексикографически.

Для того чтобы доказать конечную базлируемость любой цепочки элементов из $R(\emptyset)$ относительно отношения $\rightarrow$ по модулю U_m , достаточно доказать конечную базлируемость любой цепочки по модулю каждого пространства

$$I(\text{Tr GM}(r_1, 1), \dots, \text{Tr GM}(r_{i-1}, i-1), C_i^m, \text{Tr GM}(r_{i+1}, i+1), \dots, \text{Tr GM}(r_n, n)) \cap R(\emptyset).$$

В случае $r_i = 1$ это очевидно, поэтому можно считать, что $r_i \geq 2$. Следовательно, мы должны доказать конечную базлируемость любого ограниченного G -зависящего T_2 -пространства в

$$R(\text{Tr GM}(r_1, 1), \lambda_1, \dots, \text{Tr GM}(r_{i-1}, i-1), \lambda_{i-1}, \text{Tr GM}(r_i, i)/C_i^m, \overline{\lambda}_i, \text{Tr GM}(r_{i+1}, i+1), \lambda_{i+1}, \dots, \text{Tr GM}(r_n, n), \lambda_n),$$

где $\overline{\lambda}_i$ – отображение, индуцированное отображением λ_i .

Эпиморфизм $\overline{\lambda}_i: F \rightarrow \text{Tr GM}(r_i, i)/C_i^m$ задан формулами $x_j \rightarrow x_j^{(i)} + C_i^m, z_j \rightarrow z_j^{(i)} + C_i^m$, где общие матрицы $x_j^{(i)}$ и $z_j^{(i)}$ имеют размер $r \times r$.

Пусть J – ядро этого эпиморфизма, а $\xi(J)$ – проекция F на F/J . Гомоморфизм $\bar{\lambda}_i$ с учетом утверждения 1 сводит задачу к доказательству конечной базирюемости любого ограниченного G -зависящего T_2 -пространства в

$$R\langle \text{Tr GM}(r_1, 1), \lambda_1, \dots, \text{Tr GM}(r_{i-1}, i-1), \lambda_{i-1}, F/J, \xi(J), \\ \text{Tr GM}(r_{i+1}, i+1), \lambda_{i+1}, \dots, \text{Tr GM}(r_n, n), \lambda_n \rangle.$$

Существует некоторое число m' такое, что $M_{r_i-1}^{m'} \cap K\langle G \rangle \subset J$. Тогда можно ограничиться доказательством конечной базирюемости ограниченных G -зависящих T_2 -пространств в

$$R\langle \text{Tr GM}(r_1, 1), \lambda_1, \dots, \text{Tr GM}(r_{i-1}, i-1), \lambda_{i-1}, F/M_{r_i-1}^{m'}, \xi(M_{r_i-1}^{m'}), \\ \text{Tr GM}(r_{i+1}, i+1), \lambda_{i+1}, \dots, \text{Tr GM}(r_n, n), \lambda_n \rangle,$$

где $\xi(M_{r_i-1}^{m'})$ – проекция F на $M_{r_i-1}^{m'}$.

Рассмотрим теперь F как подмножество в $Q(r_i-1)$. По лемме 11 имеем $M_{r_i-1}^{m'} = F \cap \Theta_{m'}$. Это позволяет вложить $F/M_{r_i-1}^{m'}$ в $Q(r_i-1)/\Theta_{m'}$. Устраивая конечную фильтрацию по θ -степеням, приходим к проблеме конечной базирюемости цепочек элементов относительно аналогично определенного отношения $\rightarrow$ в пространствах

$$R\langle r_1, \dots, r_{i-1}, \underbrace{r_i-1, \dots, r_i-1}_{\text{не более } m' \text{ раз}}, r_{i+1}, \dots, r_n \rangle.$$

Индекс набора, стоящего в скобках последнего выражения, строго меньше, чем $\text{ind}(r_1, \dots, r_n)$. Таким образом, используя это рассуждение, получим индукцию по индексу. Если $\text{ind}(r_1, \dots, r_n) = (0, 0, \dots)$, то $r_1 = \dots = r_n = 1$, и тогда $I(C_1^m, \dots, C_n^m) \cap R(\emptyset) = R(\emptyset)$ и утверждение очевидно. Следовательно, условие а) проверено.

Проверим условие б). Воспользуемся следующим утверждением.

ЛЕММА 18 (Артина–Рисса [14]). *Пусть R – нётерово коммутативное кольцо с единицей, M – левый унитарный нётеров R -модуль и a – идеал алгебры R . Тогда для любого R -подмодуля P модуля M существует число $k \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $m \geq k$ выполнено $a^m M \cap P = a^{m-k}(a^k M \cap P)$.*

СЛЕДСТВИЕ 3. *Пусть P есть a -подмодуль модуля M и $P_i \subset a^i M$, $Q_i = P_1 + \dots + P_i$, $i \in \mathbb{N}$. Тогда цепочка подмодулей $Q_1 \subset \dots \subset Q_i \subset \dots$ стабилизируется.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу нётеровости R -модуля M цепочка $RQ_1 \subset \dots \subset RQ_i \subset \dots$ стабилизируется. Пусть s – такое число, что $RQ_s = RQ_r$ при $r \geq s$. По лемме Артина–Рисса существует такое число k , что $a^{k+1}M \cap RQ_s = a(a^k M \cap RQ_s)$. Пусть r – некоторое число, большее или равное s . Так как Q_r есть a -модуль, то $aRQ_r \subset Q_r$. Имеем

$$a^{k+1}M \cap Q_r \subset a^{k+1}M \cap RQ_r = a(a^k M \cap RQ_r) \subset a^{k+1} \cap Q_r.$$

Отсюда получаем $a^{k+1}M \cap RQ_r = a^{k+1}M \cap Q_r$. Пусть $r_1, r_2 \geq s_0 = \max\{s, k\}$.

Предположим, что $f \in Q_{r_1}$. Тогда $f = f_1 + f_2$, $f_1 \in Q_{s_0}$ и $f_2 \in P_{s_0+1} + \dots + P_{r_1} \subset a^{s_0+1}M \subset a^{k+1}M$. Имеем

$$f_2 \in a^{k+1}M \cap Q_{r_1} = a^{k+1}M \cap RQ_{r_1} = a^{k+1}M \cap RQ_{r_2} = a^{k+1}M \cap Q_{r_2}.$$

Так как $r_2 \geq s_0$, то $f_1 \in Q_{s_0} \subset Q_{r_2}$ и $f = f_1 + f_2 \in Q_{r_2}$. Обратное включение доказывается аналогично. Следствие доказано.

Из этого следствия непосредственно получается

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть P есть a -подмодуль модуля M и $P_i \subset a^{m_i}M$, $Q_i = P_1 + \dots + P_i$, $i \in \mathbb{N}$, $\lim_{i \rightarrow \infty} m_i = \infty$. Тогда цепочка подмодулей $Q_1 \subset \dots \subset Q_i \subset \dots$ стабилизируется.

Пусть теперь $f_1, \dots, f_i, \dots$ – цепочка элементов из $R(\emptyset)$, бесконечно погружающаяся относительно фильтрации (16), P_i есть (T_2, σ_0) -пространство, порожденное элементом f_i , и $\bar{P}_i$ есть (T_2, σ_0) -пространство, порожденное элементами $f_1, \dots, f_i$.

Пространство $R(S_n)$ является нётеровым модулем над кольцом $\text{Tr}(\emptyset)$. Действительно, применим теорему Ширшова о высоте к матричным алгебрам $\text{GM}_i(\emptyset)$. Затем преобразуем произведения $u^{2r_i} = (u^2)^{r_i}$ по теореме Гамильтона–Келли, примененной к матрице u^2 (у нее всегда четная z -степень), и получим требуемое утверждение. Кольцо $\text{Tr}(\emptyset)$ само нётерово как конечно порожденная коммутативная алгебра над полем.

Пусть a – идеал в алгебре $\text{Tr}(\emptyset)$, порожденный произведениями $g_1 \dots g_n$, где $g_i \in \text{Tr GM}_i(\emptyset) \cap \text{Tr}(\emptyset)$ – элемент вида (14) или (15). Тогда $a^m R(S_n) = I(C_1^m, \dots, C_n^m) \cap R(S_n)$.

Выберем некоторую допустимую пару (σ, η) такую, что $|\sigma| = |\eta| = n$. Из свойства центральных полиномов Размыслова и леммы 14 следует, что $P_i^{(\sigma, \eta)}$ есть a -модуль. В силу п. 4) леммы 15 получаем $P_i^{(\sigma, \eta)} \subset a^{m_i} R(S_n)$, где $\lim_{i \rightarrow \infty} m_i = \infty$. Пусть $Q_i^{(\sigma, \eta)} = P_1^{(\sigma, \eta)} + \dots + P_i^{(\sigma, \eta)}$. Так как $P_1 + \dots + P_i = \bar{P}_i$, то в силу п. 2) леммы 15 имеем

$$Q_i^{(\sigma, \eta)} = P_1^{(\sigma, \eta)} + \dots + P_i^{(\sigma, \eta)} \subset \bar{P}_i^{(\sigma, \eta)}.$$

По следствию 4 цепочка $Q_1^{(\sigma, \eta)} \subset \dots \subset Q_i^{(\sigma, \eta)} \subset \dots$ стабилизируется, т. е. существует некоторое s такое, что $Q_r^{(\sigma, \eta)} = Q_s^{(\sigma, \eta)}$ при $r \geq s$. Отсюда получаем

$$P_r^{(\sigma, \eta)} \subset Q_r^{(\sigma, \eta)} = Q_s^{(\sigma, \eta)} \subset \bar{P}_s^{(\sigma, \eta)}.$$

Так как количество допустимых пар (σ, η) конечно, то число s можно выбрать так, что включение $P_r^{(\sigma, \eta)} \subset \bar{P}_s^{(\sigma, \eta)}$ при $r \geq s$ выполнено для всех допустимых пар (σ, η) таких, что $|\sigma| = |\eta| = n$. Тогда по п. 3) леммы 15 получаем $P_r \subset \bar{P}_s$. Отсюда $f_r \in \bar{P}_s$. Пункт b) леммы проверен.

Следствие 2 и приведенные выше утверждения дают следующий основной результат.

ТЕОРЕМА 7. Любое T -пространство алгебры $K\langle X \rangle$, где X – счетный алфавит и K – поле нулевой характеристики, конечно базисуемо.

Список литературы

1. Кемер А. Р. О нематричных многообразиях // Алгебра и логика. 1980. Т. 19. № 3. С. 255–283.
2. Кемер А. Р. Шпехтовость T -идеалов со степенным ростом коразмерностей // Сиб. матем. журн. 1978. Т. 19. № 1. С. 54–69.
3. Кемер А. Р. Многообразия и Z_2 -градуированные алгебры // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1984. Т. 48. № 5. С. 1042–1059.
4. Щиголев В. В. Примеры бесконечно базлируемых T -пространств // Матем. сб. 2000. Т. 191. № 3. С. 143–160.
5. Щиголев В. В. Примеры бесконечно базлируемых T -идеалов // Фунд. и прикл. математика. 1999. Т. 5. № 1. С. 307–312.
6. Кемер А. Р. Конечная базлируемость тождеств ассоциативных алгебр // Алгебра и логика. 1987. № 5. С. 597–641.
7. Кемер А. Р. Тождества конечно порожденных алгебр над бесконечным полем // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. Т. 54. № 4. С. 726–753.
8. Гришин А. В. О конечной базлируемости систем обобщенных многочленов // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. Т. 54. № 5. С. 889–927.
9. Гришин А. В. О конечной базлируемости абстрактных T -пространств // Фунд. и прикл. математика. 1995. Т. 1. № 3. С. 669–700.
10. Гришин А. В. Примеры не конечной базлируемости T -пространств и T -идеалов в характеристике 2 // Фунд. и прикл. математика. 1999. Т. 5. № 1. С. 101–118.
11. Белов А. Я. О нешпехтовых многообразиях // Фунд. и прикл. математика. 1999. Т. 5. № 1. С. 47–66.
12. Джеймс Г. Теория представлений симметрической группы. М.: Мир, 1980.
13. Херстейн И. Некоммутативные кольца. М.: Мир, 1972.
14. Атья М., Макдональд И. Введение в коммутативную алгебру. М.: Мир, 1972.
15. Размыслов Ю. П. Введение в теорию алгебр и их представлений. М.: Изд-во МГУ, 1991.
16. Белов А. Я. Контрпримеры к проблеме Шпехта // Матем. сб. 2000. Т. 191. № 3. С. 13–24.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило в редакцию
02.VI.2000