Общероссийский математический портал

А. В. Глушак, Операторная функция Лежандра, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2001, том 65, выпуск 6, 3–14

DOI: <https://doi.org/10.4213/im363>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 17:23:49

УДК 517.983

А. В. Глушак

Операторная функция Лежандра

Исследуются свойства разрешающего оператора задачи Коши для абстрактного уравнения Лежандра с линейным неограниченным оператором A . Установлена его связь с разрешающим оператором задачи Коши для абстрактного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу и доказано совпадение множеств операторов A , с которыми равномерно корректны задачи Коши для уравнения Лежандра и для уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу.

Библиография: 11 наименований.

Исследование ряда физических процессов опирается на решение уравнений, содержащих оператор Лапласа, которые путем разделения переменных в некоторых системах криволинейных координат приводят к дифференциальным уравнениям, содержащим сингулярность. При наличии определенной симметрии эти уравнения превращаются в уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу (ЭПД) и Лежандра, исследованию которых и посвящена настоящая работа.

Пусть A – линейный замкнутый оператор в банаховом пространстве E с плотной в E областью определения $D(A)$. При $k > 0$, $\gamma > 0$ рассматривается абстрактная задача Коши

$$L_k u(t) \equiv u''(t) + \gamma k \operatorname{cth} \gamma t u'(t) + (\gamma k/2)^2 u(t) = Au(t), \quad t > 0, \quad (1)$$

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = 0. \quad (2)$$

Дифференциальный оператор L_k в левой части уравнения (1) возникает при решении уравнения Лапласа в координатах вытянутого эллипсоида вращения [1, с. 138]. Если A – оператор умножения на скаляр, то уравнению (1) при $k = 0$, $\gamma = 2$ удовлетворяют сферические функции, рассматриваемые в [2, с. 53]. Отметим также работы [3]–[6], в которых изучались уравнения в частных производных, содержащие сингулярный оператор, рассматриваемого здесь типа.

Параметр $\gamma > 0$ введен для того, чтобы подчеркнуть, что уравнение (1), которое мы будем называть *абстрактным уравнением Лежандра*, при $\gamma \rightarrow 0$ преобразуется в абстрактное уравнение ЭПД

$$u''(t) + \frac{k}{t} u'(t) = Au(t). \quad (3)$$

В работе получено интегральное представление решения задачи Коши (1), (2), на основании которого исследуются свойства этого решения и устанавливается,

что множества операторов, для которых задачи (1), (2) и (3), (2) равномерно корректны, совпадают.

Обозначим через $C^n(I, E_0)$ пространство n раз сильно непрерывно дифференцируемых при $t \in I$ функций со значениями в $E_0 \subset E$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Решением уравнения (1) (или (3)) называется функция $u(t) \in C^2(\mathbb{R}_+, E) \cap C(\mathbb{R}_+, D(A))$, которая удовлетворяет этому уравнению.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Задача Коши (1), (2) ((3), (2)) называется *равномерно корректной*, если существуют заданная на E коммутирующая с A операторная функция $P_k^\gamma(t)$ ($Y_k(t)$) и числа $M \geq 1$, $\omega \geq 0$ такие, что для любого $u_0 \in D(A)$ функция $P_k^\gamma(t)u_0$ ($Y_k(t)u_0$) является ее единственным решением, при этом

$$\|P_k^\gamma(t)\| \leq M \exp(\omega t) \quad (\|Y_k(t)\| \leq M \exp(\omega t)).$$

Функцию $P_k^\gamma(t)$ ($Y_k(t)$) назовем *операторной функцией Лежандра* (ОФЛ) (*операторной функцией Бесселя* (ОФБ)), а множество операторов, для которых задача (1), (2) ((3), (2)) равномерно корректна, обозначим через G_k^γ (G_k).

Обозначим через $G_0 \equiv G_0^\gamma$ множество генераторов косинус-оператор-функций (КОФ) [7].

Как будет показано в дальнейшем, если известно решение задачи (1), (2) при значении параметра k , то можно найти решение этой задачи и для значений параметра $m \neq k$. При этом для $m > k$ свойство равномерной корректности задачи Коши сохраняется, а при $m < k$ разрешающий оператор задачи Коши уже не будет, вообще говоря, принадлежать пространству $B(E)$ всех линейных ограниченных операторов из E в E , более того, при отрицательных значениях параметра происходит и потеря единственности решения задачи (1), (2).

ТЕОРЕМА 1 (сдвиг по параметру). *Пусть $A \in G_k$, $u_0 \in D(A)$ и $m > k$. Тогда функция*

$$\begin{aligned} P_m^\gamma(t)u_0 = & \frac{2^{(m-k)/2}}{B(m/2 - k/2, k/2 + 1/2)} \left(\frac{\operatorname{sh} \gamma t}{\gamma} \right)^{1-m} \\ & \times \int_0^t \left(\frac{\operatorname{ch} \gamma t - \operatorname{ch} \gamma y}{\gamma^2} \right)^{(m-k)/2-1} \left(\frac{\operatorname{sh} \gamma y}{\gamma} \right)^k P_k^\gamma(y)u_0 dy \end{aligned} \quad (4)$$

удовлетворяет уравнению

$$L_m u(t) = A u(t) \quad (5)$$

и начальным условиям (2).

Доказательство этой теоремы повторяет доказательство аналогичного утверждения для уравнений в частных производных (см. [3], [6]).

ТЕОРЕМА 2. Пусть $A \in G_k^\gamma$ при некотором $k \geq 0$, $m < k$ и $m \neq 1 - 2N$, $N \in \mathbb{N}$. Пусть n – наименьшее натуральное число такое, что $q = 2n + m \geq k$, и $u_0 \in D(A^{[n/2]+2})$. Тогда функция

$$P_m^\gamma(t)u_0 = \frac{1}{(q-1)(q-3)\dots(m-1)} \left(\frac{\text{sh } \gamma t}{\gamma} \right)^{1-m} \left(\frac{\gamma}{\text{sh } \gamma t} \frac{d}{dt} \right)^n \times \left(\left(\frac{\text{sh } \gamma t}{\gamma} \right)^{q-1} P_q^\gamma(t)u_0 \right) \quad (6)$$

является решением задачи (5), (2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следующие свойства решений уравнения (1) проверяются непосредственной подстановкой: если $u_k(t)$ – решение уравнения (1), то функция $(\frac{1}{\gamma} \text{sh } \gamma t)^{k-1} u_k(t)$ будет решением уравнения $L_{2-k}u(t) = Au(t)$, а функция $\frac{\gamma}{\text{sh } \gamma t} u'_k(t)$ – решением уравнения $L_{k+2}u(t) = Au(t)$.

В силу этих свойств определяемая формулой (6) функция $P_m^\gamma(t)u_0$ является решением уравнения (5). Отметим лишь, что $P_q^\gamma(t)u_0$ задается формулой (4), так как $q \geq k$.

Для того чтобы проверить справедливость начальных условий (2), достаточно функцию $P_m^\gamma(t)u_0$ при $t \rightarrow 0$ записать в виде

$$P_m^\gamma(t)u_0 = P_q^\gamma(t)u_0 + c_1 t (P_q^\gamma(t)u_0)' + O(t^2),$$

где c_1 – некоторая постоянная. Теорема доказана.

Чтобы определить $P_m^\gamma(t)$ и в случае $m = 1 - 2N$, нам понадобится решение уравнения $L_1 u(t) = Au(t)$, растущее, в отличие от $P_1^\gamma(t)u_0$, при $t \rightarrow 0$. Искомое решение $Z_1^\gamma(t)u_0$ получим предельным переходом при $k \rightarrow 1$ из линейной комбинации решений $P_k^\gamma(t)u_0$ и $(\frac{1}{\gamma} \text{sh } \gamma t)^{1-k} P_{2-k}^\gamma(t)u_0$, а именно

$$\begin{aligned} Z_1^\gamma(t)u_0 &= \lim_{k \rightarrow 1} \frac{1}{1-k} \left(P_k^\gamma(t)u_0 - \left(\frac{\text{sh } \gamma t}{\gamma} \right)^{1-k} P_{2-k}^\gamma(t)u_0 \right) \\ &= \frac{2\gamma}{\pi} \int_0^t (\text{ch } \gamma t - \text{ch } \gamma y)^{-1/2} \ln \left(\frac{2 \text{ch } \gamma t - 2 \text{ch } \gamma y}{\gamma \text{sh } \gamma t} \right) P_0^\gamma(y)u_0 dy. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $A \in G_k^\gamma$ при некотором $k \geq 0$, $m = 1 - 2N$, $N \in \mathbb{N}$, n – наименьшее натуральное число такое, что $2n \geq k$, и $u_0 \in D(A^{[N/2+n/2]+2})$. Тогда функция

$$P_m^\gamma(t)u_0 = \frac{(-1)^{N-1} t^{2N}}{2^{N-1} (N-1)!} \left(\frac{\text{sh } \gamma t}{\gamma} \right)^{2N} \left(\frac{\gamma}{\text{sh } \gamma t} \frac{d}{dt} \right)^N Z_1^\gamma(t)u_0 \quad (7)$$

является решением задачи (5), (2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так же, как и при доказательстве теоремы 2, проверяется, что определяемая равенством (7) функция $P_m^\gamma(t)u_0$ является решением уравнения (5) и при $t \rightarrow 0$ представима в виде

$$P_m^\gamma(t)u_0 = P_1^\gamma(t)u_0 + c_2 t (P_1^\gamma(t)u_0)' + O(t^2)$$

с некоторой постоянной c_2 , откуда и вытекает утверждение теоремы.

Построенная при всех $m \in \mathbb{R}$ функция $P_m^\gamma(t)u_0$ может быть применена для решения задач с двумя ненулевыми начальными условиями. Так, например, при $-1 < m < 1$ функция

$$P_m^\gamma(t)u_0 + \frac{1}{1-m} \left(\frac{\operatorname{sh} \gamma t}{\gamma} \right)^{1-m} P_{2-m}^\gamma(t)u_1$$

является единственным решением уравнения (5), удовлетворяющим условиям

$$u(0) = u_0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{sh} \gamma t}{\gamma} \right)^m u'(t) = u_1.$$

В частном случае, когда оператор A является оператором умножения на число, ОФЛ совпадает с известными специальными функциями. Например, если $A = (\nu + 1/2)^2$ и $\gamma = 1$, то

$$P_k^1(t) = \Gamma(1-\mu) \left(\frac{1}{2} \operatorname{sh} t \right)^\mu \mathbf{P}_\nu^\mu(\operatorname{ch} t),$$

где $\mu = (1-k)/2$, $\mathbf{P}_\nu^\mu$ – присоединенная функция Лежандра первого рода; если $A = (\alpha + k/2)^2$ и $\gamma = 1$, то

$$P_k^1(t) = C_\alpha^{k/2}(\operatorname{ch} t),$$

где $C_\alpha^{k/2}$ – функция Гегенбауэра.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $A \in G_k^\gamma$ и $m > k \geq 0$. Тогда $G_k^\gamma \subset G_m^\gamma$ и при этом для $u_0 \in D(A)$ справедливо представление (4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представление (4) установлено в теореме 1. Оценка

$$\|P_m^\gamma(t)\| \leq M \exp \omega t$$

вытекает из соответствующей оценки для $P_k^\gamma(t)$. Таким образом, для доказательства теоремы нам осталось установить единственность решения задачи (5), (2).

Доказательство единственности будем вести от противного. Пусть $u_1(t)$ и $u_2(t)$ – два решения задачи (5), (2). Рассмотрим функцию двух переменных $U(t, s) =$

$f(P_m^\gamma(s)(u_1(t) - u_2(t)))$, где f – любой линейный непрерывный функционал на E , $t, s \geq 0$. Она, очевидно, удовлетворяет уравнению в частных производных

$$\frac{\partial^2 U(t, s)}{\partial t^2} + \gamma m \operatorname{cth} \gamma t \frac{\partial U(t, s)}{\partial t} = \frac{\partial^2 U(t, s)}{\partial s^2} + \gamma m \operatorname{cth} \gamma t \frac{\partial U(t, s)}{\partial s} \quad (8)$$

и нулевым начальным условиям

$$U(0, s) = 0, \quad \frac{\partial U(0, s)}{\partial t} = 0.$$

Общим решением уравнения (8) является функция

$$U(t, s) = f\left(P_m^\gamma(s)P_m^\gamma(t)v_0 + \frac{1}{1-m}P_m^\gamma(s)\left(\frac{\operatorname{sh} \gamma t}{\gamma}\right)^{1-m}P_{2-m}^\gamma(t)v_1\right),$$

откуда, учитывая нулевые начальные условия, получаем $v_1 = v_2 = 0$ и $U(t, s) \equiv 0$.

Поскольку f – произвольный функционал на E , то отсюда следует, что $u_1(t) = u_2(t)$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $A \in G_k^\gamma$ и $u_0 \in D(A)$. Тогда

$$(P_k^\gamma(t)u_0)' = \frac{\operatorname{sh} \gamma t}{\gamma(k+1)}P_{k+2}^\gamma(t)(A - (\gamma k/2)^2)u_0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Интегрируя по частям после умножения на $\operatorname{sh}^k \gamma t$ уравнение (1), получаем

$$(P_k^\gamma(t)u_0)' = \operatorname{sh}^{-k} \gamma t \int_0^t \operatorname{sh}^k \gamma s P_k^\gamma(s)(A - (\gamma k/2)^2)u_0 ds. \quad (9)$$

Требуемое утверждение теперь вытекает из теоремы 1 при $m = k + 2$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $A \in G_k^\gamma$. Тогда первый и второй производящие операторы ОФЛ $P_k^\gamma(t)$ соответственно равны 0 и $\frac{1}{k+1}(A - (\gamma k/2)^2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО осуществляется дифференцированием равенства (9) и дальнейшим предельным переходом при $t \rightarrow 0$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $A \in G_k^\gamma$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$P_k^\gamma(t)u_0 = \sum_{i=0}^{n-1} [(J_{-k}^\gamma J_k^\gamma)^i A_1^i u_0](t) + [(J_{-k}^\gamma J_k^\gamma)^n P_k^\gamma(\cdot) A_1^n u_0](t), \quad (10)$$

где

$$[J_k^\gamma f(\cdot)](t) = \int_0^t \operatorname{sh}^k \gamma s f(s) ds, \quad A_1 = A - (\gamma k/2)^2, \quad u_0 \in (A^n).$$

Интегрируя равенство (9), получим представление

$$P_k^\gamma(t)u_0 = u_0 + \int_0^t \operatorname{sh}^{-k} \gamma \tau \int_0^\tau \operatorname{sh}^k \gamma s P_k^\gamma(s) A_1 u_0 ds d\tau,$$

служащее основанием для доказательства теоремы по индукции. Сам же шаг индукции мы опускаем.

ЗАМЕЧАНИЕ. Сформулированные выше результаты справедливы и для предельного случая $\gamma = 0$ (см. [9]). Соответствующие формулы получаются предельным переходом при $\gamma \rightarrow 0$. При этом первое слагаемое в правой части (10) превращается в многочлен по t . Равенство (10) в этом случае естественно назвать *формулой Тейлора*.

Переходим теперь к основному результату настоящей статьи – нахождению связи между решениями задач (1), (2) и (3), (2) при $k > 0$. Напомним, что последняя задача исследовалась в [9], и мы будем использовать установленные там свойства ОФБ.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $A \in G_k^\gamma$ для $k > 0$ и $u_0 \in E$. Тогда $A \in G_k^\gamma$ и при этом: если дробная часть $\{k/2\}$ равна нулю, то

$$P_k^\gamma(t)u_0 = \left(\frac{\gamma t}{\operatorname{sh} \gamma t}\right)^{k/2} Y_k(t)u_0 + \frac{1}{(k/2 - 1)!} \left(\frac{\operatorname{sh} \gamma t}{\gamma}\right)^{1-k} \times \int_0^t y^k \left(-\frac{1}{y} \frac{d}{dy}\right)^{k/2} \left(\frac{\operatorname{ch} \gamma t - \operatorname{ch} \gamma y}{\gamma^2}\right)^{k/2-1} Y_k(y)u_0 dy;$$

если $\{k/2\} > 0$, то

$$P_k^\gamma(t)u_0 = \frac{\alpha_k \Gamma(\{k/2\})}{\sqrt{\pi} 2^{[k/2]} \Gamma(k/2)} \left(\frac{\gamma t}{\operatorname{sh} \gamma t}\right)^{k/2} Y_k(t)u_0 + \frac{(-1)^{[k/2]+1}}{\sqrt{\pi} \Gamma(k/2) \Gamma(1 - \{k/2\})} \left(\frac{\operatorname{sh} \gamma t}{\gamma}\right)^{1-k} \times \int_0^t s^k \left(2\{k/2\} g_\gamma(t, s, k) + s \frac{\partial g_\gamma(t, s, k)}{\partial s}\right) Y_k(s)u_0 ds,$$

где $\alpha_k = 1$ для $k < 2$, $\alpha_k = (k-2)(k-4) \dots (k-2[k/2])$ для $k > 2$,

$$g_\gamma(t, s, k) = 2^{\{k/2\}} \int_s^t \frac{1}{y} \left(\frac{1}{y} \frac{d}{dy}\right)^{[k/2]} \left(\frac{\operatorname{ch} \gamma t - \operatorname{ch} \gamma y}{\gamma^2}\right)^{k/2-1} (y^2 - s^2)^{-\{k/2\}} dy.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{k/2\} = 0$ и $u_0 \in D(A^r)$, где r – достаточно большое целое число. Тогда в силу теорем 1 и 2 после интегрирования по частям получаем

$$P_k^\gamma(t)u_0 = \frac{2^{k/2}}{B(k/2, 1/2)(k-1)!!} \left(\frac{\operatorname{sh} \gamma t}{\gamma}\right)^{1-k} \times \int_0^t \left(\frac{\operatorname{ch} \gamma t - \operatorname{ch} \gamma y}{\gamma^2}\right)^{k/2-1} y \left(\frac{1}{y} \frac{d}{dy}\right)^{k/2} Y_k(y)u_0 dy =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-(-2)^{k/2}}{B(k/2, 1/2)(k-1)!!} \left(\frac{\operatorname{sh} \gamma t}{\gamma} \right)^{1-k} \\
&\quad \times \int_0^t \left(\frac{1}{y} \frac{d}{dy} \right)^{k/2-1} \left(\frac{\operatorname{ch} \gamma t - \operatorname{ch} \gamma y}{\gamma^2} \right)^{k/2-1} \frac{d}{dy} \left(y^{k-1} Y_k(t) u_0 \right) dy \\
&= \left(\frac{\gamma t}{\operatorname{sh} \gamma t} \right)^{k/2} Y_k(t) u_0 + \frac{1}{(k/2-1)!} \left(\frac{\operatorname{sh} \gamma t}{\gamma} \right)^{1-k} \\
&\quad \times \int_0^t y^k \left(-\frac{1}{y} \frac{d}{dy} \right)^{k/2} \left(\frac{\operatorname{ch} \gamma t - \operatorname{ch} \gamma y}{\gamma^2} \right)^{k/2-1} Y_k(y) u_0 dy.
\end{aligned}$$

Если $\{k/2\} = 0$, то нужное нам утверждение вытекает из плотности $D(A^r)$ в E .

В случае нецелого $k/2$, используя дробную производную Римана–Лиувилля [10, с. 43], определим дробную степень $\left(\frac{1}{t} \frac{d}{dt}\right)^{k/2}$, и так же, как и для случая целого $k/2$, проведем интегрирование по частям.

Переходим к осуществлению изложенной схемы. Положим $Rf(t) = f(\sqrt{t})$. Тогда $R^{-1}f(t) = f(t^2)$ и $\frac{1}{t}f'(t) = 2R^{-1}(Rf(t))'$, поэтому для $n \in \mathbb{N}$

$$\left(\frac{1}{t} \frac{d}{dt} \right)^n = 2^n R^{-1} \left(\frac{d}{dt} \right)^n R.$$

Используя дробный интеграл Римана–Лиувилля, при $\alpha > 0$ определим отрицательную дробную степень

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{t} \frac{d}{dt} \right)^{-\alpha} f(t) &= 2^{-\alpha} R^{-1} \left(\frac{d}{dt} \right)^{-\alpha} Rf(t) \\
&= 2^{-\alpha} \Gamma(\alpha) R^{-1} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\sqrt{\tau}) d\tau \\
&= \frac{2^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t^2 - \tau^2)^{\alpha-1} \tau f(\tau) d\tau,
\end{aligned} \tag{11}$$

после чего произвольная положительная степень p оператора $\frac{1}{t} \frac{d}{dt}$ может быть определена по формуле

$$\left(\frac{1}{t} \frac{d}{dt} \right)^p f(t) = \left(\frac{1}{t} \frac{d}{dt} \right)^{[p]+1} \left(\frac{1}{t} \frac{d}{dt} \right)^{\{p\}-1} f(t). \tag{12}$$

Теперь функцию $P_k^\gamma(t)u_0$ преобразуем, используя теорему 1, лемму 2 из [8] и равенства (12), (11). После элементарных преобразований получим

$$\begin{aligned}
P_k^\gamma(t)u_0 &= \frac{2^{k/2}}{B(k/2, 1/2)(k-1)!!} \left(\frac{\operatorname{sh} \gamma t}{\gamma} \right)^{1-k} \\
&\quad \times \int_0^t \left(\frac{\operatorname{ch} \gamma t - \operatorname{ch} \gamma y}{\gamma^2} \right)^{k/2-1} y \left(\frac{1}{y} \frac{d}{dy} \right)^{k/2} y^{k-1} Y_k(y) u_0 dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(-1)^{[k/2]} 2^{k/2+\{k/2\}} c_k}{B(k/2, 1/2) \Gamma(1 - \{k/2\})} \left(\frac{\operatorname{sh} \gamma t}{\gamma} \right)^{1-k} \\
&\quad \times \int_0^t \left(\frac{1}{y} \frac{d}{dy} \right)^{[k/2]} \left(\frac{\operatorname{ch} \gamma t - \operatorname{ch} \gamma y}{\gamma^2} \right)^{k/2-1} \\
&\quad \times \frac{d}{dy} \left(y^{2[k/2]+1} \int_0^1 (1-x^2)^{-\{k/2\}} x^k Y_k(xy) u_0 dx \right) dy \\
&= \frac{(-1)^{[k/2]} 2^{k/2+\{k/2\}} c_k}{B(k/2, 1/2) \Gamma(1 - \{k/2\})} \left(\frac{\operatorname{sh} \gamma t}{\gamma} \right)^{1-k} \\
&\quad \times \int_0^t \left(\frac{1}{y} \frac{d}{dy} \right)^{[k/2]} \left(\frac{\operatorname{ch} \gamma t - \operatorname{ch} \gamma y}{\gamma^2} \right)^{k/2-1} \\
&\quad \times \int_0^1 (1-x^2)^{-\{k/2\}} x^k y^{2[k/2]} \\
&\quad \times ((2[k/2] + 1) Y_k(xy) u_0 + xy Y'_k(xy) u_0) dx dy \\
&= \frac{(-1)^{[k/2]} 2^{k/2+\{k/2\}} c_k}{B(k/2, 1/2) \Gamma(1 - \{k/2\})} \\
&\quad \times \int_0^t s^k g_\gamma(t, s, k) ((2[k/2] + 1) Y_k(s) u_0 + s Y'_k(s) u_0) ds \\
&= \frac{(-1)^{[k/2]} 2^{k/2+\{k/2\}} c_k}{B(k/2, 1/2) \Gamma(1 - \{k/2\})} \left(t^{k+1} \lim_{s \rightarrow t} g_\gamma(t, s, k) - \lim_{s \rightarrow 0} s^{k+1} g_\gamma(t, s, k) \right) \\
&\quad + \frac{(-1)^{[k/2]} 2^{k/2+\{k/2\}} c_k}{B(k/2, 1/2) \Gamma(1 - \{k/2\})} \\
&\quad \times \int_0^t \left((2[k/2] + 1) s^k - \frac{\partial}{\partial s} s^{k+1} \right) g_\gamma(t, s, k) Y_k(s) u_0 ds, \tag{13}
\end{aligned}$$

при этом мы использовали обозначение

$$c_k = \frac{\Gamma([k/2] + 3/2)}{2^{\{k/2\}-1} (2[k/2] + 1)!! \Gamma(k/2 + 1/2)}.$$

Вычислив пределы

$$\begin{aligned}
\lim_{s \rightarrow t} g_\gamma(t, s, k) &= (-1)^{[k/2]} 2^{-\{k/2\}} (k/2 - 1)(k/2 - 2) \dots (k/2 - [k/2]) \\
&\quad \times B(1 - \{k/2\}, \{k/2\}) t^{-1-k/2} \left(\frac{\operatorname{sh} \gamma t}{\gamma t} \right)^{k/2-1}, \\
\lim_{s \rightarrow t} s^{k+1} g_\gamma(t, s, k) &= 0,
\end{aligned}$$

из (13) получим требуемое равенство для $P_k^\gamma(t) u_0$ и при $\{k/2\} > 0$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 8. Пусть $A \in G_k^\gamma$ для $k > 0$ и $u_0 \in E$. Тогда $A \in G_k$ и при этом: если дробная часть $\{k/2\}$ равна нулю, то

$$Y_k(t)u_0 = \left(\frac{\text{sh } \gamma t}{\gamma t}\right)^{k/2} P_k^\gamma(t)u_0 + \frac{2^{1-k/2}t^{1-k}}{(k/2-1)!} \\ \times \int_0^t \left(\frac{\text{sh } \gamma y}{\gamma}\right)^k \left(-\frac{\gamma}{\text{sh } \gamma y} \frac{d}{dy}\right)^{k/2} (t^2 - y^2)^{k/2-1} P_k^\gamma(t)u_0 dy;$$

если $\{k/2\} > 0$, то

$$Y_k(t)u_0 = \frac{\alpha_k \Gamma(\{k/2\})}{\sqrt{\pi} 2^{[k/2]} \Gamma(k/2)} \left(\frac{\text{sh } \gamma t}{\gamma t}\right)^{k/2} P_k^\gamma(t)u_0 + \frac{(-1)^{[k/2]+1}}{\sqrt{\pi} \Gamma(k/2) \Gamma(1 - \{k/2\})} t^{1-k} \\ \times \int_0^t \left(\frac{\text{sh } \gamma s}{\gamma}\right)^{k-1} \left(\frac{\text{sh } \gamma s}{\gamma} h_\gamma(t, s, k) + \frac{\text{ch } \gamma s - 1}{\gamma^2} \frac{\partial h_\gamma(t, s, k)}{\partial s}\right) P_k^\gamma(s)u_0 ds,$$

где

$$h_\gamma(t, s, k) = 2^{1-k/2} \int_s^t \frac{\text{sh } \gamma y}{\gamma} \frac{\gamma^2}{\text{ch } \gamma y - 1} \left(\frac{\text{ch } \gamma y - \text{ch } \gamma s}{\gamma^2}\right)^{-\{k/2\}} \\ \times \left(-\frac{\gamma}{\text{sh } \gamma y} \frac{d}{dy}\right)^{[k/2]} (t^2 - y^2)^{k/2-1} dy.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится по схеме доказательства теоремы 7 с использованием леммы 1 из [8], теоремы 2 и дробной степени оператора $\frac{1}{\text{sh } t} \frac{d}{dt}$, определяемой следующим образом: при $\alpha > 0$

$$\left(\frac{1}{\text{sh } t} \frac{d}{dt}\right)^{-\alpha} f(t) = \frac{(\text{ch } t - 1)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-x)^{\alpha-1} f(\text{arch}((\text{ch } t - 1)x + 1)) dx \\ = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (\text{ch } t - \text{ch } s)^{\alpha-1} \text{sh } s f(s) ds.$$

ТЕОРЕМА 9. Для того чтобы задача (1), (2) была равномерно корректной и

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|P_k^\gamma(t) - I\| = 0,$$

необходимо и достаточно, чтобы $A \in B(E)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из [9, теорема 7] и теоремы 7 настоящей работы.

В следующих утверждениях устанавливается, что КОФ $C(t)$ и ОФБ $Y_k(t)$ являются пределами ОФЛ $P_k^\gamma(t)$ соответственно при $k \rightarrow 0$ и $\gamma \rightarrow 0$.

ТЕОРЕМА 10. Пусть $A \in G_0$. Тогда при $u_0 \in E$, $t \in [0, t_0]$, $t_0 > 0$

$$\lim_{k \rightarrow 0} P_k^\gamma(t)u_0 = C(t)u_0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя теорему 1 при $k = 0$, $m = k$, для $u_0 \in E$, $t \in [0, t_0]$ и $\delta > 0$ имеем

$$\begin{aligned} P_k^\gamma(t)u_0 - C(t)u_0 &= \frac{2^{k/2}t}{B(k/2, 1/2)} \left(\frac{\operatorname{sh} \gamma t}{\gamma} \right)^{1-k} \\ &\times \left(\int_0^{1-\delta/t_0} + \int_{1-\delta/t_0}^1 \right) \left(\frac{\operatorname{ch} \gamma t - \operatorname{ch} \gamma ts}{\gamma^2} \right)^{k/2-1} (C(ts)u_0 - C(t)u_0) ds. \end{aligned}$$

Ввиду сильной непрерывности КОФ $C(t)$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого $\varepsilon > 0$ имеем $\|C(ts)u_0 - C(t)u_0\| < \varepsilon$, если только $|s - 1| < \delta/t_0$. Зафиксируем такое $\delta > 0$. Пусть также $M(t_0) = \sup_{[0, t_0]} \|C(t)u_0\|$. Тогда

$$\begin{aligned} \|P_k^\gamma(t)u_0 - C(t)u_0\| &\leq \frac{2^{k/2}t}{B(k/2, 1/2)} \left(\frac{\operatorname{sh} \gamma t}{\gamma} \right)^{1-k} \\ &\times \left(2M(t_0) \int_0^{1-\delta/t_0} \left(\frac{\operatorname{ch} \gamma t - \operatorname{ch} \gamma ts}{\gamma^2} \right)^{k/2-1} ds \right. \\ &\left. + \varepsilon \int_0^1 \left(\frac{\operatorname{ch} \gamma t - \operatorname{ch} \gamma ts}{\gamma^2} \right)^{k/2-1} ds \right) \\ &\leq \frac{2^{k/2+1}t}{B(k/2, 1/2)} M(t_0) \left(\frac{\operatorname{sh} \gamma t}{\gamma} \right)^{1-k} \int_0^{1-\delta/t_0} \left(\frac{\gamma^2}{\operatorname{ch} \gamma t - \operatorname{ch} \gamma ts} \right)^{1-k/2} ds + \varepsilon \\ &\leq \frac{2^{k/2+1}t}{B(k/2, 1/2)} M(t_0) \left(\frac{\operatorname{sh} \gamma t}{\gamma} \right)^{1-k} \left(\frac{\gamma^2}{\operatorname{ch} \gamma t - 1} \right)^{1-k/2} \left(1 - \frac{\delta}{t_0} \right) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Так как $\lim_{k \rightarrow 0} B(k/2, 1/2) = \infty$, то, учитывая произвольность $\varepsilon > 0$, получаем

$$\lim_{k \rightarrow 0} \|P_k^\gamma(t)u_0 - C(t)u_0\| = 0, \quad u_0 \in E, \quad t \in [0, t_0],$$

и теорема доказана.

ТЕОРЕМА 11. Пусть $A \in G_k$. Тогда при $u_0 \in E$, $t \in [0, t_0]$, $t_0 > 0$

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} P_k^\gamma(t)u_0 = Y_k(t)u_0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $u_0 \in D(A^r)$, где r – достаточно большое, и $t \in [0, t_0]$, то при $\gamma \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} P_k^\gamma(t)u_0 &= \frac{2^{k/2}}{B(k/2, 1/2)} \left(\frac{\operatorname{sh} \gamma t}{\gamma} \right)^{1-k} \int_0^t \left(\frac{\operatorname{ch} \gamma t - \operatorname{ch} \gamma y}{\gamma^2} \right)^{k/2-1} Y_0(y) u_0 dy \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{2^{k/2}}{B(k/2, 1/2)} t^{1-k} \int_0^t \left(\frac{t^2 - y^2}{2} \right)^{k/2-1} Y_0(y) u_0 dy = Y_k(t) u_0. \end{aligned}$$

В силу теоремы Банаха–Штейнгауза и плотности $D(A^r)$ в E ,

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} P_k^\gamma(t)u_0 = Y_k(t)u_0$$

и для $u_0 \in E$. Теорема доказана.

Рассмотрим, наконец, связь ОФЛ с решением задачи Коши для уравнения первого порядка

$$v'(t) = Av(t), \quad v(0) = v_0. \quad (14)$$

ТЕОРЕМА 12. Пусть $A \in G_k^\gamma$. Тогда оператор A является генератором полугруппы $T(t)$ класса C_0 .

Если $k/2$ – целое число, то

$$T(t)v_0 = \frac{1}{\Gamma(k/2 + 1/2)\sqrt{t}} \int_0^\infty \left(\frac{\operatorname{sh} \gamma s}{\gamma} \right)^k \left(-\frac{\gamma}{2 \operatorname{sh} \gamma s} \frac{d}{ds} \right)^{k/2} \exp\left(-\frac{s^2}{4t}\right) P_k^\gamma(s)v_0 ds.$$

В случае нецелого $k/2$ также можно выразить полугруппу $T(t)$ через $P_k^\gamma(t)$, придав смысл выражению $\left(\frac{\gamma}{\operatorname{sh} \gamma t} \frac{d}{dt} \right)^{k/2}$, используя понятие дробной производной.

Доказательство теоремы вытекает из работы [9, теорема 6] и теорем 7 и 8.

В качестве приложения полученных результатов приведем необходимое и достаточное условие существования предела $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t, s) = \lambda(s)$ для параболического уравнения в частных производных с переменными коэффициентами.

Пусть

$$E = (v_0(s) : |v_0(s) \operatorname{sh} s| \leq M, \quad s \in [0, \infty)),$$

$$\|v_0(s)\| = \sup_{[0, \infty)} |v_0(s) \operatorname{sh} s|,$$

$$A = \frac{d^2}{ds^2} + 2\gamma \operatorname{cth} \gamma s \frac{d}{ds} + \gamma^2,$$

$$D(A) = (v_0(s) \in E : Av_0(s) \in E).$$

Учитывая результаты работы [11], необходимое и достаточное условие стабилизации решения задачи Коши (14), которое в случае $A \in G_p$ и равномерной ограниченности ОФБ $Y_p(t)$ состоит в существовании предела

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t Y_p(s) ds = \lambda,$$

запишем в виде

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\gamma s}{t \operatorname{sh} \gamma s} \int_0^t T_s^y \left(\frac{\operatorname{sh} \gamma s}{\gamma s} v_0(s) \right) dy = \lambda(s),$$

где

$$T_s^y v_0(s) = \frac{1}{2} \int_0^\pi v_0(\sqrt{s^2 + y^2 - 2sy \cos \varphi}) \sin \varphi d\varphi$$

— оператор обобщенного сдвига, а сходимость понимается в смысле сходимости в E .

Список литературы

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 3. М.: Наука, 1967.
2. Хелгасон С. Группы и геометрический анализ. М.: Мир, 1987.
3. Олевский М. Н. О связях между решениями обобщенного волнового уравнения теплопроводности // ДАН СССР. 1955. Т. 101. № 1. С. 21–24.
4. Ярославцева В. Я. Об одном классе операторов преобразования и их приложениях к дифференциальным уравнениям // ДАН СССР. 1976. Т. 227. № 4. С. 816–819.
5. Киприянов И. А., Иванов Л. А. Уравнение Эйлера–Пуассона–Дарбу в римановом пространстве // ДАН СССР. 1981. Т. 260. № 4. С. 790–794.
6. Кононенко В. И., Хинкис Л. А. Операторы преобразования, связанные с дифференциальным оператором Якоби. Воронеж: Воронеж. ун-т, 1989. Деп. в ВИНТИ 13.03.89. № 1604-B89.
7. Васильев В. В., Крейн С. Г., Пискарев С. И. Полугруппы операторов, косинус оператор-функции и линейные дифференциальные уравнения // Итоги науки и техники. Сер. Матем. анализ. М.: ВИНТИ, 1990. С. 87–102.
8. Глушак А. В., Кононенко В. И., Шмудевич С. Д. Об одной сингулярной абстрактной задаче Коши // Изв. вузов. Математика. 1986. № 6. С. 55–56.
9. Глушак А. В. Операторная функция Бесселя // Докл. РАН. 1997. Т. 352. № 5. С. 587–589.
10. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.
11. Глушак А. В., Репников В. Д. О стабилизации решений задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка в банаховом пространстве // Докл. РАН. 1992. Т. 326. № 2. С. 224–226.

Воронежский государственный
технический университет
E-mail: mfkuchp@main.vsu.ru

Поступило в редакцию
20.III.1998