Общероссийский математический портал

М. В. Карасёв, А. В. Перескоков, Асимптотические решения уравнений Хартри, сосредоточенные вблизи маломерных подмногообразий. II. Локализация в плоских дисках, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2001, том 65, выпуск 6, 57–98

DOI: <https://doi.org/10.4213/im365>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 06:43:57

УДК 517.946

М. В. Карасев, А. В. Перескоков

**Асимптотические решения уравнений Хартри,
сосредоточенные вблизи маломерных подмногообразий.****II. Локализация в плоских дисках**

Рассматривается задача нахождения собственных значений для трехмерного уравнения Хартри во внешнем поле. Построены асимптотические (квазиклассические) решения, сосредоточенные вблизи плоских двумерных дисков. Убытие этих решений по нормали к диску определяется поляроном Боголюбова, а вблизи края диска задается эйри-аналогом полярона. Для нахождения соответствующей серии собственных значений получен аналог правила квантования Бора–Зоммерфельда, из которого выведено более простое алгебраическое уравнение, определяющее главные члены асимптотики собственных значений.

Библиография: 10 наименований.

§ 1. Введение

Данная статья является второй, заключительной, частью работы [1]. Рассматривается следующая задача на собственные значения для нелинейного уравнения типа Хартри:

$$\varepsilon^2 \Delta \psi(x) + \left(-a|x|^\alpha + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\psi(x')|^2}{|x-x'|} dx' + \Lambda \right) \psi(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad (1.1)$$

$$\|\psi\|_{L^2} = 1, \quad (1.2)$$

где Δ – оператор Лапласа, $\varepsilon > 0$ – малый параметр и a, α – положительные константы.

В этой части работы для задачи (1.1), (1.2) построена серия асимптотических собственных значений $\Lambda = \Lambda_{n,m}(\varepsilon)$, $\varepsilon \rightarrow 0$, и соответствующих собственных функций $\psi = \psi_{n,m}$, носителями которых по $\text{mod } O(\varepsilon^\infty)$ являются плоские диски

$$D = \{(z, \rho, \varphi) \mid z = 0, \rho_- \leq \rho \leq \rho_+\}. \quad (1.3)$$

Здесь (z, ρ, φ) – цилиндрические координаты в $\mathbb{R}^3$.

Подчеркнем, что функции $\psi_{n,m}$ заведомо не являются радиально-симметричными. Хотя подобные локализованные в дисках решения хорошо известны в линейных задачах, для уравнения Хартри их построение является серьезной проблемой. Здесь до сих пор были известны лишь радиально-симметричные асимптотики [2], [3]. Доказательство существования несимметричных решений уравнения

Хартри для некоторых случаев дано в [4], [5]. Кроме того, изучение нерадиально-симметричных решений производилось с использованием численных методов (см., например, [6]). Более подробно история вопроса изложена во введении к первой части [1]. Там же приведен большой список литературы.

Ниже мы построим асимптотические решения задачи (1.1), (1.2) в случае, когда число Λ велико и имеет порядок $\varepsilon^{-\alpha\omega}$, где

$$\omega = \frac{2}{4 + 5\alpha} > 0.$$

Именно в этом случае задача (1.1), (1.2) приводит к рассмотренному в [1] модельному уравнению

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2} + \left(\xi - \iint_{-\infty}^{\infty} \ln \left[\frac{(\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2}{(\xi')^2} \right] G^2(\xi', \eta') d\xi' d\eta' \right) G = 0. \quad (1.4)$$

Это – так называемая эйри-версия двумерного уравнения полярона, содержащая одновременно как линейное слагаемое ξG , так и интегральную нелинейность типа Хартри.

Отметим, что если при $\varepsilon \rightarrow 0$ $\Lambda = O(1)$ или Λ растет медленнее, чем $\varepsilon^{-\alpha\omega}$, то нелинейность в уравнении (1.1) оказывается очень сильной и линейный потенциал уже не будет входить в модельное уравнение. В этом случае построение нерадиально-симметричной асимптотики решения задачи (1.1), (1.2) остается открытой проблемой.

Наоборот, если при $\varepsilon \rightarrow 0$ числа Λ растут быстрее, чем $\varepsilon^{-\alpha\omega}$, то влияние нелинейности в (1.1) слабое; в частности, нелинейное слагаемое вообще не войдет в модельное уравнение.

Таким образом, изучаемая в данной работе зона $\Lambda \sim e^{-\alpha\omega}$ является пограничной между сильно нелинейной зоной (где внешний потенциал не влияет на модельную задачу) и зоной слабой нелинейности (где вообще не будет вклада нелинейности в модельную задачу).

Решения (1.1) мы будем искать в виде

$$\psi = e^{iM\varphi/\varepsilon^\nu} p(\rho, z) / \sqrt{2\pi\rho}. \quad (1.5)$$

Здесь

$$\nu = \frac{6 + 6\alpha}{4 + 5\alpha} > 0,$$

а $M = M(\varepsilon)$ удовлетворяет неравенствам

$$0 < c_0 \leq M \leq c_1, \quad (1.6)$$

где c_0, c_1 – некоторые константы. В силу 2π -периодичности решения по φ константа M должна иметь вид $M = t\varepsilon^\nu$, где t – целое (при $\varepsilon \rightarrow 0$ число t велико: $t \sim \varepsilon^{-1/\nu}$).

После подстановки (1.5) в (1.1), (1.2) получается следующая задача для функции p :

$$\varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right) + \left\{ -\frac{\varepsilon^{2-2\nu}}{\rho^2} M^2 - a(\rho^2 + z^2)^{\alpha/2} + \frac{\varepsilon^2}{4\rho^2} + \Lambda + \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty W(\rho, \rho', z, z') p^2(\rho', z') dz' d\rho' \right\} p = 0, \quad (1.7)$$

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty p^2(\rho', z') dz' d\rho' = 1. \quad (1.8)$$

Здесь ядро интегрального оператора имеет вид

$$W = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{(z - z')^2 + \rho^2 + (\rho')^2 - 2\rho\rho' \cos \varphi}}.$$

Функция W выражается через полный эллиптический интеграл первого рода

$$K(\mathbb{k}) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \mathbb{k}^2 \sin^2 \varphi}}$$

следующим образом:

$$W = \frac{2}{\pi \sqrt{(z - z')^2 + (\rho - \rho')^2}} K \left(\frac{2i\sqrt{\rho\rho'}}{\sqrt{(z - z')^2 + (\rho - \rho')^2}} \right).$$

Используя тождество [7]

$$K(\mathbb{k}) = \frac{1}{\sqrt{1 - \mathbb{k}^2}} K \left(-\frac{i\mathbb{k}}{\sqrt{1 - \mathbb{k}^2}} \right),$$

где модуль $\mathbb{k} = 2i\sqrt{\rho\rho'}/\sqrt{(z - z')^2 + (\rho - \rho')^2}$, получаем следующее представление для интегрального ядра:

$$W(\rho, \rho', z, z') = \frac{2}{\pi \sqrt{(z - z')^2 + (\rho + \rho')^2}} K \left(\frac{2\sqrt{\rho\rho'}}{\sqrt{(z - z')^2 + (\rho + \rho')^2}} \right). \quad (1.9)$$

Наконец, по соображениям симметрии относительно плоскости $z = 0$ дополним (1.7), (1.8) условием

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty z' p^2(\rho', z') dz' d\rho' = 0. \quad (1.10)$$

Пусть $\Lambda = \lambda \varepsilon^{-\omega \alpha}$, $m = M \varepsilon^{-\nu}$, где M удовлетворяет (1.6), а $0 \leq c_2 < \lambda(\varepsilon) \leq c_3$, где c_2, c_3 – некоторые константы. Тогда после замены

$$x = \rho \varepsilon^\omega, \quad y = z \varepsilon^\omega, \quad g = p \varepsilon^{-\omega}, \quad h = \varepsilon^\nu$$

задача (1.7), (1.8), (1.10) принимает вид

$$\left\{ h^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) - \frac{M^2}{x^2} - a(x^2 + y^2)^{\alpha/2} + \lambda + \frac{h^2}{4x^2} + h^{1/3} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty W(x, x', y, y') g^2(x', y') dy' dx' \right\} g(x, y) = 0, \quad (1.11)$$

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty g^2(x', y') dy' dx' = 1, \quad (1.12)$$

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty y' g^2(x', y') dy' dx' = 0, \quad (1.13)$$

где ядро W задается формулой (1.9), $h \rightarrow 0$.

Так как перед интегралом в (1.11) стоит малый параметр $h^{1/3}$, то нелинейность в (1.11) достаточно слабая.

Введем функцию $V(x) \stackrel{\text{def}}{=} M^2/x^2 + ax^\alpha$. Поскольку $a > 0$, $\alpha > 0$, то функция $V(x)$ имеет единственную точку минимума

$$x_0 = \left(\frac{2M^2}{\alpha a} \right)^{1/(\alpha+2)}.$$

Пусть ниже $\lambda > V(x_0)$. Тогда функция

$$U(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda - V(x) \quad (1.14)$$

имеет ровно две точки x_-, x_+ , $x_- < x_+$, в которых $U(x_\pm) = 0$, причем $U(x) > 0$ при $x \in (x_-, x_+)$ и $U(x) < 0$ при $0 < x < x_-$, $x > x_+$. Таким образом, $-U(x)$ является потенциальной ямой.

Асимптотические решения уравнения (1.11) будем строить, следуя общей идеологии согласования асимптотических разложений [8]. В области между точками x_-, x_+ для нахождения асимптотики используется вариант метода ВКБ. Вблизи же от точек $(x_-, 0)$, $(x_+, 0)$ асимптотика выражается через решения модельного уравнения. Именно в том случае, когда в (1.11) перед интегралом стоит множитель $h^{1/3}$, модельным является уравнение (1.4); его экспоненциально убывающие при $\eta \rightarrow \pm\infty$, $\xi \rightarrow -\infty$ решения (эйри-поляроны) были изучены в [1].

Ниже, зафиксировав M , для нахождения дискретной серии асимптотических собственных значений задачи (1.11)–(1.13) $\lambda = \lambda_n(h)$ выпишем аналог правила квантования типа Бора–Зоммерфельда (см. ниже (6.9)). В это правило войдет определяющая фазу ВКБ-разложения функция $S(x, h)$, задача для которой имеет достаточно сложный вид (см. (5.7), (5.12)–(5.15), (5.23)).

Ее решение приводит к громоздким формулам. Ограничимся нахождением $\lambda_n(h) = O(1)$ лишь с точностью $O(n^{-7/10})$ при $h \rightarrow 0$, $n \sim 1/h$ (главное приближение). Тогда правило квантования (6.9) упростится и приведет к следующему

алгебраическому уравнению для чисел $\lambda = \lambda_n(h)$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} \int_{x_-}^{x_+} \sqrt{U(x)} dx + \frac{k_0}{2h^{2/3}} \int_{x_-}^{x_+} \frac{\Omega(x)}{\sqrt{U(x)}} dx \\ & + \frac{1}{h^{1/3}} \left\{ \frac{k_0^3 P_1}{8} \int_{x_-}^{x_+} \frac{\Omega(x)}{\sqrt{U(x)}} dx - \frac{k_0^2 P_2}{4} - \frac{k_0^2 P_3}{8} + P \right\} = \pi n + O(n^{1/3-1/30}). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Неизвестное λ входит в это уравнение через функцию U (1.14) и через точки поворота $x_{\pm}$, в которых $U(x_{\pm}) = 0$.

В уравнении (1.15) n – целые числа, $n \rightarrow \infty$ (так что выполнены неравенства (6.10)), а коэффициенты k_0 , P_j , $j = 1, 2, 3$, и функция $\Omega(x)$ зависят от U следующим образом:

$$k_0 = 2 \left(\int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{U(x)}} \right)^{-1}, \quad (1.16)$$

$$\Omega(x) = \int_{x_-}^{x_+} \frac{1}{\pi(x+x')} K \left(\frac{2\sqrt{xx'}}{x+x'} \right) \frac{dx'}{\sqrt{U(x')}}, \quad (1.17)$$

$$\begin{aligned} P_1 = \int_{-\infty}^{\infty} & \left\{ \frac{\theta(x-x_-)\theta(x_+-x)}{(U(x))^{3/2}} \Omega(x) - \frac{\theta(x-x_-)\Omega(x_-)}{(U'(x_-))^{3/2}(x-x_-)^{3/2}} \right. \\ & \left. - \frac{\theta(x_+-x)\Omega(x_+)}{(-U'(x_+))^{3/2}(x_+-x)^{3/2}} \right\} dx, \end{aligned} \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned} P_2 = \int_{-\infty}^{\infty} & \Omega(x) \left\{ \frac{\theta(x-x_-)\theta(x_+-x)}{(U(x))^{3/2}} \Omega(x) - \frac{\theta(x-x_-)\Omega(x_-)}{(U'(x_-))^{3/2}(x-x_-)^{3/2}} \right. \\ & \left. - \frac{\theta(x_+-x)\Omega(x_+)}{(-U'(x_+))^{3/2}(x_+-x)^{3/2}} \right\} dx, \end{aligned} \quad (1.19)$$

$$\begin{aligned} P_3 = \int_{-\infty}^{\infty} & \left\{ \frac{\theta(x-x_-)\theta(x_+-x)}{(U(x))^{3/2}} \Omega^2(x) - \frac{\theta(x-x_-)\Omega^2(x_-)}{(U'(x_-))^{3/2}(x-x_-)^{3/2}} \right. \\ & \left. - \frac{\theta(x_+-x)\Omega^2(x_+)}{(-U'(x_+))^{3/2}(x_+-x)^{3/2}} \right\} dx, \end{aligned} \quad (1.20)$$

где

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x \leq 0, \end{cases}$$

а также

$$\begin{aligned} P = \frac{1}{2} \int_{x_-}^{x_+} & \frac{1}{\sqrt{U(x)}} \left\{ -k_0(b_- + b_+) \Omega(x) + \frac{2}{\pi} \left[\frac{b_-}{x+x_-} K \left(\frac{2\sqrt{xx_-}}{x+x_-} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{b_+}{x+x_+} K \left(\frac{2\sqrt{xx_+}}{x+x_+} \right) \right] \right\} dx, \end{aligned} \quad (1.21)$$

где

$$\begin{aligned} b_- &= (U'(x_-))^{2/3} 2\pi x_- A_{-1} \left(\frac{k_0}{2\pi x_- (U'(x_-))^{4/3}} \right), \\ b_+ &= (-U'(x_+))^{2/3} 2\pi x_+ A_{-1} \left(\frac{k_0}{2\pi x_+ (-U'(x_+))^{4/3}} \right). \end{aligned} \quad (1.22)$$

Функция $A_{-1} = A_{-1}(\tilde{k})$ в (1.22), характеризующая влияние решений модельного уравнения (1.4) на правило квантования, а значит, и на спектр исходной задачи, определена формулой (4.21).

Отметим, что уравнение (1.15) содержит негладкую функцию $\Omega(x)$ и вывод правила квантования (1.15) требует очень скрупулезных оценок (см. ниже § 7, 8).

§ 2. ВКБ-асимптотика. Уравнения для амплитуды и фазы

Будем строить асимптотические решения g в виде

$$g(x, y) = h^{-5/18} T(x, \tau_1, h) \cos \Phi(x, \tau_1, h), \quad (2.1)$$

где

$$\tau_1 = \frac{y}{h^{5/9}}, \quad \Phi(x, \tau_1, h) = \frac{S(x, h)}{h} + h^{1/9} \varphi(x, \tau_1, h). \quad (2.2)$$

Функции S, T, φ в (2.1), (2.2) гладкие, вещественные; при $\tau_1 \rightarrow \pm\infty$ функция T экспоненциально убывает, а φ имеет степенной рост. Для упрощения обозначений мы не будем явно указывать зависимость g от параметра h .

Формулы (2.1), (2.2) справедливы при

$$\tilde{x}_- + \varepsilon < x < \tilde{x}_+ - \varepsilon. \quad (2.3)$$

Здесь точки $\tilde{x}_{\pm} \sim x_{\pm}$ определяются из уравнения

$$\begin{aligned} U(\tilde{x}_{\pm}) + h^{1/3} \int_0^{\infty} \frac{2}{\pi(\tilde{x}_{\pm} + x')} K\left(\frac{2\sqrt{\tilde{x}_{\pm}x'}}{\tilde{x}_{\pm} + x'}\right) \int_{-\infty}^{\infty} g^2(x', y') dy' dx' \\ = O\left(h^{1+1/57} \ln \frac{1}{h}\right), \quad h \rightarrow 0; \end{aligned} \quad (2.4)$$

$\varepsilon = ch^{26/57}$, где $c > 0$ – произвольная константа.

В настоящем параграфе мы получим уравнения для амплитуды T и функций S и φ , задающих фазу (2.1). Поскольку построение ВКБ-асимптотики для (1.11) аналогично [1], метод ВКБ будет изложен кратко.

Так как решения g по $\text{mod } O(h^{\infty})$ локализованы вблизи $y = 0$, разложим заданное соотношением (1.9) ядро $W(x, x', y, y')$ по степеням $y - y'$.

ЛЕММА 2.1. *При $y - y' \rightarrow 0$ справедливо равенство*

$$\begin{aligned} W(x, x', y, y') = \frac{2}{\pi(x + x')} K\left(\frac{2\sqrt{xx'}}{x + x'}\right) - \frac{1}{\pi(x + x')} \ln\left(1 + \frac{(y - y')^2}{(x - x')^2}\right) \\ + O\left(\frac{(y - y')^2}{(x + x')^3} (1 + |\ln |x - x'|||)\right). \end{aligned} \quad (2.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку функция $K(\mathbb{k})$ имеет логарифмическую особенность при $\mathbb{k} \rightarrow 1$ [7]:

$$K(\mathbb{k}) = \ln(4/\sqrt{1-\mathbb{k}^2}) + O((1-\mathbb{k}^2)\ln(1-\mathbb{k}^2)), \quad (2.6)$$

то непосредственно к W формула Тейлора не применима. Поэтому представим

$$W(x, x', y, y') = \frac{2}{\pi(x+x')} \left[K\left(\frac{2\sqrt{xx'}}{x+x'}\right) + \delta K \right] + O\left(\frac{(y-y')^2}{(x+x')^3} K\left(\frac{2\sqrt{xx'}}{x+x'}\right)\right), \quad (2.7)$$

где

$$\delta K = K\left(\frac{2\sqrt{xx'}}{\sqrt{(y-y')^2 + (x+x')^2}}\right) - K\left(\frac{2\sqrt{xx'}}{x+x'}\right).$$

Для дальнейшего разложения δK воспользуемся равенством [7]

$$\frac{dK}{db} = \frac{1}{2b(1-b)}E - \frac{1}{2b}K, \quad (2.8)$$

где $b = \mathbb{k}^2$, а $E(\mathbb{k})$ – полный эллиптический интеграл второго рода. Учитывая асимптотику $E(\mathbb{k}) = 1 + O((1-\mathbb{k}^2)\ln(1-\mathbb{k}^2))$, $\mathbb{k} \rightarrow 1$, а также (2.6), имеем

$$\begin{aligned} \delta K &= \int_{4xx'/(x+x')^2}^{4xx'/[(y-y')^2 + (x+x')^2]} \left\{ \frac{1}{2b(1-b)}E(\sqrt{b}) - \frac{1}{2b}K(\sqrt{b}) \right\} db \\ &= -\frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{(y-y')^2}{(x-x')^2}\right) + O\left(\frac{(y-y')^2}{(x+x')^2} (1 + |\ln|x-x'|||)\right). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Остается подставить (2.9) в (2.7). Приходим к формуле (2.5). Лемма доказана.

В силу (1.11), (2.5), а также равенства $(x^2 + y^2)^{\alpha/2} = x^\alpha + O(y^2 x^{\alpha-2})$, $y \rightarrow 0$, получаем

$$\begin{aligned} &h^2 \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right) + \left\{ U(x) + h^{1/3} \int_0^\infty \frac{2}{\pi(x+x')} K\left(\frac{2\sqrt{xx'}}{x+x'}\right) \int_{-\infty}^\infty g^2(x', y') dy' dx' \right. \\ &\quad - h^{1/3} \int_0^\infty \frac{1}{\pi(x+x')} \int_{-\infty}^\infty \ln\left(1 + \frac{(y-y')^2}{(x-x')^2}\right) g^2(x', y') dy' dx' \\ &\quad + O(h^2/x^2) + O(y^2 x^{\alpha-2}) \\ &\quad \left. + O\left(h^{1/3} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{(y-y')^2}{(x+x')^3} (1 + |\ln|x-x'|||) g^2(x', y') dy' dx'\right) \right\} g = 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Здесь $U(x)$ задано (1.14). Подставим затем асимптотическое решение (2.1), (2.2) в уравнение (2.10). Имеем

$$\begin{aligned} h^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = & \frac{1}{h^{5/18}} \left\{ - \left[T(S')^2 + 2h^{10/9} T S' \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] \cos \Phi \right. \\ & - h \left[2 \frac{\partial T}{\partial x} S' + T S'' \right] \sin \Phi + O \left(h^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) + O \left(h^{20/9} T \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right) \\ & \left. + O \left(h^{19/9} \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + O \left(h^{19/9} T \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} h^2 \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = & \frac{1}{h^{5/18}} \left\{ \left[h^{8/9} \frac{\partial^2 T}{\partial \tau_1^2} - h^{10/9} T \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau_1} \right)^2 \right] \cos \Phi \right. \\ & \left. - h \left[2 \frac{\partial T}{\partial \tau_1} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_1} + T \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau_1^2} \right] \sin \Phi \right\}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Пусть $\chi = \chi(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ – неотрицательная функция такая, что $\chi(\xi) \equiv 1$ при $\xi < 1/2$ и $\chi(\xi) \equiv 0$ при $\xi > 1$. Определим

$$\chi_-(x, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \chi((x - \tilde{x}_-)/\varepsilon), \quad \chi_+(x, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \chi((\tilde{x}_+ - x)/\varepsilon).$$

Так как ε содержит произвольную константу c , ВКБ-приближение (2.1) будет справедливо и в более широкой, чем (2.3), области $x \in (\tilde{x}_- + \varepsilon/2, \tilde{x}_+ - \varepsilon/2)$. Предполагая, что вблизи точек $\tilde{x}_-, \tilde{x}_+$ точное решение g известно, получаем [1]

$$\begin{aligned} & h^{1/3} \left\{ \int_0^\infty \frac{2}{\pi(x+x')} K \left(\frac{2\sqrt{xx'}}{x+x'} \right) \int_{-\infty}^\infty g^2(x', y') dy' dx' \right. \\ & \quad \left. - \int_0^\infty \frac{1}{\pi(x+x')} \int_{-\infty}^\infty \ln \left(1 + \frac{(y-y')^2}{(x-x')^2} \right) g^2(x', y') dy' dx' \right\} T(x, \tau_1, h) \\ & = h^{1/3} \left\{ j_-(x, h) + \int_{\tilde{x}_- + \varepsilon/2}^{\tilde{x}_+ - \varepsilon/2} \frac{1}{\pi(x+x')} K \left(\frac{2\sqrt{xx'}}{x+x'} \right) (1 - \chi_-(x', \varepsilon) - \chi_+(x', \varepsilon)) \right. \\ & \quad \left. \times \int_{-\infty}^\infty T^2(x', \tau'_1, h) d\tau'_1 dx' + j_+(x, h) \right\} T(x, \tau_1, h) \\ & \quad - \frac{h^{8/9}}{2x} \int_{-\infty}^\infty |\tau_1 - \tau'_1| T^2(x, \tau'_1, h) d\tau'_1 T(x, \tau_1, h) + r. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Здесь $x \in (\tilde{x}_- + \varepsilon, \tilde{x}_+ - \varepsilon)$,

$$\begin{aligned} j_-(x, h) & \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\tilde{x}_- + \varepsilon} \frac{2}{\pi(x+x')} K \left(\frac{2\sqrt{xx'}}{x+x'} \right) \chi_-(x', \varepsilon) \int_{-\infty}^\infty g^2(x', y') dy' dx', \\ j_+(x, h) & \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\tilde{x}_+ - \varepsilon}^\infty \frac{2}{\pi(x+x')} K \left(\frac{2\sqrt{xx'}}{x+x'} \right) \chi_+(x', \varepsilon) \int_{-\infty}^\infty g^2(x', y') dy' dx', \end{aligned} \quad (2.14)$$

а остаточный член r допускает оценку

$$\begin{aligned}
r = & O\left(h^{13/9} \int_{-\infty}^{\infty} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\tau_1 - \tau'_1)^2}{(x - x')^2} \left[(1 - \chi_-(x', \varepsilon) - \chi_+(x', \varepsilon)) \frac{T^2(x', \tau'_1, h)}{x + x'} \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{2x} T^2(x, \tau'_1, h) \right] dx' d\tau'_1 T(x, \tau_1, h) \right) \\
& + O\left(h^{1/3} \int_0^{\tilde{x}_- + \varepsilon} \frac{1}{(x + x')} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(y - y')^2}{(x - x')^2} \chi_-(x', \varepsilon) g^2(x', y') dy' dx' T(x, \tau_1, h) \right) \\
& + O\left(h^{1/3} \int_{\tilde{x}_+ - \varepsilon}^{\infty} \frac{1}{(x + x')} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(y - y')^2}{(x - x')^2} \chi_+(x', \varepsilon) g^2(x', y') dy' dx' T(x, \tau_1, h) \right) \\
& + O\left(h^{1/3} \int_{\tilde{x}_- + \varepsilon/2}^{\tilde{x}_+ - \varepsilon/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x + x')} \left[2K\left(\frac{2\sqrt{xx'}}{x + x'}\right) - \ln\left(1 + h^{10/9} \frac{(\tau_1 - \tau'_1)^2}{(x - x')^2}\right) \right] \right. \\
& \times (1 - \chi_-(x', \varepsilon) - \chi_+(x', \varepsilon)) T^2(x', \tau'_1, h) \\
& \left. \times \cos 2\Phi(x', \tau'_1, h) d\tau'_1 dx' T(x, \tau_1, h) \right). \tag{2.15}
\end{aligned}$$

Наконец, подставляя (2.11)–(2.13) в (2.10), получаем следующую лемму.

ЛЕММА 2.2. При $x \in (\tilde{x}_- + \varepsilon, \tilde{x}_+ - \varepsilon)$ справедливо равенство

$$\begin{aligned}
& - \left[(S')^2 T - h^{8/9} \frac{\partial^2 T}{\partial \tau_1^2} + 2h^{10/9} T S' \frac{\partial \varphi}{\partial x} + h^{10/9} T \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau_1} \right)^2 \right] \cos \Phi \\
& - h \left[2 \frac{\partial T}{\partial \tau_1} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_1} + T \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau_1^2} + 2 \frac{\partial T}{\partial x} S' + T S'' \right] \sin \Phi \\
& + \left\{ U + h^{1/3} \left[j_- + \int_{\tilde{x}_- + \varepsilon/2}^{\tilde{x}_+ - \varepsilon/2} \frac{1}{\pi(x + x')} K\left(\frac{2\sqrt{xx'}}{x + x'}\right) \right. \right. \\
& \times (1 - \chi_-(x', \varepsilon) - \chi_+(x', \varepsilon)) \int_{-\infty}^{\infty} T^2(x', \tau'_1, h) d\tau'_1 dx' + j_+ \left. \right] \\
& \left. - \frac{h^{8/9}}{2x} \int_{-\infty}^{\infty} |\tau_1 - \tau'_1| T^2(x, \tau'_1, h) d\tau'_1 \right\} T \cos \Phi + r^* = 0, \tag{2.16}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
r^* = & O\left(h^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right) + O\left(h^{19/9} \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + O\left(h^{19/9} T \frac{\partial \varphi^2}{\partial x^2}\right) \\
& + O\left(h^{20/9} T \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2\right) + O(r) + O(h^{10/9} \tau_1^2 T) + O(h^2 T) \\
& + O\left(h^{13/9} \int_{\tilde{x}_- + \varepsilon/2}^{\tilde{x}_+ - \varepsilon/2} \int_{-\infty}^{\infty} (\tau_1^2 + (\tau'_1)^2) (1 + |\ln |x - x'|||) \right. \\
& \left. \times (1 - \chi_-(x', \varepsilon) - \chi_+(x', \varepsilon)) T^2(x', \tau'_1, h) d\tau'_1 dx' T(x, \tau_1, h) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + O\left(h^{1/3} \int_0^{\tilde{x}_- + \varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} (y - y')^2 \right. \\
& \times (1 + |\ln |x - x'| |) \chi_{-}(x', \varepsilon) g^2(x', y') dy' dx' T(x, \tau_1, h) \Big) \\
& + O\left(h^{1/3} \int_{\tilde{x}_+ - \varepsilon}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (y - y')^2 \right. \\
& \times (1 + |\ln |x - x'| |) \chi_{+}(x', \varepsilon) g^2(x', y') dy' dx' T(x, \tau_1, h) \Big).
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Приравняем в (2.16) к нулю выражение перед $\sin \Phi$. Получаем

$$\frac{\partial}{\partial \tau_1} \left(T^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (T^2 S') = 0. \tag{2.18}$$

Так как при $|\tau_1| \rightarrow \infty$ T экспоненциально убывает, а φ имеет лишь степенной рост, то условием разрешимости (2.18) будет равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} T^2(x, \tau_1, h) d\tau_1 = \frac{k}{S'(x, h)}, \tag{2.19}$$

где k – константа.

Обратим, далее, в нуль выражение перед, стоящее перед $\cos \Phi$ в выражении (2.16). Пусть $T(x, \tau_1, h)$ и $L(x, h)$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \tau_1^2} - \left(\frac{1}{2x} \int_{-\infty}^{\infty} |\tau_1 - \tau'_1| T^2(x, \tau'_1, h) d\tau'_1 + L \right) T = h^{2/9} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau_1} \right)^2 + 2S' \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] T, \tag{2.20}$$

а также условию (2.19). Тогда получаем следующее уравнение для определения $S(x, h)$ (уравнение для фазы):

$$\begin{aligned}
& - (S')^2 + U(x) + h^{1/3} \left[\int_{\tilde{x}_- + \varepsilon/2}^{\tilde{x}_+ - \varepsilon/2} \frac{1}{\pi(x + x')} K\left(\frac{2\sqrt{xx'}}{x + x'}\right) \right. \\
& \times (1 - \chi_{-}(x', \varepsilon) - \chi_{+}(x', \varepsilon)) \frac{k}{S'(x', h)} dx' \\
& \left. + j_{-}(x, h) + j_{+}(x, h) \right] + h^{8/9} L(x, h) = 0.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Здесь j_{-}, j_{+} заданы формулами (2.14), $x \in (\tilde{x}_{-} + \varepsilon, \tilde{x}_{+} - \varepsilon)$.

Доказана

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть функции $S(x, h)$, $T(x, \tau_1, h)$, $\varphi(x, \tau_1, h)$, $L(x, h)$ удовлетворяют уравнениям (2.18)–(2.21). Тогда при $x \in (\tilde{x}_{-} + \varepsilon, \tilde{x}_{+} - \varepsilon)$ ВКБ-приближение (2.1), (2.2) является асимптотическим решением уравнения (1.11) с точностью r^* , где r^* имеет вид (2.17).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Отметим попутно, что уравнения, подобные (2.21), возникают при изучении контактных задач в теории упругости [9].

Далее определим cos-амплитуду

$$B = T \cos(h^{1/9} \varphi) \quad (2.22)$$

и sin-амплитуду

$$I = -T \sin(h^{1/9} \varphi), \quad (2.23)$$

которые позволяют записать равенство (2.1) в виде

$$g = \frac{1}{h^{5/18}} \left\{ B \cos \frac{S}{h} + I \sin \frac{S}{h} \right\}. \quad (2.24)$$

Оказывается, что технически более удобно строить асимптотические разложения не для пары $T(x, \tau_1, h)$, $\varphi(x, \tau_1, h)$, а для функций $B(x, \tau_1, h)$, $I(x, \tau_1, h)$, через которые выражаются T и φ .

Пусть $S(x, h)$ удовлетворяет (2.21). Тогда, аналогично [1], получаем следующую задачу для нахождения cos- и sin-амплитуд:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 B}{\partial \tau_1^2} - \left(\frac{1}{2x} \int_{-\infty}^{\infty} |\tau_1 - \tau'_1| (B^2(x, \tau'_1, h) + I^2(x, \tau'_1, h)) d\tau'_1 + L(x, h) \right) B \\ + h^{1/9} \left(2S' \frac{\partial I}{\partial x} + S'' I \right) = 0, \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 I}{\partial \tau_1^2} - \left(\frac{1}{2x} \int_{-\infty}^{\infty} |\tau_1 - \tau'_1| (B^2(x, \tau'_1, h) + I^2(x, \tau'_1, h)) d\tau'_1 + L(x, h) \right) I \\ - h^{1/9} \left(2S' \frac{\partial B}{\partial x} + S'' B \right) = 0, \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (B^2(x, \tau_1, h) + I^2(x, \tau_1, h)) d\tau_1 = k/S'(x, h). \quad (2.27)$$

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть функция $S(x, h)$ является решением уравнения (2.21), а функции $B(x, \tau_1, h)$, $I(x, \tau_1, h)$, а также $L(x, h)$ являются решением задачи (2.25)–(2.27). Тогда при $x \in (\tilde{x}_- + \varepsilon, \tilde{x}_+ - \varepsilon)$ ВКБ-приближение (2.24) удовлетворяет уравнению (1.11) с точностью r^* , где r^* имеет вид (2.17).

Так как g должно удовлетворять также условиям (1.12), (1.13), то в силу (2.1), (2.2), (2.19), (2.22), (2.23) имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{\tilde{x}_- + \varepsilon} \chi_-(x, \varepsilon) \int_{-\infty}^{\infty} g^2(x, y) dy dx + \int_{\tilde{x}_- + \varepsilon/2}^{\tilde{x}_+ - \varepsilon/2} (1 - \chi_-(x, \varepsilon) - \chi_+(x, \varepsilon)) \frac{k dx}{2S'(x, h)} \\ + \int_{\tilde{x}_+ - \varepsilon}^{\infty} \chi_+(x, \varepsilon) \int_{-\infty}^{\infty} g^2(x, y) dy dx = \end{aligned}$$

$$= 1 + O\left(\int_{\tilde{x}_- + \varepsilon/2}^{\tilde{x}_+ - \varepsilon/2} (1 - \chi_-(x, \varepsilon) - \chi_+(x, \varepsilon)) \times \int_{-\infty}^{\infty} T^2(x, \tau_1, h) \cos 2\Phi(x, \tau_1, h) d\tau_1 dx\right), \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{\tilde{x}_- + \varepsilon} \chi_-(x, \varepsilon) \int_{-\infty}^{\infty} yg^2(x, y) dy dx + \frac{h^{5/9}}{2} \int_{\tilde{x}_- + \varepsilon/2}^{\tilde{x}_+ - \varepsilon/2} (1 - \chi_-(x, \varepsilon) - \chi_+(x, \varepsilon)) \\ & \quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \tau_1 (B^2(x, \tau_1, h) + I^2(x, \tau_1, h)) d\tau_1 dx \\ & + \int_{\tilde{x}_+ - \varepsilon}^{\infty} \chi_+(x, \varepsilon) \int_{-\infty}^{\infty} yg^2(x, y) dy dx \\ & = O\left(h^{5/9} \int_{\tilde{x}_- + \varepsilon/2}^{\tilde{x}_+ - \varepsilon/2} (1 - \chi_-(x, \varepsilon) - \chi_+(x, \varepsilon)) \right. \\ & \quad \left. \times \int_{-\infty}^{\infty} \tau_1 T^2(x, \tau_1, h) \cos 2\Phi(x, \tau_1, h) d\tau_1 dx\right). \end{aligned} \quad (2.29)$$

§ 3. Асимптотическое решение задачи для cos- и sin-амплитуд

В этом параграфе мы построим асимптотическое решение задачи (2.25)–(2.27) в виде

$$B(x, \tau_1, h) = B_0(x, \tau_1) + h^{2/9} B_1(x, \tau_1) + h^{4/9} B_2(x, \tau_1) + O(h^{5/9} B_3(x, \tau_1)), \quad (3.1)$$

$$I(x, \tau_1, h) = h^{1/9} I_0(x, \tau_1) + h^{1/3} I_1(x, \tau_1) + O(h^{5/9} I_2(x, \tau_1)), \quad (3.2)$$

$$L(x, h) = \ell_0(x) + h^{2/9} \ell_1(x) + h^{4/9} \ell_2(x) + O(h^{5/9} \ell_3(x)). \quad (3.3)$$

Здесь $x \in (\tilde{x}_- + \varepsilon, \tilde{x}_+ - \varepsilon)$, $\tau_1^2 \ll h^{-1/9} |S'(x, h)|$, $h \rightarrow 0$. Функции B_j , $j = 0, 1, 2, 3$, I_j , $j = 0, 1, 2$, ℓ_j , $j = 0, 1, 2, 3$, в (3.1)–(3.3) вещественные, гладкие, причем $B_j(x, \tau_1)$ и $I_j(x, \tau_1)$ экспоненциально убывают при $|\tau_1| \rightarrow \infty$, а

$$\ell_3(x) = O((x - \tilde{x}_-)^{-7/6}) + O((\tilde{x}_+ - x)^{-7/6}).$$

При этом мы ограничимся лишь формулировкой результатов (более подробно см. [1]).

3.1. Формулы для главного приближения B_0 , I_0 , ℓ_0 . Подставим разложения для B , I , L в (2.25), (2.27). Тогда для главного члена асимптотики cos-амплитуды имеем

$$\frac{\partial^2 B_0(x, \tau_1)}{\partial \tau_1^2} - \left(\frac{1}{2x} \int_{-\infty}^{\infty} |\tau_1 - \tau'_1| B_0^2(x, \tau'_1) d\tau'_1 + \ell_0 \right) B_0(x, \tau_1) = 0, \quad (3.4)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} B_0^2(x, \tau_1) d\tau_1 = \frac{k}{S'}. \quad (3.5)$$

Наряду с (3.4), (3.5) рассмотрим задачу

$$\frac{d^2 t(\tau)}{d\tau^2} - \left(\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\tau - \tau'| t^2(\tau') d\tau' + \rho \right) t(\tau) = 0, \quad (3.6)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2(\tau) d\tau = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \tau t^2(\tau) d\tau = 0 \quad (3.7)$$

(одномерная модель полярона), которая не зависит от дополнительных параметров. Решение именно этой задачи определяет поведение амплитуды ВКБ-разложения.

Пусть $t = t_i(\tau)$, $\rho = \rho_i < 0$, $i = 1, 2, \dots$, – собственные функции и собственные значения (3.6), (3.7). (Индекс i для краткости формул мы будем ниже опускать.) Решение (3.4), (3.5) ищем в виде

$$B_0(x, \tau_1) = y(x)t(\tau), \quad \text{где } \tau = \beta(x)\tau_1 + \varkappa(x). \quad (3.8)$$

ЛЕММА 3.1. Если

$$y = \frac{1}{(2\pi x)^{1/6}} \left(\frac{k}{S'} \right)^{2/3}, \quad \beta = \left(\frac{k}{2\pi x S'} \right)^{1/3}, \quad (3.9)$$

то заданная формулой (3.8) функция B_0 , а также

$$\ell_0 = \rho \left(\frac{k}{2\pi x S'} \right)^{2/3} \quad (3.10)$$

являются решением задачи (3.4), (3.5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сравнивая (3.4), (3.5) и (3.6), (3.7), имеем

$$\frac{y^2}{2x\beta^4} = \pi, \quad \frac{\ell_0}{\beta^2} = \rho, \quad \frac{y^2}{\beta} = \frac{k}{S'}, \quad (3.11)$$

откуда следуют формулы (3.9), (3.10). Для определенности мы считали, что $k > 0$, $S' > 0$, $y > 0$. Лемма доказана.

Положим $\varkappa(x) \equiv 0$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tau_1 B_0^2(x, \tau_1) d\tau_1 = 0, \quad (3.12)$$

что позволяет обратить в нуль слагаемое порядка $h^{5/9}$ в (2.29). Кроме того, такой выбор $\varkappa(x)$ обеспечивает разрешимость задачи для следующего приближения. Таким образом, функция $B_0(x, \tau_1)$ полностью определена.

Подставим теперь разложения для B , I , L в (2.26). Тогда для главного члена асимптотики $\sin$ -амплитуды получаем уравнение

$$\hat{R}I_0 = 2S' \frac{\partial B_0}{\partial x} + S'' B_0, \quad (3.13)$$

где линейный оператор $\hat{R}$ имеет вид

$$\hat{R}I_0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 I_0}{\partial \tau_1^2} - \left(\frac{1}{2x} \int_{-\infty}^{\infty} |\tau_1 - \tau'_1| B_0^2 d\tau'_1 + \ell_0 \right) I_0. \quad (3.14)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Для упрощения обозначений в (3.14), а также в последующих формулах этого параграфа, мы не будем выписывать аргументы у функций B_j , $j = 0, 1, 2$, φ_0 , I_0 , I_1 , T_1 , $T_{1,0}$ и их производных. В указанных формулах первый аргумент данных функций равен x , а второй либо равен τ_1 , если функция не стоит под знаком интеграла, либо, в противном случае, совпадает с переменной, по которой производится интегрирование.

Определим

$$\varphi_0(x, \tau_1) = \left(S'' + \frac{S'}{x} \right) \frac{\tau_1^2}{6}. \quad (3.15)$$

Аналогично [1] доказывается

ЛЕММА 3.2. *Функция $I_0 = -B_0\varphi_0$ удовлетворяет уравнению (3.13).*

3.2. Формулы для первых поправок B_1 , ℓ_1 . Приравнявая нулю в (2.25), (2.27) слагаемые порядка $h^{2/9}$, для нахождения B_1 , ℓ_1 получаем задачу

$$\hat{N}B_1 = \frac{1}{2x} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\tau_1 - \tau'_1| I_0^2 d\tau'_1 \right) B_0 + \ell_1 B_0 - 2S' \frac{\partial I_0}{\partial x} - S'' I_0, \quad (3.16)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (I_0^2 + 2B_0 B_1) d\tau_1 = 0. \quad (3.17)$$

Здесь оператор $\hat{N}$ задан формулой

$$\begin{aligned} \hat{N}B_1 \stackrel{\text{def}}{=} & \frac{\partial^2 B_1}{\partial \tau_1^2} - \frac{1}{2x} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\tau_1 - \tau'_1| B_0^2 d\tau'_1 \right) B_1 \\ & - \frac{1}{x} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\tau_1 - \tau'_1| B_0 B_1 d\tau'_1 \right) B_0 - \ell_0 B_1. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Вместо B_1 мы будем искать функцию $T_1 = B_1 + I_0^2/(2B_0) = B_1 + \varphi_0^2 B_0/2$. Из (3.16), (3.17) вытекает [1]

ЛЕММА 3.3. *Функции $T_1(x, \tau_1)$, $\ell_1(x)$ удовлетворяют задаче*

$$\hat{N}T_1 = \left[\ell_1 + \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau_1} \right)^2 + 2S' \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right] B_0, \quad (3.19)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} B_0 T_1 d\tau_1 = 0. \quad (3.20)$$

Перейдем к изучению задачи (3.19), (3.20). Дифференцируя по τ_1 уравнение (3.4), находим, что ядро оператора $\hat{N}$ содержит гладкую, экспоненциально убывающую при $|\tau_1| \rightarrow \infty$ функцию $\partial B_0/\partial \tau_1$. Предположим, что выбрано такое решение задачи (3.6), (3.7), при котором ядро оператора $\hat{N}$ одномерно. Тогда условием разрешимости уравнения (3.19) будет условие ортогональности в пространстве $L^2(\mathbb{R}^1)$ функции $\partial B_0/\partial \tau_1$ правой части (3.19):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\ell_1 + \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau_1} \right)^2 + 2S' \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right] B_0 \frac{\partial B_0}{\partial \tau_1} d\tau_1 = 0. \quad (3.21)$$

В силу (3.12), (3.15) равенство (3.21) выполнено. Поэтому уравнение (3.19) решимо.

Для определения $\ell_1(x)$ воспользуемся условием (3.20). Пусть

$$\Psi(x, \tau_1) = B_0 + \frac{\tau_1}{2} \frac{\partial B_0}{\partial \tau_1}.$$

Тогда, используя равенство [1]

$$\hat{N}(\Psi/\ell_0) = B_0, \quad (3.22)$$

находим

$$\ell_1(x) = -\frac{\sigma}{27} \left(\frac{2\pi x S'}{k} \right)^{2/3} \left\{ \left(S'' + \frac{S'}{x} \right)^2 + 3S' \left(S'' + \frac{S'}{x} \right)' \right\}, \quad (3.23)$$

где константы

$$\sigma = \sigma_i \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \tau^2 t_i^2(\tau) d\tau > 0, \quad i = 1, 2, \dots \quad (3.24)$$

Дополним (3.19), (3.20) условием

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tau_1 B_0 T_1 d\tau_1 = 0, \quad (3.25)$$

что позволяет обратить в нуль слагаемое порядка $h^{7/9}$ в (2.29). Кроме того, условие (3.25) обеспечивает разрешимость задачи для следующего приближения (см. [1]).

Задача (3.19), (3.20), (3.25) однозначно определяет T_1 и ℓ_1 . Действительно, если $T_{1,0}(x, \tau_1)$ – некоторое частное решение (3.19), то в силу одномерности ядра $\hat{N}$ общее решение (3.19) имеет вид

$$T_1 = T_{1,0} + \varkappa_1(x) \frac{\partial B_0}{\partial \tau_1},$$

где

$$\varkappa_1(x) = \frac{2S'}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \tau_1 B_0 T_{1,0} d\tau_1$$

находится из условия (3.25).

ЛЕММА 3.4. *Справедливо равенство $T_1(x, \tau_1) = y_1(x)p(\tau)$, где*

$$y_1(x) = \frac{(2\pi x)^{7/6}}{9} \left(\frac{S'}{k} \right)^{2/3} \left[\left(S'' + \frac{S'}{x} \right)^2 + 3S' \left(S'' + \frac{S'}{x} \right)' \right], \quad \tau = \beta(x)\tau_1,$$

а $p = p(\tau)$ является решением задачи

$$\hat{n}p = \left(\tau^2 - \frac{\sigma}{3} \right) t(\tau), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \tau t(\tau) p(\tau) d\tau = 0.$$

Здесь

$$\begin{aligned} \hat{n}p &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{d^2 p}{d\tau^2}(\tau) - \pi \int_{-\infty}^{\infty} |\tau - \tau'| t^2(\tau') d\tau' p(\tau) \\ &\quad - 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\tau - \tau'| t(\tau') p(\tau') d\tau' t(\tau) - \rho p(\tau). \end{aligned} \quad (3.26)$$

3.3. Формулы для поправок B_2 , I_1 , ℓ_2 . Для нахождения функций B_2 , I_1 и ℓ_2 из (2.25)–(2.27) получаем задачу

$$\hat{R}I_1 = \left(\frac{1}{2x} \int_{-\infty}^{\infty} |\tau_1 - \tau'_1| (I_0^2 + 2B_0B_1) d\tau'_1 + \ell_1 \right) I_0 + 2S' \frac{\partial B_1}{\partial x} + S'' B_1, \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} \hat{N}B_2 = & \left(\frac{1}{2x} \int_{-\infty}^{\infty} |\tau_1 - \tau'_1| (I_0^2 + 2B_0B_1) d\tau'_1 + \ell_1 \right) B_1 \\ & + \left(\frac{1}{2x} \int_{-\infty}^{\infty} |\tau_1 - \tau'_1| (B_1^2 + 2I_0I_1) d\tau'_1 + \ell_2 \right) B_0 - 2S' \frac{\partial I_1}{\partial x} - S'' I_1, \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (B_1^2 + 2B_0B_2 + 2I_0I_1) d\tau_1 = 0. \quad (3.29)$$

Здесь операторы $\hat{R}$ и $\hat{N}$ заданы формулами (3.14), (3.18), а аргументы у функций опущены в соответствии с замечанием 3.1.

Потребуем также, чтобы

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tau_1 (B_1^2 + 2B_0B_2 + 2I_0I_1) d\tau_1 = 0. \quad (3.30)$$

Тогда уравнения (3.27)–(3.30) однозначно определяют как I_1 , так и B_2 . Справедлива

ЛЕММА 3.5. *Функция I_1 имеет вид*

$$I_1 = y(x)\psi(x)z(\tau) - \varphi_0 T_1 + \varphi_0^3 B_0/6,$$

где

$$\begin{aligned} \psi(x) = & \frac{2}{9} \left(\frac{2\pi x S'}{k} \right)^2 \left\{ \frac{1}{3} \left[\left(S'' + \frac{S'}{x} \right)^3 + 3S' \left(S'' + \frac{S'}{x} \right) \left(S'' + \frac{S'}{x} \right)' \right] \right. \\ & \left. + \frac{1}{x} \left[x \left(S' \left(S'' + \frac{S'}{x} \right)^2 + 3(S')^2 \left(S'' + \frac{S'}{x} \right)' \right) \right]' \right\}, \end{aligned}$$

а $z = z(\tau)$ является решением задачи

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z(\tau)}{d\tau^2} - \left(\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\tau - \tau'| t^2(\tau') d\tau' + \rho \right) z(\tau) &= p(\tau), \\ \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\tau}{2} \frac{dt}{d\tau}(\tau) + t(\tau) \right) z(\tau) d\tau &= 0. \end{aligned}$$

Для нахождения ℓ_2 воспользуемся условием (3.29). В силу (3.22) получаем

$$\ell_2(x) = -\frac{4}{3} \left(\frac{S'}{k} \right)^{2/3} \frac{y_1^2 u}{(2\pi x)^{1/3}}. \quad (3.31)$$

Здесь константы имеют вид

$$\begin{aligned} u = u_i \stackrel{\text{def}}{=} & \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\tau}{2} \frac{dt_i(\tau)}{d\tau} + t_i(\tau) \right) \left\{ -\frac{\sigma_i}{3} p(\tau) + 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\tau - \tau'| t_i(\tau') p(\tau') d\tau' p(\tau) \right. \\ & \left. + \pi \int_{-\infty}^{\infty} |\tau - \tau'| p^2(\tau') d\tau' t_i(\tau) + \tau^2 p(\tau) \right\} d\tau + \frac{\rho_i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} p^2(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (3.32)$$

при $i = 1, 2, \dots$

Наконец, справедлива

ЛЕММА 3.6. *Функция B_2 представима в виде $B_2 = T_2 - \varphi_0^2 T_1/2 + \varphi_0 y \psi z(\tau) + \varphi_0^4 B_0/4!$, где $T_2(x, \tau_1) = y_1^2 t_{2,1}(\tau)/y + 2S'\psi'\sqrt{2\pi x} t_{2,2}(\tau)$. Здесь $\tau = \beta(x)\tau_1$, а $t_{2,1}(\tau)$, $t_{2,2}(\tau)$ – решения следующих задач:*

$$\begin{aligned} \hat{n}t_{2,1} &= -\frac{\sigma}{3}p(\tau) - \frac{4}{3}ut(\tau) + 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\tau - \tau'|t(\tau')p(\tau') d\tau' p(\tau) \\ &\quad + \pi \int_{-\infty}^{\infty} |\tau - \tau'|p^2(\tau') d\tau' t(\tau) + \tau^2 p(\tau), \\ &\quad \int_{-\infty}^{\infty} \tau(2t_{2,1}(\tau)t(\tau) + p^2(\tau)) d\tau = 0; \\ \hat{n}t_{2,2} &= -z(\tau), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \tau t_{2,2}(\tau)t(\tau) d\tau = 0. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Оператор $\hat{n}$ в (3.33) задан формулой (3.26).

§ 4. Асимптотика в окрестности точек поворота. Модельное уравнение

Построим асимптотическое решение уравнения (1.11) в окрестности левой точки поворота $\tilde{x}_-$, а точнее, на интервале $|x - \tilde{x}_-| < 2\varepsilon$. Здесь $\varepsilon = ch^{26/57}$, где $c > 0$ – произвольная константа, а точка $\tilde{x}_-$ удовлетворяет уравнению (2.4). Решение будем искать в виде

$$\begin{aligned} g &= g_-(x, y) + O\left(h^{1/6}\xi^2 \frac{\partial G_-}{\partial \xi}\right) + O\left(h^{-\frac{1}{6} + \frac{1}{57}} \ln \frac{1}{h} \frac{G_-}{(1 + |\xi|)}\right) \\ &\quad + O\left(h^{-\frac{1}{6} + \frac{1}{57}} \ln \frac{1}{h} \frac{\partial G_-}{\partial \xi}\right) + O\left(h^{-\frac{1}{18} + \frac{20}{171}} \ln \frac{1}{h} \xi \frac{\partial G_-}{\partial \xi}\right), \end{aligned}$$

где

$$g_-(x, y) = \Omega_-^{2/3} \sqrt{2\pi \tilde{x}_-} G_-(\xi, \eta) / \sqrt{h}, \quad (4.1)$$

$$\xi = (x - \tilde{x}_-) \sqrt[3]{\Omega_-} / h^{2/3}, \quad \eta = y \sqrt[3]{\Omega_-} / h^{2/3}. \quad (4.2)$$

Функция $G_-(\xi, \eta)$, а также константа Ω_- определяются в процессе построения асимптотики. Для упрощения обозначений мы не будем явно указывать зависимость g_- от параметра h .

Отметим, что основная сложность при выводе модельного уравнения для G_- связана с нелокальностью задачи, которая приводит к тому, что на асимптотику решения g вблизи точки $\tilde{x}_-$ влияет поведение решения вдали от точки $\tilde{x}_-$.

Разложим ядро интегрального оператора в (2.10) при $x \rightarrow \tilde{x}_-$. Для этого нам необходима более точная, чем (2.6), асимптотика $K(\mathbb{k})$ при $\mathbb{k} \rightarrow 1$.

ЛЕММА 4.1. *Пусть $b = \mathbb{k}^2$. Тогда справедливо равенство*

$$\frac{dK(\mathbb{k})}{db} = \frac{1}{2(1-b)} + \frac{1}{8} \ln(1-b) - \frac{\ln 2}{2} + \frac{3}{8} + O((1-b) \ln(1-b)), \quad b \rightarrow 1. \quad (4.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (2.6), разложений [10]

$$K(\mathbb{k}) = (\pi/2)(1 + b/4 + O(b^2)), \quad E(\mathbb{k}) = (\pi/2)(1 - b/4 + O(b^2)), \quad b \rightarrow 0,$$

а также соотношения Лежандра [7]

$$K(\mathbb{k})E(\mathbb{k}') + K(\mathbb{k}')E(\mathbb{k}) - K(\mathbb{k})K(\mathbb{k}') = \pi/2,$$

где $\mathbb{k}' = \sqrt{1 - \mathbb{k}^2}$, получаем

$$\begin{aligned} E(\mathbb{k}) &= 1 - \frac{1}{4}(1 - b) \ln(1 - b) + \left(\ln 2 - \frac{1}{4} \right) (1 - b) \\ &\quad + O((1 - b)^2 \ln(1 - b)), \quad b \rightarrow 1. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Далее, подставляя (4.4), (2.6) в (2.8), находим

$$\frac{dK(\mathbb{k})}{db} = \frac{1}{2(1 - b)} + \frac{1}{8} \ln(1 - b) - \frac{\ln 2}{2} + \frac{3}{8} + O((1 - b) \ln(1 - b)), \quad b \rightarrow 1.$$

Лемма доказана.

Введем функцию

$$\begin{aligned} F_-(x', \tilde{x}_-) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{(x' - \tilde{x}_-)} \left(\frac{1}{2\tilde{x}_-} E\left(\frac{2\sqrt{\tilde{x}_- x'}}{\tilde{x}_- + x'} \right) - \frac{1}{\tilde{x}_- + x'} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2\tilde{x}_-(\tilde{x}_- + x')} K\left(\frac{2\sqrt{\tilde{x}_- x'}}{\tilde{x}_- + x'} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Она имеет логарифмическую особенность при $x' \rightarrow \tilde{x}_-$:

$$F_-(x', \tilde{x}_-) = O(|\ln |x' - \tilde{x}_-|| + 1). \quad (4.6)$$

ЛЕММА 4.2. *Имеет место равенство*

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi(x + x')} K\left(\frac{2\sqrt{xx'}}{x + x'} \right) &= \frac{2}{\pi(\tilde{x}_- + x')} K\left(\frac{2\sqrt{\tilde{x}_- x'}}{\tilde{x}_- + x'} \right) - \frac{2}{\pi(\tilde{x}_- + x')} \ln \left| \frac{x - x'}{\tilde{x}_- - x'} \right| \\ &\quad + (x - \tilde{x}_-) F_-(x', \tilde{x}_-) + \frac{2}{\pi} \frac{(x - \tilde{x}_-)}{(\tilde{x}_- + x')^2} \ln \left| \frac{x - x'}{\tilde{x}_- - x'} \right| \\ &\quad + O\left(\frac{(x - \tilde{x}_-)^2}{(\tilde{x}_- + x')^3} (1 + |\ln |x - x'|| + |\ln |\tilde{x}_- - x'|||) \right), \quad x \rightarrow \tilde{x}_-. \end{aligned} \quad (4.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя (4.3), (2.8), получаем

$$K\left(\frac{2\sqrt{xx'}}{x+x'}\right) - K\left(\frac{2\sqrt{\tilde{x}_-x'}}{\tilde{x}_-+x'}\right) = \int_{4\tilde{x}_-x'/(x+x')^2}^{4xx'/(x+x')^2} \frac{dK}{db}(\sqrt{b}) db = \delta K_1 + \delta K_2.$$

Здесь

$$\begin{aligned} \delta K_1 &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{4\tilde{x}_-x'/(x+x')^2}^{4xx'/(x+x')^2} \left\{ \frac{1}{2(1-b)} + \frac{1}{8} \ln(1-b) \right\} db, \\ \delta K_2 &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{4\tilde{x}_-x'/(x+x')^2}^{4xx'/(x+x')^2} \left\{ \frac{1}{2(1-b)} \left[\frac{E(\sqrt{b})}{b} - 1 \right] - \frac{1}{2b} K(\sqrt{b}) - \frac{1}{8} \ln(1-b) \right\} db, \end{aligned}$$

причем δK_1 содержит члены разложения (4.3), имеющие особенность при $b \rightarrow 1$.

Вычислим входящий в δK_1 интеграл:

$$\begin{aligned} \delta K_1 &= \left\{ -\frac{1}{2} \ln(1-b) - \frac{1}{8} (1-b) [\ln(1-b) - 1] \right\} \Big|_{4\tilde{x}_-x'/(x+x')^2}^{4xx'/(x+x')^2} \\ &= -\ln \left| \frac{x-x'}{\tilde{x}_- - x'} \right| + (x - \tilde{x}_-) \left[\frac{1}{\tilde{x}_- + x'} - \frac{x'(\tilde{x}_- - x')}{(\tilde{x}_- + x')^3} \ln \left| \frac{\tilde{x}_- - x'}{\tilde{x}_- + x'} \right| \right] \\ &\quad + O\left(\frac{(x - \tilde{x}_-)^2}{(\tilde{x}_- + x')^2} (1 + |\ln |\tilde{x}_- - x'|||) \right), \quad x \rightarrow \tilde{x}_-. \end{aligned}$$

Далее, разлагая δK_2 по формуле Тейлора, находим

$$\begin{aligned} \delta K_2 &= \frac{(x - \tilde{x}_-)4x'(x' - \tilde{x}_-)}{(\tilde{x}_- + x')^3} \left\{ \frac{1}{2} \frac{(\tilde{x}_- + x')^2}{(\tilde{x}_- - x')^2} \left[E\left(\frac{2\sqrt{\tilde{x}_-x'}}{\tilde{x}_- + x'}\right) \frac{(\tilde{x}_- + x')^2}{4\tilde{x}_-x'} - 1 \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{(\tilde{x}_- + x')^2}{8\tilde{x}_-x'} K\left(\frac{2\sqrt{\tilde{x}_-x'}}{\tilde{x}_- + x'}\right) - \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\tilde{x}_- - x'}{\tilde{x}_- + x'} \right| \right\} \\ &\quad + O\left(\frac{(x - \tilde{x}_-)^2}{(\tilde{x}_- + x')^2} (1 + |\ln |\tilde{x}_- - x'|||) \right), \quad x \rightarrow \tilde{x}_-. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi(x+x')} K\left(\frac{2\sqrt{xx'}}{x+x'}\right) &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{\tilde{x}_- + x'} - \frac{x - \tilde{x}_-}{(\tilde{x}_- + x')^2} + O\left(\frac{(x - \tilde{x}_-)^2}{(\tilde{x}_- + x')^3} \right) \right) \\ &\quad \times \left\{ K\left(\frac{2\sqrt{\tilde{x}_-x'}}{\tilde{x}_- + x'}\right) - \ln \left| \frac{x-x'}{\tilde{x}_- - x'} \right| + (x - \tilde{x}_-) \left[\frac{1}{\tilde{x}_- - x'} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{(\tilde{x}_- + x')}{2\tilde{x}_-(x' - \tilde{x}_-)} E\left(\frac{2\sqrt{\tilde{x}_-x'}}{\tilde{x}_- + x'}\right) + \frac{(\tilde{x}_- - x')}{2\tilde{x}_-(\tilde{x}_- + x')} K\left(\frac{2\sqrt{\tilde{x}_-x'}}{\tilde{x}_- + x'}\right) \right] \right. \\ &\quad \left. + O\left(\frac{(x - \tilde{x}_-)^2}{(\tilde{x}_- + x')^2} (1 + |\ln |\tilde{x}_- - x'|||) \right) \right\}, \quad x \rightarrow \tilde{x}_-, \end{aligned}$$

а значит, справедливо разложение (4.7), где F_- задается соотношением (4.5). Лемма доказана.

Равенства (4.7), (2.4) позволяют записать уравнение (2.10) вблизи точки $\tilde{x}_-$ в виде

$$\begin{aligned}
& h^2 \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right) \\
& + \left\{ U'(\tilde{x}_-)(x - \tilde{x}_-) + h^{1/3}(x - \tilde{x}_-) \int_0^\infty F_-(x', \tilde{x}_-) \int_{-\infty}^\infty g^2(x', y') dy' dx' \right. \\
& - h^{1/3} \int_0^\infty \frac{1}{\pi(\tilde{x}_- + x')} \int_{-\infty}^\infty \ln \left[\frac{(x - x')^2 + (y - y')^2}{(\tilde{x}_- - x')^2} \right] g^2(x', y') dy' dx' \\
& + O \left(h^{1/3}(x - \tilde{x}_-) \int_0^\infty \frac{1}{(\tilde{x}_- + x')^2} \right. \\
& \times \left. \int_{-\infty}^\infty \ln \left[\frac{(x - x')^2 + (y - y')^2}{(\tilde{x}_- - x')^2} \right] g^2(x', y') dy' dx' \right) \\
& + O \left(h^{1/3} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{(y - y')^2}{(\tilde{x}_- + x')^3} (1 + |\ln |x - x'|||) g^2(x', y') dy' dx' \right) \\
& \left. + O((x - \tilde{x}_-)^2) + O \left(h^{1+\frac{1}{57}} \ln \frac{1}{h} \right) + O(y^2) \right\} g = 0. \tag{4.8}
\end{aligned}$$

Разлагая затем по формуле Тейлора входящий в (4.8) интеграл, имеем

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty \frac{1}{\pi(\tilde{x}_- + x')} \int_{-\infty}^\infty \ln \left[\frac{(x - x')^2 + (y - y')^2}{(\tilde{x}_- - x')^2} \right] g^2(x', y') dy' dx' g(x, y) \\
& = \left\{ \frac{1}{2\pi\tilde{x}_-} \iint_{-\infty}^\infty \ln \left[\frac{(x - x')^2 + (y - y')^2}{(\tilde{x}_- - x')^2} \right] g_-^2(x', y') dy' dx' \right. \\
& + \frac{1}{\pi} \iint_{-\infty}^\infty \ln \left[\frac{(x - x')^2 + (y - y')^2}{(\tilde{x}_- - x')^2} \right] \\
& \times \left(\frac{\theta(x')}{\tilde{x}_- + x'} g^2(x', y') - \frac{g_-^2(x', y')}{2\tilde{x}_-} \right) dy' dx' \left. \right\} g(x, y) \\
& = \left\{ \frac{1}{2\pi\tilde{x}_-} \iint_{-\infty}^\infty \ln \left[\frac{(x - x')^2 + (y - y')^2}{(\tilde{x}_- - x')^2} \right] g_-^2(x', y') dy' dx' \right. \\
& - \frac{2(x - \tilde{x}_-)}{\pi} \int_{\tilde{x}_- + \varepsilon}^\infty \frac{(1 - \chi_-^*(x', \varepsilon))}{(x' - \tilde{x}_-)} \int_{-\infty}^\infty \left[\frac{g^2(x', y')}{\tilde{x}_- + x'} - \frac{g_-^2(x', y')}{2\tilde{x}_-} \right] dy' dx' \\
& + O \left((x - \tilde{x}_-)^2 \int_{\tilde{x}_- + \varepsilon}^\infty \frac{(1 - \chi_-^*(x', \varepsilon))}{(x' - \tilde{x}_-)^2} \int_{-\infty}^\infty \left[\frac{g^2(x', y')}{\tilde{x}_- + x'} - \frac{g_-^2(x', y')}{2\tilde{x}_-} \right] dy' dx' \right) \\
& + O \left(\int_{\tilde{x}_- + \varepsilon}^\infty (1 - \chi_-^*(x', \varepsilon)) \right. \\
& \times \left. \int_{-\infty}^\infty \ln \left[1 + \frac{(y - y')^2}{(x - x')^2} \right] \left[\frac{g^2(x', y')}{\tilde{x}_- + x'} - \frac{g_-^2(x', y')}{2\tilde{x}_-} \right] dy' dx' \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + O\left(\int_{-\infty}^{\tilde{x}_-+2\varepsilon} \chi_-^*(x', \varepsilon) \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left[\frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{(\tilde{x}_- - x')^2} \right] \right. \\
& \quad \left. \times \left(\frac{\theta(x')}{\tilde{x}_- + x'} g^2(x', y') - \frac{g_-^2(x', y')}{2\tilde{x}_-} \right) dy' dx' \right) \Big\} g(x, y). \tag{4.9}
\end{aligned}$$

Здесь $\chi_-^*(x, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \chi((x - \tilde{x}_-)/(2\varepsilon))$,

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x \leq 0. \end{cases} \tag{4.10}$$

Будем считать решение g при $x > \tilde{x}_- + \varepsilon$ известным. Далее подставим в (4.8), (4.9) при $|x - \tilde{x}_-| < 2\varepsilon$ вместо g функцию g_- . Тогда для нахождения g_- получаем уравнение

$$\begin{aligned}
& h^2 \left(\frac{\partial^2 g_-}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g_-}{\partial y^2} \right) + \left\{ \Omega_-(x - \tilde{x}_-) \right. \\
& \quad \left. - \frac{h^{1/3}}{2\pi\tilde{x}_-} \iint_{-\infty}^{\infty} \ln \left[\frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{(x' - \tilde{x}_-)^2} \right] g_-^2(x', y') dy' dx' \right\} g_- = 0, \tag{4.11}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\Omega_- &= U'(\tilde{x}_-) + \frac{2h^{1/3}}{\pi} \int_{\tilde{x}_-+\varepsilon}^{\infty} \frac{(1 - \chi_-^*(x', \varepsilon))}{(x' - \tilde{x}_-)} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{g^2(x', y')}{\tilde{x}_- + x'} - \frac{g_-^2(x', y')}{2\tilde{x}_-} \right) dy' dx' \\
&+ h^{1/3} \int_0^{\infty} F_-(x', \tilde{x}_-) \times \\
&\times \int_{-\infty}^{\infty} (\chi_-^*(x', \varepsilon) g_-^2(x', y') + (1 - \chi_-^*(x', \varepsilon)) g^2(x', y')) dy' dx' = \\
&= U'(\tilde{x}_-) + \frac{h^{1/3}}{\pi\tilde{x}_-} \int_{\tilde{x}_-+\varepsilon}^{\infty} (1 - \chi_-^*(x', \varepsilon)) \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left[\frac{1}{(x' - \tilde{x}_-)} E \left(\frac{2\sqrt{\tilde{x}_- x'}}{\tilde{x}_- + x'} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{(\tilde{x}_- + x')} K \left(\frac{2\sqrt{\tilde{x}_- x'}}{\tilde{x}_- + x'} \right) \right] g^2(x', y') - \frac{g_-^2(x', y')}{x' - \tilde{x}_-} \right\} dy' dx' \\
&+ O\left(h^{\frac{4}{9} + \frac{20}{171}} \ln \frac{1}{h}\right). \tag{4.12}
\end{aligned}$$

При этом в уравнении (4.8) возникает невязка

$$\begin{aligned}
r_- &= \left\{ O((x - \tilde{x}_-)^2) + O\left(h^{1+\frac{1}{57}} \ln \frac{1}{h}\right) + O(y^2) + O\left(h^{\frac{4}{9} + \frac{20}{171}} \ln \frac{1}{h} (x - \tilde{x}_-)\right) \right. \\
&\quad + O\left(h^{1/3} (x - \tilde{x}_-)^2 \int_{\tilde{x}_-+\varepsilon}^{\infty} \frac{(1 - \chi_-^*(x', \varepsilon))}{(x' - \tilde{x}_-)^2} \right. \\
&\quad \left. \times \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{g^2(x', y')}{\tilde{x}_- + x'} - \frac{g_-^2(x', y')}{2\tilde{x}_-} \right) dy' dx' \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + O\left(h^{1/3} \int_{\tilde{x}_- + \varepsilon}^{\infty} (1 - \chi_-^*(x', \varepsilon)) \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left[1 + \frac{(y - y')^2}{(x - x')^2} \right] \right. \\
& \times \left(\frac{g^2(x', y')}{\tilde{x}_- + x'} - \frac{g_-^2(x', y')}{2\tilde{x}_-} \right) dy' dx' \Bigg) \\
& + O\left(h^{1/3} \int_{-\infty}^{\tilde{x}_- + 2\varepsilon} \chi_-^*(x', \varepsilon) \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left(\frac{(x - x')^2 + (y - y')^2}{(\tilde{x}_- - x')^2} \right) \right. \\
& \times \left(\frac{\theta(x')}{\tilde{x}_- + x'} - \frac{1}{2\tilde{x}_-} \right) g_-^2(x', y') dy' dx' \Bigg) \\
& + O\left(h^{1/3} (x - \tilde{x}_-) \int_0^{\infty} \frac{1}{(\tilde{x}_- + x')^2} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left(\frac{(x - x')^2 + (y - y')^2}{(\tilde{x}_- - x')^2} \right) \right. \\
& \times [\chi_-^*(x', \varepsilon) g_-^2(x', y') + (1 - \chi_-^*(x', \varepsilon)) g^2(x', y')] dy' dx' \Bigg) \\
& + O\left(h^{1/3} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(y - y')^2}{(\tilde{x}_- + x')^3} (1 + |\ln |x - x'|||) \right. \\
& \times [\chi_-^*(x', \varepsilon) g_-^2(x', y') + (1 - \chi_-^*(x', \varepsilon)) g^2(x', y')] dy' dx' \Bigg) \Bigg\} g_-(x, y). \tag{4.13}
\end{aligned}$$

Наконец, сделав в (4.11) замену (4.1), (4.2), получаем следующую лемму.

ЛЕММА 4.3. *Функция $G_-(\xi, \eta)$ удовлетворяет модельному уравнению (1.4).*

Аналогично, при $|x - \tilde{x}_+| < 2\varepsilon$ асимптотику ищем в виде

$$\begin{aligned}
g &= g_+(x, y) + O\left(h^{\frac{1}{6}} \xi^2 \frac{\partial G_+}{\partial \xi}\right) + O\left(h^{-\frac{1}{6} + \frac{1}{57}} \ln \frac{1}{h} \frac{G_+}{(1 + |\xi|)}\right) \\
&+ O\left(h^{-\frac{1}{6} + \frac{1}{57}} \ln \frac{1}{h} \frac{\partial G_+}{\partial \xi}\right) + O\left(h^{-\frac{1}{18} + \frac{20}{171}} \ln \frac{1}{h} \xi \frac{\partial G_+}{\partial \xi}\right),
\end{aligned}$$

где

$$g_+(x, y) = \Omega_+^{2/3} \sqrt{2\pi\tilde{x}_+} \frac{G_+(\xi, \eta)}{\sqrt{h}}, \tag{4.14}$$

$$\xi = (\tilde{x}_+ - x) \frac{\sqrt[3]{\Omega_+}}{h^{2/3}}, \quad \eta = y \frac{\sqrt[3]{\Omega_+}}{h^{2/3}}, \tag{4.15}$$

а

$$\begin{aligned}
\Omega_+ &= -U'(\tilde{x}_+) + \frac{h^{1/3}}{\pi\tilde{x}_+} \int_{-\infty}^{\tilde{x}_+ - \varepsilon} (1 - \chi_+^*(x', \varepsilon)) \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left[\frac{1}{(\tilde{x}_+ - x')} E\left(\frac{2\sqrt{\tilde{x}_+ x'}}{\tilde{x}_+ + x'}\right) \right. \right. \\
&+ \left. \left. \frac{1}{(\tilde{x}_+ + x')} K\left(\frac{2\sqrt{\tilde{x}_+ x'}}{\tilde{x}_+ + x'}\right) \right] \theta(x') g^2(x', y') - \frac{g_+^2(x', y')}{\tilde{x}_+ - x'} \right\} dy' dx' \\
&+ O\left(h^{\frac{4}{9} + \frac{20}{171}} \ln \frac{1}{h}\right). \tag{4.16}
\end{aligned}$$

Здесь $\chi_+^*(x, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \chi((\tilde{x}_+ - x)/2\varepsilon)$, $h \rightarrow 0$. Тогда если $G_+(\xi, \eta)$ является решением (1.4), то после подстановки в (1.11) вместо g функции g_+ при $|x - \tilde{x}_+| < 2\varepsilon$ возникает невязка

$$\begin{aligned}
r_+ = & \left\{ O((\tilde{x}_+ - x)^2) + O\left(h^{1+\frac{1}{57}} \ln \frac{1}{h}\right) + O(y^2) + O\left(h^{\frac{4}{9}+\frac{20}{171}} \ln \frac{1}{h} (\tilde{x}_+ - x)\right) \right. \\
& + O\left(h^{1/3} (\tilde{x}_+ - x)^2 \int_{-\infty}^{\tilde{x}_+ - \varepsilon} \frac{(1 - \chi_+^*(x', \varepsilon))}{(\tilde{x}_+ - x')^2} \right. \\
& \times \left. \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\theta(x') g^2(x', y')}{\tilde{x}_+ + x'} - \frac{g_+^2(x', y')}{2\tilde{x}_+} \right] dy' dx' \right) \\
& + O\left(h^{1/3} \int_{-\infty}^{\tilde{x}_+ - \varepsilon} (1 - \chi_+^*(x', \varepsilon)) \right. \\
& \times \left. \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left[1 + \frac{(y - y')^2}{(x - x')^2} \right] \left[\frac{\theta(x') g^2(x', y')}{\tilde{x}_+ + x'} - \frac{g_+^2(x', y')}{2\tilde{x}_+} \right] dy' dx' \right) \\
& + O\left(h^{1/3} \int_{\tilde{x}_+ - 2\varepsilon}^{\infty} \chi_+^*(x', \varepsilon) \right. \\
& \times \left. \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left(\frac{(x - x')^2 + (y - y')^2}{(\tilde{x}_+ - x')^2} \right) \left(\frac{\tilde{x}_+ - x'}{\tilde{x}_+ + x'} \right) g_+^2(x', y') dy' dx' \right) \\
& + O\left(h^{1/3} (\tilde{x}_+ - x) \int_0^{\infty} \frac{1}{(\tilde{x}_+ + x')^2} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left(\frac{(x - x')^2 + (y - y')^2}{(\tilde{x}_+ - x')^2} \right) \right. \\
& \times \left. [\chi_+^*(x', \varepsilon) g_+^2(x', y') + (1 - \chi_+^*(x', \varepsilon)) g^2(x', y')] dy' dx' \right) \\
& + O\left(h^{1/3} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(y - y')^2}{(\tilde{x}_+ + x')^3} (1 + |\ln |x - x'|||) \right. \\
& \times \left. [\chi_+^*(x', \varepsilon) g_+^2(x', y') + (1 - \chi_+^*(x', \varepsilon)) g^2(x', y')] dy' dx' \right) \Big\} g_+(x, y). \tag{4.17}
\end{aligned}$$

Ниже выпишем формулы для асимптотик функций $G_{\pm}(\xi, \eta)$ при $\xi \rightarrow +\infty$, $\eta = O(\xi^{1/6}(\ln \xi)^{2/3})$ и укажем значения входящих в них констант. Задание этих асимптотик позволяет выбрать экспоненциально убывающие при $|\eta| \rightarrow +\infty$, а также при $\xi \rightarrow -\infty$ решения $G_-(\xi, \eta)$, $G_+(\xi, \eta)$ уравнения (1.4), через которые выражаются g_- , g_+ .

Для решений (1.4) в статье [1] при $\xi \rightarrow +\infty$, $\eta = O(\xi^{1/6}(\ln \xi)^{2/3})$ были построены асимптотические разложения вида

$$G(\xi, \eta) = \tilde{T}(\xi, \eta) \cos(\tilde{S}(\xi) + \tilde{\varphi}(\xi, \eta)). \tag{4.18}$$

ЛЕММА 4.4 [1]. В формуле (4.18)

$$\tilde{S}(\xi) = S_0(\xi) + O(\xi^{-2/3}), \quad \xi \rightarrow +\infty, \tag{4.19}$$

2de

$$\begin{aligned}
S_0(\xi) = & \frac{2}{3}\xi^{3/2} - A_{-1}\sqrt{\xi}(2\ln\xi - 4) + 2A_0\sqrt{\xi} + 3\rho\tilde{k}^{2/3}\xi^{1/6} - \tilde{k}\pi^2 A_{-1}\ln\xi \\
& + \delta - \frac{\sigma}{18\tilde{k}^{2/3}\xi^{1/6}} + \frac{9\sqrt{3}}{10}\frac{\pi\rho\tilde{k}^{5/3}}{\xi^{1/3}} + \frac{A_{-1}^2}{\sqrt{\xi}}[(\ln\xi)^2 + 4\ln\xi + 8] \\
& - \left[A_0 + \frac{\tilde{k}^2\pi^2}{2}\right]\frac{A_{-1}}{\sqrt{\xi}}(2\ln\xi + 4) \\
& - \left[\tilde{k}^2\pi^2 A_{-1} + 2A_1 - \frac{u}{243\tilde{k}^2} - A_0^2\right]\frac{1}{\sqrt{\xi}}, \tag{4.20}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{-1} = A_{-1}(\tilde{k}) & \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} G^2(\xi', \eta') d\eta' - \frac{\tilde{k}\theta(\xi')}{2\sqrt{\xi'}} \right\} d\xi', \tag{4.21} \\
A_0 = A_0(\tilde{k}) & \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \ln|\xi'| \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} G^2(\xi', \eta') d\eta' - \frac{\tilde{k}\theta(\xi')}{2\sqrt{\xi'}} \right\} d\xi', \\
A_1 = A_1(\tilde{k}) & \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ - \int_0^{\xi'} \int_{-\infty}^{\infty} G^2(z, \eta') d\eta' dz \right. \\
& + \theta(\xi') \frac{\tilde{k}}{2} \int_0^{\xi'} \left[\frac{1}{\sqrt{z}} + \frac{A_{-1}\ln z}{z^{3/2}} - \frac{A_0}{z^{3/2}} - \frac{\rho\tilde{k}^{2/3}}{2z^{11/6}} \right] dz \\
& \left. + \theta(\xi') \int_1^{\xi'} \frac{\tilde{k}^2\pi^2 A_{-1}}{2z^2} dz \right\} d\xi'.
\end{aligned}$$

Здесь δ – константа (сдвиг фазы), $\rho = \rho_i$, $i = 1, 2, \dots$, – собственные значения задачи (3.6), (3.7), константы $\sigma = \sigma_i$, $u = u_i$ задаются равенствами (3.24), (3.32), а функция θ – формулой (4.10).

Формулы для $\tilde{T}$ и $\tilde{\varphi}$ из (4.18) приведены в [1]. Они аналогичны построенным в § 2, 3 настоящей статьи разложениям для T и φ (T и φ выражаются через B и I согласно формулам (2.22), (2.23)). Для однозначного задания асимптотики G достаточно указать число i , упорядочивающее решения задачи (3.6), (3.7), а также значение параметра $\tilde{k}$. В зависимости от того, вблизи от какой из точек $\tilde{x}_-$, $\tilde{x}_+$ строится асимптотика, будем вместо $\tilde{k}$ писать $\tilde{k}_-$ или $\tilde{k}_+$.

Потребуем, чтобы решения уравнения (1.4) $G_-(\xi, \eta)$, $G_+(\xi, \eta)$ при $\xi \rightarrow +\infty$, $\eta = O(\xi^{1/6}(\ln\xi)^{2/3})$ имели асимптотики (4.18) с тем же номером i , что и члены разложения (2.1). Кроме того, пусть для $G_-(\xi, \eta)$

$$\tilde{k}_- = k/(2\pi\tilde{x}_-\Omega_-^{4/3}), \tag{4.22}$$

а для $G_+(\xi, \eta)$

$$\tilde{k}_+ = k/(2\pi\tilde{x}_+\Omega_+^{4/3}). \tag{4.23}$$

Здесь k – входящая в (2.1) константа (см. (2.19)), а Ω_- , Ω_+ определены формулами (4.12), (4.16).

§ 5. Задача для фазы

В этом параграфе мы подставим в равенства (2.21), (2.28), (2.4), (4.12), (4.16) вблизи точек $\tilde{x}_-$, $\tilde{x}_+$ вместо g выражения для асимптотических решений g_- , g_+ и выразим возникающие интегралы через $\tilde{S}'(\xi)$ и входящие в (4.20) константы. В результате будет получена задача для нахождения определяющей фазу ВКБ-разложения (2.24) функции $S(x, h)$, а также констант k , $\tilde{x}_-$, $\tilde{x}_+$, Ω_- , Ω_+ .

5.1. Преобразование соотношения (2.28). Пусть

$$\begin{aligned} H(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} & \frac{1}{\sqrt{\xi}} + A_{-1} \frac{\ln \xi}{\xi^{3/2}} - \frac{A_0}{\xi^{3/2}} - \frac{\rho \tilde{k}^{2/3}}{2\xi^{11/6}} + \frac{\tilde{k}\pi^2 A_{-1}}{\xi^2} - \frac{\sigma}{108\tilde{k}^{2/3}\xi^{13/6}} \\ & + \frac{3\sqrt{3}\pi\rho\tilde{k}^{5/3}}{10} + \frac{3}{2}A_{-1}^2 \frac{(\ln \xi)^2}{\xi^{5/2}} - \left[3A_0 + \frac{\tilde{k}^2\pi^2}{2}\right] A_{-1} \frac{\ln \xi}{\xi^{5/2}} \\ & - \frac{1}{2\xi^{5/2}} \left[\tilde{k}^2\pi^2 A_{-1} + 2A_1 - \frac{u}{243\tilde{k}^2} - 3A_0^2 \right]. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Тогда в силу (4.19), (4.20) и формулы Тейлора имеем $1/\tilde{S}'(\xi) = H(\xi) + O(\xi^{-8/3})$, $\xi \rightarrow +\infty$. Функция $H(\xi)$ в отличие от $1/S'_0(\xi)$ не имеет особенностей при $\xi > 0$.

Определим

$$\begin{aligned} D_{-1}(\tilde{k}_{\pm}) & \stackrel{\text{def}}{=} A_{-1}(\tilde{k}_{\pm}) + \frac{\tilde{k}_{\pm}}{2} \int_0^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{\xi}} - \theta(\xi - 1)H(\xi) \right) d\xi \\ & = \int_{-\infty}^\infty \left(\int_{-\infty}^\infty G_{\pm}^2(\xi, \eta) d\eta - \frac{\tilde{k}_{\pm}}{2} \theta(\xi - 1)H(\xi) \right) d\xi. \end{aligned} \quad (5.2)$$

ЛЕММА 5.1. При $h \rightarrow 0$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} & \int_0^{\tilde{x}_- + \varepsilon} \chi_-(x, \varepsilon) \int_{-\infty}^\infty g_-^2(x, y) dy dx \\ & = h^{1/3} \Omega_-^{2/3} 2\pi \tilde{x}_- \left[D_{-1}(\tilde{k}_-) + \int_1^{e_-} \frac{\tilde{k}_-}{2} \chi\left(\frac{\xi}{e_-}\right) H(\xi) d\xi \right] + O\left(\frac{h^{13/9}}{\varepsilon^{5/3}}\right), \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\tilde{x}_+ - \varepsilon}^\infty \chi_+(x, \varepsilon) \int_{-\infty}^\infty g_+^2(x, y) dy dx \\ & = h^{1/3} \Omega_+^{2/3} 2\pi \tilde{x}_+ \left[D_{-1}(\tilde{k}_+) + \int_1^{e_+} \frac{\tilde{k}_+}{2} \chi\left(\frac{\xi}{e_+}\right) H(\xi) d\xi \right] + O\left(\frac{h^{13/9}}{\varepsilon^{5/3}}\right), \end{aligned} \quad (5.4)$$

где

$$e_{\pm} = \varepsilon \sqrt[3]{\Omega_{\pm}} / h^{2/3}, \quad (5.5)$$

а $\chi = \chi(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ — неотрицательная функция такая, что $\chi(\xi) \equiv 1$ при $\xi < 1/2$ и $\chi(\xi) \equiv 0$ при $\xi > 1$.

С учетом (5.3), (5.4) соотношение (2.28) принимает вид

$$h^{1/3} \Omega_-^{2/3} 2\pi \tilde{x}_- \left[D_{-1}(\tilde{k}_-) + \int_1^{e_-} \frac{\tilde{k}_-}{2} \chi\left(\frac{\xi}{e_-}\right) H(\xi) d\xi \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\tilde{x}_- + \varepsilon/2}^{\tilde{x}_+ - \varepsilon/2} (1 - \chi_-(x, \varepsilon) - \chi_+(x, \varepsilon)) \frac{k}{2S'(x, h)} dx \\
& + h^{1/3} \Omega_+^{2/3} 2\pi \tilde{x}_+ \left[D_{-1}(\tilde{k}_+) + \int_1^{e+} \frac{\tilde{k}_+}{2} \chi\left(\frac{\xi}{e_+}\right) H(\xi) d\xi \right] = 1 + O\left(\frac{h^{13/9}}{\varepsilon^{5/3}}\right) \\
& + O\left(\int_{\tilde{x}_- + \varepsilon/2}^{\tilde{x}_+ - \varepsilon/2} (1 - \chi_-(x, \varepsilon) - \chi_+(x, \varepsilon)) \right. \\
& \left. \times \int_{-\infty}^{\infty} T^2(x, \tau_1, h) \cos 2\Phi(x, \tau_1, h) d\tau_1 dx \right), \quad h \rightarrow 0.
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Исключая из (5.6) разбиение единицы, а также интегрируя по частям в содержащем $\cos 2\Phi$ интеграле, окончательно имеем

$$\begin{aligned}
& h^{1/3} \Omega_-^{2/3} 2\pi \tilde{x}_- \left[D_{-1}(\tilde{k}_-) + \int_1^{e-} \frac{\tilde{k}_-}{2} H(\xi) d\xi \right] + \int_{\tilde{x}_- + \varepsilon}^{\tilde{x}_+ - \varepsilon} \frac{k dx}{2S'(x, h)} \\
& + h^{1/3} \Omega_+^{2/3} 2\pi \tilde{x}_+ \left[D_{-1}(\tilde{k}_+) + \int_1^{e+} \frac{\tilde{k}_+}{2} H(\xi) d\xi \right] = 1 + O(h^{\frac{2}{3} + \frac{1}{57}}), \quad h \rightarrow 0.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

5.2. Преобразование соотношений (2.4). В силу (2.6) при $x \rightarrow \tilde{x}_{\pm}$ получаем

$$\frac{1}{\tilde{x}_{\pm} + x} K\left(\frac{2\sqrt{\tilde{x}_{\pm} x}}{\tilde{x}_{\pm} + x}\right) = -\frac{1}{2\tilde{x}_{\pm}} \ln |x - \tilde{x}_{\pm}| + \frac{\ln(8\tilde{x}_{\pm})}{2\tilde{x}_{\pm}} + O((x - \tilde{x}_{\pm}) \ln |x - \tilde{x}_{\pm}|).$$

Поэтому (2.4) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
& U(\tilde{x}_-) + \frac{2}{\pi} h^{1/3} \left\{ -\frac{1}{2\tilde{x}_-} \int_0^{\tilde{x}_- + \varepsilon} \chi_-(x, \varepsilon) \ln |x - \tilde{x}_-| \int_{-\infty}^{\infty} g_-^2(x, y) dy dx \right. \\
& + \frac{\ln(8\tilde{x}_-)}{2\tilde{x}_-} \int_0^{\tilde{x}_- + \varepsilon} \chi_-(x, \varepsilon) \int_{-\infty}^{\infty} g_-^2(x, y) dy dx + O\left(\varepsilon^{3/2} \ln \frac{1}{h}\right) \\
& + \int_{\tilde{x}_- + \varepsilon/2}^{\tilde{x}_+ - \varepsilon/2} \frac{(1 - \chi_-(x, \varepsilon) - \chi_+(x, \varepsilon))}{(\tilde{x}_- + x)} K\left(\frac{2\sqrt{\tilde{x}_- x}}{\tilde{x}_- + x}\right) \frac{k dx}{2S'(x, h)} \\
& \left. + \frac{1}{\tilde{x}_+ + \tilde{x}_-} K\left(\frac{2\sqrt{\tilde{x}_+ \tilde{x}_-}}{\tilde{x}_+ + \tilde{x}_-}\right) \int_{\tilde{x}_+ - \varepsilon}^{\infty} \chi_+(x, \varepsilon) \int_{-\infty}^{\infty} g_+^2(x, y) dy dx + O(\varepsilon^{3/2}) \right\} \\
& = O\left(h^{1 + \frac{1}{57}} \ln \frac{1}{h}\right) + O\left(h^{1/3} \int_{\tilde{x}_- + \varepsilon/2}^{\tilde{x}_+ - \varepsilon/2} \frac{(1 - \chi_-(x, \varepsilon) - \chi_+(x, \varepsilon))}{(\tilde{x}_- + x)} \right. \\
& \left. \times K\left(\frac{2\sqrt{\tilde{x}_- x}}{\tilde{x}_- + x}\right) \int_{-\infty}^{\infty} T^2(x, \tau_1, h) \cos 2\Phi(x, \tau_1, h) d\tau_1 dx \right), \quad h \rightarrow 0,
\end{aligned} \tag{5.8}$$

$$\begin{aligned}
& U(\tilde{x}_+) + \frac{2}{\pi} h^{1/3} \left\{ \frac{1}{\tilde{x}_+ + \tilde{x}_-} K\left(\frac{2\sqrt{\tilde{x}_+ \tilde{x}_-}}{\tilde{x}_+ + \tilde{x}_-}\right) \int_0^{\tilde{x}_- + \varepsilon} \chi_-(x, \varepsilon) \right. \\
& \left. \times \int_{-\infty}^{\infty} g_-^2(x, y) dy dx + O(\varepsilon^{3/2}) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\tilde{x}_- + \varepsilon/2}^{\tilde{x}_+ - \varepsilon/2} \frac{(1 - \chi_-(x, \varepsilon) - \chi_+(x, \varepsilon))}{(\tilde{x}_+ + x)} K\left(\frac{2\sqrt{\tilde{x}_+ x}}{\tilde{x}_+ + x}\right) \frac{k dx}{2S'(x, h)} \\
& - \frac{1}{2\tilde{x}_+} \int_{\tilde{x}_+ - \varepsilon}^{\infty} \chi_+(x, \varepsilon) \ln |x - \tilde{x}_+| \int_{-\infty}^{\infty} g_+^2(x, y) dy dx \\
& + \frac{\ln(8\tilde{x}_+)}{2\tilde{x}_+} \int_{\tilde{x}_+ - \varepsilon}^{\infty} \chi_+(x, \varepsilon) \int_{-\infty}^{\infty} g_+^2(x, y) dy dx + O\left(\varepsilon^{3/2} \ln \frac{1}{h}\right) \Big\} \\
& = O\left(h^{1+\frac{1}{57}} \ln \frac{1}{h}\right) + O\left(h^{1/3} \int_{\tilde{x}_- + \varepsilon/2}^{\tilde{x}_+ - \varepsilon/2} \frac{(1 - \chi_-(x, \varepsilon) - \chi_+(x, \varepsilon))}{(\tilde{x}_+ + x)} \right. \\
& \quad \times K\left(\frac{2\sqrt{\tilde{x}_+ x}}{\tilde{x}_+ + x}\right) \int_{-\infty}^{\infty} T^2(x, \tau_1, h) \cos 2\Phi(x, \tau_1, h) d\tau_1 dx \Big), \quad h \rightarrow 0.
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Определим

$$\begin{aligned}
D_0(\tilde{k}_{\pm}) & \stackrel{\text{def}}{=} A_0(\tilde{k}_{\pm}) + \frac{\tilde{k}_{\pm}}{2} \int_0^{\infty} \ln \xi \left(\frac{1}{\sqrt{\xi}} - \theta(\xi - 1)H(\xi) \right) d\xi \\
& = \int_{-\infty}^{\infty} \ln |\xi| \left(\int_{-\infty}^{\infty} G_{\pm}^2(\xi, \eta) d\eta - \frac{\tilde{k}_{\pm}}{2} \theta(\xi - 1)H(\xi) \right) d\xi.
\end{aligned}$$

ЛЕММА 5.2. При $h \rightarrow 0$ справедливы равенства

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\tilde{x}_- + \varepsilon} \chi_-(x, \varepsilon) \ln |x - \tilde{x}_-| \int_{-\infty}^{\infty} g_-^2(x, y) dy dx \\
& = h^{1/3} \Omega_-^{2/3} 2\pi \tilde{x}_- \left\{ D_0(\tilde{k}_-) + \int_1^{e_-} \frac{\tilde{k}_-}{2} \chi\left(\frac{\xi}{e_-}\right) (\ln \xi) H(\xi) d\xi \right. \\
& \quad \left. + \ln \left| \frac{h^{2/3}}{\sqrt[3]{\Omega_-}} \right| \cdot \left[D_{-1}(\tilde{k}_-) + \int_1^{e_-} \frac{\tilde{k}_-}{2} \chi\left(\frac{\xi}{e_-}\right) H(\xi) d\xi \right] \right\} \\
& \quad + O\left(\frac{h^{13/9}}{\varepsilon^{5/3}} \ln \frac{1}{h}\right), \tag{5.10} \\
& \int_{\tilde{x}_+ - \varepsilon}^{\infty} \chi_+(x, \varepsilon) \ln |x - \tilde{x}_+| \int_{-\infty}^{\infty} g_+^2(x, y) dy dx \\
& = h^{1/3} \Omega_+^{2/3} 2\pi \tilde{x}_+ \left\{ D_0(\tilde{k}_+) + \int_1^{e_+} \frac{\tilde{k}_+}{2} \chi\left(\frac{\xi}{e_+}\right) (\ln \xi) H(\xi) d\xi \right. \\
& \quad \left. + \ln \left| \frac{h^{2/3}}{\sqrt[3]{\Omega_+}} \right| \cdot \left[D_{-1}(\tilde{k}_+) + \int_1^{e_+} \frac{\tilde{k}_+}{2} \chi\left(\frac{\xi}{e_+}\right) H(\xi) d\xi \right] \right\} \\
& \quad + O\left(\frac{h^{13/9}}{\varepsilon^{5/3}} \ln \frac{1}{h}\right). \tag{5.11}
\end{aligned}$$

Далее подставим (5.3), (5.4), (5.10), (5.11) в (5.8), (5.9), исключим разбиение единицы и проинтегрируем по частям в содержащих $\cos 2\Phi$ интегралах. Окончательно имеем

$$U(\tilde{x}_-) + 2h^{1/3} \left\{ -h^{1/3} \Omega_-^{2/3} \left[D_0(\tilde{k}_-) + \int_1^{e_-} \frac{\tilde{k}_-}{2} (\ln \xi) H(\xi) d\xi \right] \right.$$

$$\begin{aligned}
& + h^{1/3} \Omega_-^{2/3} \ln \left| \frac{8\tilde{x}_- \sqrt[3]{\Omega_-}}{h^{2/3}} \right| \cdot \left[D_{-1}(\tilde{k}_-) + \int_1^{e-} \frac{\tilde{k}_-}{2} H(\xi) d\xi \right] \\
& + \int_{\tilde{x}_- + \varepsilon}^{\tilde{x}_+ - \varepsilon} \frac{1}{\pi(\tilde{x}_- + x)} K \left(\frac{2\sqrt{\tilde{x}_- x}}{\tilde{x}_- + x} \right) \frac{k dx}{2S'(x, h)} \\
& + \frac{h^{1/3} \Omega_+^{2/3} 2\tilde{x}_+}{\tilde{x}_+ + \tilde{x}_-} K \left(\frac{2\sqrt{\tilde{x}_+ \tilde{x}_-}}{\tilde{x}_+ + \tilde{x}_-} \right) \left[D_{-1}(\tilde{k}_+) + \int_1^{e+} \frac{\tilde{k}_+}{2} H(\xi) d\xi \right] \Big\} \\
& = O \left(h^{1+\frac{1}{57}} \ln \frac{1}{h} \right), \quad h \rightarrow 0,
\end{aligned} \tag{5.12}$$

$$\begin{aligned}
U(\tilde{x}_+) + 2h^{1/3} & \left\{ \frac{h^{1/3} \Omega_-^{2/3} 2\tilde{x}_-}{\tilde{x}_+ + \tilde{x}_-} K \left(\frac{2\sqrt{\tilde{x}_+ \tilde{x}_-}}{\tilde{x}_+ + \tilde{x}_-} \right) \left[D_{-1}(\tilde{k}_-) + \int_1^{e-} \frac{\tilde{k}_-}{2} H(\xi) d\xi \right] \right. \\
& + \int_{\tilde{x}_- + \varepsilon}^{\tilde{x}_+ - \varepsilon} \frac{1}{\pi(\tilde{x}_+ + x)} K \left(\frac{2\sqrt{\tilde{x}_+ x}}{\tilde{x}_+ + x} \right) \frac{k dx}{2S'(x, h)} \\
& - h^{1/3} \Omega_+^{2/3} \left[D_0(\tilde{k}_+) + \int_1^{e+} \frac{\tilde{k}_+}{2} (\ln \xi) H(\xi) d\xi \right] \\
& \left. + h^{1/3} \Omega_+^{2/3} \ln \left| \frac{8\tilde{x}_+ \sqrt[3]{\Omega_+}}{h^{2/3}} \right| \left[D_{-1}(\tilde{k}_+) + \int_1^{e+} \frac{\tilde{k}_+}{2} H(\xi) d\xi \right] \right\} \\
& = O \left(h^{1+\frac{1}{57}} \ln \frac{1}{h} \right), \quad h \rightarrow 0.
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Здесь $e_{\pm}$ определены формулой (5.5).

5.3. Преобразование соотношений (4.12), (4.16).

ЛЕММА 5.3. При $h \rightarrow 0$ справедливы равенства

$$\begin{aligned}
\Omega_- = U'(\tilde{x}_-) + h^{1/3} & \int_{\tilde{x}_- + \varepsilon}^{\infty} \left\{ \left[\frac{1}{x - \tilde{x}_-} E \left(\frac{2\sqrt{\tilde{x}_- x}}{\tilde{x}_- + x} \right) \right. \right. \\
& - \frac{1}{\tilde{x}_- + x} K \left(\frac{2\sqrt{\tilde{x}_- x}}{\tilde{x}_- + x} \right) \left. \right] \frac{k\theta(\tilde{x}_+ - \varepsilon - x)}{2\pi\tilde{x}_- S'(x, h)} \\
& \left. - \frac{\tilde{k}_- \Omega_-}{(x - \tilde{x}_-) h^{1/3}} H \left(\frac{(x - \tilde{x}_-) \sqrt[3]{\Omega_-}}{h^{2/3}} \right) \right\} dx + O \left(h^{\frac{4}{9} + \frac{20}{171}} \ln \frac{1}{h} \right),
\end{aligned} \tag{5.14}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_+ = -U'(\tilde{x}_+) + h^{1/3} & \int_{-\infty}^{\tilde{x}_+ - \varepsilon} \left\{ \left[\frac{1}{\tilde{x}_+ - x} E \left(\frac{2\sqrt{\tilde{x}_+ x}}{\tilde{x}_+ + x} \right) \right. \right. \\
& + \frac{1}{\tilde{x}_+ + x} K \left(\frac{2\sqrt{\tilde{x}_+ x}}{\tilde{x}_+ + x} \right) \left. \right] \frac{k\theta(x - \tilde{x}_- + \varepsilon)}{2\pi\tilde{x}_+ S'(x, h)} \\
& \left. - \frac{\tilde{k}_+ \Omega_+}{(\tilde{x}_+ - x) h^{1/3}} H \left(\frac{(\tilde{x}_+ - x) \sqrt[3]{\Omega_+}}{h^{2/3}} \right) \right\} dx + O \left(h^{\frac{4}{9} + \frac{20}{171}} \ln \frac{1}{h} \right).
\end{aligned} \tag{5.15}$$

5.4. Преобразование уравнения (2.21). Подставим в формулы (2.14) для j_- и j_+ вместо g выражения для g_- и g_+ соответственно. Так как в силу (4.5)–(4.7)

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi(x+x')} K\left(\frac{2\sqrt{xx'}}{x+x'}\right) &= \frac{2}{\pi(x+\tilde{x}_-)} K\left(\frac{2\sqrt{x\tilde{x}_-}}{\tilde{x}_-+x}\right) - \frac{2}{\pi(x+\tilde{x}_-)} \ln \left| \frac{x-x'}{x-\tilde{x}_-} \right| \\ &\quad + O((x'-\tilde{x}_-)(1+|\ln|x-\tilde{x}_-||)), \quad x' \rightarrow \tilde{x}_-, \end{aligned} \quad (5.16)$$

то при $x \in (\tilde{x}_- + \varepsilon, \tilde{x}_+ - \varepsilon)$ имеем

$$\begin{aligned} &\int_0^{\tilde{x}_-+\varepsilon} \frac{2}{\pi(x+x')} K\left(\frac{2\sqrt{xx'}}{x+x'}\right) \chi_-(x', \varepsilon) \int_{-\infty}^{\infty} g_-^2(x', y') dy' dx' \\ &= \frac{2}{\pi(x+\tilde{x}_-)} \left\{ \left[K\left(\frac{2\sqrt{x\tilde{x}_-}}{\tilde{x}_-+x}\right) + \ln|x-\tilde{x}_-| \right] \right. \\ &\quad \times \int_0^{\tilde{x}_-+\varepsilon} \chi_-(x', \varepsilon) \int_{-\infty}^{\infty} g_-^2(x', y') dy' dx' \\ &\quad - \int_0^{\tilde{x}_-+\varepsilon} \chi_-(x', \varepsilon) \ln|x'-\tilde{x}_-| \int_{-\infty}^{\infty} g_-^2(x', y') dy' dx' \\ &\quad \left. - 2\pi\tilde{x}_- h^{1/3} \Omega_-^{2/3} \int_{-\infty}^{e_-} \chi\left(\frac{\xi'}{e_-}\right) \ln\left|1 - \frac{\xi}{\xi'}\right| \int_{-\infty}^{\infty} G_-^2(\xi', \eta') d\eta' d\xi' \right\} \\ &\quad + O\left(\varepsilon^{3/2} \ln \frac{1}{h}\right). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Определим

$$\begin{aligned} D_1(\tilde{k}_{\pm}) &\stackrel{\text{def}}{=} A_1(\tilde{k}_{\pm}) + \frac{\tilde{k}_{\pm}}{2} \int_0^{\xi} \left\{ \int_1^{\xi} H(z) dz \right. \\ &\quad - \int_0^{\xi} \left[\frac{1}{\sqrt{z}} + A_{-1}(\tilde{k}_{\pm}) \frac{\ln z}{z^{3/2}} - \frac{A_0(\tilde{k}_{\pm})}{z^{3/2}} - \frac{\rho \tilde{k}_{\pm}^{2/3}}{2z^{11/6}} \right] dz \\ &\quad \left. - \int_1^{\xi} \tilde{k}_{\pm} \pi^2 A_{-1}(\tilde{k}_{\pm}) \frac{dz}{z^2} \right\} d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ - \int_0^{\xi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{\pm}^2(z, \eta) d\eta dz + \frac{\tilde{k}_{\pm}}{2} \theta(\xi) \int_1^{\xi} H(z) dz \right\} d\xi. \end{aligned}$$

ЛЕММА 5.4. Пусть $\xi > e_-$, $e_- \rightarrow +\infty$. Тогда справедливо равенство

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{e_-} \chi\left(\frac{\xi'}{e_-}\right) \ln\left|1 - \frac{\xi}{\xi'}\right| \int_{-\infty}^{\infty} G_-^2(\xi', \eta') d\eta' d\xi' \\ &= \int_1^{e_-} \chi\left(\frac{\xi'}{e_-}\right) \ln\left|1 - \frac{\xi}{\xi'}\right| \frac{\tilde{k}_-}{2} H(\xi') d\xi' + D_{-1}(\tilde{k}_-) \ln \xi \\ &\quad - D_0(\tilde{k}_-) - D_1(\tilde{k}_-)/\xi + O((1 + \ln|\xi/e_-|)/\varepsilon_-^{5/3}). \end{aligned} \quad (5.18)$$

Из соотношений (5.3), (5.10), (5.16)–(5.18) вытекает, что при $x \in (\tilde{x}_- + \varepsilon, \tilde{x}_+ - \varepsilon)$

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\tilde{x}_- + \varepsilon} \frac{2}{\pi(x+x')} K\left(\frac{2\sqrt{xx'}}{x+x'}\right) \chi_-(x', \varepsilon) \int_{-\infty}^{\infty} g_-^2(x', y') dy' dx' \\
&= \frac{4\tilde{x}_- h^{1/3} \Omega_-^{2/3}}{x + \tilde{x}_-} \left\{ K\left(\frac{2\sqrt{x\tilde{x}_-}}{x + \tilde{x}_-}\right) D_{-1}(\tilde{k}_-) + \frac{D_1(\tilde{k}_-)}{\xi} \right. \\
&\quad \left. + \int_1^{e_-} \left[K\left(\frac{2\sqrt{x\tilde{x}_-}}{x + \tilde{x}_-}\right) + \ln \left| \frac{x - \tilde{x}_-}{x - x'} \right| \right] \frac{\tilde{k}_-}{2} \chi\left(\frac{\xi'}{e_-}\right) H(\xi') d\xi' \right\} \\
&\quad + O\left(\frac{h^{13/9}}{\varepsilon^{5/3}} \ln \frac{1}{h}\right) + O\left(\varepsilon^{3/2} \ln \frac{1}{h}\right) \\
&= \frac{2\pi\tilde{x}_- \Omega_-}{h^{1/3}} \int_{\tilde{x}_- + h^{2/3}/\sqrt[3]{\Omega_-}}^{\tilde{x}_- + \varepsilon} \frac{\chi_-(x', \varepsilon)}{\pi(x+x')} K\left(\frac{2\sqrt{xx'}}{x+x'}\right) \tilde{k}_- H\left(\frac{(x' - \tilde{x}_-)^{3/2} \sqrt{\Omega_-}}{h^{2/3}}\right) dx' \\
&\quad + \frac{4\tilde{x}_-}{x + \tilde{x}_-} \left\{ h^{1/3} \Omega_-^{2/3} K\left(\frac{2\sqrt{x\tilde{x}_-}}{x + \tilde{x}_-}\right) D_{-1}(\tilde{k}_-) + \frac{h^{3/2} \sqrt{\Omega_-} D_1(\tilde{k}_-)}{x - \tilde{x}_-} \right\} \\
&\quad + O\left(\frac{h^{13/9}}{\varepsilon^{5/3}} \ln \frac{1}{h}\right) + O\left(\varepsilon^{3/2} \ln \frac{1}{h}\right), \quad h \rightarrow 0. \tag{5.19}
\end{aligned}$$

Аналогично доказывается, что

$$\begin{aligned}
& \int_{\tilde{x}_+ - \varepsilon}^{\infty} \frac{2}{\pi(x+x')} K\left(\frac{2\sqrt{xx'}}{x+x'}\right) \chi_+(x', \varepsilon) \int_{-\infty}^{\infty} g_+^2(x', y') dy' dx' \\
&= \frac{2\pi\tilde{x}_+ \Omega_+}{h^{1/3}} \int_{\tilde{x}_+ - \varepsilon}^{\tilde{x}_+ - h^{2/3}/\sqrt[3]{\Omega_+}} \frac{\chi_+(x', \varepsilon)}{\pi(x+x')} K\left(\frac{2\sqrt{xx'}}{x+x'}\right) \tilde{k}_+ H\left(\frac{(\tilde{x}_+ - x')^{3/2} \sqrt{\Omega_+}}{h^{2/3}}\right) dx' \\
&\quad + \frac{4\tilde{x}_+}{x + \tilde{x}_+} \left\{ h^{1/3} \Omega_+^{2/3} K\left(\frac{2\sqrt{x\tilde{x}_+}}{x + \tilde{x}_+}\right) D_{-1}(\tilde{k}_+) + \frac{h^{3/2} \sqrt{\Omega_+} D_1(\tilde{k}_+)}{\tilde{x}_+ - x} \right\} \\
&\quad + O\left(\frac{h^{13/9}}{\varepsilon^{5/3}} \ln \frac{1}{h}\right) + O\left(\varepsilon^{3/2} \ln \frac{1}{h}\right), \quad h \rightarrow 0. \tag{5.20}
\end{aligned}$$

Далее воспользуемся тем, что в разложении $h^{8/9}L(x, h) = h^{8/9}\ell_0 + h^{10/9}\ell_1 + h^{4/3}\ell_2 + O(h^{13/9}\ell_3)$ перед ℓ_1, ℓ_2 стоят множители h^μ , где $\mu > 1$. Мы заменим эти функции на главные члены асимптотик. Главные члены имеют особенности при $x \rightarrow \tilde{x}_\pm$. Остальные, более гладкие, слагаемые войдут в остаточный член. Из (3.23), (3.31) получаем

$$\begin{aligned}
\ell_1(x) &= \frac{\sigma}{54k^{2/3}} \left[\frac{(2\pi\tilde{x}_-)^{2/3} (U'(\tilde{x}_-))^{4/3}}{(x - \tilde{x}_-)^{2/3}} + \frac{(2\pi\tilde{x}_+)^{2/3} |U'(\tilde{x}_+)|^{4/3}}{(\tilde{x}_+ - x)^{2/3}} \right] \\
&\quad + O\left(\frac{h^{1/3}}{(x - \tilde{x}_-)^{7/6}}\right) + O\left(\frac{h^{1/3}}{(\tilde{x}_+ - x)^{7/6}}\right) + O(1), \tag{5.21}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ell_2(x) &= -\frac{u}{243k^2} \left\{ \frac{(2\pi\tilde{x}_-)^2 (U'(\tilde{x}_-))^3}{x - \tilde{x}_-} + \frac{(2\pi\tilde{x}_+)^2 |U'(\tilde{x}_+)|^3}{\tilde{x}_+ - x} \right\} \\
&\quad + O\left(\frac{h^{1/9}}{(x - \tilde{x}_-)^{7/6}}\right) + O\left(\frac{h^{1/9}}{(\tilde{x}_+ - x)^{7/6}}\right) + O(1). \tag{5.22}
\end{aligned}$$

Остается подставить соотношения (3.10), (5.19)–(5.22) в (2.21) и заменить $1/S'(x', h)$ на $H(\xi')$ при $x' \in (\tilde{x}_+ - \varepsilon, \tilde{x}_+ - \varepsilon/2)$, $x' \in (\tilde{x}_- + \varepsilon/2, \tilde{x}_+ + \varepsilon)$.

Справедлива

ТЕОРЕМА 5.1. *Функция $S'(x, h)$ на интервале $x \in (\tilde{x}_- + \varepsilon, \tilde{x}_+ - \varepsilon)$ удовлетворяет уравнению*

$$\begin{aligned}
& - (S'(x, h))^2 + U(x) \\
& + \Omega_- \int_{\tilde{x}_- + h^{2/3}/\sqrt[3]{\Omega_-}}^{\tilde{x}_- + \varepsilon} \frac{2\tilde{x}_-}{(x + x')} K\left(\frac{2\sqrt{xx'}}{x + x'}\right) \tilde{k}_- H\left(\frac{(x' - \tilde{x}_-)^{3/2}\sqrt{\Omega_-}}{h^{2/3}}\right) dx' \\
& + h^{1/3} \int_{\tilde{x}_- + \varepsilon}^{\tilde{x}_+ - \varepsilon} \frac{1}{\pi(x + x')} K\left(\frac{2\sqrt{xx'}}{x + x'}\right) \frac{k dx'}{S'(x', h)} \\
& + \Omega_+ \int_{\tilde{x}_+ - \varepsilon}^{\tilde{x}_+ - h^{2/3}/\sqrt[3]{\Omega_+}} \frac{2\tilde{x}_+}{(x + x')} K\left(\frac{2\sqrt{xx'}}{x + x'}\right) \tilde{k}_+ H\left((\tilde{x}_+ - x') \frac{\sqrt[3]{\Omega_+}}{h^{2/3}}\right) dx' \\
& + h^{2/3} \left\{ \frac{4\tilde{x}_-}{x + \tilde{x}_-} K\left(\frac{2\sqrt{x\tilde{x}_-}}{x + \tilde{x}_-}\right) \Omega_-^{2/3} D_{-1}(\tilde{k}_-) \right. \\
& + \left. \frac{4\tilde{x}_+}{x + \tilde{x}_+} K\left(\frac{2\sqrt{x\tilde{x}_+}}{x + \tilde{x}_+}\right) \Omega_+^{2/3} D_{-1}(\tilde{k}_+) \right\} + h^{8/9} \rho \left(\frac{k}{2\pi x S'} \right)^{2/3} \\
& + \frac{h^{10/9} \sigma}{54k^{2/3}} \left[\frac{(2\pi\tilde{x}_-)^{2/3} (U'(\tilde{x}_-))^{4/3}}{(x - \tilde{x}_-)^{2/3}} + \frac{(2\pi\tilde{x}_+)^{2/3} |U'(\tilde{x}_+)|^{4/3}}{(\tilde{x}_+ - x)^{2/3}} \right] \\
& + 2h^{4/3} \left[\frac{\sqrt[3]{\Omega_-} D_1(\tilde{k}_-)}{x - \tilde{x}_-} + \frac{\sqrt[3]{\Omega_+} D_1(\tilde{k}_+)}{\tilde{x}_+ - x} \right] \\
& - \frac{h^{4/3} u}{243k^2} \left\{ \frac{(2\pi\tilde{x}_-)^2 (U'(\tilde{x}_-))^3}{x - \tilde{x}_-} + \frac{(2\pi\tilde{x}_+)^2 |U'(\tilde{x}_+)|^3}{\tilde{x}_+ - x} \right\} = R(x, h).
\end{aligned} \tag{5.23}$$

Здесь

$$R(x, h) = O\left(h^{1+\frac{1}{57}} \ln \frac{1}{h}\right) + O\left(\frac{h^{13/9}}{(x - \tilde{x}_-)^{7/6}}\right) + O\left(\frac{h^{13/9}}{(\tilde{x}_+ - x)^{7/6}}\right), \quad h \rightarrow 0. \tag{5.24}$$

Положим в (5.7), (5.12)–(5.15), (5.23) остаточные члены равными нулю, а константы $\tilde{k}_-$, $\tilde{k}_+$ зададим равенствами (4.22), (4.23). Кроме того, пусть $\varepsilon = h^{26/57}$. Таким образом, будет получена система уравнений для нахождения функций $S(x, h)$ при $x \in (\tilde{x}_- + \varepsilon, \tilde{x}_+ - \varepsilon)$, а также констант k , $\tilde{x}_-$, $\tilde{x}_+$, Ω_- , Ω_+ . Назовем эту систему *задачей для фазы*.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Константы $\Omega_{\pm}$ необходимы для того, чтобы определить $g_{\pm}(x, y)$ вблизи точек $\tilde{x}_{\pm}$.

**§ 6. Правило квантования. Оценка невязки.
Формулировка основной теоремы**

6.1. Правило квантования. Для построения глобальной асимптотики задачи (1.11)–(1.13) остается получить правило квантования – условие, обеспечивающее гладкое сшивание асимптотического решения. Именно из этого правила находятся асимптотические собственные значения (1.11)–(1.13).

В § 2, 3 мы построили ВКБ-приближение вида

$$g = \frac{1}{h^{5/18}} \left\{ [B_0 + h^{2/9} B_1 + h^{4/9} B_2 + O(h^{5/9} B_3)] \cos \frac{S(x, h)}{h} + [h^{1/9} I_0 + h^{3/9} I_1 + O(h^{5/9} I_2)] \sin \frac{S(x, h)}{h} \right\}. \quad (6.1)$$

Введем функцию

$$S_{0,0}(\xi, \tilde{k}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2}{3} \xi^{3/2} - A_{-1} \sqrt{\xi} (2 \ln \xi - 4) + 2A_0 \sqrt{\xi} + 3\rho \tilde{k}^{2/3} \xi^{1/6} - \tilde{k} \pi^2 A_{-1} \ln \xi + \delta. \quad (6.2)$$

Так как при $x - \tilde{x}_-$ порядка ε асимптотики g и g_- согласованы, то, используя (6.2), (4.19), (4.20), для функции S из (6.1) имеем

$$\frac{S(x, h)}{h} = S_{0,0} \left(\frac{\varepsilon \sqrt[3]{\Omega_-}}{h^{2/3}}, \tilde{k}_- \right) + \frac{1}{h} \int_{\tilde{x}_- + \varepsilon}^x S'(x', h) dx' + O \left(\frac{h^{1/9}}{\varepsilon^{1/6}} \right), \quad h \rightarrow 0. \quad (6.3)$$

При построении ВКБ-асимптотики мы для определенности считали, что $k > 0$, $S' > 0$, $y = (2\pi x)^{-1/6} (k/S')^{2/3} > 0$. Совершенно аналогично рассматривается случай, когда $k < 0$, $S' < 0$, $y = (2\pi x)^{-1/6} (k/S')^{2/3} > 0$. В результате замены k на $-k$, S' на $-S'$ функции B_0, B_1, B_2 в (6.1) не изменятся, а I_0, I_1 поменяют знак. Сама же задача для фазы останется прежней. Надо лишь формулы, задающие $\tilde{k}_-, \tilde{k}_+$, записать в виде $\tilde{k}_- = |k|/(2\pi \tilde{x}_- \Omega_-^{4/3})$, $\tilde{k}_+ = |k|/(2\pi \tilde{x}_+ \Omega_+^{4/3})$. В результате получаем разложение

$$g^* = \frac{1}{h^{5/18}} \left\{ [B_0 + h^{2/9} B_1 + h^{4/9} B_2 + O(h^{5/9} B_3)] \cos \frac{S(x, h)}{h} + [-h^{1/9} I_0 - h^{3/9} I_1 + O(h^{5/9} I_2)] \sin \frac{S(x, h)}{h} \right\}, \quad (6.4)$$

где

$$\frac{S(x, h)}{h} = S_{0,0} \left(\frac{\varepsilon \sqrt[3]{\Omega_+}}{h^{2/3}}, \tilde{k}_+ \right) + \frac{1}{h} \int_x^{\tilde{x}_+ - \varepsilon} S'(x', h) dx' + O \left(\frac{h^{1/9}}{\varepsilon^{1/6}} \right), \quad h \rightarrow 0, \quad (6.5)$$

которое при $\tilde{x}_+ - x$ порядка ε согласовано с заданными формулами (4.14), (4.15) асимптотикой g_+ .

Чтобы обеспечить существование глобального асимптотического решения (1.11)–(1.13), потребуем тождественного совпадения функций g и g^* при $x \in (\tilde{x}_- + \varepsilon, \tilde{x}_+ - \varepsilon)$. В силу формул (6.1), (6.3)–(6.5) получаем равенства

$$\begin{aligned} & \cos\left(S_{0,0}\left(\frac{\varepsilon \sqrt[3]{\Omega_-}}{h^{2/3}}, \tilde{k}_-\right) + \frac{1}{h} \int_{\tilde{x}_- + \varepsilon}^x S'(x', h) dx' + O\left(\frac{h^{1/9}}{\varepsilon^{1/6}}\right)\right) \\ & \equiv \cos\left(S_{0,0}\left(\frac{\varepsilon \sqrt[3]{\Omega_+}}{h^{2/3}}, \tilde{k}_+\right) + \frac{1}{h} \int_x^{\tilde{x}_+ - \varepsilon} S'(x', h) dx' + O\left(\frac{h^{1/9}}{\varepsilon^{1/6}}\right)\right), \\ & \sin\left(S_{0,0}\left(\frac{\varepsilon \sqrt[3]{\Omega_-}}{h^{2/3}}, \tilde{k}_-\right) + \frac{1}{h} \int_{\tilde{x}_- + \varepsilon}^x S'(x', h) dx' + O\left(\frac{h^{1/9}}{\varepsilon^{1/6}}\right)\right) \\ & \equiv -\sin\left(S_{0,0}\left(\frac{\varepsilon \sqrt[3]{\Omega_+}}{h^{2/3}}, \tilde{k}_+\right) + \frac{1}{h} \int_x^{\tilde{x}_+ - \varepsilon} S'(x', h) dx' + O\left(\frac{h^{1/9}}{\varepsilon^{1/6}}\right)\right). \end{aligned} \quad (6.6)$$

Справедлива

ЛЕММА 6.1. *Равенства (6.6) имеют место тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$\begin{aligned} & S_{0,0}\left(\frac{\varepsilon \sqrt[3]{\Omega_-}}{h^{2/3}}, \tilde{k}_-\right) + \frac{1}{h} \int_{\tilde{x}_- + \varepsilon}^{\tilde{x}_+ - \varepsilon} S'(x', h) dx' + S_{0,0}\left(\frac{\varepsilon \sqrt[3]{\Omega_+}}{h^{2/3}}, \tilde{k}_+\right) \\ & = 2\pi n + O(h^{1/9}/\varepsilon^{1/6}), \end{aligned} \quad (6.7)$$

где n – целые.

Наряду с g и g^* рассмотрим также решение $-g^*$, которое получается из g заменой k на $-k$, S' на $-S'$, $y = (2\pi x)^{-1/6}(k/S')^{2/3}$ на $-y$. Возможность такой замены следует из формул (3.11). Потребовав при $x \in (\tilde{x}_- + \varepsilon, \tilde{x}_+ - \varepsilon)$ тождественного совпадения g и $-g^*$, приходим к условию

$$\begin{aligned} & S_{0,0}\left(\frac{\varepsilon \sqrt[3]{\Omega_-}}{h^{2/3}}, \tilde{k}_-\right) + \frac{1}{h} \int_{\tilde{x}_- + \varepsilon}^{\tilde{x}_+ - \varepsilon} S'(x', h) dx' + S_{0,0}\left(\frac{\varepsilon \sqrt[3]{\Omega_+}}{h^{2/3}}, \tilde{k}_+\right) \\ & = \pi + 2\pi n + O(h^{1/9}/\varepsilon^{1/6}), \end{aligned} \quad (6.8)$$

где n – целые. Наконец, объединяя (6.7), (6.8), получаем следующее правило квантования типа Бора–Зоммерфельда:

$$S_{0,0}\left(\frac{\varepsilon \sqrt[3]{\Omega_-}}{h^{2/3}}, \tilde{k}_-\right) + \frac{1}{h} \int_{\tilde{x}_- + \varepsilon}^{\tilde{x}_+ - \varepsilon} S'(x', h) dx' + S_{0,0}\left(\frac{\varepsilon \sqrt[3]{\Omega_+}}{h^{2/3}}, \tilde{k}_+\right) = \pi n. \quad (6.9)$$

Здесь n – целые; $S'(x, h) > 0$, а также $k > 0$ и $\tilde{x}_-, \tilde{x}_+, \Omega_-, \Omega_+$ являются решением задачи для фазы; $\varepsilon = h^{26/57}$, $\tilde{k}_-, \tilde{k}_+$ определены формулами (4.22), (4.23), а $S_{0,0}(\xi, \tilde{k})$ – формулой (6.2).

Правило (6.9) дает алгебраическое уравнение для определения $\lambda = \lambda_n(h)$. В (6.9) входят параметры $n \rightarrow \infty$ и $h \rightarrow 0$. Пусть их произведение ограничено некоторыми константами C_1, C_2 так, что

$$0 < C_1 \leq hn \leq C_2 < \infty. \quad (6.10)$$

Тогда $\lambda_n(h) = O(1)$ при $n \rightarrow \infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.1. При выводе (6.9) мы пренебрегли слагаемым $O(h^{1/9}/\varepsilon^{1/6})$. Кроме того, имеется еще погрешность при нахождении S' (см. (5.24)). Поэтому правило квантования (6.9) получено с точностью $O(h^{1/57} \ln \frac{1}{h})$, $h \rightarrow 0$.

6.2. Оценка невязки. Итак, глобальные асимптотические решения $g = g_n$ задачи (1.11)–(1.13) построены. Пусть $\lambda = \lambda_n(h)$ подчинены правилу (6.9). Тогда при $x \in (\tilde{x}_- + \varepsilon, \tilde{x}_+ - \varepsilon)$ асимптотические решения $g_n = g_n^{\text{БКВ}}$ задаются формулами (2.24), (3.1), (3.2), где остаточные члены таковы, что выполнено (2.27). Для x , находящихся вблизи и левее $\tilde{x}_-$, функции g_n определяются равенствами (4.1), (4.2), а для x , расположенных вблизи и правее $\tilde{x}_+$, – равенствами (4.14), (4.15). Входящие в (4.1), (4.14) функции G_- , G_+ удовлетворяют модельному уравнению (1.4). Вблизи от точек $\tilde{x}_- + \varepsilon$, $\tilde{x}_+ - \varepsilon$ асимптотики согласованы между собой. Используя разбиение единицы, g_n можно записать в виде

$$g_n = \chi_-^* g_- + (1 - \chi_-^* - \chi_+^*) g_n^{\text{БКВ}} + \chi_+^* g_+.$$

Подставим $g = g_n$ в уравнение (1.11) и оценим в норме $L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ возникающую невязку R_n . Так как $G_{\pm}(\xi, \eta)$ при $\xi \rightarrow -\infty$ экспоненциально убывают, то

$$\int_0^{\tilde{x}_- - \varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} R_n^2 dy dx = O(h^\infty), \quad \int_{\tilde{x}_+ + \varepsilon}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_n^2 dy dx = O(h^\infty), \quad h \rightarrow 0.$$

В силу (2.16), (5.23) при $x \in (\tilde{x}_- + \varepsilon, \tilde{x}_+ - \varepsilon)$ получаем $R_n = O(r^*) + O(RT)$, где r^* , R определяются равенствами (2.15), (2.17), (5.24). Наконец, если выполнено неравенство $|\tilde{x}_- - x| < \varepsilon$, то $R_n = r_-$, а если $|\tilde{x}_+ - x| < \varepsilon$, то $R_n = r_+$. Здесь r_- , r_+ заданы формулами (4.13), (4.17), в которых $g = g_n$.

Справедлива следующая оценка невязки R_n :

$$\|R_n\|_{L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})} = O\left(h^{1+1/57} \ln \frac{1}{h}\right), \quad h \rightarrow 0.$$

Кроме того, g_n удовлетворяет условию нормировки (1.12) с точностью $O(h^{\frac{2}{3} + \frac{1}{57}})$, а также условию (1.13) с точностью $O(h)$.

Итак, доказана основная теорема.

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть параметры h и n удовлетворяют условию (6.10). Тогда числа $\lambda = \lambda_n(h)$, заданные правилом квантования (6.9), являются асимптотическими собственными значениями задачи (1.11)–(1.13) с точностью $O(n^{-1-1/57} \ln n)$ при $n \rightarrow \infty$. Соответствующие асимптотические собственные функции $g = g_n$ удовлетворяют (1.11) с точностью $O(n^{-1-1/57} \ln n)$ в норме $L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$, условию нормировки (1.12) с точностью $O(n^{-2/3-1/57})$, а также условию (1.13) с точностью $O(n^{-1})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.2. Отметим, что построенные асимптотические решения $g_n(x, y)$ в конфигурационном пространстве $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ при $n \rightarrow \infty$ в слабом смысле (как обобщенные функции) сосредоточены на маломерном подмногообразии, а именно на отрезке $[\tilde{x}_-, \tilde{x}_+]$ прямой $y = 0$. В фазовом пространстве, т.е. в кокасательном расслоении на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, фронтом осцилляций этих функций служит изотропное подмногообразие – плоский диск D (1.3).

§ 7. Главное приближение к фазе

В этом параграфе мы построим асимптотическое решение задачи для главного приближения к фазе. Эта задача возникает при нахождении главного приближения для асимптотических собственных значений, когда в задаче для фазы можно отбросить ряд высших квантовых поправок. Из этой задачи находится главное приближение к фазе S , а также приближенные значения констант k , $\tilde{x}_-$, $\tilde{x}_+$.

7.1. Задача для главного приближения к фазе. Рассмотрим уравнения (5.7), (5.12)–(5.15), (5.23) (задача для фазы). Из (5.14), (5.15) вытекает, что

$$\Omega_- = U'(\tilde{x}_-) + O(h^{1/3}), \quad \Omega_+ = -U'(\tilde{x}_+) + O(h^{1/3}), \quad h \rightarrow 0. \quad (7.1)$$

Поскольку для заданной (5.1) функции $H(\xi)$ при $\tau \rightarrow +\infty$ справедливы равенства

$$\int_1^\tau (\ln \xi) H(\xi) d\xi = 2\sqrt{\tau}(\ln \tau - 2) + O(1), \quad \int_1^\tau H(\xi) d\xi = 2\sqrt{\tau} + O(1),$$

то из (5.12), (5.13) получаем

$$\begin{aligned} U(\tilde{x}_-) + 2h^{1/3} \left\{ -h^{1/3} \Omega_-^{2/3} \tilde{k}_- \sqrt{e_-} \left(\ln \left(\frac{\varepsilon}{8\tilde{x}_-} \right) - 2 \right) \right. \\ \left. + \int_{\tilde{x}_- + \varepsilon}^{\tilde{x}_+ - \varepsilon} \frac{1}{\pi(\tilde{x}_- + x')} K \left(\frac{2\sqrt{\tilde{x}_- x'}}{\tilde{x}_- + x'} \right) \frac{k dx'}{2S'(x', h)} \right. \\ \left. + h^{1/3} \frac{2\tilde{x}_+}{\tilde{x}_+ + \tilde{x}_-} K \left(\frac{2\sqrt{\tilde{x}_+ \tilde{x}_-}}{\tilde{x}_+ + \tilde{x}_-} \right) \Omega_+^{2/3} \tilde{k}_+ \sqrt{e_+} \right\} = O \left(h^{2/3} \ln \frac{1}{h} \right), \end{aligned} \quad (7.2)$$

$$\begin{aligned} U(\tilde{x}_+) + 2h^{1/3} \left\{ h^{1/3} \frac{2\tilde{x}_-}{\tilde{x}_+ + \tilde{x}_-} K \left(\frac{2\sqrt{\tilde{x}_- \tilde{x}_+}}{\tilde{x}_- + \tilde{x}_+} \right) \Omega_-^{2/3} \tilde{k}_- \sqrt{e_-} \right. \\ \left. + \int_{\tilde{x}_- + \varepsilon}^{\tilde{x}_+ - \varepsilon} \frac{1}{\pi(\tilde{x}_+ + x')} K \left(\frac{2\sqrt{\tilde{x}_+ x'}}{\tilde{x}_+ + x'} \right) \frac{k dx'}{2S'(x', h)} \right. \\ \left. - h^{1/3} \Omega_+^{2/3} \tilde{k}_+ \sqrt{e_+} \left(\ln \left(\frac{\varepsilon}{8\tilde{x}_+} \right) - 2 \right) \right\} = O \left(h^{2/3} \ln \frac{1}{h} \right). \end{aligned} \quad (7.3)$$

Здесь $e_\pm$, $\tilde{k}_\pm$ определены формулами (5.5), (4.22), (4.23), $\varepsilon = h^{26/57}$, $h \rightarrow 0$.

Далее, так как в силу (5.1), (5.2)

$$D_{-1}(\tilde{k}_\pm) + \int_1^{e_\pm} \frac{\tilde{k}_\pm}{2} H(\xi) d\xi = A_{-1}(\tilde{k}_\pm) + \tilde{k}_\pm \sqrt{e_\pm} + O \left(\frac{h^{1/3}}{\sqrt{\varepsilon}} \ln \frac{1}{h} \right), \quad (7.4)$$

то условие нормировки (5.7) принимает вид

$$\begin{aligned} h^{1/3} \Omega_-^{2/3} 2\pi \tilde{x}_- [A_{-1}(\tilde{k}_-) + \tilde{k}_- \sqrt{e_-}] + \int_{\tilde{x}_- + \varepsilon}^{\tilde{x}_+ - \varepsilon} \frac{k dx'}{2S'(x', h)} \\ + h^{1/3} \Omega_+^{2/3} 2\pi \tilde{x}_+ [A_{-1}(\tilde{k}_+) + \tilde{k}_+ \sqrt{e_+}] = 1 + O \left(h^{1/3+2/19} \ln \frac{1}{h} \right), \quad h \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Рассмотрим, наконец, уравнение (5.23).

ЛЕММА 7.1. При $h \rightarrow 0$, $x \in (\tilde{x}_- + \varepsilon, \tilde{x}_+ - \varepsilon)$ имеют место равенства

$$\begin{aligned}
& \Omega_- \int_{\tilde{x}_- + h^{2/3}/\sqrt[3]{\Omega_-}}^{\tilde{x}_- + \varepsilon} \frac{2\tilde{x}_-}{(x+x')} K\left(\frac{2\sqrt{xx'}}{x+x'}\right) \tilde{k}_- H\left(\frac{(x' - \tilde{x}_-)^{3/2}\sqrt{\Omega_-}}{h^{2/3}}\right) dx' \\
& + h^{2/3} \frac{4\tilde{x}_-}{x + \tilde{x}_-} K\left(\frac{2\sqrt{x\tilde{x}_-}}{x + \tilde{x}_-}\right) \Omega_-^{2/3} D_{-1}(\tilde{k}_-) \\
& = \frac{h^{2/3} \Omega_-^{2/3} 4\tilde{x}_-}{x + \tilde{x}_-} \left\{ K\left(\frac{2\sqrt{x\tilde{x}_-}}{x + \tilde{x}_-}\right) [A_{-1}(\tilde{k}_-) + \tilde{k}_- \sqrt{e_-}] \right. \\
& \quad \left. - \frac{\tilde{k}_-}{2} \int_0^{e_-} \ln \left| 1 - \frac{\xi' h^{2/3}}{(x - \tilde{x}_-)^{3/2}\sqrt{\Omega_-}} \right| \frac{d\xi'}{\sqrt{\xi'}} \right\} \\
& + O\left(h^{\frac{2}{3} + \frac{2}{19}} \ln \frac{1}{h} (1 + |\ln |x - \tilde{x}_-||)\right), \tag{7.6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \Omega_+ \int_{\tilde{x}_+ - \varepsilon}^{\tilde{x}_+ - h^{2/3}/\sqrt[3]{\Omega_+}} \frac{2\tilde{x}_+}{(x+x')} K\left(\frac{2\sqrt{xx'}}{x+x'}\right) \tilde{k}_+ H\left(\frac{(\tilde{x}_+ - x')^{3/2}\sqrt{\Omega_+}}{h^{2/3}}\right) dx' \\
& + \frac{h^{2/3} 4\tilde{x}_+}{x + \tilde{x}_+} K\left(\frac{2\sqrt{x\tilde{x}_+}}{x + \tilde{x}_+}\right) \Omega_+^{2/3} D_{-1}(\tilde{k}_+) \\
& = \frac{h^{2/3} \Omega_+^{2/3} 4\tilde{x}_+}{x + \tilde{x}_+} \left\{ K\left(\frac{2\sqrt{x\tilde{x}_+}}{x + \tilde{x}_+}\right) [A_{-1}(\tilde{k}_+) + \tilde{k}_+ \sqrt{e_+}] \right. \\
& \quad \left. - \frac{\tilde{k}_+}{2} \int_0^{e_+} \ln \left| 1 - \frac{\xi' h^{2/3}}{(\tilde{x}_+ - x)^{3/2}\sqrt{\Omega_+}} \right| \frac{d\xi'}{\sqrt{\xi'}} \right\} \\
& + O\left(h^{\frac{2}{3} + \frac{2}{19}} \ln \frac{1}{h} (1 + |\ln |x - \tilde{x}_+||)\right), \tag{7.7}
\end{aligned}$$

$$h^{8/9} \rho \frac{k^{2/3}}{(2\pi x S')^{2/3}} = O\left(\frac{h^{8/9}}{(x - \tilde{x}_-)^{1/3}}\right) + O\left(\frac{h^{8/9}}{(\tilde{x}_+ - x)^{1/3}}\right). \tag{7.8}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользовавшись (5.16), (7.4), а также соотношением

$$\begin{aligned}
& \Omega_- \int_{\tilde{x}_- + h^{2/3}/\sqrt[3]{\Omega_-}}^{\tilde{x}_- + \varepsilon} \ln |x - x'| \tilde{k}_- H\left(\frac{(x' - \tilde{x}_-)^{3/2}\sqrt{\Omega_-}}{h^{2/3}}\right) dx' \\
& + 2h^{2/3} \Omega_-^{2/3} D_{-1}(\tilde{k}_-) \ln |x - \tilde{x}_-| \\
& = 2h^{2/3} \Omega_-^{2/3} \left\{ \ln |x - \tilde{x}_-| [A_{-1}(\tilde{k}_-) + \sqrt{e_-} \tilde{k}_-] \right. \\
& \quad \left. + \frac{\tilde{k}_-}{2} \int_0^{e_-} \ln \left| 1 - \frac{\xi' h^{2/3}}{(x - \tilde{x}_-)^{3/2}\sqrt{\Omega_-}} \right| \frac{d\xi'}{\sqrt{\xi'}} \right\} \\
& + O\left(h^{2/3 + 2/19} \ln \frac{1}{h} (1 + |\ln |x - \tilde{x}_-||)\right),
\end{aligned}$$

приходим к (7.6). Аналогично проверяется (7.7). Так как при $x \rightarrow \tilde{x}_\pm$ имеем $S'(x, h) \sim \sqrt{U'(x_\pm)(x - \tilde{x}_\pm)}$, то оценка (7.8) также справедлива. Лемма доказана.

В силу (7.6)–(7.8) уравнение (5.23) принимает вид

$$\begin{aligned}
& - (S')^2 + U(x) + h^{1/3} \int_{\tilde{x}_- + \varepsilon}^{\tilde{x}_+ - \varepsilon} \frac{1}{\pi(x+x')} K\left(\frac{2\sqrt{xx'}}{x+x'}\right) \frac{k dx'}{S'(x', h)} \\
& + \frac{h^{2/3} \Omega_-^{2/3} 4\tilde{x}_-}{x + \tilde{x}_-} \left\{ K\left(\frac{2\sqrt{x\tilde{x}_-}}{x + \tilde{x}_-}\right) [A_{-1}(\tilde{k}_-) + \tilde{k}_- \sqrt{e_-}] \right. \\
& - \frac{\tilde{k}_-}{2} \int_0^{e_-} \ln \left| 1 - \frac{\xi' h^{2/3}}{(x - \tilde{x}_-) \sqrt[3]{\Omega_-}} \right| \frac{d\xi'}{\sqrt{\xi'}} \Big\} \\
& + \frac{h^{2/3} \Omega_+^{2/3} 4\tilde{x}_+}{x + \tilde{x}_+} \left\{ K\left(\frac{2\sqrt{x\tilde{x}_+}}{x + \tilde{x}_+}\right) [A_{-1}(\tilde{k}_+) + \tilde{k}_+ \sqrt{e_+}] \right. \\
& - \frac{\tilde{k}_+}{2} \int_0^{e_+} \ln \left| 1 - \frac{\xi' h^{2/3}}{(\tilde{x}_+ - x) \sqrt[3]{\Omega_+}} \right| \frac{d\xi'}{\sqrt{\xi'}} \Big\} = R^*, \tag{7.9}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
R^* = & O\left(h^{\frac{2}{3} + \frac{2}{19}} \ln \frac{1}{h} (1 + |\ln |x - \tilde{x}_-|| + |\ln |x - \tilde{x}_+||)\right) \\
& + O\left(\frac{h^{8/9}}{(x - \tilde{x}_-)^{1/3}}\right) + O\left(\frac{h^{8/9}}{(\tilde{x}_+ - x)^{1/3}}\right). \tag{7.10}
\end{aligned}$$

Здесь $e_{\pm}$, $\tilde{k}_{\pm}$ определены (5.5), (4.22), (4.23), $\varepsilon = h^{26/57}$, $x \in (\tilde{x}_- + \varepsilon, \tilde{x}_+ - \varepsilon)$.

Таким образом, получена задача для главного приближения к фазе. Она состоит из уравнений (7.2), (7.3), (7.5), (7.9), где $\Omega_{\pm}$ задаются соотношениями (7.1).

7.2. Нахождение главного приближения к фазе. Перейдем к построению решения задачи для главного приближения к фазе. Точность, с которой строится решение, соответствует точности, с которой получены уравнения (7.2), (7.3), (7.5), (7.9).

Но прежде всего введем ряд функций, необходимых для построения разложений, и изучим свойства этих функций. Среди них имеются негладкие (заданная формулой (1.17) функция $\Omega(x)$ не дифференцируема при $x = \tilde{x}_{\pm}$), что приводит к весьма нестандартным асимптотикам.

ЛЕММА 7.2. *Справедливы равенства*

$$\begin{aligned}
\Omega(x) = & \Omega(x_-) - \frac{\sqrt{x_- - x}}{x_- \sqrt{U'(x_-)}} \theta(x_- - x) + (x - x_-) \Phi_- \\
& + \left(-\frac{U''(x_-)}{12x_- (U'(x_-))^{3/2}} + \frac{1}{3x_-^2 \sqrt{U'(x_-)}} \right) (x_- - x)^{3/2} \theta(x_- - x) \\
& + O((x - x_-)^2), \quad x \rightarrow x_-, \tag{7.11}
\end{aligned}$$

$$\Omega(x) = \Omega(x_+) - \frac{\sqrt{x - x_+}}{x_+ \sqrt{-U'(x_+)}} \theta(x - x_+) + (x_+ - x) \Phi_+$$

$$\begin{aligned}
& + \left(-\frac{U''(x_+)}{12x_+(-U'(x_+))^{3/2}} + \frac{1}{3x_+^2\sqrt{-U'(x_+)}} \right) (x - x_+)^{3/2}\theta(x - x_+) \\
& + O((x - x_+)^2), \quad x \rightarrow x_+, \tag{7.12}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\Phi_- &= \frac{1}{2\pi x_-} \left[\Phi_-^* - \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx'}{(x' + x_-)\sqrt{U(x')}} \right] + \frac{1}{2} \int_{x_-}^{x_+} F_-(x', x_-) \frac{dx'}{\sqrt{U(x')}}, \\
\Phi_+ &= \frac{1}{2\pi x_+} \left[\Phi_+^* - \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx'}{(x' + x_+)\sqrt{U(x')}} \right] + \frac{1}{2} \int_{x_-}^{x_+} F_+(x', x_+) \frac{dx'}{\sqrt{U(x')}}.
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\Phi_-^* &= \int_{x_-}^{\infty} \frac{1}{(x' - x_-)} \left(\frac{\theta(x_+ - x')}{\sqrt{U(x')}} - \frac{1}{\sqrt{U'(x_-)(x' - x_-)}} \right) dx', \\
\Phi_+^* &= \int_{-\infty}^{x_+} \frac{1}{(x_+ - x')} \left(\frac{\theta(x' - x_-)}{\sqrt{U(x')}} - \frac{1}{\sqrt{U'(x_+)(x' - x_+)}} \right) dx', \\
F_+(x', x_-) &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{x_+ - x'} \left(\frac{1}{2x_+} E\left(\frac{2\sqrt{x_+x'}}{x_+ + x'} \right) - \frac{1}{x_+ + x'} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2x_+(x_+ + x')} K\left(\frac{2\sqrt{x_+x'}}{x_+ + x'} \right) \right],
\end{aligned}$$

а функции θ , F_- задаются (4.10), (4.5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (4.7)

$$\begin{aligned}
\Omega(x) &= \Omega(x_-) - \frac{1}{2\pi x_-} \int_{x_-}^{x_+} \ln \left| \frac{x - x'}{x_- - x'} \right| \frac{dx'}{\sqrt{U(x')}} \\
&\quad + \frac{(x - x_-)}{2} \int_{x_-}^{x_+} F_-(x', x_-) \frac{dx'}{\sqrt{U(x')}} \\
&\quad + \int_{x_-}^{x_+} \frac{(x' - x_-)}{2\pi x_- (x_- + x')} \ln \left| \frac{x - x'}{x_- - x'} \right| \frac{dx'}{\sqrt{U(x')}} \\
&\quad + (x - x_-) \int_{x_-}^{x_+} \frac{1}{\pi(x_- + x')^2} \ln \left| \frac{x - x'}{x_- - x'} \right| \frac{dx'}{\sqrt{U(x')}} \\
&\quad + O((x - x_-)^2), \quad x \rightarrow x_-. \tag{7.13}
\end{aligned}$$

Изучим входящие в (7.13) интегралы. Так как

$$\begin{aligned}
\int_{x_-}^{x_+} \ln \left| \frac{x - x'}{x_- - x'} \right| \frac{dx'}{\sqrt{U(x')}} &= \frac{2\pi\sqrt{x_- - x}}{\sqrt{U'(x_-)}} \theta(x_- - x) - (x - x_-) \Phi_-^* \\
&+ \frac{\pi}{6} \frac{U''(x_-)}{(U'(x_-))^{3/2}} (x_- - x)^{3/2} \theta(x_- - x) + O((x - x_-)^2), \quad x \rightarrow x_-, \tag{7.14}
\end{aligned}$$

то имеем

$$\begin{aligned} & \int_{x_-}^{x_+} \frac{1}{\pi(x_- + x')^2} \ln \left| \frac{x - x'}{x_- - x'} \right| \frac{dx'}{\sqrt{U(x')}} \\ &= \frac{\sqrt{x_- - x}}{2x_-^2 \sqrt{U'(x_-)}} \theta(x_- - x) + O(x_- - x), \quad x \rightarrow x_-. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Кроме того, поскольку

$$\begin{aligned} & \int_0^\xi \ln \left| 1 - \frac{1}{\tau} \right| \sqrt{\tau} d\tau = \left\{ \frac{2}{3} \tau^{3/2} \ln \left| 1 - \frac{1}{\tau} \right| - \frac{4}{3} \sqrt{\tau} + \frac{2}{3} \ln \left| \frac{1 + \sqrt{\tau}}{1 - \sqrt{\tau}} \right| \right\} \Big|_0^\xi \\ &= -2\sqrt{\xi} + O(1/\sqrt{\xi}), \quad \xi \rightarrow +\infty, \\ & \int_0^\xi \ln \left| 1 + \frac{1}{\tau} \right| \sqrt{\tau} d\tau = \left\{ \frac{2}{3} \tau^{3/2} \ln \left| 1 + \frac{1}{\tau} \right| + \frac{4}{3} \sqrt{\tau} - \frac{4}{3} \operatorname{arctg} \sqrt{\tau} \right\} \Big|_0^\xi \\ &= 2\sqrt{\xi} - 2\pi/3 + O(1/\sqrt{\xi}), \quad \xi \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} & \int_{x_-}^{x_+} \frac{(x' - x_-)}{2\pi x_- (x_- + x')} \ln \left| \frac{x - x'}{x_- - x'} \right| \frac{dx'}{\sqrt{U(x')}} \\ &= -\frac{(x - x_-)}{2\pi x_-} \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx'}{(x_- + x') \sqrt{U(x')}} - \frac{1}{6x_-^2 \sqrt{U'(x_-)}} (x_- - x)^{3/2} \theta(x_- - x) \\ &+ O((x - x_-)^2), \quad x \rightarrow x_-. \end{aligned} \quad (7.16)$$

Равенство (7.11) вытекает из (7.13)–(7.16). Соотношение (7.12) проверяется аналогично. Лемма доказана.

Определим

$$\begin{aligned} W_0(x, h) &\stackrel{\text{def}}{=} U(x) + h^{1/3} k_0 \Omega(x) \\ &+ h^{1/3} k_0 \left\{ \frac{\sqrt{x_- - x}}{x_- \sqrt{U'(x_-)}} \theta(x_- - x) + \frac{\sqrt{x - x_+}}{x_+ \sqrt{-U'(x_+)}} \theta(x - x_+) \right\} \\ &+ h^{1/3} k_0 \left\{ \frac{U''(x_-)}{12x_- (U'(x_-))^{3/2}} - \frac{1}{3x_-^2 \sqrt{U'(x_-)}} \right\} (x_- - x)^{3/2} \theta(x_- - x) \\ &+ \left(\frac{U''(x_+)}{12x_+ (-U'(x_+))^{3/2}} - \frac{1}{3x_+^2 \sqrt{-U'(x_+)}} \right) (x - x_+)^{3/2} \theta(x - x_+), \end{aligned}$$

где k_0 , $\Omega(x)$ задаются равенствами (1.16), (1.17). Пусть z_- , z_+ , $z_- \sim x_-$, $z_+ \sim x_+$, — те точки, в которых $W_0(z_\pm, h) = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} z_- &= x_- + h^{1/3} x_{-,1} + O(h^{2/3}), \quad h \rightarrow 0, \\ z_+ &= x_+ - h^{1/3} x_{+,1} + O(h^{2/3}), \quad h \rightarrow 0, \end{aligned}$$

где $x_{-,1} = -k_0\Omega(x_-)/U'(x_-)$, $x_{+,1} = k_0\Omega(x_+)/U'(x_+)$.

Из леммы 7.2 вытекает, что функция W_0 дважды дифференцируема в точках x_- , x_+ . Она имеет следующие асимптотики:

$$\begin{aligned} W_0(x, h) &= W'_0(z_-, h)(x - z_-) + \frac{W''_0(z_-, h)(x - z_-)^2}{2} + O((x - z_-)^3), \quad x \rightarrow z_-, \\ W_0(x, h) &= -W'_0(z_+, h)(z_+ - x) + \frac{W''_0(z_+, h)(z_+ - x)^2}{2} + O((z_+ - x)^3), \quad x \rightarrow z_+; \end{aligned}$$

здесь

$$\begin{aligned} W'_0(z_-, h) &= U'(x_-) + h^{1/3}k_0\Phi_- + h^{1/3}x_{-,1}U''(x_-) + O(h^{2/3}), \\ W''_0(z_-, h) &= U''(x_-) + O(h^{1/3}), \\ W'_0(z_+, h) &= U'(x_+) - h^{1/3}k_0\Phi_+ - h^{1/3}x_{+,1}U''(x_+) + O(h^{2/3}), \\ W''_0(z_+, h) &= U''(x_+) + O(h^{1/3}) \end{aligned}$$

и параметр $h \rightarrow 0$.

Наконец, определим

$$\begin{aligned} k_1 &\stackrel{\text{def}}{=} 2(1 - h^{1/3}[b_- + b_+]) \left(\int_{z_-}^{z_+} \frac{dx}{\sqrt{W_0(x, h)}} \right)^{-1}, \\ W_1(x, h) &\stackrel{\text{def}}{=} U(x) + h^{1/3}k_1 \int_{z_-}^{z_+} \frac{1}{\pi(x + x')} K\left(\frac{2\sqrt{xx'}}{x + x'}\right) \frac{dx'}{\sqrt{W_0(x', h)}} \\ &\quad + \frac{2h^{2/3}}{\pi} \left[\frac{b_-}{x + z_-} K\left(\frac{2\sqrt{xz_-}}{x + z_-}\right) + \frac{b_+}{x + z_+} K\left(\frac{2\sqrt{xz_+}}{x + z_+}\right) \right]. \end{aligned}$$

Справедлива

ТЕОРЕМА 7.1. *Функция*

$$\begin{aligned} S'(x, h) &= \sqrt{W_1(x, h)} + \frac{1}{\sqrt{W_1(x, h)}} \left\{ O\left(h^{2/3+2/19} \ln \frac{1}{h} (1 + |\ln |x - z_-|| \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + |\ln |x - z_+||) \right) + O\left(\frac{h^{8/9}}{(x - z_-)^{1/3}}\right) + O\left(\frac{h^{8/9}}{(z_+ - x)^{1/3}}\right) \right\}, \end{aligned} \quad (7.17)$$

а также константы

$$k = k_1 + O\left(h^{1/3+2/19} \ln \frac{1}{h}\right), \quad \tilde{x}_{\pm} = z_{\pm} + O\left(h^{2/3} \ln \frac{1}{h}\right) \quad (7.18)$$

являются асимптотическим решением задачи (7.2), (7.3), (7.5), (7.9). А именно, заданные формулами (7.17), (7.18) функция $S'(x, h)$ и константы k , $\tilde{x}_{\pm}$

удовлетворяют уравнению (7.9) с точностью R^* , где R^* имеет вид (7.10), условию нормировки (7.5) с точностью $O(h^{1/3+2/19} \ln 1/h)$, а также соотношениям (7.2), (7.3) с точностью $O(h^{2/3} \ln 1/h)$.

§ 8. Асимптотические собственные значения. Главное приближение

В этом параграфе мы получим алгебраическое уравнение, из которого находятся асимптотические собственные значения $\lambda_n(h) = O(1)$ с точностью $O(n^{-7/10})$ при $n \rightarrow \infty$ (главное приближение).

Если ограничиться такой точностью, то в правиле квантования (6.9) функцию $S_{0,0}$ можно заменить ее асимптотикой при $\xi \rightarrow +\infty$: $S_{0,0}(\xi, \tilde{k}) = 2\xi^{3/2}/3 + O(\sqrt{\xi} \ln \xi)$. Тогда с учетом (7.1) правило (6.9) примет вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} \left\{ \frac{2}{3} \varepsilon^{3/2} \sqrt{U'(\tilde{x}_-)} + \int_{\tilde{x}_- + \varepsilon}^{\tilde{x}_+ - \varepsilon} S'(x, h) dx + \frac{2}{3} \varepsilon^{3/2} \sqrt{-U'(\tilde{x}_+)} \right\} \\ & = \pi n + O\left(h^{-1/3+13/57} \ln \frac{1}{h}\right), \end{aligned} \quad (8.1)$$

где n – целые.

В (8.1) функция $S'(x, h)$, а также константы k , $\tilde{x}_-$, $\tilde{x}_+$ являются решением задачи (7.2), (7.3), (7.5), (7.9); $\varepsilon = h^{26/57}$.

Далее подставим формулы (7.17), (7.18) в (8.1) и разложим получившееся выражение по степеням $h^{1/3}$. Приходим к следующему уравнению для нахождения $\lambda_n(h)$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} \int_{x_-}^{x_+} \sqrt{U(x)} dx + \frac{k_0}{2h^{2/3}} \int_{x_-}^{x_+} \frac{\Omega(x)}{\sqrt{U(x)}} dx \\ & + \frac{1}{h^{1/3}} \left\{ \frac{k_0^3 P_1}{8} \int_{x_-}^{x_+} \frac{\Omega(x)}{\sqrt{U(x)}} dx - \frac{k_0^2 P_2}{4} - \frac{k_0^2 P_3}{8} + P \right\} \\ & = \pi n + O(h^{-1/3+1/30}), \quad h \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Здесь $U(x) = \lambda - V(x)$, $\Omega(x)$ имеет вид (1.17), n – целые, а коэффициенты k_0 , P_1 , P_2 , P_3 , P определяются формулами (1.16), (1.18)–(1.21).

Справедлива

ТЕОРЕМА 8.1. Пусть выполнено условие (6.10). Тогда числа $\lambda = \lambda_n(h)$, заданные правилом квантования (8.2), являются асимптотическими собственными значениями задачи (1.11)–(1.13) с точностью $O(n^{-7/10})$ при $n \rightarrow \infty$.

Список литературы

1. Карасев М. В., Перескоков А. В. Асимптотические решения уравнений Хартри, сосредоточенные вблизи маломерных подмногообразий. I. Модель с логарифмической особенностью // Изв. РАН. Сер. матем. 2001. Т. 65. № 5. С. 33–72.
2. Карасев М. В., Маслов В. П. Алгебры с общими перестановочными соотношениями и их приложения. II. Операторные унитарно-нелинейные уравнения // Соврем. пробл. математики. Т. 13. М.: ВИНТИ, 1979. С. 145–267.
3. Карасев М. В., Перескоков А. В. Логарифмические поправки в правиле квантования. Спектр полярона // ТМФ. 1993. Т. 97. № 1. С. 78–93.
4. Карасев М. В., Осипов Ю. В. Собственные функции уравнения Хартри–Фока, не обладающие сферической симметрией // ТМФ. 1982. Т. 52. № 2. С. 263–269.
5. Карасев М. В. Квантовая редукция на орбиты алгебр симметрий и задача Эренфеста. Препринт / ИТФ-87-157Р. Киев: ИТФ АН СССР, 1987.
6. Габдуллин Р. Р. Маломерная аппроксимация решений уравнения полярона Пекара. Препринт. Пушино: НЦБИ АН СССР, 1991.
7. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 3. М.: Наука, 1967.
8. Ильин А. М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.
9. Александров В. М., Мхитарян С. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983.
10. Абрамовиц М., Стиган И. (ред.) Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука, 1979.

Поступило в редакцию

13.III.1998