Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Г. Прохоров, В. В. Шокуров, Первая основная теорема о дополнениях: от глобального к локальному, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2001, том 65, выпуск 6, 99–128

DOI: <https://doi.org/10.4213/im366>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 11:35:22

УДК 512.7

Ю. Г. Прохоров, В. В. Шокуров

Первая основная теорема о дополнениях: от глобального к локальному

Цель настоящей статьи – прояснить и обобщить методы работы [24] (см. также [18] и [19]). Установлено, что для локальных стягиваний Фано существование дополнений может быть редуцировано к существованию дополнений для проективных многообразий Фано меньшей размерности.

Библиография: 26 наименований.

Введение

Цель настоящей статьи – прояснить и обобщить методы работы [24, § 7] (см. также [18], [19]). Докажем, что для локальных стягиваний Фано существование дополнений может быть редуцировано к существованию дополнений для проективных многообразий Фано меньшей размерности. Основная гипотеза о n -дополнениях (гипотеза 1.3 работы [24]) утверждает, что они ограничены для каждой заданной размерности.

Многочисленные результаты, полученные в работах [1], [6], [7], [9], [10], [14], [19], [21], [23], [24], свидетельствуют в пользу этой гипотезы. По существу, n -дополнение – это “хороший” элемент в кратной антилогканонической линейной системе. Как было отмечено в [23], дополнения имеют ряд хороших свойств, согласованных с ограничениями линейных систем и с теоремой Каваматы–Фивега об обращении в нуль. Последнее объясняет нетривиальное свойство-определение n -дополнений (ср. (1.1) ниже). В основной гипотезе мы рассмотрим логпары $(X/Z, D)$, состоящие из стягиваний Фано X/Z и границ D . Чтобы использовать индукцию в доказательстве гипотезы, нам необходимо разделить логпары и их дополнения на два класса по размерности базы Z : локальный, если $\dim(Z) > 0$, и глобальный в противном случае. Эквивалентно, в глобальном случае Z – точка, а X – проективное логмногообразие Фано. Мы докажем существование n -дополнения для локального логстягивания Фано, где $n \in N$ и множество N определяется классом проективных логмногообразий Фано меньшей размерности. Это называется *первой основной теоремой о дополнениях* (см. теорему 3.1 ниже): от глобального к локальному случаю. Доказательство использует логарифмическую программу минимальных моделей (логПММ), таким образом, оно является условным для размерностей $n = \dim(X) \geq 4$ и полным для $n \leq 3$. Основная идея состоит в том, чтобы продолжить n -дополнение с центрального слоя хорошей модификации для $(X/Z, D)$

Работа первого автора частично поддержана грантами INTAS-OPEN-97-2072 и РФФИ (грант № 99-01-01132). Работа второго автора выполнена при частичной поддержке гранта NSF-9800807.

(ср. доказательство теоремы 5.6 и пример 5.2 в [23]). Более того, такой подход позволяет контролировать некоторые численные инварианты дополнений, например индексы, их тип (исключительный или неисключительный) и регулярность (ср. [24, § 7]).

Вторая теорема, от локального к глобальному случаю, будет обсуждаться в следующей статье. Ее прототип представляет собой глобальный случай, рассмотренный в [24], который использует локальные и индуктивные дополнения [24, § 2] (ср. также понятие “тигра” в [9]). Элементарный, но на самом деле достаточно общий случай второй теоремы – теорема 5.1. Она представляет собой модификацию первой теоремы. Этот шаг также показывает, что главная трудность кроется в гипотезе Борисова–Алексеева (см. гипотезу 1.8) и касается ε_d -логтерминальных многообразий Фано размерности d , а именно что они ограничены для некоторых $\varepsilon_d > 0$, в зависимости от размерности d . В частности, $\varepsilon_2 = 6/7$ для размерности 2.

Статья организована следующим образом: § 1 – вспомогательный, в § 2 вводится очень важное понятие исключительных пар, в § 3 мы доказываем основной результат (теорема 3.1), некоторые следствия и приложения обсуждаются в § 4 и, наконец, в § 5 мы представляем глобальный вариант теоремы 3.1.

Первый автор выражает искреннюю благодарность Токийскому технологическому институту за гостеприимство и прекрасные условия для работы, предоставленные ему во время визита в 1999–2000 гг., в течение которого была подготовлена эта работа.

§ 1. Предварительные сведения

Пусть $K(X)$ – поле рациональных функции многообразия X ; запись $D_1 \approx D_2$ означает, что простые дивизоры задают одно и то же дискретное нормирование поля $K(X)$; K_X – канонический дивизор (Вейля), мы часто будем писать просто K , если это не ведет к разночтениям.

Все рассматриваемые многообразия суть алгебраические и определены над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. *Стягивание* $f: Y \rightarrow X$ – это проективный морфизм нормального многообразия такой, что $f_*\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X$. *Раздутия* и *сдутия* – это бирациональные стягивания. Используются стандартные определения, сокращения и обозначения из программы минимальных моделей такие, как ПММ, логканонические, логтерминальные по Кавамате, чисто логтерминальные особенности, $\equiv$, $\sim$, $[\cdot]$, $\lceil \cdot \rceil$, $\{\cdot\}$, $\overline{\text{NE}}(X/Z)$, $a(E, D)$, $\text{discr}(X, D)$, $\text{totaldiscr}(X, D)$; см. [8], [13], [11]. Всюду ниже, если не оговаривается противное, *граница* означает $\mathbb{Q}$ -границу, т.е. $\mathbb{Q}$ -дивизор Вейля $D = \sum d_i D_i$ такой, что $0 \leq d_i \leq 1$ для всех i . *Логмногообразие (логпара)* $(X/Z \ni o, D)$ – это по определению стягивание $X \rightarrow Z$ вместе с границей D на X , которое рассматривается локально вблизи слоя над $o \in Z$. Под размерностью логпары $(X/Z \ni o, D)$ мы всегда понимаем размерность тотального пространства X .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1 [23]. Пусть $(X/Z, D)$ – логмногообразие. Тогда:

1) *численное дополнение* – это $\mathbb{R}$ -граница $D' \geq D$ такая, что $K + D'$ логканоничен и численно тривиален;

- 2) $\mathbb{R}$ -дополнение – это $\mathbb{R}$ -граница $D' \geq D$ такая, что $K + D'$ логканоничен и $\mathbb{R}$ -линейно тривиален;
- 3) $\mathbb{Q}$ -дополнение – это $\mathbb{Q}$ -граница $D' \geq D$ такая, что $K + D'$ логканоничен и $\mathbb{Q}$ -линейно тривиален;
- 4) если $D = S + B$, где $S = \lfloor D \rfloor$, $B = \{D\}$, то n -дополнение – это $\mathbb{Q}$ -граница D^+ такая, что $K + D^+$ логканоничен, $n(K + D^+) \sim 0$ и

$$nD^+ \geq nS + \lfloor (n+1)D \rfloor. \quad (1.1)$$

Заметим, что $\mathbb{R}$ -дополнения могут быть рассмотрены как n -дополнения для $n = \infty$, так как предел в неравенстве (1.1) при $n \rightarrow \infty$ дает $D' \geq D$. Все эти определения имеют смысл и в более общей ситуации, когда D – $\mathbb{R}$ -субграница (т.е. $\mathbb{R}$ -дивизор $D = \sum d_i D_i$ с $d_i \leq 1$ для всех i).

Очевидно, верны следующие импликации:

$$\exists \mathbb{Q}\text{-дополнение} \implies \exists \mathbb{R}\text{-дополнение} \implies \exists \text{численное дополнение}.$$

Простой пример, приведенный ниже, показывает, что n -дополнение не обязано быть $\mathbb{Q}$ -дополнением (даже численным).

ПРИМЕР 1.2. Пусть P_1, P_2, P_3 – различные точки на $\mathbb{P}^1$. Положим

$$D := P_1 + \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)P_2 + \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)P_3, \quad D' := P_1 + \frac{1}{2}P_2 + \frac{1}{2}P_3,$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$. Тогда $K + D'$ является 2-дополнением логдивизора $K + D$. Однако неравенство $D' \geq D$ неверно, т.е. $K + D'$ не является $\mathbb{Q}$ -дополнением логдивизора $K + D$.

При дополнительном ограничении на коэффициенты D (например, если коэффициенты D стандартные, см. ниже п. А) неравенство $D^+ \geq D$ имеет место (см. [24, лемма 2.7] или [20, п. 4.2]), значит, в этом случае D^+ – $\mathbb{Q}$ -дополнение.

Вопрос о существовании дополнений естественно возникает для многообразий типа Фано или Калаби–Яо, т.е. для многообразия с численно эффективным антилогканоническим дивизором, но численная эффективность дивизора $-(K + D)$ не гарантирует существование дополнений [24, пример 1.1].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3 [23, предложение 5.5]. Пусть $(X/Z \ni o, D)$ – логмногообразие. Предположим, что пара (X, D) логканонична и дивизор $-(K + D)$ (полу)обилен над Z . Тогда вблизи слоя над o существует $\mathbb{Q}$ -дополнение логдивизора $K + D$.

Введем следующие обозначения.

А. Фиксируем подмножество $\Phi \subset [0, 1]$. Будем писать $D \in \Phi$, если все коэффициенты дивизора D содержатся в Φ . Например, мы можем рассмотреть $\Phi = \Phi_{\text{sm}} := \{1 - 1/m \mid m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}\}$ (это называется случаем стандартных коэффициентов). Однако некоторые из наших утверждений и гипотез могут быть сформулированы и для другого выбора Φ (см., например, (1.3) ниже).

В. Пусть (X, D) – проективное логмногообразие такое, что:

- 1) пара (X, D) логканонична;
- 2) $D \in \Phi$;
- 3) дивизор $-(K_X + D)$ численно эффективен и объемен;
- 4) существует некоторое $\mathbb{Q}$ -дополнение логдивизора $K_X + D$ (это условие выполнено, если дивизор $-(K_X + D)$ полуобилеен; например, согласно [8, теорема 3-1-2] оно выполнено, если $K_X + D$ логтерминален по Кавамате).

Такие пары мы называем *логмногообразиями Фано*.

В обозначениях п. В определим минимальный индекс дополнений как

$$\text{compl}(X, D) := \min\{m \mid K_X + D \text{ } m\text{-дополняем}\} \quad (1.2)$$

и рассмотрим множество

$$N_d(\Phi) := \{m \in \mathbb{N} \mid \exists \text{ логмногообразие Фано } (X, D) \text{ размерности } d \text{ такое, что } D \in \Phi \text{ и } \text{compl}(X, D) = m\}.$$

Например, $N_1([0, 1]) = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ (см. [23]). Рассматривая произведения многообразия X с проективной прямой $\mathbb{P}^1$, можно показать, что $N_{d-1}(\Phi) \subset N_d(\Phi)$. Положим $N_0([0, 1]) = \{1, 2\}$. По индукции определим

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathbf{m}}^1 &:= \Phi_{\mathbf{sm}}, & N_1 &:= \max N_1(\Phi_{\mathbf{m}}^1), \\ \Phi_{\mathbf{m}}^d &:= \Phi_{\mathbf{sm}} \cup \left[1 - \frac{1}{N_{d-1} + 1}, 1\right], & N_d &:= \max \left(\bigcup_{k=1}^d N_d(\Phi_{\mathbf{m}}^k) \right). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Мы не исключаем случая $N_d = \infty$ (и тогда $\Phi_{\mathbf{m}}^d := \Phi_{\mathbf{sm}}$), однако мы надеемся, что $N_d < \infty$ (см. ниже гипотезу 1.7). Согласно [23, пример 5.2] имеем

$$N_1 = 6, \quad \Phi_{\mathbf{m}}^2 = \Phi_{\mathbf{sm}} \cup [6/7, 1].$$

В работе [24] было доказано, что N_2 конечно. По построению $N_d \geq N_{d'}$ и $\Phi_{\mathbf{m}}^d \subset \Phi_{\mathbf{m}}^{d'}$, если $d \geq d'$.

ЛЕММА 1.4 (ср. [24, лемма 2.7]). *Если $\alpha \in \Phi_{\mathbf{m}}^d$, то для любого $n \leq N_{d-1}$ имеем*

$$\lfloor (n+1)\alpha \rfloor \geq n\alpha.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\alpha \in \Phi_{\mathbf{sm}}$, то $\alpha = 1 - 1/m$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. В этом случае мы запишем $n\alpha = q + k/m$, где $q = \lfloor n\alpha \rfloor$ и $k/m = \{n\alpha\}$, $k \in \mathbb{Z}$, $0 \leq k \leq m - 1$. Тогда

$$\lfloor (n+1)\alpha \rfloor = \lfloor q + k/m + 1 - 1/m \rfloor = \begin{cases} q, & \text{если } k = 0, \\ q + 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В обоих случаях $\lfloor (n+1)\alpha \rfloor \geq q + k/m = n\alpha$. Предположим, что $\alpha \notin \Phi_{\mathbf{sm}}$. Тогда

$$\alpha > 1 - \frac{1}{n_{d-1} + 1}$$

и

$$\lfloor (n+1)\alpha \rfloor \geq \left\lfloor n + 1 - \frac{n+1}{n_{d-1} + 1} \right\rfloor \geq n \geq n\alpha.$$

СЛЕДСТВИЕ 1.5. Пусть (X, D) – логпара такая, что $D \in \Phi_{\mathbf{m}}^d$, и пусть D^+ – n -дополнение, где $n \leq N_{d-1}$. Тогда $D^+ \geq D$.

ЛЕММА 1.6 (ср. [23, лемма 4.2]). Пусть (X, D) – логканоническое логмногообразие, и пусть $S := \lfloor D \rfloor$, $B := \{D\}$. Предположим, что дивизор $K + S$ чисто логтерминален и $D \in \Phi_{\mathbf{m}}^d$ для некоторого d (соответственно, $D \in \Phi_{\mathbf{sm}}$). Тогда $\text{Diff}_S(B) \in \Phi_{\mathbf{m}}^d$ (соответственно, $\text{Diff}_S(B) \in \Phi_{\mathbf{sm}}$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем $B = \sum b_j B_j$, $0 < b_j < 1$. Пусть α – коэффициент $\text{Diff}_S(B)$. Тогда (см. [23, следствие 3.10])

$$\alpha = \frac{m-1}{m} + \sum_j \frac{b_j n_j}{m}, \quad (1.4)$$

где $m \in \mathbb{N}$, $n_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Так как пара $(S, \text{Diff}_S(B))$ логканонична (см. [13, теорема 17.7]), то $\alpha \leq 1$ и можно предположить, что $\alpha < 1$. Используя неравенство $b_j \geq 1/2$, легко показать, что в равенстве (1.4) имеет место $\sum n_j \leq 1$ (см. [23, лемма 4.2]). Если в (1.4) $n_j = 0$ для всех j , то, очевидно, $\alpha \in \Phi_{\mathbf{sm}}$. В противном случае $n_{j_0} = 1$ для некоторого j_0 и в (1.4) $n_j = 0$ для $j \neq j_0$. Тогда

$$\alpha = (m-1 + b_{j_0})/m.$$

Если $b_{j_0} \in \Phi_{\mathbf{sm}}$, то $b_{j_0} = 1 - 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, и $\alpha = \frac{mn-1}{mn} \in \Phi_{\mathbf{sm}}$. Если же $b_{j_0} \geq 1 - \frac{1}{N_{d-1}+1}$, то

$$\alpha \geq b_{j_0} \geq 1 - \frac{1}{N_{d-1}+1}.$$

В обоих случаях $\alpha \in \Phi_{\mathbf{m}}^d$.

ГИПОТЕЗА 1.7. В обозначениях п. В множество $N_d(\Phi)$ конечно.

Доказательство гипотезы 1.7 для размерности два, предложенное в работе [24], существенным образом использует результаты об ограниченности для логповерхностей дель Пешо [2] (см. также [17]). Для произвольной размерности имеется следующая

ГИПОТЕЗА 1.8. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Пусть (X, D) – нормальное проективное логмногообразие такое, что:

- 1) дивизор $K + D$ является $\mathbb{Q}$ -картье;
- 2) $\text{totaldiscr}(X, D) > -1 + \varepsilon$;
- 3) дивизор $-(K_X + D)$ численно эффективен и обремен.

Тогда многообразие X принадлежит конечному числу алгебраических семейств.

Известно, что эта гипотеза верна при $\dim(X) = 2$. Для $\dim(X) \geq 3$ имеются только отдельные результаты в этом направлении [3], [4]. Новый подход к доказательству гипотезы 1.8 был предложен в работе [9, § 9].

ГИПОТЕЗА 1.9 (индуктивная гипотеза). Пусть пара (X, D) удовлетворяет условиям п. В (в частности, $D \in \Phi$). Предположим, что существует $\mathbb{Q}$ -дополнение дивизора $K + D$, которое не логтерминально по Кавамате. Тогда $K + D$ имеет n -дополнение для $n \in N_{d-1}(\Phi)$. Более того, это новое дополнение также может быть взято не логтерминальным по Кавамате.

Можно ожидать справедливость гипотезы 1.9 для $\Phi = \Phi_{sm}$ или $\Phi = \Phi_m^d$, где $d = \dim(X)$. Однако в общем случае она неверна [24, пример 2.4], [20, п. 8.1]. В настоящее время эта гипотеза доказана для $\dim(X) = 2$ и $\Phi = \Phi_m^2$ [24, § 2] (даже в более сильной форме).

§ 2. ИСКЛЮЧИТЕЛЬНОСТЬ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Мы говорим, что стягивание $f: X \rightarrow Z$ имеет *локальный тип*, если $\dim(Z) > 0$. В противном случае (т.е. когда Z – точка) мы говорим, что стягивание $f: X \rightarrow Z$ *глобального типа*.

Таким образом, стягивание локального типа может быть либо бирациональным, либо расслоенным. В обоих случаях нас интересует структура $f: X \rightarrow Z$ вблизи фиксированного слоя $f^{-1}(o)$, $o \in Z$, и обычно мы считаем, что X – достаточно малая окрестность слоя над o .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2 (см. [23, § 5], [24, определение 1.5]). Пусть $(X/Z \ni o, \Delta)$ – логмногообразие локального типа. Предположим, что $K + \Delta$ имеет по крайней мере одно $\mathbb{Q}$ -дополнение вблизи слоя над o . Тогда мы назовем логмногообразие $(X/Z \ni o, \Delta)$ *исключительным*, если для любого $\mathbb{Q}$ -дополнения¹ $K + \Delta^+$ дивизора $K + \Delta$ вблизи слоя над o существует не более одного дивизора E поля $K(X)$ такого, что $a(E, \Delta^+) = -1$.

Ясно, что свойство исключительности зависит от выбора базисной точки $o \in Z$. Непосредственно из определения следует

ЛЕММА 2.3. Пусть $(X/Z \ni o, \Delta)$ и $(X'/Z \ni o, \Delta')$ – логмногообразия (локального или глобального типа), и пусть $f: X \rightarrow X'$ – стягивание над Z . Предположим, что дивизор $K_{X'} + \Delta'$ является $\mathbb{Q}$ -картье и Δ – крепантный прообраз Δ' (т.е. $f^*(K_{X'} + \Delta') = K_X + \Delta$ и $f_*\Delta = \Delta'$). Тогда логмногообразие $(X/Z \ni o, \Delta)$ исключительно, если и только если логмногообразие $(X'/Z \ni o, \Delta')$ является таковым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из [11, предложение 3.10].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. Пусть $(X/Z \ni o, \Delta)$ – логмногообразие локального типа, и пусть D, D' – $\mathbb{Q}$ -дополнения такие, что $K + D$ и $K + D'$ не логтерминальны по Кавамате. Пусть S и S' – простые дивизоры поля $K(X)$ такие, что $a(S, D) = -1$ и $a(S', D') = -1$. Предположим, что $S \not\approx S'$. Тогда существует $\mathbb{Q}$ -дополнение G логдивизора $K + \Delta$ такое, что $a(S, G) = a(E, G) = -1$ для некоторого дивизора $E \not\approx S$ поля $K(X)$.

¹Можно считать, что для любого $\mathbb{R}$ -дополнения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (ср. [14, предложение 2.7], [7, предложение 2.4]). Заметим, что дивизор $D' - D$ является $\mathbb{Q}$ -карте и численно тривиален над Z . Положим $D(\alpha) := D + \alpha(D' - D)$. Тогда $D(0) = D$, $D(1) = D'$ и $K + D(\alpha)$ — $\mathbb{Q}$ -дополнение для всех $0 \leq \alpha \leq 1$ (по выпуклости свойства логканоничности см. [23, п. 1.4.1] или [13, предложение 2.17]). Зафиксируем эффективный дивизор Картье L на Z (проходящий через o) и положим $F := f^*L$. Для $0 \leq \alpha \leq 1$ определим функцию

$$\varsigma(\alpha) := \sup\{\beta \mid K + D(\alpha) + \beta F \text{ логканоничен}\},$$

и положим $T(\alpha) := D(\alpha) + \varsigma(\alpha)F$. Зафиксируем некоторое логразрешение $(X, D + D' + F)$, и пусть $\sum E_i$ — объединение исключительного дивизора и собственного прообраза $\text{Supp}(D + D' + F)$. Тогда функция $\varsigma(\alpha)$ может быть вычислена так:

$$\varsigma(\alpha) = \max_{E_i} \{\beta \mid a(E_i, D(\alpha) + \beta F) \geq -1\}$$

(см., например, [8, п. 0-2-12]). В частности, $\varsigma(\alpha) \in \mathbb{Q}$. Следовательно, логдивизор $K + T(\alpha)$ является $\mathbb{Q}$ -дополнением. По рассуждениям, приведенным выше, число $\beta = \varsigma(\alpha)$ может быть вычислено из линейных неравенств $a(E_i, D(\alpha) + \beta F) \geq -1$, где E_i пробегает некоторое конечное число простых дивизоров. Поэтому функция $\varsigma(\alpha)$ кусочно линейна и непрерывна по α и такими же являются коэффициенты дивизора $T(\alpha)$. По построению пара $(X, T(\alpha))$ не логтерминальна по Кавамате для всех $0 \leq \alpha \leq 1$. Мы утверждаем, что $a(S, T(0)) = -1$. В самом деле, $T(0) = D + \varsigma(0)F \geq D$. Таким образом, $a(S, T(0)) \leq a(S, D) = -1$. Так как дивизор $K + T(0)$ логканоничен, то $a(S, T(0)) = -1$. Далее возьмем

$$\alpha_0 := \sup\{\alpha \mid a(S, T(\alpha)) = -1\}.$$

По рассуждениям, приведенным выше, α_0 рационально (и $a(S, T(\alpha_0)) = -1$). Если $\alpha_0 = 1$, то положим $G := T(1)$ и $E = S'$. В противном случае для любых $\alpha > \alpha_0$ выполнено неравенство $a(S, T(\alpha)) > -1$. Следовательно, существует дивизор $E \not\approx S$ поля $K(X)$ такой, что $a(E, T(\alpha)) = -1$. Снова E можно выбрать среди компонент $\sum E_i$. Таким образом, E не зависит от α , если $0 < \alpha - \alpha_0 \ll 1$. Очевидно, $a(E, T(\alpha_0)) = -1$, и можно положить $G := T(\alpha_0)$.

СЛЕДСТВИЕ 2.5. Пусть $(X/Z \ni o, \Delta)$ — неискл^ючительное логмногообразие локального типа и $D \geq \Delta$ — $\mathbb{Q}$ -дополнение такие, что пара (X, D) не является логтерминальной по Кавамате. Пусть S — дивизор поля $K(X)$ такой, что $a(S, D) = -1$. Тогда имеется $\mathbb{Q}$ -дополнение $G \geq \Delta$ такое, что $a(S, G) = a(E, G) = -1$ для некоторого дивизора $E \not\approx S$ поля $K(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как пара $(X/Z \ni o, \Delta)$ неискл^ючительна, то имеется $\mathbb{Q}$ -дополнение $D' \geq \Delta$ такое, что $a(S', D') = -1$ для некоторого $S' \not\approx S$. Далее применяем предложение 2.4.

СЛЕДСТВИЕ 2.6. Пусть $(X/Z \ni o, \Delta)$ — искл^ючительное логмногообразие локального типа. Тогда существует однозначно определенный дивизор S поля $K(X)$ такой, что для любого $\mathbb{Q}$ -дополнения D имеем $a(E, D) > -1$, если $E \not\approx S$ в $K(X)$.

Назовем дивизор S , определенный в следствии 2.6, *центр^{альным} дивизором* искл^ючительной логпары $(X/Z \ni o, \Delta)$.

СЛЕДСТВИЕ 2.7. Пусть $(X/Z \ni o, \Delta)$ – исключительное логмногообразие локального типа и S – центральный дивизор. Тогда центр S на X содержится в слое над o .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $K + D$ – $\mathbb{Q}$ -дополнение такое, что $a(S, D) = -1$, и пусть H – общее гиперплоское сечение многообразия Z , проходящее через o . Если f^*H не содержит центр S , то $\text{mult}_S f^*H = 0$ и $a(S, D) = a(S, D + cf^*H) = -1$ для всех c . Возьмем c , для которого $K + D + cf^*H$ максимально логканоничен. Тогда, как и в доказательстве предложения 2.4, $a(E, D + cf^*H) = -1$ для некоторого $E \not\approx S$. Противоречие.

ПРИМЕР 2.8. Рассмотрим логканоническую особенность $X \ni o$ (т.е. $X = Z$ и $\Delta = 0$). Тогда эта особенность исключительна, если и только если для любой границы B на X такой, что пара (X, B) логканонична, существует не более одного дивизора E поля $K(X)$ такого, что $a(E, B) = -1$. Например, двумерная логтерминальная особенность исключительна, если и только если она имеет тип $\mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7$ или $\mathbb{E}_8$ (см. [23, пример 5.2.3], [14]).

В глобальном случае определение 2.2 выглядит несколько иначе.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.9. Пусть (X, Δ) – логмногообразие глобального типа. Предположим, что дивизор $K + \Delta$ имеет хотя бы одно n -дополнение. Тогда говорят, что пара (X, Δ) *исключительна*, если любое $\mathbb{Q}$ -дополнение $K + \Delta^+$ дивизора $K + \Delta$ логтерминально по Кавамате (т.е. $a(E, \Delta^+) > -1$ для любого дивизора E поля $K(X)$).

ПРИМЕР 2.10. i) Пусть $X = \mathbb{P}^1$, Z – точка и

$$\Delta = \sum_{i=1}^r (1 - 1/m_i) P_i, \quad m_i \in \mathbb{N},$$

где $P_1, \dots, P_r$ – различные точки. Дивизор $-(K + \Delta)$ численно эффективен, если и только если $\sum_{i=1}^r (1 - 1/m_i) \leq 2$. В этом случае набор $(m_1, \dots, m_r)$ дает нам исключительную пару, если и только если он (с точностью до перестановок) один из следующих:

$$\begin{aligned} E_6 : (2, 3, 3), & \quad E_7 : (2, 3, 4), & \quad E_8 : (2, 3, 5), \\ \tilde{E}_6 : (3, 3, 3), & \quad \tilde{E}_7 : (2, 4, 4), & \quad \tilde{E}_8 : (2, 3, 6), \\ \tilde{D}_4 : (2, 2, 2, 2). \end{aligned}$$

ii) Пусть $X = \mathbb{P}^d$, Z – точка и

$$\Delta = \sum_{i=1}^{d+2} (1 - 1/m_i) \Delta_i, \quad m_i \in \mathbb{N},$$

где $\Delta_1, \dots, \Delta_{d+2}$ – гиперплоскости в $\mathbb{P}^d$. Логдивизор $-(K + \Delta)$ численно эффективен, если и только если $\sum 1/m_i \leq 1$. Если логпара (X, Δ) исключительна, то

дивизор $-(K + \Delta_j + \sum_{i \neq j} (1 - 1/m_i) \Delta_i)$ не является численно эффективным для всех j . Следовательно, $\sum_{i \neq j} 1/m_i > 1$. Теперь нетрудно показать существование констант $\text{Const}(d)$ таких, что $m_j \leq \text{Const}(d)$ для всех j (ср. [11, пример 8.16]). Поэтому имеется только конечное число возможностей для исключительных наборов $(m_1, \dots, m_{d+2})$.

Эти примеры и многие другие факты (см. [24], [14], [7], [19], [6], [21]) показывают, что в общей ситуации можно ожидать выполнения следующих принципов:

- 1) неисклительные пары имеют хорошие свойства линейной системы $| -m(K + D) |$ для некоторого малого m ;
- 2) исключительные пары могут быть классифицированы.

§ 3. Стягивания Фано

В этом параграфе мы докажем теорему 3.1. Двумерная версия этого результата была доказана вторым автором в [23]. Затем это было обобщено в [24], [19].

ТЕОРЕМА 3.1 (локальный случай). Пусть $\Phi := \Phi_{\mathbf{m}}^d$ (или $\Phi := \Phi_{\mathbf{sm}}$), и пусть $(X/Z \ni o, D)$ – d -мерное логногообразие локального типа такое, что:

- 1) $D \in \Phi$;
- 2) пара (X, D) логтерминальна по Кавамате;
- 3) дивизор $-(K + D)$ численно эффективен и объемен над Z .

Пусть $f: X \rightarrow Z$ – структурный морфизм. Предположим, что логПММ верна в размерности d . Тогда существует не логтерминальное по Кавамате n -дополнение дивизора $K + D$ вблизи $f^{-1}(o)$ для некоторого целого $n \in N_{d-1}(\Phi)$. Более того, если пара $(X/Z \ni o, D)$ неисклительна и гипотеза 1.9 выполнена в размерностях $d' \leq d - 1$ для $\Phi = \Phi_{\mathbf{m}}^d$ (соответственно, $\Phi = \Phi_{\mathbf{sm}}$), то дивизор $K + D$ n -дополняем вблизи слоя $f^{-1}(o)$ для $n \in N_{d-2}(\Phi)$. Это дополнение также может быть выбрано неисклительным.

В неисклительном случае мы ожидаем более точных результатов; тогда особенности дополнения должны зависеть от топологической структуры существенного исклительного дивизора (см. [24, § 7]).

ПРИМЕР 3.2. Пусть $(Z \ni o)$ – двумерная дювалевская особенность (рациональная двойная точка), $D = 0$ и f – тождественное отображение. Имеется не логтерминальное по Кавамате n -дополнение дивизора K_Z для некоторого $n \in N_1(\Phi_{\mathbf{sm}}) = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ (см. [23, пример 5.2.3]). Особенность неисклительна, если она имеет тип A_n или D_n . В этих случаях имеется не логтерминальное по Кавамате n -дополнение для $n \in N_0(\Phi_{\mathbf{sm}}) = \{1, 2\}$.

Ключевая идея доказательства теоремы 3.1 проста: мы находим некоторое специальное раздутие X с неприводимым исклительным дивизором S (предложение 3.6) и затем применяем индуктивные свойства дополнений (предложение 6.2) для того, чтобы свести проблему к многообразию S меньшей размерности (но уже, возможно, проективному).

ЛЕММА 3.3. Пусть $(X/Z, D)$ – логмногообразие такое, что пара (X, D) логтерминальна по Кавамате и дивизор $-(K_X + D)$ численно эффективен и обилен над Z . Тогда существует эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор D^U такой, что пара $(X, D + D^U)$ снова логтерминальна по Кавамате, а дивизор $-(K_X + D + D^U)$ обилен над Z .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из леммы Кодаиры (см., например, [8, лемма 0-3-3]).

СЛЕДСТВИЕ 3.4. В обозначениях и предположениях леммы 3.3 конус Мори $\overline{NE}(X/Z)$ полиэдрален и порождается стягиваемыми экстремальными рациональными кривыми.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.5. Пусть (X, Δ) – логмногообразие и $g: Y \rightarrow X$ – раздутие такое, что исключительное множество g содержит в точности один неприводимый дивизор S . Предположим, что пара $(Y, \Delta_Y + S)$ чисто логтерминальна и дивизор $-(K_Y + \Delta_Y + S)$ g -обилен. Тогда $g: (Y \supset S) \rightarrow X$ называется *чисто логтерминальным раздутием* пары (X, Δ) .

В отличие от логтерминальных модификаций [25, теорема 3.1] чисто логтерминальные раздутия не являются логкрепантными.

Пусть $(X \ni o, D)$ – исключительная особенность. Тогда по следствию 2.6 имеется не более одного чисто логтерминального раздутия (см. [18, предложение 6]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.6 (см. [18], [20, п. 3.1], ср. [26]). Пусть $(X, \Delta + \Delta^0)$ – логмногообразие такое, что многообразие X $\mathbb{Q}$ -факториально, $\Delta \geq 0$, $\Delta^0 \geq 0$, дивизор $K + \Delta + \Delta^0$ логканоничен, но не чисто логтерминален, а $K + \Delta$ логтерминален по Кавамате. (Мы не утверждаем, что Δ и Δ^0 не имеют общих компонент.) Предположим, что верна логПММ в размерности $\dim(X)$. Тогда существует чисто логтерминальное раздутие $g: (Y \supset S) \rightarrow X$ пары (X, Δ) такое, что:

- 1) дивизор $K_Y + \Delta_Y + S + \Delta_Y^0 = g^*(K + \Delta + \Delta^0)$ логканоничен;
- 2) дивизор $K_Y + \Delta_Y + S + (1 - \varepsilon)\Delta_Y^0$ чисто логтерминален и антиобилен над X для любых $\varepsilon > 0$;
- 3) многообразие Y $\mathbb{Q}$ -факториально и $\rho(Y/X) = 1$.

Раздутия такого рода мы называем *индуктивными раздутиями* пары $(X, \Delta + \Delta^0)$. Важно отметить, что это определение зависит от Δ и Δ^0 , а не только от $\Delta + \Delta^0$. Такие раздутия часто применяются в теории дополнений. В локальном случае можно сконструировать границу Δ^0 такую, как в предложении 3.6, добавляя полный прообраз некоторого $\mathbb{Q}$ -дивизора на Z . В глобальном случае проблема построения Δ^0 значительно сложнее.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала логтерминальную модификацию² $h: V \rightarrow X$ логпары $(X, \Delta + \Delta^0)$ (см. [23], [13, теорема 17.10]). Запишем

$$h^*(K + \Delta + \Delta^0) = K_V + \Delta_V + \Delta_V^0 + E,$$

²Иногда логтерминальная модификация называется также *логтерминальным разрешением*.

где Δ_V и Δ_V^0 – собственные прообразы Δ и Δ^0 соответственно, а E – исключительный дивизор. Можно выбрать модификацию h таким образом, что дивизор E приведен и $E \neq 0$ (см. [13, теорема 17.10], [25, теорема 3.1]). Мы утверждаем, что дивизор $K_V + \Delta_V + E$ не может быть численно эффективен над X . В самом деле, запишем

$$h^*(K + \Delta) = K_V + \Delta_V + \sum \alpha_i E_i,$$

где $\alpha_i < 1$ для всех i . Это дает нам

$$h^*\Delta^0 = \Delta_V^0 + \sum (1 - \alpha_i) E_i.$$

Таким образом,

$$K_V + \Delta_V + E \equiv -\Delta_V^0 \equiv \sum (1 - \alpha_i) E_i \quad \text{над } X,$$

где дивизор $\sum (1 - \alpha_i) E_i$ эффективен, исключителен и не равен нулю. Этот дивизор не может быть h -численно эффективен (см., например, [23, п. 1.1]). Далее применим $(K_V + \Delta_V + E)$ -ПММ над X . При последнем шаге мы получаем бирациональное стягивание $g: Y \rightarrow X$, которое удовлетворяет условиям 1)–3) предложения 3.6.

Теорему 3.1 будем доказывать индукцией по d . Таким образом, предположим, что утверждение теоремы 3.1 выполнено при $\dim(X) < d$. Заменим многообразие X на его $\mathbb{Q}$ -факториализацию (см. [13, теорема 6.11.1]). Это сохраняет все наши предположения. После этого рассмотрим дивизор $D^\vee$ такой, как в лемме 3.3, и положим $D^\nabla := D^\vee + cf^*H$, где H – эффективный дивизор Картье на Z , проходящий через o , и c – логканонический порог:

$$c = c(X, D + D^\vee, f^*H)$$

(максимальное число такое, что $K + D + D^\vee + cf^*H$ логканоничен).

Тогда верно следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.7. *Дивизор $K + D + D^\nabla$ антиобилел над Z , логканоничен и не логтерминален по Кавамате.*

Заметим, что дивизоры D и D^∇ могут иметь общие компоненты. Далее мы выделяем два случая:

- (а) пара $(X, D + D^\nabla)$ чисто логтерминальна (и $\lfloor D + D^\nabla \rfloor \neq 0$);
- (б) пара $(X, D + D^\nabla)$ не является чисто логтерминальной.

В случае (В) мы рассмотрим индуктивное раздутие $g: \widehat{X} \rightarrow X$ пары $(X, D + D^\nabla)$. Пусть S – (неприводимый) исключительный дивизор. Согласно [23, лемма 5.4] (или [13, лемма 19.2]) достаточно доказать существование искомого дополнения на $\widehat{X}$. Запишем

$$\begin{aligned} g^*(K + D + D^\nabla) &= K_{\widehat{X}} + \Delta + S + \widehat{D}^\nabla, \\ g^*(K + D) &= K_{\widehat{X}} + \Delta + aS, \end{aligned} \tag{3.1}$$

где $\widehat{D}^\nabla$ и Δ – собственные прообразы D^∇ и D соответственно, а $a < 1$. Заметим, что $\Delta + aS$ необязательно является границей.

В случае (а) мы положим $\widehat{X} = X$, $g = \text{id}$, $S = \lfloor D + D^\nabla \rfloor$. В этом случае многообразие S неприводимо по лемме о связности [13, теорема 17.4] и потому, что многообразие S нормально [13, следствие 17.5]. Определим дивизор Δ из равенства $D = \Delta + aS$, где $0 \leq a < 1$ и S не является компонентой Δ . Положим

$$\widehat{D}^\nabla := D + D^\nabla - S - \Delta.$$

В обоих случаях (а) и (б) мы имеем согласно утверждению 3.7 и равенству (3.1) следующее утверждение (см. [11, предложение 3.10]).

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.8. *Пара $(\widehat{X}, \Delta + S + \widehat{D}^\nabla)$ логканонична, не логтерминальна по Кавамате, пара $(\widehat{X}, \Delta + aS)$ логтерминальна по Кавамате, и оба дивизора $-(K_{\widehat{X}} + \Delta + S + \widehat{D}^\nabla)$ и $-(K_{\widehat{X}} + \Delta + aS)$ численно эффективны и объемны над Z .*

ЛЕММА 3.9. *Существуют $\delta_0 > 0$ и граница M на $\widehat{X}$ такие, что:*

1) *имеет место неравенство*

$$\Delta + aS \leq M \leq \Delta + S + (1 - \delta_0)\widehat{D}^\nabla; \quad (3.2)$$

2) *пара $(\widehat{X}, M)$ логтерминальна по Кавамате;*

3) *дивизор $-(K + M)$ численно эффективен и объемен над Z .*

В частности, конус Мори $\overline{\text{NE}}(\widehat{X}/Z)$ полиэдрален.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно утверждению 3.7 дивизор $K + D + (1 - \delta_0)D^\nabla$ логтерминален по Кавамате и антибилен над Z для достаточно малых положительных δ_0 . Возьмем M как крепантный прообраз:

$$\begin{aligned} K_{\widehat{X}} + M &= g^*(K + D + (1 - \delta_0)D^\nabla) \\ &= g^*(K + D) + (1 - \delta_0)(g^*(K + D + D^\nabla) - g^*(K + D)) \\ &= K_{\widehat{X}} + \Delta + aS + (1 - \delta_0)((K_{\widehat{X}} + \Delta + S + \widehat{D}^\nabla) - (K_{\widehat{X}} + \Delta + aS)). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Его можно записать еще так:

$$\begin{aligned} M &= \Delta + aS + (1 - \delta_0)(S + \widehat{D}^\nabla - aS) \\ &= \Delta + (1 - \delta_0(1))S + (1 - \delta_0)\widehat{D}^\nabla. \end{aligned}$$

Из равенства (3.3) получаем, что пара $(\widehat{X}, M)$ логтерминальна по Кавамате [11, предложение 3.10], а дивизор $-(K + M)$ численно эффективен и объемен над Z . Неравенство (3.2) заведомо выполнено, если $a \leq 1 - \delta_0(1)$, т.е. для $0 < \delta_0 \ll 1$.

Далее определим вспомогательный дивизор $\widehat{D}^\lambda$.

А. Возьмем $0 < \lambda \ll \delta_0$ и положим

$$\widehat{D}^\lambda := (1 - \lambda)\widehat{D}^\nabla.$$

Утверждаем, что логдивизор $K_{\hat{X}} + \Delta + S + \hat{D}^\lambda$ чисто логтерминален и антибилен над Z .

В самом деле, в случае (b), так как $\rho(\hat{X}/X) = 1$, кривые в слоях морфизма g порождают экстремальный луч R . Тогда

$$R \cdot (K_{\hat{X}} + \Delta + S + \hat{D}^\vee) = 0$$

(и дивизор $K_{\hat{X}} + \Delta + S + \hat{D}^\vee$ строго отрицателен на всех экстремальных лучах, не равных R ; см. утверждение 3.7 и равенство (3.1)). Далее, учитывая (3.1), имеем $\hat{D}^\vee \equiv -(1-a)S$ над X , и дивизор $\hat{D}^\vee$ положителен на R . Таким образом, логдивизор $K_{\hat{X}} + \Delta + S + \hat{D}^\lambda$ строго отрицателен на всех экстремальных лучах конуса $\overline{NE}(\hat{X}/Z)$ для достаточно малых положительных λ . Тогда по критерию Клеймана он антибилен. Наконец, пара $(\hat{X}, \Delta + S + \hat{D}^\lambda)$ чисто логтерминальна потому, что $\hat{D}^\lambda \leq \hat{D}^\vee$. В случае (a) наше утверждение, очевидно, следует из утверждения 3.7.

Заметим, что $M \leq \Delta + S + \hat{D}^\lambda$ согласно неравенству (3.2).

Теперь мы можем построить границу B .

В. Зафиксируем некоторое множество $F_1, \dots, F_r$ главных дивизоров на $\hat{X}$. Для $n \gg 0$ рассмотрим общий элемент

$$F \in \left| -n(K_{\hat{X}} + \Delta + S + \hat{D}^\lambda) - \sum F_i \right|$$

и положим

$$B := \hat{D}^\lambda + \frac{1}{n} \left(F + \sum F_i \right).$$

Можно выбрать $F_1, \dots, F_r$ и n таким образом, что:

- 1) пара $(\hat{X}, \Delta + S + B)$ чисто логтерминальна;
- 2) компоненты дивизора B порождают $N^1(\hat{X}/Z)$.

Наша конструкция задает численную эквивалентность:

$$K + \Delta + S + B \equiv 0 \text{ над } Z.$$

Возьмем $\varepsilon > 0$ таким образом, чтобы дивизор $K + \Delta + S + (1 + \varepsilon)B$ был чисто логтерминален (см. [13, предложение 2.17]) и

$$M \leq \Delta + S + (1 - \varepsilon)B$$

(т.е. $1 - \delta_0 \leq (1 - \varepsilon)(1 - \lambda)$; см. доказательство леммы 3.9). Применим $(K + \Delta + S + (1 + \varepsilon)B)$ -ПММ над Z :

Ниже мы используем черту, например $\bar{\Delta}$, для обозначения собственного прообраза на $\bar{X}$ дивизора, определенного на $\hat{X}$. Для каждого экстремального луча R выполнены неравенства $R \cdot B < 0$ и $R \cdot (K + \Delta + S) > 0$. Поэтому любое стягивание является либо малым, либо дивизориальным и стягивает компоненту B . В частности, любое дивизориальное стягивание не стягивает S . На последнем шаге ПММ получим, что дивизор $(K + \Delta + S + (1 + \varepsilon)B)$ численно эффективен над Z (не исключаем случая $\bar{X} = Z$). Так как $K + \Delta + S + B \equiv 0$, то дивизор $-(K + \Delta + S)$ также численно эффективен над Z .

ЛЕММА 3.10. *Можно применить $(K + \Delta + S + (1 + \varepsilon)B)$ -ПММ таким образом, что на каждом шаге возможно найти границу $M \leq \Delta + S + (1 - \varepsilon)B$ такую, что дивизор $K + M$ логтерминален по Кавамате и дивизор $-(K + M)$ численно эффективен и объемен над Z .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 3.9 такая граница существует уже на первом шаге. Если дивизор $K + \Delta + S + (1 + \varepsilon)B \equiv \varepsilon B$ не численно эффективен над Z , то $-(K + \Delta + S + (1 - \varepsilon)B) \equiv \varepsilon B$ также не численно эффективен над Z . Положим

$$t_0 := \sup\{t \mid -(K + M + t(\Delta + S + (1 - \varepsilon)B - M)) \text{ численно эффективен}\}.$$

По лемме 3.4 этот супремум является максимумом и достигается на некотором экстремальном луче. Следовательно, t_0 рационально и $0 < t_0 < 1$. Рассмотрим границу

$$M^0 := M + t_0(\Delta + S + (1 - \varepsilon)B - M).$$

Тогда дивизор $-(K + M^0)$ численно эффективен над Z и $M^0 \leq \Delta + S + (1 - \varepsilon)B$. Утверждаем, что дивизор $-(K + M^0)$ также объемен над Z . Предположим противное. По теореме о стабильной свободе дивизор $-(K + M^0)$ полуобилеен над Z и определяет стягивание $\varphi: \hat{X} \rightarrow W$ на многообразии меньшей размерности. Пусть C – общая кривая в слое. Тогда

$$C \cdot (K + M^0) = C \cdot (K + \Delta + S + B) = 0.$$

Таким образом, $C \cdot (\Delta + S + B - M^0) = 0$. Так как кривая C численно эффективна, то $\varepsilon C \cdot B \leq C \cdot (\Delta + S + B - M^0) = 0$ и $C \cdot B = 0$. По свойству 2) п. В имеем $C \equiv 0$. Противоречие.

Далее, конус $\overline{NE}(\hat{X}/Z)$ полиэдрален. Поэтому имеется экстремальный луч R такой, что $R \cdot (K + M^0) = 0$ и

$$\varepsilon R \cdot B = -r \cdot (K + \Delta + S + (1 - \varepsilon)B) < 0.$$

Следовательно, $R \cdot (K + \Delta + S + (1 + \varepsilon)B) < 0$. Пусть $h: \hat{X} \rightarrow Y$ – стягивание R . Положим $M_Y^0 := h_* M^0$. Тогда

$$K + M^0 = h^*(K_Y + M_Y^0).$$

Поэтому дивизор $K_Y + M_Y^0$ является $\mathbb{Q}$ -картье. Пара (Y, M_Y^0) логтерминальна по Кавамате, а дивизор $-(K_Y + M_Y^0)$ численно эффективен и объемен над Z . Если

стягивание g дивизориально, то можно продолжить процесс, заменяя $\widehat{X}$ на Y и M на $M = M_Y^0$. Предположим, что g – малое стягивание, и пусть

$$\begin{array}{ccc} \widehat{X} & \dashrightarrow & X^+ \\ & \searrow h \quad \swarrow h^+ & \\ & Y & \end{array}$$

– его перестройка (флип). Положим $M := h^{+^{-1}}(M_Y^0)$. Тогда снова дивизор $-(K_{X^+} + M^+) = -h^{+*}(K_Y + M_Y^0)$ численно эффективен и объемен над Z . Таким образом, мы можем продолжить процесс, заменяя X на X^+ .

С. Применим ПММ такую, как в лемме 3.10. На последнем шаге получим многообразие $\overline{X}$ такое, что:

- 1) пара $(\overline{X}, \overline{\Delta} + \overline{S})$ чисто логтерминальна;
- 2) дивизор $-(K + \overline{\Delta} + \overline{S})$ численно эффективен над Z .

ЛЕММА 3.11. *Дивизор $-(K + \overline{\Delta} + \overline{S})$ полуобилен над Z . Более того, если $-(K + \overline{\Delta} + \overline{S})$ не обилен, то он определяет бирациональное стягивание над Z с исключительным множеством, содержащимся в $\text{Supp}(\overline{B})$. В частности, дивизор*

$$-(K_{\overline{S}} + \text{Diff}_{\overline{S}}(\overline{\Delta})) = -(K + \overline{\Delta} + \overline{S})|_{\overline{S}}$$

объемен (и численно эффективен) над $q(\overline{S})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 3.10 и по теореме о стабильной свободе дивизор $-(K + \overline{\Delta} + \overline{S})$ полуобилен. Таким образом, для некоторого $n \in \mathbb{N}$ линейная система $| -n(K + \overline{\Delta} + \overline{S}) |$ определяет стягивание $\overline{X} \rightarrow W$. Для любой кривой C в слое имеем $C \cdot \overline{B} = 0$. Поскольку компоненты $\overline{B}$ порождают $N^1(\overline{X}/Z)$ (см. свойство 2) п. В), то $C \cdot \overline{B}_i < 0$ для некоторой компоненты $\overline{B}_i$ дивизора $\overline{B}$. Следовательно, $C \subset \text{Supp}(\overline{B})$.

Заметим, что $q: \overline{S} \rightarrow q(\overline{S})$ – также стягивание.

ЛЕММА 3.12. *Имеет место равенство $q_*\mathcal{O}_{\overline{S}} = \mathcal{O}_{q(\overline{S})}$, и многообразие $q(\overline{S}) = f(g(S))$ нормально.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. доказательство леммы 3.6 из [23].

Согласно лемме 1.6 имеем $\text{Diff}_{\overline{S}}(\overline{\Delta}) \in \Phi$ (напомним, что мы положили $\Phi = \Phi_{\mathbf{m}}^d$ или $\Phi = \Phi_{\mathbf{sm}}$).

ЛЕММА 3.13. *Предположим, что вблизи слоя $q^{-1}(o)$ существует n -дополнение $K_{\overline{S}} + \text{Diff}_{\overline{S}}(\overline{\Delta})^+$ дивизора $K_{\overline{S}} + \text{Diff}_{\overline{S}}(\overline{\Delta})$. Тогда вблизи $q^{-1}(o)$ существует также n -дополнение $K + D^+$ дивизора $K + D$. Более того, если пара $(\overline{S}, \text{Diff}_{\overline{S}}(\overline{\Delta})^+)$ не логтерминальна по Кавамате, то пара (X, D^+) не является исключительной.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предложению 6.2 (см. ниже) любое n -дополнение дивизора $K_{\bar{S}} + \text{Diff}_{\bar{S}}(\bar{\Delta})$ может быть продолжено до n -дополнения дивизора $K + \bar{\Delta} + \bar{S}$, а по предложению 6.1 мы можем брать прообразы дополнения дивизора $K + \Delta + S$ при дивизориальных стягиваниях, так как все эти стягивания $(K + \Delta + S)$ -положительны. Наконец, заметим, что перестройки сохраняют дополнение, т. е. собственный прообраз n -дополнения при перестройке снова является n -дополнением. В самом деле, неравенство (1.1), очевидно, сохраняется при любом бирациональном отображении, являющимся изоморфизмом для коразмерности один. Свойство логканоничности и линейной эквивалентности из определения 1.1 также сохраняются [13, предложение 2.28].

ЛЕММА 3.14. Если $\dim(q(\bar{S})) > 0$, то:

- i) пара $(X/Z \ni o, D)$ неисключительна;
- ii) имеется неисключительное n -дополнение дивизора $K + D$, $n \in N_{d-2}(\Phi)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение i) следует из следствия 2.7. Заметим, что пара $(\bar{S}/q(\bar{S}) \ni o, \text{Diff}_{\bar{S}}(\bar{\Delta}))$ удовлетворяет условиям нашей теоремы (см. лемму 1.6). По предположению индукции можно считать, что имеется не логтерминальное по Кавамате n -дополнение $K_{\bar{S}} + \text{Diff}_{\bar{S}}(\bar{\Delta})$ для $n \in N_{d-2}(\Phi)$. Остальное получается из леммы 3.13.

Возвратимся к доказательству теоремы 3.1.

D. Допустим, что пара $(X/Z \ni o, D)$ неисключительна (т.е. существует неисключительное дополнение $K + D + \Upsilon$) и $q(\bar{S}) = o$. Достаточно показать, что существует неисключительное n -дополнение дивизора $K + D$ с $n \in N_{d-2}(\Phi)$. Согласно лемме 3.14 можно предположить, что $q(\bar{S}) = o$, т.е. многообразие $\bar{S}$ проективно. По следствию 2.5 дивизор Υ можно выбрать так, что $a(S, D + \Upsilon) = -1$ (и $a(E, D + \Upsilon) = -1$ для некоторого $E \not\approx S$). Пусть $\hat{\Upsilon}$ и $\bar{\Upsilon}$ – собственные прообразы Υ на $\hat{X}$ и $\bar{X}$ соответственно. Тогда

$$g^*(K + D + \Upsilon) = K_{\hat{X}} + \Delta + S + \hat{\Upsilon}.$$

Более того,

$$a(E, \Delta + S + \hat{\Upsilon}) = a(E, \bar{\Delta} + \bar{S} + \bar{\Upsilon}) = -1$$

(так как $K_{\hat{X}} + \Delta + S + \hat{\Upsilon} \equiv 0$). Таким образом, дивизор $K_{\bar{X}} + \bar{\Delta} + \bar{S} + \bar{\Upsilon}$ не является чисто логтерминальным (вблизи слоя $q^{-1}(o)$).

ЛЕММА 3.15. В предположениях п. D дивизор $K_{\bar{S}} + \text{Diff}_{\bar{S}}(\bar{\Delta} + \bar{\Upsilon})$ не является логтерминальным по Кавамате.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По формуле присоединения [13, теорема 17.6] достаточно доказать, что дивизор $K + \bar{\Delta} + \bar{S} + \bar{\Upsilon}$ не является чисто логтерминальным вблизи $\bar{S}$. Учитывая рассуждения, приведенные выше, мы видим, что последнее является следствием леммы 3.17.

Согласно лемме 3.15 и гипотезе 1.9 получаем, что имеется не логтерминальное по Кавамате n -дополнение $K_{\bar{S}} + \text{Diff}_{\bar{S}}(\bar{\Delta})$, где $n \in N_{d-2}(\Phi)$. По лемме 3.13 это доказывает теорему 3.1.

Следующий пример поясняет доказательство теоремы 3.1.

ПРИМЕР 3.16. Как и в примере 3.2, пусть $(Z \ni o)$ – двумерная дювалевская особенность (рациональная двойная точка), пусть $D = 0$, и пусть f – тождественное отображение. В этом случае $g: \widehat{X} \rightarrow X$ – взвешенное раздутие (с подходящими весами) и $\widehat{X} \dashrightarrow \overline{X}$ – тождественное отображение. Следовательно, $S \simeq \mathbb{P}^1$. Запишем

$$\text{Diff}_S(0) = \sum_{i=1}^r (1 - 1/m_i) P_i,$$

где $P_1, \dots, P_r$ – различные точки. Имеем следующее соответствие между типами $(Z \ni o)$ и наборами $(m_1, \dots, m_r)$ (см. примеры 2.8 и 2.10):

$$\frac{(Z \ni o)}{(m_1, \dots, m_r)} \parallel \frac{A_n}{r \leq 2} \mid \frac{D_n}{(2, 2, m)} \mid \frac{E_6}{(2, 3, 3)} \mid \frac{E_7}{(2, 3, 4)} \mid \frac{E_8}{(2, 3, 5)}$$

Таким образом, особенность $(Z \ni o)$ исключительна, если и только если она имеет тип E_6 , E_7 или E_8 .

ЛЕММА 3.17 (см. [19], ср. [23, теорема 6.9], [5, предложение 2.1]). Пусть $(X/Z \ni o, D)$ – логмногообразие, и пусть $f: X \rightarrow Z$ – структурный морфизм. Предположим, что:

- 1) дивизор $K + D$ логканоничен и не чисто логтерминален вблизи $f^{-1}(o)$;
- 2) $K + D \equiv 0$ над Z ;
- 3) имеется неприводимая компонента $S \subset [D]$ такая, что $f(S) \neq Z$.

Предположим также выполнимость логПММ в размерности $\dim(X)$. Тогда пара (X, D) не является чисто логтерминальной вблизи $S \cap f^{-1}(o)$.

СЛЕДСТВИЕ 3.18. В обозначениях теоремы 3.1 следующие утверждения эквивалентны:

- i) $(X/Z \ni o, D)$ – исключительная пара (локального типа);
- ii) $q(\overline{S}) = o$ и $(\overline{S}, \text{Diff}_{\overline{S}}(\overline{D}))$ – исключительная пара (глобального типа).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация i) $\implies$ ii) следует из леммы 3.14 и леммы 3.13. Обратная импликация – из леммы 3.15.

Положим

$$\text{compl}'(X, D) := \min \left\{ m \mid \begin{array}{l} \text{существует не логтерминальное по Кавамате} \\ m\text{-дополнение дивизора } K + D \end{array} \right\}.$$

СЛЕДСТВИЕ 3.19. В обозначениях и условиях теоремы 3.1 предположим дополнительно, что пара $(X/Z \ni o, D)$ исключительна. Тогда

$$\text{compl}'(X, D) = \text{compl}(\overline{S}, \text{Diff}_{\overline{S}}(\overline{D})).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство $\text{compl}'(X, D) \leq \text{compl}(\bar{S}, \text{Diff}_{\bar{S}}(\bar{D}))$ следует из леммы 3.13. Таким образом, мы будем доказывать обратное неравенство. Пусть $K + D^+$ – не логтерминальное по Кавамате n -дополнение дивизора $K + D$. Тогда $D^+ \geq D$. По следствию 2.6 имеем $a(S, D^+) = -1$. Рассмотрим крепантный прообраз

$$g^*(K + D^+) = K_{\hat{X}} + \Delta + S + \Upsilon,$$

и пусть $\bar{\Upsilon}$ – собственный прообраз дивизора Υ на $\bar{X}$. Тогда $K_{\bar{S}} + \text{Diff}_{\bar{S}}(\bar{\Delta} + \bar{\Upsilon})$ – n -дополнение дивизора $K_{\bar{S}} + \text{Diff}_{\bar{S}}(\bar{\Delta})$.

Заметим, что для неисключительных стягиваний мы имеем только неравенство $\text{compl}'(X, D) \leq \text{compl}(\bar{S}, \text{Diff}_{\bar{S}}(\bar{D}))$.

ПРИМЕР 3.20. Пусть $(X \ni o)$ – терминальная cE_8 -особенность, заданная уравнением

$$x_1^2 + x_2^3 + x_3^5 + x_4^r = 0,$$

где н. о. д. $(r, 30) = 1$, и пусть $g: (\hat{X}, S) \rightarrow X$ – взвешенное раздутие с весами $(15r, 10r, 6r, 30)$. Тогда $S = \mathbb{P}^2$ и

$$\text{Diff}_S(0) = \frac{1}{2}L_1 + \frac{2}{3}L_2 + \frac{4}{5}L_3 + \frac{r-1}{r}L_4,$$

где $L_1, \dots, L_4$ – прямые на $\mathbb{P}^2$ в общем положении. Тогда $\text{compl}'(X, 0) = 1$ (так как $(X \ni o) - cDV$ -особенность). С другой стороны, $\text{compl}(\bar{S}, \text{Diff}_{\bar{S}}(0)) = 6$.

§ 4. Исключительные стягивания Фано

В этом параграфе изучены исключительные стягивания Фано, удовлетворяющие условиям теоремы 3.1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Сохраним обозначения и предположения теоремы 3.1. Предположим также, что гипотеза 1.7 верна для размерностей не более $d - 1$. Пусть пара $(X/Z \ni o, D)$ исключительна. Тогда*

$$a(E, D) \geq -1 + \delta_d \quad \text{для всех } E \not\approx S,$$

где $\delta_d > 0$ – константа, зависящая только от d .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $K + D^+$ – не логтерминальное по Кавамате n -дополнение, где $n \in N_{d-1}(\Phi)$. Тогда $D^+ \geq D$ (см. следствие 1.5). По определению исключительных стягиваний $a(S, D^+) = -1$ и $a(E, D^+) > -1$ для всех $E \not\approx S$. Следовательно, $a(E, D^+) \geq -1 + 1/n$ (так как число $na(E, D^+)$ целое). Так как $D^+ \geq D$, то $a(E, D) \geq a(E, D^+)$. Таким образом, подходит

$$\delta_d := 1/\max(N_{d-1}(\Phi_{\mathbf{m}}^{d-1})).$$

Предполагая, что $D \in \Phi_{\mathbf{sm}}$, получаем

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Сохраним обозначения и предположения предложения 4.1. Пусть D_i – компонента D , и пусть $d_i = 1 - 1/m_i$ – ее коэффициент. Если $D_i \not\approx S$, то $m_i \leq 1/\delta(d)$, и поэтому имеется лишь конечное число значений d_i .

СЛЕДСТВИЕ 4.3 (ср. [10]). Предположим, что верны логПММ для размерностей не более d и гипотеза 1.9 для размерностей не более $d - 1$. Пусть $(X \ni o)$ – d -мерная логтерминальная по Кавамате особенность, и пусть $F = \sum F_i$ – эффективный приведенный дивизор Вейля $\mathbb{Q}$ -карты на X , проходящий через o . Тогда выполнено одно из следующих условий:

- 1) $c_0(X, F) = 1$,
- 2) $c_0(X, F) \leq 1 - 1/N_{d-1}$,

где $c_0(X, F)$ – логканонический порог (X, F) (см. [23], а также [11]) и N_{d-1} – константа, определенная в (1.3).

Отметим, что это следствие является нетривиальным, если только гипотеза 1.7 верна для размерностей не более $d - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $c := c_0(X, F)$ и предположим, что $1 - 1/N_{d-1} < c < 1$. Из теоремы 3.1 следует существование n -дополнения $K + B$ дивизора $K + cF$, где $n \leq N_{d-1}$. Пусть c_i^+ – коэффициент компоненты F_i в B . В силу неравенства (1.1) имеем $c_i^+ \geq 1$. Следовательно, $F \leq B$ и дивизор $K + F$ логканоничен. Противоречие.

В случае, когда

$$1 - 1/(N_{d-2} + 1) \leq c = c_0(X, F) < 1,$$

пара (X, cF) исключительна. Мы ожидаем, что для любой размерности имеется только конечное число значений для $c \in [1 - 1/(N_{d-2} + 1), 1]$. Например, этот метод дает (см., например, [20, следствие 6.0.9]), что для размерности $d = 2$ множество всех значений $c_0(X, F)$ на отрезке $[2/3, 1]$ совпадает с множеством $\{2/3, 7/10, 3/4, 5/6, 1\}$.

ТЕОРЕМА 4.4. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Пусть $(X/Z \ni o, D)$ – d -мерное логмногообразие локального типа такое, что:

- 1) $D \in \Phi_{\mathbf{sm}}$ (т.е. $d = \sum (1 - 1/m_i)D_i$, где $m_i \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ и D_i – главные дивизоры);
- 2) имеет место неравенство

$$\text{totaldiscr}(X, D) > -1 + \varepsilon; \tag{4.1}$$

- 3) дивизор $-(K + D)$ численно эффективен и обремен над Z ;
- 4) пара $(X/Z \ni o, D)$ исключительна.

Далее, пусть $\varphi: X' \rightarrow X$ – конечное накрытие такое, что:

- 5) многообразие X' нормально и неприводимо;
- 6) морфизм φ этален для коразмерности один вне $\text{Supp}(D)$;
- 7) индекс ветвления морфизма φ в общей точке компонент дивизора $\varphi^{-1}(D_i)$ делит m_i .

Предположим также, что логПММ верна для размерностей не более d и для $\Phi_{\mathbf{sm}}$ верны гипотезы 1.8, 1.7 и 1.9 для размерности $d - 1$. Тогда степень φ ограничена константой $\text{Const}(d, \varepsilon)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся обозначениями доказательства теоремы 3.1. Рассматривая расслоенное произведение многообразия X с его $\mathbb{Q}$ -факторизацией, можно свести ситуацию к случаю, когда многообразие X $\mathbb{Q}$ -факториально. Заметим также, что слой $\varphi^{-1} \circ f^{-1}(o)$ связан (так как X рассматривается как росток вблизи слоя $f^{-1}(o)$ и многообразие X' неприводимо). Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\varphi} & X \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ Z' & \xrightarrow{\pi} & Z \end{array}$$

где $X' \xrightarrow{f'} Z' \xrightarrow{\pi} Z$ – разложение Штейна. Тогда $f': X' \rightarrow Z'$ – стягивание и $\pi: Z' \rightarrow Z$ – конечный морфизм. Определим дивизоры D' и $D^{\nabla'}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} K_{X'} + D' &= \varphi^*(K + D), \\ K_{X'} + D' + D^{\nabla'} &= \varphi^*(K + D + D^{\nabla}) \end{aligned} \quad (4.2)$$

(см. [23, § 2]). Это означает, что, например, коэффициент компоненты $D'_{i,j}$ дивизора $\varphi^{-1}(D_i)$ в D' имеет следующий вид:

$$d'_{i,j} = 1 - r_{i,j}(1 - (1 - 1/m_i)),$$

где $r_{i,j}$ – индекс ветвления в общей точке $D'_{i,j}$. Тогда по условию 7) нашей теоремы имеем $D' \in \Phi_{\mathbf{sm}}$ (и $D^{\nabla'} \geq 0$). Очевидно, $K_{X'} + D' + D^{\nabla'}$ обилен над Z' .

Сначала рассмотрим случай (а) из § 3 (т.е. случай, когда дивизор $K + D + D^{\nabla}$ чисто логтерминален, $S := \lfloor D + D^{\nabla} \rfloor \neq 0$, $\widehat{X} = X$ и g – тождественное отображение). Положим $S' := \lfloor D' + D^{\nabla'} \rfloor = \varphi^{-1}(S)$. Согласно лемме 3.14 многообразие S компактно и $S \subset f^{-1}(o)$. Применяя [23, § 2] (или [13, предложение 20.3]), получаем, что пара $(X', D' + D^{\nabla'})$ чисто логтерминальна. По лемме о связности [13, теорема 17.4] и по формуле присоединения [13, теорема 17.6] многообразие S' связно, неприводимо и нормально. Определим дивизор Δ' из равенства $D' = \Delta' + a'S'$, где $0 \leq a' < 1$. Пусть $\overline{X}'$ – нормализация многообразия $\widehat{X}$ в поле функций многообразия X' . Имеется коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\varphi} & X \\ \psi' \downarrow & & \downarrow \psi \\ \overline{X}' & \xrightarrow{\overline{\varphi}} & \overline{X} \end{array}$$

где $\overline{\varphi}: \overline{X}' \rightarrow \overline{X}$ – конечный морфизм, а $\psi: X \dashrightarrow \overline{X}$ и $\psi': X' \dashrightarrow \overline{X}'$ – бирациональные отображения такие, что ψ^{-1} и ψ'^{-1} не стягивают дивизоров. Следовательно, накрытие $\overline{\varphi}$ имеет дивизор ветвления только над $\text{Supp}(\psi_*(D)) \subset \overline{S} \cup \text{Supp}(\overline{\Delta})$. Индекс ветвления $\overline{\varphi}$ в общей точке компоненты над $\psi_*(D_i)$ равен индексу ветвления φ в общей точке соответствующей компоненты над D_i . Применяя ψ_* и ψ'_* к соотношениям (4.2), получим

$$\begin{aligned} K_{\overline{X}'} + \overline{D}' &= \overline{\varphi}^*(K_{\overline{X}} + \overline{D}), \\ K_{\overline{X}'} + \overline{D}' + \overline{D}^{\nabla'} &= \overline{\varphi}^*(K_{\overline{X}} + \overline{D} + \overline{D}^{\nabla}), \end{aligned} \quad (4.3)$$

где $\bar{D}' := \psi'_* D'$ и $\bar{D}^{\nabla'} := \psi'_* D^{\nabla'}$. Напомним, что $\bar{S} = \lfloor \bar{D} + \bar{D}^{\nabla} \rfloor$ – простой дивизор. Далее, из первого равенства (4.3) получаем

$$K_{\bar{X}'} + \bar{\Delta}' + \bar{S}' = \bar{\varphi}^*(K_{\bar{X}} + \bar{\Delta} + \bar{S}), \quad (4.4)$$

где $\bar{\Delta}' := \psi'_* \Delta'$ и $\bar{S}' := \psi'_* S'$. Согласно [23, § 2] и утверждению 1) п. С (см. также [13, предложение 20.3]) дивизор $K_{\bar{X}'} + \bar{\Delta}' + \bar{S}'$ чисто логтерминален. Более того, утверждение 2) п. С и лемма 3.11 дают нам, что дивизор $-(K_{\bar{X}'} + \bar{\Delta}' + \bar{S})'$ численно эффективен и объемнен над Z' . Достаточно доказать ограниченность степени морфизма-ограничения $\bar{\phi} = \bar{\varphi}|_{\bar{S}'} : \bar{S}' \rightarrow \bar{S}$. В самом деле, $\deg \varphi = (\deg \bar{\phi})r$, где r – индекс ветвления над S . Согласно неравенству (4.1) и условию 7) теоремы 4.4 индекс r ограничен. Далее мы рассмотрим логпары $(\bar{S}, \text{Diff}_{\bar{S}}(\bar{\Delta}))$ и $(\bar{S}', \text{Diff}_{\bar{S}'}(\bar{\Delta}'))$.

Ограничивая соотношение (4.4) на $\bar{S}$, получаем

$$K_{\bar{S}} + \text{Diff}_{\bar{S}}(\bar{\Delta}) = \bar{\phi}^*(K_{\bar{S}'} + \text{Diff}_{\bar{S}'}(\bar{\Delta}')).$$

В частности,

$$(K_{\bar{S}} + \text{Diff}_{\bar{S}}(\bar{\Delta}))^{d-1} = (\deg \bar{\phi})(K_{\bar{S}'} + \text{Diff}_{\bar{S}'}(\bar{\Delta}'))^{d-1}.$$

Обе части этого равенства положительны по лемме 3.11.

Ограничим степень морфизма $\bar{\phi}$ (в случае (а)).

Е. Из доказательства теоремы 3.1 видно, что имеется n -дополнение $K_{\bar{X}} + \bar{\Delta} + \bar{S} + \bar{\Upsilon}$ логдивизора $K_{\bar{X}} + \bar{\Delta} + \bar{S}$, где $n \leq \max N_{d-1}(\Phi_{\mathbf{sm}}) < \infty$. Зададим дивизор $\bar{\Upsilon}'$ равенством

$$K_{\bar{X}'} + \bar{\Delta}' + \bar{S}' + \bar{\Upsilon}' = \bar{\varphi}^*(K_{\bar{X}} + \bar{\Delta} + \bar{S} + \bar{\Upsilon})$$

и положим $\Theta := \text{Diff}_{\bar{S}}(\bar{\Delta} + \bar{\Upsilon})$, $\Theta' := \text{Diff}_{\bar{S}'}(\bar{\Delta}' + \bar{\Upsilon}')$. Тогда $K_{\bar{S}} + \Theta$ и $K_{\bar{S}'} + \Theta'$ являются n -дополнениями. Так как дивизор $K_{\bar{S}} + \Theta$ логтерминален по Кавамате (см. следствие 3.18), то

$$\text{totaldiscr}(\bar{S}, \text{Diff}_{\bar{S}}(\bar{\Delta})) \geq -1 + \frac{1}{n} \geq -1 + \beta, \quad \beta = \frac{1}{\max N_{d-1}(\Phi_{\mathbf{sm}})}.$$

Аналогично,

$$\text{totaldiscr}(\bar{S}', \text{Diff}_{\bar{S}'}(\bar{\Delta}')) \geq -1 + \beta.$$

Согласно гипотезе 1.8 пары $(\bar{S}, \text{Supp}(\text{Diff}_{\bar{S}}(\bar{\Delta})))$ и $(\bar{S}', \text{Supp}(\text{Diff}_{\bar{S}'}(\bar{\Delta}')))$ принадлежат конечному числу алгебраических семейств. Учитывая то, что $\text{Diff}_{\bar{S}}(\bar{\Delta}), \text{Diff}_{\bar{S}'}(\bar{\Delta}') \in \Phi_{\mathbf{sm}}$ (см. лемму 1.6), и неравенства

$$\text{Diff}_{\bar{S}}(\bar{\Delta}) \leq \Theta, \quad \text{Diff}_{\bar{S}'}(\bar{\Delta}') \leq \Theta',$$

получим, что пары $(\bar{S}, \text{Diff}_{\bar{S}}(\bar{\Delta}))$ и $(\bar{S}', \text{Diff}_{\bar{S}'}(\bar{\Delta}'))$ также принадлежат конечному числу алгебраических семейств. Это дает нам ограниченность степени $\deg \bar{\phi}$.

Далее мы рассмотрим случай (b) из § 3. Пусть $\widehat{X}'$ – нормализация доминантной компоненты произведения $\widehat{X} \times_X X'$ и S' – собственный прообраз S на $\widehat{X}'$. Утверждается, что морфизм $g': (\widehat{X}' \supset S') \rightarrow X'$ является чисто логтерминальным раздутием пары (X', D') . Рассмотрим замену базы

$$\begin{array}{ccc} \widehat{X}' & \xrightarrow{\widehat{\varphi}} & \widehat{X} \\ g' \downarrow & & \downarrow g \\ X' & \xrightarrow{\varphi} & X \end{array} \quad (4.5)$$

Ясно, что морфизм $\widehat{\varphi}: \widehat{X}' \rightarrow \widehat{X}$ конечен и его дивизор ветвления может содержаться только в $S \cup \text{Supp}(D)$. Тогда S' – исключительный дивизор раздутия $g': \widehat{X}' \rightarrow X'$. Действительно,

$$K_{\widehat{X}'} + \Delta' + S' = \widehat{\varphi}^*(K_{\widehat{X}} + \Delta + S), \quad (4.6)$$

где Δ' – граница. Этот дивизор чисто логтерминален [23, следствие 2.2], [13, предложение 20.3] и антибилен над X' . По формуле присоединения [13, теорема 17.6] многообразие S' нормально. С другой стороны, S' связно вблизи слоя над $o' \in Z'$. В самом деле, $-(K_{\widehat{X}'} + \widehat{D}' + \widehat{D}^{\nabla'})$ численно эффективен и объем над Z' по (4.5) и утверждению 3.8. Так как $S' \subset [\widehat{D}' + \widehat{D}^{\nabla'}]$, то многообразие S' связно по лемме о связности [13, теорема 17.4]. Это доказывает наше утверждение.

Далее, как в случае (a) из § 3, мы рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \widehat{X}' & \xrightarrow{\widehat{\varphi}} & \widehat{X} \\ \psi' \downarrow & & \downarrow \psi \\ \overline{X}' & \xrightarrow{\overline{\varphi}} & \overline{X} \end{array}$$

Аналогично случаю (a) пары $(\overline{S}, \text{Diff}_{\overline{S}}(\overline{\Delta}))$ и $(\overline{S}', \text{Diff}_{\overline{S}'}(\overline{\Delta}'))$ ограничены. Следовательно, мы можем предположить, что степень $\deg \overline{\phi}$ ограничена, где $\overline{\phi} = \overline{\varphi}|_{\overline{S}'}: \overline{S}' \rightarrow \overline{S}$. Остается показать, что индекс ветвления r морфизма $\overline{\varphi}$ в общей точке S' ограничен. Ясно, что r совпадает с индексом ветвления $\widehat{\varphi}$ в общей точке $\widehat{S}'$. Аналогично равенству (3.1) запишем

$$g^*(K_{X'} + D') = K_{\widehat{X}'} + \Delta' + a'S'. \quad (4.7)$$

Тогда

$$1 - a' = r(1 - a) \geq r(1 + \text{discr}(X, D)) > r\varepsilon \quad (4.8)$$

(см. [23, § 2] или [13, доказательство 20.3]). Утверждается, что пары $(S', \text{Diff}_{S'}(\Delta'))$ принадлежат конечному числу алгебраических семейств. Заметим, что мы не можем применить гипотезу 1.8 непосредственно потому, что дивизор $-(K_{S'} + \text{Diff}_{S'}(\Delta'))$ необязательно численно эффективен. Как и в случае (a) из § 3, возь-

мем n -дополнение $K_{\widehat{X}} + \Delta + S + \widehat{Y}$, где $n \leq \max N_{d-1}(\Phi_{\mathbf{sm}})$. Аналогично (4.2) определим дивизоры $\widehat{Y}'$ и $\widehat{D}^{\lambda'}$ (см. п. А):

$$\begin{aligned}
 K_{\widehat{X}'} + \Delta' + S' + \widehat{Y}' &= \widehat{\varphi}^*(K_{\widehat{X}} + \Delta + S + \widehat{Y}), \\
 K_{\widehat{X}'} + \Delta' + S' + \widehat{D}^{\lambda'} &= \widehat{\varphi}^*(K_{\widehat{X}} + \Delta + S + \widehat{D}^{\lambda}).
 \end{aligned}$$

Тогда

$$K_{S'} + \text{Diff}_{S'}(\Delta' + \widehat{Y}') \equiv 0$$

и по п. А дивизор $K_{S'} + \text{Diff}_{S'}(\Delta' + \widehat{D}^{\lambda'})$ антибилен. Следовательно, дивизор $-(K_{S'} + \text{Diff}_{S'}(\Delta' + \alpha\widehat{D}^{\lambda'} + (1-\alpha)\widehat{Y}'))$ обилен для любого $\alpha > 0$. Заметим, что

$$\text{totaldiscr}(S', \text{Diff}_{S'}(\Delta' + \widehat{Y}')) \geq -1 + 1/n.$$

Таким образом, можно применить гипотезу 1.8 к паре $(S', \text{Diff}_{S'}(\Delta' + \alpha\widehat{D}^{\lambda'} + (1-\alpha)\widehat{Y}'))$ для малого положительного α . Получим, что многообразие S' ограничено. Далее, как и в п. Е, мы видим, что пара $(S', \text{Diff}_{S'}(\Delta'))$ также ограничена. Возьмем достаточно общую кривую ℓ в общем слое $g'|_{S'}: S' \rightarrow g'(S)'$. Из равенства (4.7) имеем

$$-(K_{S'} + \text{Diff}_{S'}(\Delta')) \cdot \ell = -(1-a')S' \cdot \ell. \quad (4.9)$$

Ясно, что индекс пересечения $-(K_{S'} + \text{Diff}_{S'}(\Delta')) \cdot \ell$ зависит только от пары $(S', \text{Diff}_{S'}(\Delta'))$, но не от $\widehat{X}'$. Таким образом, мы предполагаем, что число $-(K_{S'} + \text{Diff}_{S'}(\Delta')) \cdot \ell$ фиксировано. Напомним, что коэффициенты $\text{Diff}_{S'}(\Delta')$ стандартные (см. [23, предложение 3.9], [13, предложение 16.6]), таким образом, можно записать

$$\text{Diff}_{S'}(\Delta') = \sum_{i=1}^r (1 - 1/m_i) \Xi'_i, \quad m_i \in \mathbb{N}, \quad r \geq 0.$$

Положим $m' := \text{н. о. к.}(m_1, \dots, m_r)$. Согласно [23, предложение 3.9] дивизоры $m'S'$ и $m'(K_{S'} + \text{Diff}_{S'}(\Delta'))$ являются дивизорами Картье вдоль ℓ . Поэтому (4.9) может быть переписано как $N = (1-a')k$, где $N = -m'\ell \cdot (K_{S'} + \text{Diff}_{S'}(\Delta'))$ – фиксированное натуральное число и $k = -m'(\ell \cdot S)'$ – также натуральное. Значит,

$$N = (1-a')k > kr\varepsilon \geq r\varepsilon$$

по неравенству (4.8). Это показывает, что индекс ветвления r ограничен: $r < N/\varepsilon$, что и доказывает теорему.

Далее мы укажем несколько следствий теоремы 3.1 и теоремы 4.4. В основном нас занимает трехмерный случай (когда известно, что все требуемые гипотезы истинны; см. [24] и [2]). Напомним, что в этом случае неисключительные стягивания такие, как в теореме 3.1, имеют 1-, 2-, 3-, 4- или 6-дополнение. Положим в теореме 4.4 $X = Z$ и $D = 0$. Получим

СЛЕДСТВИЕ 4.5. Пусть $(Z \ni o, D)$ – трехмерная исключительная логтерминальная по Кавамате особенность такая, что

$$\text{totaldiscr}(Z, D) > -1 + \varepsilon$$

и $D \in \Phi_{\text{sm}}$. Тогда:

- 1) порядок алгебраической фундаментальной группы $\pi_1^{\text{alg}}(Z \setminus \text{Sing}(Z))$ ограничен константой $\text{Const}(\varepsilon)$;
- 2) индекс $K_Z + D$ ограничен константой $\text{Const}(\varepsilon)$;
- 3) для любого исключительного дивизора E над Z имеет место одно из двух: или $a(E) > 0$, или $a(E) \in \mathfrak{M}(\varepsilon)$, где $\mathfrak{M}(\varepsilon) \subset (-1, 0]$ – подмножество, зависящее только от ε .

Заметим, что без предположения исключительности порядок $\pi_1^{\text{alg}}(Z \setminus \text{Sing}(Z))$ не обязательно ограничен (тем не менее, это множество конечно [22, теорема 3.6]). Утверждение 1) следствия 4.5 также выполнено для топологической фундаментальной группы π_1 при предположении, что она конечна. М. Рид сообщил авторам, что конечность $\pi_1(Z \setminus \text{Sing}(Z))$ для трехмерной логтерминальной особенности была доказаны Н. Шепард-Барроном (не опубликовано).

СЛЕДСТВИЕ 4.6 [19]. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Пусть $(X/Z \ni o, D)$ – трехмерное логмногообразие локального типа такое, что $K + D$ – дивизор $\mathbb{Q}$ -карты и $-(K + D)$ является f -численно эффективным и f -объемным. Предположим, что стягивание f исключительно и

$$\text{totaldiscr}(X) > -1 + \varepsilon.$$

- 1) Если $\dim(Z) \geq 2$, то порядок группы $\pi_1^{\text{alg}}(Z \setminus \text{Sing}(Z))$ ограничен константой $\text{Const}(\varepsilon)$.
- 2) Если $\dim(Z) = 1$, то кратность центрального слоя $f^{-1}(o)$ ограничена константой $\text{Const}(\varepsilon)$.

СЛЕДСТВИЕ 4.7 [24]. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Пусть $(X/Z \ni o, D)$ – трехмерная исключительная логпара такая, что структурный морфизм $f: X \rightarrow Z \ni o$ – малое стягивание (т.е. f стягивает только конечное число кривых),

$$\text{totaldiscr}(X, D) > -1 + \varepsilon,$$

$D \in \Phi_{\text{m}}^3$ и дивизор $-(K + D)$ численно эффективен и объемен над Z . Тогда:

- 1) относительные числа Пикара $\rho(X/Z)$ и $\rho^{\text{an}}(X/Z)$ ограничены константой $\text{Const}(\varepsilon)$;
- 2) число компонент центрального слоя $f^{-1}(o)$ ограничено константой $\text{Const}'(\varepsilon)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сохраним обозначения, принятые в доказательстве теоремы 3.1. Возьмем некоторое n -дополнение $K_{\tilde{X}} + \Delta + S + \Upsilon$, где $n \leq N_2$. Применим $(K_{\tilde{X}} + \Delta + \Upsilon)$ -ПММ. Для каждого экстремального луча R имеем $R \cdot S > 0$. Следовательно, S не стягивается. В конце мы получим модель $p: \tilde{X} \rightarrow Z$ с p -численно эффективным дивизором $K_{\tilde{X}} + \tilde{\Delta} + \tilde{\Upsilon} \equiv -\tilde{S}$. Так как дивизор $K_{\tilde{X}} + \Delta + S + \Upsilon$ численно тривиален, то для любого дивизора E поля $K(X)$ имеем

$$a(E, \Delta + S + \Upsilon) = a(E, \tilde{\Delta} + \tilde{S} + \tilde{\Upsilon})$$

(ср. [11, предложение 3.10]). Это показывает, что $(\tilde{X}, \tilde{\Delta} + \tilde{S} + \tilde{\Upsilon})$ – чисто логтерминальная пара. Далее, по лемме 3.14 $p(\tilde{S}) = o$. Так как дивизор $-\tilde{S}$ численно эффективен над Z , то легко видеть, что $\tilde{S}$ совпадает со слоем над o . По построению

$$n(K_{\tilde{S}} + \text{Diff}_{\tilde{S}}(\tilde{\Delta} + \tilde{\Upsilon})) \sim 0$$

и дивизор $K_{\tilde{S}} + \text{Diff}_{\tilde{S}}(\tilde{\Delta} + \tilde{\Upsilon})$ логтерминален по Кавамате (по формуле присоединения [13, теорема 17.6]). Поэтому

$$\text{totaldiscr}(\tilde{S}, \text{Diff}_{\tilde{S}}(\tilde{\Delta} + \tilde{\Upsilon})) \geq -1 + 1/n, \quad n \leq N_2.$$

Очевидно, что $\text{Diff}_{\tilde{S}}(\tilde{\Delta} + \tilde{\Upsilon}) \neq 0$. Согласно [2] многообразие $\tilde{S}$ принадлежит конечному числу алгебраических семейств. Таким образом, можно предположить, что число $\rho(\tilde{S})$ ограничено константой $\text{Const}(\varepsilon)$.

Далее рассмотрим точную последовательность

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O}_{\tilde{X}}^{\text{an}} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}_{\tilde{X}}^{\text{an}*} \rightarrow 0.$$

По теореме Каваматы–Фивега об обращении в нуль $R^i f^* \mathcal{O}_{\tilde{X}}^{\text{an}} = 0$, $i > 0$. Следовательно, $\text{Pic}^{\text{an}}(\tilde{X}) = H^2(\tilde{X}, \mathbb{Z})$. Аналогично, $H^2(\tilde{S}, \mathbb{Z}) = \text{Pic}(\tilde{S})$. Так как $\tilde{S} = p^{-1}(o)$ – топологический ретракт $\tilde{X}$, то $H^2(\tilde{X}, \mathbb{Z}) = H^2(\tilde{S}, \mathbb{Z})$. Следовательно, число $\rho^{\text{an}}(\tilde{X})$ ограничено и ограничено также $\rho^{\text{an}}(\hat{X})$ (так как $\hat{X} \dashrightarrow \tilde{X}$ – последовательность флипов). Это доказывает утверждение 1). Чтобы доказать 2), можно использовать то, что $\rho^{\text{an}}(X/Z)$ равно числу компонент слоя $f^{-1}(o)$ (по аргументации, приведенной выше; см. [15, следствие 1.3]).

СЛЕДСТВИЕ 4.8. *Фиксируем $\varepsilon > 0$. Пусть $(Z \ni o, D)$ – трехмерная исключительная логтерминальная по Кавамате особенность такая, что*

$$\text{totaldiscr}(X, D) > -1 + \varepsilon$$

и $D \in \Phi_{\mathbf{m}}^3$. Тогда для ее $\mathbb{Q}$ -факторизации $f: X \rightarrow Z$ имеем:

- 1) *числа $\rho(X/Z)$ и $\rho^{\text{an}}(X/Z)$ ограничены $\text{Const}(\varepsilon)$;*
- 2) *число компонент $f^{-1}(o)$ ограничено $\text{Const}'(\varepsilon)$.*

Заметим, что для неисклчительных малых стягивания число компонент слоя не ограничено даже в терминальном случае (см. [12, пример 13.7]). Мы предложим пример флоп-стягивания такого, как в следствии 4.7.

ПРИМЕР 4.9. Пусть $(Z \ni o)$ – трехмерная гиперповерхностная особенность, заданная уравнением

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^5 + x_4^5 = 0$$

в $\mathbb{C}^4$. Согласно [7] эта особенность исключительна (и канонична). Легко видеть также, что особенность не $\mathbb{Q}$ -факториальна. Пусть $f: X \rightarrow Z$ – $\mathbb{Q}$ -факториализация [13, теорема 6.11.1]. По лемме 2.3 пара $(X/Z \ni o, 0)$ исключительна. Следовательно, она удовлетворяет условиям следствия 4.7 (с $D = 0$).

Много примеров исключительных особенностей может быть найдено в работах [14] и [7]. Наконец, мы предложим пример исключительного стягивания Фано $f: X \rightarrow Z$, $\dim(X) > \dim(Z)$.

ПРИМЕР 4.10 [20, теорема 7.1.12]. Рассмотрим поверхность $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}^1$ и раздуем точки на слое ее проекции $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}^1 \rightarrow \mathbb{C}^1$ так, чтобы получить расслоение $f^{\min}: X^{\min} \rightarrow \mathbb{C}^1$ с центральным слоем, имеющим следующий двойственный граф:

$$\begin{array}{ccccccc} & & \overset{-3}{\circ} & & & & \\ & & | & & & & \\ -2 & \text{---} & -2 & \text{---} & \overset{-b}{\circ} & \text{---} & -2 & \text{---} & -1 & \text{---} & \underbrace{\overset{-3}{\circ} \text{---} \overset{-2}{\circ} \text{---} \dots \text{---} \overset{-2}{\circ}}_{b-2} \end{array}$$

где $b \geq 2$. Далее стянем кривые, соответствующие белым вершинам. Мы получим экстремальное стягивание $f: X \rightarrow \mathbb{C}^1$ с двумя логтерминальными точками. Канонический дивизор K_X 3-дополняем, но не 1- или 2-дополняем [20, теорема 7.1.12]. Следовательно, стягивание f исключительно.

§ 5. Глобальный случай

В этом параграфе модифицируем теорему 3.1 для глобального случая. В отличие от локального случая, здесь мы вынуждены предположить также существование границы с довольно “плохими” особенностями. Теорема 5.1 представляет собой частный случай гипотезы 1.9.

ТЕОРЕМА 5.1 (глобальный случай). Пусть (X, D) – d -мерное логмногообразие глобального типа такое, что:

- 1) пара (X, D) логтерминальна по Кавамате;
- 2) дивизор $-(K + D)$ численно эффективен и обременен;
- 3) $D \in \Phi$, где $\Phi = \Phi_{\mathbf{m}}^d$ или $\Phi = \Phi_{\mathbf{sm}}$.

Допустим, что имеется граница D^b такая, что:

- 4) пара $K + D + D^b$ не логтерминальна по Кавамате;
- 5) дивизор $-(K + D + D^b)$ численно эффективен и обременен.

Предположим также, что верна логПММ для размерности d . Тогда существует не логтерминальное по Кавамате n -дополнение дивизора $K + D$ для $n \in N_{d-1}(\Phi)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала заменим X на его $\mathbb{Q}$ -факториализацию. Тогда, как и в лемме 3.3, мы рассмотрим границу $D^{\cup} \geq 0$ такую, что дивизор $-(K + D + D^b + D^{\cup})$ обилиен (но $K + D + D^b + D^{\cup}$ необязательно логканоничен). Далее, найдем $t \in \mathbb{Q}$ такое, что пара $(X, D + t(D^b + D^{\cup}))$ логканонична, но не логтерминальна по Кавамате (т.е. t – логканонической порог $c(X, D, D^b + D^{\cup})$). Положим $D^{\nabla} = t(D^b + D^{\cup})$.

Далее доказательство протекает аналогично доказательству теоремы 3.1.

СЛЕДСТВИЕ 5.2 (ср. [24, следствие 2.8]). Пусть (X, D) – d -мерное логмногообразия глобального типа такое, что:

- 1) пара (X, D) логтерминальна по Кавамате;
- 2) дивизор $-(K + D)$ численно эффективен и обременен;
- 3) $D \in \Phi$, где $\Phi = \Phi_{\mathbf{m}}^d$ или $\Phi = \Phi_{\mathbf{sm}}$;
- 4) $(K + D)^d > d^d$.

Предположим, что верна логПММ для размерности d . Тогда существует не логтерминальное по Кавамате n -дополнение $K + D$, где $n \in N_{d-1}(\Phi)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Граница D^b такая, как в теореме 5.1, существует по теореме Римана–Роха (см., например, [11, лемма 6.7.1]).

Много примеров исключительных логповерхностей дель Пеццо могут быть найдены в работах [24], [1], [9] и [20].

§ 6. Добавление

В этом параграфе мы представим два полезных для приложений свойства дополнений. Будет использоваться определение 1.1 для случая, когда D – субграница, т.е. $\mathbb{Q}$ -дивизор (необязательно эффективный) с коэффициентами $d_i \leq 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1 [24, лемма 2.13]. Фиксируем $n \in \mathbb{N}$. Пусть $f: Y \rightarrow X$ – бирациональное стягивание, и пусть D – субграница на Y такая, что:

- 1) дивизор $K_Y + D$ численно эффективен над X ;
- 2) $f(D) = \sum d_i f(D_i)$ – граница, чьи коэффициенты удовлетворяют неравенству

$$\lfloor (n+1)d_i \rfloor \geq nd_i.$$

Предположим, что дивизор $K_X + f(D)$ n -дополняем. Тогда и дивизор $K_Y + D$ также n -дополняем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим крепантный прообраз

$$K_Y + D' = f^*(K_X + f(D)^+), \quad f_* D' = D.$$

Запишем $D' = S' + B'$, где дивизор S' приведен, дивизоры S' и B' не имеют общих компонент и $\lfloor B' \rfloor \leq 0$. Мы утверждаем, что $K_Y + D' - n$ -дополнение дивизора $K_Y + D$. Единственное, что нужно проверить, – это неравенство

$$nB' \geq \lfloor (n+1) \{D\} \rfloor.$$

Из условия 2) имеем $f(D)^+ \geq f(D)$. Этот дает нам, что $D' \geq D$ (так как $D - D'$ f -численно эффективен; см. [23, п. 1.1]). Наконец, так как nD' – целый дивизор, то имеет место неравенство

$$nD' \geq nS' + \lfloor (n+1)B' \rfloor \geq n \lfloor D \rfloor + \lfloor (n+1) \{D\} \rfloor.$$

Следующее утверждение является усовершенствованием техники доказательств теоремы 5.6 из [23] и теоремы 19.6 из [13].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.2 [19]. *Фиксируем $n \in \mathbb{N}$. Пусть $(X/Z \ni o, D)$ – логмногообразия и $S := \lfloor D \rfloor$, $B := \{D\}$. Предположим, что:*

- 1) *пара (X, D) чисто логтерминальна;*
- 2) *дивизор $-(K_X + D)$ численно эффективен и обремен над Z ;*
- 3) *$S \neq 0$ вблизи слоя $f^{-1}(o)$;*
- 4) *коэффициенты дивизора $D = \sum d_i D_i$ удовлетворяют неравенству*

$$\lfloor (n+1)d_i \rfloor \geq nd_i. \quad (6.1)$$

Далее, допустим, что вблизи $f^{-1}(o) \cap S$ существует n -дополнение $K_S + \text{Diff}_S(B)^+$ логдивизора $K_S + \text{Diff}_S(B)$. Тогда вблизи $f^{-1}(o)$ существует n -дополнение $K_X + S + B^+$ логдивизора $K_X + S + B$ такое, что $\text{Diff}_S(B)^+ = \text{Diff}_S(B^+)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g: Y \rightarrow X$ – логразрешение. Запишем

$$K_Y + S_Y + A = g^*(K_X + S + B),$$

где S_Y – собственный прообраз S на Y и $\lfloor A \rfloor \leq 0$. По формуле присоединения [13, теорема 17.6] дивизор S нормален, а пара $(S, \text{Diff}_S(B))$ чисто логтерминальна. В частности, $g_S: S_Y \rightarrow S$ – бирациональное стягивание. Поэтому

$$K_{S_Y} + \text{Diff}_{S_Y}(A) = g_S^*(K_S + \text{Diff}_S(B)).$$

Заметим, что $\text{Diff}_{S_Y}(A) = A|_{S_Y}$ (так как многообразие Y неособо). Легко показать (см. [20, п. 4.2]), что коэффициенты $\text{Diff}_S(B)$ удовлетворяют неравенству (6.1). Таким образом, мы можем применить предложение 6.1 к g_S . Получаем n -дополнение $K_{S_Y} + \text{Diff}_{S_Y}(A)^+$ дивизора $K_{S_Y} + \text{Diff}_{S_Y}(A)$. В частности, согласно (1.1) существует дивизор

$$\Theta \in \lfloor -nK_{S_Y} - \lfloor (n+1) \text{Diff}_{S_Y}(A) \rfloor \rfloor$$

такой, что

$$n \text{Diff}_{S_Y}(A)^+ = \lfloor (n+1) \text{Diff}_{S_Y}(A) \rfloor + \Theta.$$

По теореме Каваматы–Фивега об обращении в нуль имеем

$$\begin{aligned} R^1 h_*(\mathcal{O}_Y(-nK_Y - (n+1)S_Y - \lfloor (n+1)A \rfloor)) \\ = R^1 h_*(\mathcal{O}_Y(K_Y + \lceil -(n+1)(K_Y + S_Y + A) \rceil)) = 0. \end{aligned}$$

Из точной последовательности

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \mathcal{O}_Y(-nK_Y - (n+1)S_Y - \lfloor (n+1)A \rfloor) \\ &\longrightarrow \mathcal{O}_Y(-nK_Y - nS_Y - \lfloor (n+1)A \rfloor) \\ &\longrightarrow \mathcal{O}_{S_Y}(-nK_{S_Y} - \lfloor (n+1)A \rfloor|_{S_Y}) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

мы получаем сюръективность ограничения

$$\begin{aligned} H^0(Y, \mathcal{O}_Y(-nK_Y - nS_Y - \lfloor (n+1)A \rfloor)) &\longrightarrow \\ &\longrightarrow H^0(S_Y, \mathcal{O}_{S_Y}(-nK_{S_Y} - \lfloor (n+1)A \rfloor|_{S_Y})). \end{aligned}$$

Поэтому существует дивизор

$$\Xi \in |-nK_Y - nS_Y - \lfloor (n+1)A \rfloor|$$

такой, что $\Xi|_{S_Y} = \Theta$. Положим

$$A^+ := \frac{1}{n}(\lfloor (n+1)A \rfloor + \Xi).$$

Тогда $n(K_Y + S_Y + A^+) \sim 0$ и $(K_Y + S_Y + A^+)|_{S_Y} = K_{S_Y} + \text{Diff}_{S_Y}(A)^+$.

Заметим, что обращение присоединения на Y неприменимо потому, что A^+ может иметь отрицательные коэффициенты. Чтобы исправить ситуацию, положим $B^+ := g_*A^+$. Снова имеем $n(K_X + S + B^+) \sim 0$ и

$$(K_X + S + B^+)|_S = K_S + \text{Diff}_S(B)^+.$$

Покажем только то, что дивизор $K_X + S + B^+$ логканоничен. Предположим противное. Тогда пара $(X, S + B + \alpha(B^+ - B))$ также не логканонична для некоторого $\alpha < 1$. Ясно, что дивизор $-(K_X + S + B + \alpha(B^+ - B))$ численно эффективен и обижен над Z . По обращению присоединения [13, теорема 17.6] пара $(X, S + B + \alpha(B^+ - B))$ чисто логтерминальна вблизи $S \cap f^{-1}(o)$. Следовательно, $LCS(X, B + \alpha(B^+ - B)) = S$ вблизи $S \cap f^{-1}(o)$. С другой стороны, по лемме о связности [13, теорема 17.4] множество $LCS(X, B + \alpha(B^+ - B))$ связно вблизи $f^{-1}(o)$. Таким образом, пара $(X, S + B + \alpha(B^+ - B))$ чисто логтерминальна. Последнее противоречие доказывает предложение.

Список литературы

1. *Abe T.* Classification of Exceptional Complements: Elliptic Curve Case. e-print alg-geom/9711029.
2. *Alexeev V.* Boundedness and K^2 for log surfaces // Int. J. Math. 1994. V. 5. P. 779–810.
3. *Borisov A. A.* Boundedness theorem for Fano log-threefolds // J. Algebraic Geom. 1996. V. 5. P. 119–133.
4. *Борисов А. А., Борисов Л. А.* Особые торические многообразия Фано // Матем. сб. 1993. Т. 75. С. 277–283.
5. *Fujino O.* Abundance theorem for semi log canonical threefolds // Duke Math. J. 2000. V. 102. № 3. P. 513–532.
6. *Ishii S.* The quotients of log-canonical singularities by finite groups // Singularities. Sapporo, 1998; // Adv. Stud. Pure Math. 2000. V. 29. P. 135–161.

7. *Ishii S., Prokhorov Yu. G.* Hypersurface exceptional singularities // International J. Math. 2001. V. 12. № 5. P. 1–27; e-print math.AG/9910123.
8. *Kawamata Y., Matsuda K., Matsuki K.* Introduction to the minimal model program // Adv. Stud. Pure Math. 1987. V. 10. P. 283–360.
9. *Keel S., McKernan J.* Rational curves on quasi-projective surfaces // Memoirs AMS. 1999. V. 140. № 669.
10. *Kollár J.* Log surfaces of general type; some conjectures // Contemporary Math. AMS. 1994. V. 162. P. 261–275.
11. *Kollár J.* Singularities of pairs // Proc. Symp. Pure Math. 1995. V. 62. P. 221–287.
12. *Kollár J., Mori S.* Classification of three dimensional flips // J. Amer. Math. Soc. 1995. V. 5. P. 533–703.
13. *Kollár J. et al.* Flips and abundance for algebraic threefolds // A summer seminar at the University of Utah. Salt Lake City. 1991. V. 211. Astérisque, 1992.
14. *Markushevich D., Prokhorov Yu. G.* Exceptional quotient singularities // Amer. J. Math. 1999. V. 121. P. 1179–1189.
15. *Mori S.* Flip theorem and the existence of minimal models for 3-folds // J. Amer. Math. Soc. 1988. V. 1. P. 117–253.
16. *Никулин В. В.* Поверхности дель Пеццо с логтерминальными особенностями. I // Матем. сб. 1989. Т. 180. С. 226–243.
17. *Никулин В. В.* Поверхности дель Пеццо с логтерминальными особенностями. III // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1989. Т. 53. № 6. С. 1316–1334.
18. *Prokhorov Yu. G.* Blow-ups of canonical singularities // “Algebra” – Proc. Internat. Algebraic Conf., Moscow, Russia, May 25–30, 1998 / Ed. Yu. Bahturin. Berlin: Walter der Greither Publ., 2000. P. 301–317.
19. *Prokhorov Yu. G.* Boundedness of nonbirational extremal contractions // Internat. J. Math. 2000. V. 11. P. 393–411.
20. *Prokhorov Yu. G.* Lectures on complements on log surfaces // MSJ Memoirs. V. 10. Math. Soc. of Japan, 2001.
21. *Прохоров Ю. Г.* Ограниченность исключительных факторособенностей // Матем. заметки. 2000. Т. 68. № 5. С. 786–789.
22. *Shepherd-Barron N. I., Wilson P. M. H.* Singular threefolds with numerically trivial first and second Chern classes // J. Algebraic Geom. 1994. V. 3. P. 265–281.
23. *Шокуров В. В.* Трехмерные логперестройки // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1993. Т. 40. С. 93–202.
24. *Shokurov V. V.* Complements on surfaces // J. Math. Sci. 2000. V. 102. № 2. P. 3876–3932.
25. *Shokurov V. V.* 3-fold log models // J. Math. Sci. 1996. V. 81. P. 2667–2699.
26. *Shokurov V. V.* Pl flips. Preprint/Baltimore–Moscow, 2000.

Ю.Г. Прохоров: Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова;
e-mail: prokhorov@mech.math.msu.su

Поступило в редакцию
3.X.2000

В.В. Шокуров: The Johns Hopkins University,
Department of Mathematics, Baltimore, Maryland, USA
e-mail: shokurov@math.jhu.edu