Общероссийский математический портал

В. И. Скалыга, Многомерные аналоги неравенств В. А. Маркова и С. Н. Бернштейна, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2001, том 65, выпуск 6, 129–172

DOI: <https://doi.org/10.4213/im367>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 12:31:43

УДК 517.16

В. И. Скалыга

Многомерные аналоги неравенств В. А. Маркова и С. Н. Бернштейна

В работе получены оценки производных алгебраических полиномов на выпуклых и центрально-симметричных выпуклых телах.

Библиография: 44 наименования.

§ 1. Введение

В различных областях анализа, в конструктивной теории функций, в теории приближений, в численных методах решения нелинейных уравнений, а также в других задачах (например, задачах кодирования и декодирования), где нужно знать осциллирующие свойства полиномов, важную роль играют оценки производных алгебраического полинома (соответственно, тригонометрического полинома) на рассматриваемом множестве. Начало исследованиям производной полинома на отрезке положил А. А. Марков [1] в 1889 г. Первая постановка вопроса возникла как ответ на вопрос Д. И. Менделеева, относящийся к полиномам второй степени, поставленный в работе “Исследование водных растворов по удельному весу”. А. А. Марков доказал, что если полином степени n удовлетворяет неравенству

$$\max_{x \in [-1, 1]} |P_n(x)| = \|P_n\|_{[-1, 1]} \leq 1, \quad (1.1)$$

то

$$|P'_n(x)| \leq T'_n(1) = n^2, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (1.2)$$

где $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$. Равенство в (1.2) достигается только для полиномов $P_n(x) = cT_n(x)$, $|c| = 1$, в точках $x = \pm 1$.

В. А. Марков [2] в 1892 г. обобщил теорему А. А. Маркова на случай производной порядка k , $1 \leq k \leq n$, и доказал, что при условии (1.1) выполняется неравенство

$$|P_n^{(k)}(x)| \leq T_n^{(k)}(1) = \frac{n^2(n^2 - 1) \dots (n^2 - (k - 1)^2)}{(2k - 1)!!}, \quad x \in [-1, 1], \quad (1.3)$$

причем равенство в (1.3) достигается только для полиномов $P_n(x) = cT_n(x)$, $|c| = 1$, в точках $x = \pm 1$.

С. Н. Бернштейн [3, с. 27] при условии (1.1) получил оценку

$$|P_n^{(k)}(x)| \leq \frac{k^{k/2} n(n - 1) \dots (n - k + 1)}{(1 - x^2)^{k/2}} = B_{n,k}(x), \quad x \in (-1, 1), \quad (1.4)$$

и показал [3, с. 151], что для фиксированных k и x справедливо равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_{n,k}^{-1}(x) \sup_{\|P_n\|_{[-1,1]} \leq 1} |P_n^{(k)}(x)| = k^{-k/2}, \quad x \in (-1, 1), \quad k = \overline{1, n}. \quad (1.5)$$

При $k = 1$ оценка (1.4) получена А. А. Марковым [1]. А. Шеффер и Р. Даффин [4] установили, что из (1.1) следует более сильная, чем (1.4), оценка

$$|P_n^{(k)}(x)| \leq N_{n,k}(x) = \begin{cases} M_{n,k}(x) = |T_n^{(k)}(x) + iS_n^{(k)}(x)|, & |x| \leq \xi_1^{(k)}, \\ |T_n^{(k)}(x)|, & |x| \geq \xi_1^{(k)}, \end{cases} \quad (1.6)$$

где $S_n(x) = \sin(n \arccos x) = n^{-1}(1 - x^2)^{1/2}T_n'(x)$, $\xi_1^{(k)}$ – максимальный нуль функции $S_n^{(k)}(x)$ на интервале $(-1, 1)$, $i^2 = -1$. Функция $N_{n,k}(x)$ возрастает на $[0, \infty]$. Оценка (1.6) точна в $n - k + 1$ нулях функции $S_n^{(k)}(x)$ и при $|x| \geq \xi_1^{(k)}$.

В работах [2], [5] получена точная мажоранта для всего множества $\{P_n'(x)\}$, $x \in (0, 1)$. В [2] и [6] доказана точная мажоранта для $\{P_n^{(k)}(x)\}$, $k = \overline{1, n}$.

С. Н. Бернштейном [3, с. 497] и В. С. Виденским [7] получены оценки, обобщающие оценку (1.6). С. Н. Бернштейн [3, с. 26] и М. Рисс [8] получили следующее неравенство для тригонометрического полинома $s_n(\theta)$ порядка n :

$$\|s_n'(\theta)\|_C \leq n \|s_n(\theta)\|_C. \quad (1.7)$$

С. Н. Бернштейн [3, с. 558] и Г. Сеге [9] установили более сильное, чем (1.7), неравенство для тригонометрических полиномов $s_n(\theta)$ с вещественными коэффициентами

$$\|((s_n'(\theta))^2 + n^2 s_n^2(\theta))^{1/2}\|_C \leq n \|s_n(\theta)\|_C, \quad (1.8)$$

которое превращается в равенство при $s_n(\theta) = A \cos n\theta + B \sin n\theta$.

Из (1.8) для $P_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и $\|P_n(x)\|_{[-1,1]} \leq 1$ вытекает неравенство

$$|P_n'(x)| \leq n \left(\frac{1 - P_n^2(x)}{1 - x^2} \right)^{1/2}, \quad x \in (-1, 1). \quad (1.9)$$

Это неравенство является тождеством для полинома $T_n(x)$. В неравенстве Бернштейна (1.7) норма $s_n(\theta)$ может быть заменена нормой разности $s_n(\theta + h) - s_n(\theta)$ с заданным шагом h . Имеется неравенство С. М. Никольского [10]

$$\|s_n'(\theta)\|_C \leq (n/2) \|s_n(\theta + \pi/n) - s_n(\theta)\|_C$$

и его обобщение, полученное С. Б. Стечкиным [11] для $0 < h < 2\pi/n$.

В работе [12] показано, что для тригонометрического полинома $s_n(\theta)$ из неравенства

$$|s_n(\theta)| \leq 1, \quad -\omega \leq \theta \leq \omega, \quad 0 < \omega < \pi, \quad (1.10)$$

следует неравенство

$$|s_n'(\theta)| \leq C_{\omega, \varepsilon} n, \quad -\omega + \varepsilon \leq \theta \leq \omega - \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < \omega/2, \quad (1.11)$$

где $C_{\omega, \varepsilon}$ – постоянная, зависящая от ω и ε .

Д. Джексон в [13] установил, что неравенство (1.10) влечет за собой неравенство

$$|s'_n(\theta)| \leq C_\omega n^2, \quad -\omega \leq \theta \leq \omega. \quad (1.12)$$

В работе [14] (см. лемму 3.7 настоящей работы) уточнены оценки (1.11) и (1.12). В [15] М.Я. Зингер перенес некоторые классические результаты В.А. Маркова и С.Н. Бернштейна по оценкам производных на случай тригонометрических полиномов, нормированных на отрезке длины, меньшей периода.

Обобщению неравенств (1.2), (1.7) для L_p -метрик посвящено большое количество работ (см. обзоры [16] и [17]). С.Н. Бернштейн [3] обобщил неравенство (1.7) для целых функций экспоненциального типа, а М.И. Ганзбург [18] обобщил (1.7) для целых функций многих переменных.

Для тригонометрических полиномов многих переменных аналоги неравенства Бернштейна (1.7) получены в работах [19]–[22].

Пусть X и Y – банаховы пространства над $\mathbb{R}$. Через $\mathfrak{P}_n(X, Y)$ обозначим пространство всех полиномов степени не выше n , отображающих X в Y , т.е. множество всех отображений вида

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n u_j(x, \dots, x), \quad x \in X,$$

где $u_j: X^j \rightarrow Y$ – j -линейное непрерывное отображение.

В дальнейшем $\|P_n^{(k)}(x)\|_{\mathcal{L}^k(X, Y)}$ – норма оператора k -й производной по Фреше полинома P_n в точке x в пространстве $\mathcal{L}^k(X, Y)$ всех ограниченных k -линейных операторов из X^k в Y . Если $Y = \mathbb{R}$, то для обозначения производной будем применять знак ∇ . Значение k -линейного отображения $P_n^{(k)}(x)$ на векторах $(h_1, \dots, h_k)$ будем обозначать как $P_n^{(k)}(x)[h_1, \dots, h_k]$. Если $h_1 = \dots = h_s = h$, то

$$P_n^{(k)}(x)[h_1, \dots, h_k] = P_n^{(k)}(x)[h^s, h_{s+1}, \dots, h_k].$$

Обозначим через V выпуклое ограниченное замкнутое тело в банаховом пространстве X . Множество всех таких тел обозначим через W . Тело K всегда принадлежит W и симметрично относительно θ_X – нуля пространства X , B – шар единичного радиуса с центром в нуле, $B(x_0, r) = \{x \in X: \|x - x_0\| \leq r\}$. Положим

$$\|P_n\|_V = \sup_{x \in V} \|P_n(x)\|_Y, \quad \|P_n^{(k)}\|_V = \sup_{x \in V} \|P_n^{(k)}(x)\|_{\mathcal{L}^k(X, Y)},$$

∂V – граница тела V , $\overset{\circ}{V} = V \setminus \partial V$.

Мы будем использовать следующие характеристики тела V . Пусть $x_0 \in \overset{\circ}{V}$; тогда $\rho(x, x_0)$ – значение функционала Минковского на векторе $x - x_0$ относительно тела $V - x_0$;

$$r_h(x_0) = \max\{t: [x_0 - th, x_0 + th] \subset V, \|h\| = 1\},$$

$$r(x_0) = \sup\{r: B(x_0, r) \subset V\}, \quad r(V) = \sup_{x_0 \in V} r(x_0).$$

Если $V = K$, то положим $\rho(x, \theta_X) = \rho(x)$, $r_h(\theta_X) = r_h$.

Пусть $h \in X$ и $\|h\| = 1$. Обозначим через $V(h)$ множество

$$V(h) = \{[y_1, y_2]: y_1, y_2 \in V \text{ и } \exists c \in \mathbb{R}: y_1 - y_2 = ch\},$$

а через $\omega_V(h)$ и ω_V – ширину тела V по направлению h и ширину тела V ,

$$\omega_V(h) = \sup_{[y_1, y_2] \in V(h)} \|y_1 - y_2\|, \quad \omega_V = \inf_{h \in \partial B} \omega_V(h).$$

Пусть $B_n(V) = \{P_n \in \mathfrak{P}_n(X, \mathbb{R}): \|P_n\|_V \leq 1\}$.

В работе рассматриваются в основном следующие задачи:

1) задачи С. Н. Бернштейна получения оценок функций

$$\sup_{P_n \in B_n(V)} \|P_n^{(k)}(x)\|_{\mathcal{L}^k(X, \mathbb{R})} = \varphi_0(n, k, x, V), \quad x \in V, \quad (1.13)$$

$$\sup_{\substack{P_n \in B_n(V) \\ P_n(x) = \varepsilon}} \|P_n^{(k)}(x)\|_{\mathcal{L}^k(X, \mathbb{R})} = \varphi(n, k, x, \varepsilon, V), \quad x \in V; \quad (1.14)$$

2) задача В. А. Маркова получения оценки функции

$$\sup_{P_n \in B_n(V)} \|P_n^{(k)}\|_V = F(n, k, V). \quad (1.15)$$

Обобщение неравенства А. А. Маркова для произвольного выпуклого компактного тела в $\mathbb{E}^m$ впервые исследовалось в [23], где установлена оценка $F(n, 1, V) \leq C(\omega_V)n^2$. Д. Вильгельмсен [24] доказал оценки

$$2/\omega_V \leq C(\omega_V) \leq 4/\omega_V \quad (1.16)$$

и выдвинул гипотезу, что $C(\omega_V) = 2/\omega_V$ для произвольного выпуклого компактного тела V . В [25] оценка (1.16) получена для треугольников в $\mathbb{R}^2$. В [26] приведены два контрпримера несимметричных выпуклых компактных тел в $\mathbb{E}^2$, для которых $F(n, 1, V) > 2n^2/\omega_V$. В [26] получен метод оценки сверху $F(n, 1, V)$, пригодный также для определенных невыпуклых множеств. Применение этого метода для симплекса $V = \{(x, y): x, y \geq 0, x + y \leq 1\}$ в $\mathbb{E}^2$ дало оценку $C(\omega_V) \leq \sqrt{10}/\omega_V$. А. В. Андрианов [27] доказал следующую оценку для $P_n \in \mathfrak{P}_n(X, Y)$ и $V \in W$:

$$\|P'_n\|_V \leq (4n^2/r(V))\|P_n\|_V.$$

В [28], [29] автором получены последовательно более сильные оценки для $P_n \in \mathfrak{P}_n(X, Y)$ и $V \in W$:

$$\|P'_n\|_V \leq (4n^2/\omega_V)\|P_n\|_V \text{ и } \|P'_n\|_V \leq (cn^2/\omega_V)\|P_n\|_V, \quad \text{где } c = 2.60406.$$

И, наконец, в работе [30] автором доказаны равенства:

– для $P_n \in \mathfrak{P}_n(X, Y)$, $X \neq \mathbb{R}$,

$$\sup_{\substack{V \in W \\ \|P_n\|_V \leq 1}} \|P'_n\|_V \omega_V = 2n \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4n}\right); \quad (1.17)$$

– для $P_n \in \mathfrak{P}_n(X, \mathbb{R})$, $X \neq \mathbb{R}$,

$$\sup_{\substack{V \in W \\ x \in V}} \varphi(n, 1, x, \varepsilon, V) \omega_V = C_n(\varepsilon), \quad (1.18)$$

$$\sup_{\substack{V \in W, x \in V, h \in \partial B \\ P_n \in B_n(V), P_n(x) = \varepsilon}} |\nabla P_n(x)[h]| \omega_V(h) = C_n(\varepsilon), \quad (1.19)$$

где $C_n(\varepsilon) = n(1 - \varepsilon^2)^{1/2} \{ \operatorname{ctg}(\alpha(\varepsilon)/(2n)) + \operatorname{ctg}(\alpha(-\varepsilon)/(2n)) \}$, $\alpha(\varepsilon) = \arccos \varepsilon$, $\varepsilon \in [-1, 1]$, $C_n(\varepsilon)$ при $n \geq 2$ – убывающая функция на $[0, 1]$, $C_1(\varepsilon) = 2$.

В (1.19) для любого $X \neq \mathbb{R}$ и любого ε существуют $V \subset X$, $x \in V$, $h \in \partial B$ и полином P_n , на которых супремум достигается. В (1.17), (1.18) супремум достигается для некоторых X , например l_1 и l_∞ . Равенство (1.17) для $P_n \in \mathfrak{P}_n(\mathbb{E}^m, \mathbb{R})$ анонсировано Ю. Н. Субботиным и Ю. С. Васильевым [31] независимо и одновременно с работой [30]. Недавно М. Баран [32] получил для $K \subset \mathbb{E}^m$ и $P_n \in B_n(K)$ следующее неравенство:

$$|\nabla P_n(x)[h]| \leq nr_h^{-1} \min \left\{ \left(\frac{1 - P_n^2(x)}{1 - \rho^2(x)} \right)^{1/2}, n \right\}, \quad x \in K, \quad \|h\| = 1. \quad (1.20)$$

Для шара B из любого банахова пространства X этот результат ранее доказал Сарантопулос [33]. В 1927 г. О. Д. Келлог [34] доказал для $B \subset \mathbb{E}^m$ неравенство (1.20) без множителя $(1 - P_n^2(x))^{1/2}$, хотя наличие этого множителя легко вытекает из лемм работы [34]. Автор в [29], еще не зная работ [32] и [33], доказал (1.20) для тела K из любого банахова пространства X и применил свой метод для получения оценок высших производных полиномов на телах K и V . Л. А. Харрис [35, с. 149] получил для $B \subset X$ и $P_n \in \mathfrak{P}_n(X, Y)$ оценку

$$\|P_n^{(k)}(x)[h^k]\| \leq 2^{2k-1} T_n^{(k)}(1) \|P_n\|_B, \quad x \in B, \quad k = \overline{1, n},$$

и установил в [36], [37] результаты типа неравенства В. А. Маркова для полиномов $P_n \in \mathfrak{P}_n(X, \mathbb{R})$, удовлетворяющих неравенству $|P_n(x)| \leq \varphi^n(x)$, $x \in X$, где $\varphi(x)$ – неотрицательная функция, удовлетворяющая условию $\varphi(x + y) \leq \varphi(x) + \|y\|$, $x, y \in X$.

Все результаты формулируются для $Y = \mathbb{R}$, но, как показано в [29], оценки вида

$$\|P_n^{(k)}(x)\|_{\mathcal{L}^k(X, \mathbb{R})} \leq C(x, n, k), \quad P_n \in B_n(V),$$

переносятся без изменений на полиномы $P_n \in \mathfrak{P}_n(X, Y)$, $\|P_n\|_V \leq 1$.

§ 2. Обобщение неравенств Бернштейна–Виденского в $\mathbb{R}$

ЛЕММА 2.1 [7]. Пусть

$$f(x) = (1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta P_n(x),$$

где $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, $P_n \in \mathfrak{P}_n(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \setminus \mathfrak{P}_{n-1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, все нули P_n лежат на интервале $(-1, 1)$. Тогда k -я производная $f^{(k)}(x)$, $k = \overline{1, n+2}$, имеет на интервале $(-1, 1)$ $n - k + 2$ нулей.

ЛЕММА 2.2 [7]. Пусть

$$f(x) = x^\alpha P_n(x) = \sum_{k=0}^n A_k x^{k+\alpha},$$

где $0 < \alpha < 1$, $P_n \in \mathfrak{P}_n(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \setminus \mathfrak{P}_{n-1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, все нули P_n лежат на полуоси $(0, \infty)$. Тогда k -я производная $f^{(k)}(x)$, $k \geq 1$, имеет на полуоси $(0, \infty)$ $n-k+1$ нулей.

ЛЕММА 2.3 [7]. Пусть

$$f_1(x) = (1-x)^\alpha P_n(x), \quad f_2(x) = (1+x)^\alpha P_n(x),$$

где $0 < \alpha < 1$, $P_n \in \mathfrak{P}_n(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \setminus \mathfrak{P}_{n-1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, все нули P_n лежат на интервале $(-1, 1)$. Тогда k -е производные $f_1^{(k)}(x)$ и $f_2^{(k)}(x)$ имеют на интервале $(-1, 1)$ $n-k+1$ нулей и $f_2^{(k)}(x) \neq 0$ при $x \geq 1$, $f_1^{(k)}(x) \neq 0$ при $x \leq -1$.

ТЕОРЕМА 2.1 [7]. Пусть на отрезке $[a, b]$ даны две дважды дифференцируемые функции $g(x)$ и $f(x)$, которые обладают следующими свойствами:

1) любая линейная комбинация $\mu_1 g(x) + \mu_2 f(x)$, $\mu_1^2 + \mu_2^2 \neq 0$, $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$, имеет не более n нулей на $[a, b]$;

2) каждая из производных $g'(x)$ и $f'(x)$ имеет не более $n-1$ нулей на $[a, b]$.

Если $g(x)$ имеет на $[a, b]$ n различных нулей $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_n$ и $f(x)$ имеет на $[a, b]$ n различных нулей $\beta_1 > \beta_2 > \dots > \beta_n$, которые удовлетворяют неравенствам

$$\beta_n < \alpha_n < \beta_{n-1} < \dots < \beta_1 < \alpha_1,$$

то нули $\xi_1 > \xi_2 > \dots > \xi_{n-1}$ функции $g'(x)$ и нули $x_1 > x_2 > \dots > x_{n-1}$ функции $f'(x)$ удовлетворяют неравенствам

$$x_{n-1} < \xi_{n-1} < x_{n-2} < \dots < x_1 < \xi_1.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. А) Если в условиях теоремы 2.1 $f(x)$ имеет $n-1$ нуль, то порядок расположения нулей $f'(x)$ и $g'(x)$ тот же:

$$\xi_{n-1} < x_{n-2} < \dots < x_1 < \xi_1.$$

В) В формулировке теоремы 2.1 условие 1) можно заменить условием

1') любая линейная комбинация $\mu_1 g(x) + \mu_2 f(x)$, $\mu_1^2 + \mu_2^2 \neq 0$, имеет на отрезке $[a, b]$ только простые нули.

ЛЕММА 2.4. Пусть дифференцируемые на отрезке $[a, b]$ функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ удовлетворяют следующим условиям:

1) $f_1^2(x) + f_2^2(x) > 0$ для $x \in [a, b]$;

2) при любых $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$, $\mu_1^2 + \mu_2^2 \neq 0$, функция $F_1(x) = \mu_1 f_1(x) + \mu_2 f_2(x)$ может иметь на отрезке $[a, b]$ только простые нули.

Тогда возможные нули функций $F_1(x)$ и $F_2(x) = \mu_2 f_1(x) - \mu_1 f_2(x)$, $\mu_1^2 + \mu_2^2 \neq 0$, на отрезке $[a, b]$ взаимно разделены.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно полагать, что $\mu_1^2 + \mu_2^2 = 1$. Тогда

$$\begin{aligned} F_1(x) &= (f_1^2(x) + f_2^2(x))^{1/2} \cos(\varphi(x) - \alpha), \\ -F_2(x) &= (f_1^2(x) + f_2^2(x))^{1/2} \sin(\varphi(x) - \alpha), \end{aligned}$$

где $\cos \varphi = f_1/(f_1^2 + f_2^2)^{1/2}$, $\sin \varphi = f_2/(f_1^2 + f_2^2)^{1/2}$, $\cos \alpha = \mu_1$, $\sin \alpha = \mu_2$, и для доказательства леммы достаточно показать, что $\varphi'(x) \neq 0$ на $[a, b]$.

Имеют место равенства

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \operatorname{arctg}(f_2(x)/f_1(x)), \\ \varphi'(x) &= \frac{f_2'(x)f_1(x) - f_1'(x)f_2(x)}{f_1^2(x) + f_2^2(x)}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что отсутствие нулей производной $\varphi'(x)$ на отрезке $[a, b]$ равносильно отсутствию кратных нулей функции $F_1(x)$ на отрезке $[a, b]$.

ЛЕММА 2.5. Пусть $H_n \in \mathfrak{P}_n(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \setminus \mathfrak{P}_{n-1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ и $G_{n-1} \in \mathfrak{P}_{n-1}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \setminus \mathfrak{P}_{n-2}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, все нули H_n и G_{n-1} лежат на $(-1, 1)$ и взаимно разделены, $H_n(1) > 0$, $G_{n-1}(1) > 0$. Пусть функции $R_1(x, \nu)$ и $R_2(x, \nu)$ определены равенствами

$$\begin{aligned} R_1(x, \nu) &= \cos \nu H_n(x) + \sin \nu (1 - x^2)^{1/2} G_{n-1}(x), \\ R_2(x, \nu) &= \sin \nu H_n(x) - \cos \nu (1 - x^2)^{1/2} G_{n-1}(x), \quad \nu \in \mathbb{R}, \quad x \in [-1, 1]. \end{aligned}$$

Тогда функция $R_1^{(k)}(x, \nu)$ (k -я производная по x функции $R_1(x, \nu)$, $k = \overline{1, n}$) при $\sin \nu \neq 0$ имеет $n - k + 1$ нулей на $[-1, 1]$ и все они простые; $R_1^{(k)}(x, 0)$ имеет $n - k$ простых нулей; нули функций $R_1^{(k)}(x, \nu)$ и $R_2^{(k)}(x, \nu)$ при любом $\nu \in \mathbb{R}$ взаимно разделены.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f_1(x) = H_n(x)$ и $f_2(x) = (1 - x^2)^{1/2} G_{n-1}(x)$. В силу леммы 2.1 и теоремы Ролля $R_1^{(k)}(x, \nu)$ может иметь не более $n - k + 1$ нулей на $(-1, 1)$. По теореме 2.1, все условия которой выполнены для $f_1(x)$ и $f_2(x)$, нули $f_1'(x)$ и $f_2'(x)$ взаимно разделены. Предположим по индукции, что нули $f_1^{(k)}(x)$ и $f_2^{(k)}(x)$ взаимно разделены; тогда функции $f_1^{(k)}(x)$ и $f_2^{(k)}(x)$ удовлетворяют условиям теоремы 2.1 и, следовательно, нули $f_1^{(k+1)}(x)$ и $f_2^{(k+1)}(x)$ взаимно разделены. Поэтому при $k = \overline{0, n}$ нули функций $f_1^{(k)}(x)$ и $f_2^{(k)}(x)$ взаимно разделены. Отсюда в силу леммы 2.1 и теоремы Ролля при $\cos \nu = 0$ следуют утверждения леммы.

Покажем, что при $\sin \nu \neq 0$ и $\cos \nu \neq 0$ функция $R_1^{(k)}(x, \nu)$ имеет $n - k + 1$ нулей на $(-1, 1)$. Пусть $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_{n-k+1}$ — нули $f_2^{(k)}(x)$ на $(-1, 1)$. Так как нули $f_1^{(k)}(x)$ и $f_2^{(k)}(x)$ взаимно разделены, то

$$R_1^{(k)}(\alpha_j, \nu) R_1^{(k)}(\alpha_{j+1}, \nu) < 0, \quad j = \overline{1, n-k}.$$

В силу того, что $|f_2^{(k)}(x)| \rightarrow \infty$ при $|x| \rightarrow 1$, $R_1^{(k)}(x, \nu)$ имеет нуль на интервале $(\alpha_1, 1)$, если для $x \in (\alpha_1, 1)$ выполнено неравенство

$$\cos \nu f_1^{(k)}(x) \sin \nu f_2^{(k)}(x) < 0, \quad (2.1)$$

или $R_1^{(k)}(x, \nu)$ имеет нуль на $(-1, \alpha_{n-k+1})$, если для $x \in (\alpha_1, 1)$ выполнено неравенство

$$\cos \nu f_1^{(k)}(x) \sin \nu f_2^{(k)}(x) > 0. \quad (2.2)$$

Так как $f_2^{(k)}(x)$ имеет на $(-1, 1)$ $n - k + 1$ нуль, а $f_1^{(k)}(x)$ имеет $n - k$ нулей и эти нули взаимно разделены, из неравенства (2.2) для $x \in (\alpha_1, 1)$ вытекает неравенство (2.1) для $x \in (-1, \alpha_{n-k+1})$. Таким образом, мы показали, что функция $R_1^{(k)}(x, \nu)$, $k = \overline{1, n}$, при любом $\nu \in \mathbb{R}$ имеет только простые нули. Тогда из леммы 2.4 следует, что нули функций $R_1^{(k)}(x, \nu)$ и $R_2^{(k)}(x, \nu)$ взаимно разделены.

ЛЕММА 2.6. Пусть $H_n(x)$ и $G_{n-1}(x)$ – полиномы, удовлетворяющие условиям леммы 2.5, $k \in \mathbb{Z}$, $0 \leq k \leq n$. Пусть для полинома $P_{n-k} \in \mathfrak{P}_{n-k}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ имеет место неравенство

$$|P_{n-k}(x)| < |H_n^{(k)}(x) + i((1-x^2)^{1/2}G_{n-1}(x))^{(k)}|, \quad x \in [-1, 1], \quad i^2 = -1. \quad (2.3)$$

Тогда для любого $\nu \in \mathbb{R}$ и $s = \overline{1, n-k}$ функция

$$F_s(x, \nu) = \cos \nu H_n^{(k+s)}(x) + \sin \nu ((1-x^2)^{1/2}G_{n-1}(x))^{(k+s)} - P_{n-k}^{(s)}(x)$$

имеет на отрезке $[-1, 1]$ только простые нули.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $k = 0$ утверждение леммы доказано в [7]. Пусть $k > 0$, $f_1(x) = H_n^{(k)}(x)$, $f_2(x) = ((1-x^2)^{1/2}G_{n-1}(x))^{(k)}$. Рассмотрим следующие случаи.

1°) $\nu = 0$. В $n - k + 1$ нулях $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_{n-k+1}$ функции $f_2(x)$ на $(-1, 1)$ имеем

$$|P_{n-k}(\alpha_j)| < |f_1(\alpha_j)|, \quad j = \overline{1, n-k+1}.$$

Так как нули $f_1(x)$ и $f_2(x)$ взаимно разделены, то

$$f_1(\alpha_j)f_1(\alpha_{j+1}) < 0, \quad j = \overline{1, n-k},$$

откуда заключаем, что полином $F_s(x, 0)$ степени $n - k - s$ имеет $n - k - s$ простых нулей, $s = \overline{1, n-k}$.

2°) $\nu = \pi/2$. В $n - k$ нулях $\beta_1 > \beta_2 > \dots > \beta_{n-k}$ функции $f_1(x)$ имеем

$$|P_{n-k}(\beta_j)| < |f_2(\beta_j)|, \quad j = \overline{1, n-k}.$$

Кроме того, $|f_2(x)| \rightarrow \infty$ при $|x| \rightarrow 1$, так что найдутся точки $z_1 \in (\alpha_1, 1)$ и $z_2 \in (-1, \alpha_{n-k+1})$, для которых также выполнено неравенство

$$|P_{n-k}(x)| < |f_2(x)|, \quad x = z_1, z_2.$$

Так как нули $f_1(x)$ и $f_2(x)$ взаимно разделены, то в каждой двух соседних точках из набора $n - k + 2$ точек $z_1 > \beta_1 > \dots > \beta_{n-k} > z_2$ функция $f_2(x)$ имеет разные знаки. Отсюда и из леммы 2.1 следует, что $F_s(x, \pi/2)$ имеет $n - k - s + 1$ нулей и все нули простые.

3°) $\nu \in (0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi)$. Рассмотрим функции

$$\begin{aligned} R_1^{(k)}(x, \nu) &= \cos \nu f_1(x) + \sin \nu f_2(x), \\ R_2^{(k)}(x, \nu) &= \sin \nu f_1(x) - \cos \nu f_2(x). \end{aligned}$$

Имеет место равенство

$$|R_1^{(k)}(x, \nu) + iR_2^{(k)}(x, \nu)| = |f_1(x) + if_2(x)|, \quad x \in [-1, 1]. \quad (2.4)$$

По лемме 2.5 функции $R_1^{(k)}(x, \nu)$ и $R_2^{(k)}(x, \nu)$ имеют на $[-1, 1]$ по $n - k + 1$ нулей $x_1 > x_2 > \dots > x_{n-k+1}$ и $y_1 > y_2 > \dots > y_{n-k+1}$ соответственно, и их нули взаимно разделены. Из (2.3) и (2.4) следует, что в нулях функции $R_2^{(k)}(x, \nu)$ выполнено неравенство

$$|P_{n-k}(y_j)| < |R_1^{(k)}(y_j, \nu)|, \quad j = \overline{1, n-k+1}.$$

Пусть $x_1 > y_1$. Так как $|R_1^{(k)}(x, \nu)| \rightarrow \infty$ при $|x| \rightarrow 1$, то на интервале $(x_1, 1)$ найдется точка z_1 , для которой выполнено неравенство

$$|P_{n-k}(z_1)| < |R_1^{(k)}(z_1, \nu)|.$$

В каждой двух соседних точках из набора $n-k+2$ точек $z_1 > y_1 > \dots > y_{n-k+1}$ функция $R_1^{(k)}(x, \nu)$ принимает значения разных знаков. Если $x_1 < y_1$, то аналогичным набором будет $y_1 > \dots > y_{n-k+1} > z_2$, где z_2 удовлетворяет неравенствам

$$-1 < z_2 < -1 + \varepsilon < x_{n-k+1}$$

и ε достаточно мало. Так как $R_1^{(n+1)}(x, \nu) \neq 0$ на $[-1, 1]$, то отсюда следует, что функция $F_s(x, \nu)$ имеет $n - k - s + 1$ нулей на $[-1, 1]$ и все они простые.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $H_n(x)$ и $G_{n-1}(x)$ – полиномы, удовлетворяющие условиям леммы 2.5, $k \in \mathbb{Z}$, $0 \leq k \leq n$. Если для полинома $P_{n-k} \in \mathfrak{P}_{n-k}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ выполнено неравенство

$$|P_{n-k}(x)| \leq |H_n^{(k)}(x) + i((1-x^2)^{1/2}G_{n-1}(x))^{(k)}|, \quad x \in [-1, 1], \quad i^2 = -1, \quad (2.5)$$

то справедливы следующие неравенства:

$$|P_{n-k}^{(s)}(x)| \leq |\{H_n(x) + i(1-x^2)^{1/2}G_{n-1}(x)\}^{(k+s)}|, \quad x \in [-1, 1], \quad s = \overline{0, n-k}, \quad (2.6)$$

$$|P_{n-k}^{(s)}(x)| \leq |H_n^{(k+s)}(x)|, \quad x \notin (\alpha_{n-k-s+1}, \alpha_1), \quad s = \overline{0, n-k}, \quad (2.7)$$

где $\alpha_{n-k-s+1}$ – минимальный нуль, α_1 – максимальный нуль на $[-1, 1]$ функции $((1-x^2)^{1/2}G_{n-1}(x))^{(k+s)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что в некоторой точке $x_0 \in (-1, 1)$

$$|P_{n-k}^{(s)}(x_0)| > E_{k+s}(x_0) = |H_n^{(k+s)}(x_0) + i((1-x^2)^{1/2}G_{n-1}(x_0))^{(k+s)}|. \quad (2.8)$$

Обозначим

$$R^{(k+s)}(x, \nu) = \cos \nu H_n^{(k+s)}(x) + \sin \nu ((1-x^2)^{1/2}G_{n-1}(x))^{(k+s)}.$$

Выберем число ν по условию

$$P_{n-k}^{(s)}(x_0)R^{(k+s+1)}(x_0, \nu) - P_{n-k}^{(s+1)}(x_0)R^{(k+s)}(x_0, \nu) = 0, \quad (2.9)$$

что всегда возможно, так как (2.9) определяет только $\operatorname{tg} \nu$. Затем выберем число λ по условию

$$R^{(k+s)}(x_0, \nu) - \lambda P_{n-k}^{(s)}(x_0) = 0. \quad (2.10)$$

При этом в силу (2.8) $|\lambda| < 1$, так как

$$|\lambda P_{n-k}^{(s)}(x_0)| = |R^{(k+s)}(x_0, \nu)| \leq E_{k+s}(x_0).$$

Следовательно, по лемме 2.6 функция

$$f(x) = R^{(k+s)}(x, \nu) - \lambda P_{n-k}^{(s)}(x)$$

не имеет двойных нулей на $[-1, 1]$. С другой стороны, сопоставляя (2.9) и (2.10), получаем

$$R^{(k+s+1)}(x_0, \nu) - \lambda P_{n-k}^{(s+1)}(x_0) = 0. \quad (2.11)$$

Из (2.10) и (2.11) следует, что $f(x)$ имеет двойной нуль в точке x_0 . Полученное противоречие доказывает неравенство (2.6).

Пусть α_j , $j = \overline{1, n-k-s+1}$, — нули функции $((1-x^2)^{1/2}G_{n-1}(x))^{(k+s)}$. Пусть $\varphi(x)$ является полиномом степени $n-k-s+1$, корнями которого являются α_j , $j = \overline{1, n-k-s+1}$,

$$\varphi(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_{n-k-s+1}).$$

Используя интерполяционную формулу Лагранжа, мы получим

$$P_{n-k}^{(s)}(x) = \varphi(x) \sum_{j=1}^{n-k-s+1} \frac{P_{n-k}^{(s)}(\alpha_j)}{\varphi'(\alpha_j)(x - \alpha_j)},$$

и аналогичное представление имеет место для $H_n^{(k+s)}(x)$.

Так как нули $H_n^{(k+s)}(x)$ взаимно разделены с нулями $\varphi(x)$, то числа

$$\frac{H_n^{(k+s)}(\alpha_j)}{\varphi'(\alpha_j)}, \quad j = \overline{1, n-k-s+1},$$

имеют один знак. Из (2.6) в точках α_j имеем

$$|P_{n-k}^{(s)}(\alpha_j)| \leq E_{k+s}(\alpha_j) = |H_n^{(k+s)}(\alpha_j)|.$$

Отсюда для $x \notin (\alpha_{n-k-s+1}, \alpha_1)$ следуют неравенства

$$\begin{aligned} |P_{n-k}^{(s)}(x)| &\leq |\varphi(x)| \sum_{j=1}^{n-k-s+1} \left| \frac{P_{n-k}^{(s)}(\alpha_j)}{\varphi'(\alpha_j)(x - \alpha_j)} \right| \\ &\leq |\varphi(x)| \sum_{j=1}^{n-k-s+1} \left| \frac{H_n^{(k+s)}(\alpha_j)}{\varphi'(\alpha_j)(x - \alpha_j)} \right| = |H_n^{(k+s)}(x)|. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Из доказательства второго неравенства теоремы 2.2 следует, что если выполнено неравенство

$$|P_{n-k}(x)| \leq |H_n^{(k)}(x) + i((1-x^2)^{1/2}G_{n-1}(x))^{(k)}|, \quad x \in [\beta, \alpha],$$

где β и α – минимальный и максимальный нули функции $((1-x^2)^{1/2}G_{n-1}(x))^{(k)}$ на $[-1, 1]$, то при $x \notin [\beta, \alpha]$ выполнено неравенство

$$|P_{n-k}(x)| \leq |H_n^{(k)}(x)|.$$

Аналогично теореме 2.2 с использованием теоремы 2.1 и лемм 2.2–2.4 доказываются следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть $L_n, K_n \in \mathfrak{P}_n(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \setminus \mathfrak{P}_{n-1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $K_n(1) > 0$, $L_n(1) > 0$, все нули функций $f_1(x) = (1+x)^{1/2}K_n(x)$ и $f_2(x) = (1-x)^{1/2}L_n(x)$ лежат на $[-1, 1]$ и взаимно разделены. Пусть $k \in \mathbb{Z}$, $0 \leq k \leq n$, и для полинома $P_{n-k} \in \mathfrak{P}_{n-k}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ выполнено неравенство

$$|P_{n-k}(x)| \leq |f_1^{(k)}(x) + if_2^{(k)}(x)|, \quad x \in [-1, 1], \quad i^2 = -1.$$

Тогда справедливо неравенство

$$|P_{n-k}^{(s)}(x)| \leq |f_1^{(k+s)}(x) + if_2^{(k+s)}(x)|, \quad x \in [-1, 1], \quad s = \overline{0, n-k}.$$

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть $A_n, B_n \in \mathfrak{P}_n(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \setminus \mathfrak{P}_{n-1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, старшие коэффициенты полиномов A_n и B_n положительны и все нули функций $A_n(x)$ и $x^{1/2}B_n(x)$ лежат на $[0, \infty)$ и взаимно разделены. Пусть $k \in \mathbb{Z}$, $0 \leq k \leq n$. Пусть для полинома $P_{n-k} \in \mathfrak{P}_{n-k}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ выполнено неравенство

$$|P_{n-k}(x)| \leq |A_n^{(k)}(x) + i(x^{1/2}B_n(x))^{(k)}|, \quad x \in [0, \infty), \quad i^2 = -1.$$

Тогда справедливы следующие неравенства:

$$\begin{aligned} |P_{n-k}^{(s)}(x)| &\leq |A_n^{(k+s)}(x) + i(x^{1/2}B_n(x))^{(k+s)}|, & x \in [0, \infty), \\ |P_{n-k}^{(s)}(x)| &\leq |A_n^{(k+s)}(x)|, & x \notin (\alpha_{n-k-s+1}, \alpha_1), \quad s = \overline{0, n-k}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

где $\alpha_{n-k-s+1}$, α_1 – минимальный и максимальный нули на $[0, \infty)$ функции $(x^{1/2}B_n(x))^{(k+s)}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Неравенство (2.12) будет иметь место, если в формулировке теоремы 2.4 полином B_n заменить на полином $B_{n-1} \in \mathfrak{P}_{n-1}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \setminus \mathfrak{P}_{n-2}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Теорема 2.2 при $k = 0$ и $s = 1$ доказана в [3, с. 497]. При $k = 0$ и $H_n(x) = T_n(x)$, $G_{n-1}(x) = T'_n(x)/n$ теорема 2.2 получена в [4]. Теоремы 2.2–2.4 при $k = 0$ получены в [7].

§ 3. Подготовительные леммы

Пусть $S_n(x) = \sin(n \arccos x)$, $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, $|x| \leq 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть $R_n(x) \equiv S_n(x)$ либо $R_n(x) \equiv T_n(x)$. Тогда

$$R_n^{(k)}(x) = \frac{Z_{n+k-1}(\theta)}{\sin^{2k-1}(\theta)}, \quad x = \cos \theta, \quad (3.1)$$

где $Z_{n+k-1}(\theta)$ – тригонометрический полином порядка не более $n+k-1$, и справедливо тождество

$$Z_{n+k-1}(\theta) = (2k-3) \cos \theta Z_{n+k-2}(\theta) - (n^2 - (k-2)^2) \sin^2 \theta Z_{n+k-3}(\theta). \quad (3.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть функция $R_n(x)$ равна $T_n(x)$ либо $S_n(x)$. Для $R'_n(x)$ представление (3.1) имеет место. Пусть (3.1) справедливо для $R_n^{(k)}(x)$. Покажем, что тогда оно верно для $R_n^{(k+1)}(x)$. Имеем

$$\begin{aligned} R_n^{(k+1)}(x) &= -[Z'_{n+k-1}(\theta) \sin^{2k-1}(\theta) \\ &\quad - (2k-1) \sin^{2k-2}(\theta) \cos \theta Z_{n+k-1}(\theta)] / \sin^{4k-1}(\theta) \\ &= Z_{n+k}(\theta) / \sin^{2k+1}(\theta). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Докажем тождество (3.2). Из равенства для $k-1 \leq n$

$$(1-x^2)R_n^{(k+1)}(x) - (2k-1)xR_n^{(k)}(x) + (n^2 - (k-1)^2)R_n^{(k-1)}(x) = 0 \quad (3.4)$$

вытекает равенство

$$\frac{Z_{n+k}(\theta)}{\sin^{2k+1}(\theta)} = (2k-1) \cos \theta \frac{Z_{n+k-1}(\theta)}{\sin^{2k+1}(\theta)} - (n^2 - (k-1)^2) \frac{Z_{n+k-2}(\theta)}{\sin^{2k-1}(\theta)}. \quad (3.5)$$

Из (3.3) и (3.5) следует (3.2).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Пусть в представлении (3.1) полиному $T_n^{(k)}(x)$ соответствует полином $U_{n+k-1}(\theta)$, а функции $S_n^{(k)}(x)$ – полином $Q_{n+k-1}(\theta)$. Тогда справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} U_{n+k-1}(\theta) &= A_{k-1}(n, \theta) \cos(n\theta) + B_{k-1}(n, \theta) \sin(n\theta), \\ Q_{n+k-1}(\theta) &= A_{k-1}(n, \theta) \sin(n\theta) - B_{k-1}(n, \theta) \cos(n\theta), \end{aligned} \quad (3.6)$$

где $A_0(n, \theta) = 0$, $B_0(n, \theta) = n$,

$$\begin{aligned}
 A_{k-1}(n, \theta) &= \sum_{i=1}^p \alpha_{i,k}(n) (\cos \theta)^{2i-1} (\sin \theta)^{k-2i}, \\
 B_{k-1}(n, \theta) &= \sum_{i=0}^p \beta_{i,k}(n) (\cos \theta)^{2i} (\sin \theta)^{k-2i-1}, \\
 |B_{k-1}(n, \pi/2)| &= n \prod_{i=1}^p (n^2 - (2i-1)^2), \quad k = 2p+1, \quad p = 1, 2, \dots; \\
 A_{k-1}(n, \theta) &= \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_{i,k}(n) (\cos \theta)^{2i} (\sin \theta)^{k-2i-1}, \\
 B_{k-1}(n, \theta) &= \sum_{i=0}^{p-1} \beta_{i,k}(n) (\cos \theta)^{k-2i-1} (\sin \theta)^{2i}, \\
 |A_{k-1}(n, \pi/2)| &= \prod_{i=0}^{p-1} (n^2 - (2i)^2), \quad k = 2p, \quad p = 1, 2, \dots
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $k = 1, 2, 3$ имеем равенства

$$\begin{aligned}
 U_n(\theta) &= n \sin(n\theta), \quad Q_n(\theta) = -n \cos(n\theta), \\
 U_{n+1}(\theta) &= -n^2 \sin \theta \cos(n\theta) + n \cos \theta \sin(n\theta), \\
 Q_{n+1}(\theta) &= -n^2 \sin \theta \sin(n\theta) - n \cos \theta \cos(n\theta), \\
 U_{n+2}(\theta) &= -3n^2 \sin \theta \cos \theta \cos(n\theta) + n\{3 \cos^2 \theta - (n^2 - 1) \sin^2 \theta\} \sin(n\theta), \\
 Q_{n+2}(\theta) &= -3n^2 \sin \theta \cos \theta \sin(n\theta) - n\{3 \cos^2 \theta - (n^2 - 1) \sin^2 \theta\} \cos(n\theta).
 \end{aligned}$$

Пусть равенства (3.6), (3.7) выполняются до $k = s$. Тогда из (3.6) и (3.2) вытекают равенства

$$\begin{aligned}
 U_{n+s}(\theta) &= \cos(n\theta) [(2s-1) \cos \theta A_{s-1}(n, \theta) - (n^2 - (s-1)^2) \sin^2 \theta A_{s-2}(n, \theta)] \\
 &\quad + \sin(n\theta) [(2s-1) \cos \theta B_{s-1}(n, \theta) - (n^2 - (s-1)^2) \sin^2 \theta B_{s-2}(n, \theta)], \\
 Q_{n+s}(\theta) &= \sin(n\theta) [(2s-1) \cos \theta A_{s-1}(n, \theta) - (n^2 - (s-1)^2) \sin^2 \theta A_{s-2}(n, \theta)] \\
 &\quad - \cos(n\theta) [(2s-1) \cos \theta B_{s-1}(n, \theta) - (n^2 - (s-1)^2) \sin^2 \theta B_{s-2}(n, \theta)].
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Из (3.8) и (3.7) следует, что равенства (3.6) и (3.7) выполняются для $k = s+1$.

Из предложения 3.2 вытекает следующая

ЛЕММА 3.1. Пусть

$$M_{n,k}(x) = |T_n^{(k)}(x) + iS_n^{(k)}(x)|, \quad x \in (-1, 1), \quad i^2 = -1.$$

Тогда имеют место равенства

$$M_{n,k}^2(x) = y^{-2k} \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j^{(k)}(n) y^{-2j}, \tag{3.9}$$

где $y = \sin \theta = (1 - x^2)^{1/2}$, $\alpha_{k-1}^{(k)}(n) \neq 0$, $k \leq n$;

$$M_{n,k}(0) = \begin{cases} |B_{k-1}(n, \pi/2)| = n \prod_{j=1}^p (n^2 - (2j-1)^2), & k = 2p+1, \\ |A_{k-1}(n, \pi/2)| = \prod_{j=0}^{p-1} (n^2 - (2j)^2), & k = 2p. \end{cases}$$

ЛЕММА 3.2. В равенстве (3.9) $\alpha_j^{(k)} = \alpha_j^{(k)}(n) > 0$, $j = \overline{0, k-1}$, и справедливы рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} \alpha_j^{(k+1)} &= (n^2 - k^2) \{(k+j)/(k-j)\} \alpha_j^{(k)}, & j = \overline{0, k-1}, \\ \alpha_k^{(k+1)} &= M_{n,k+1}^2(0) - \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j^{(k+1)}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $k = 1$ имеем равенство

$$M_{n,1}^2(x) = \frac{n^2}{y^2}.$$

Пусть $\alpha_j^{(s)} > 0$ при $k = s$, $j = \overline{0, s-1}$. Из определения $M_{n,s}(x)$ имеем

$$\frac{d}{dx} \{(1-x^2)M_{n,s+1}^2(x) + (n^2 - s^2)M_{n,s}^2(x)\} = 2T_n^{(s+1)}LT_n + 2S_n^{(s+1)}LS_n, \quad (3.11)$$

где через L обозначен дифференциальный оператор

$$(1-x^2) \frac{d^{s+2}}{dx^{s+2}} - x \frac{d^{s+1}}{dx^{s+1}} + (n^2 - s^2) \frac{d^s}{dx^s}.$$

Из соотношения (3.4) вытекает $LR_n = 2sxR_n^{(s+1)}$, где R_n можно положить равным как T_n , так и S_n . Отсюда и из (3.11) получаем соотношение

$$\frac{d}{dx} \{(1-x^2)M_{n,s+1}^2(x) + (n^2 - s^2)M_{n,s}^2(x)\} = 4sxM_{n,s+1}^2(x),$$

которое может быть записано в эквивалентной форме:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^s (j+s+1) \alpha_j^{(s+1)} y^{-2(j+s+1)} - (2s+1) \sum_{j=0}^s \alpha_j^{(s+1)} y^{-2(j+s+1)} \\ = -(n^2 - s^2) \sum_{j=0}^{s-1} (j+s) \alpha_j^{(s)} y^{-2(j+s+1)}. \end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты при степенях y , получаем

$$(j-s) \alpha_j^{(s+1)} = -(n^2 - s^2)(j+s) \alpha_j^{(s)}, \quad j = \overline{0, s-1}.$$

Отсюда следуют равенства (3.10) и неравенства $\alpha_j > 0$, $j = \overline{0, s-1}$. Так как $M_{n,s+1}((1-y^2)^{1/2}) \rightarrow \infty$ при $y \rightarrow 0$, то $\alpha_s^{(s+1)} > 0$ как коэффициент при старшем члене.

Пусть ξ_{n-k+1} – минимальный нуль, а ξ_1 – максимальный нуль функции $S_n^{(k)}(x)$ на $[-1, 1]$. Напомним, что

$$N_{n,k}(x) = \begin{cases} M_{n,k}(x), & x \in [\xi_{n-k+1}, \xi_1], \\ |T_n^{(k)}(x)|, & x \notin [\xi_{n-k+1}, \xi_1]. \end{cases}$$

ЛЕММА 3.3. Пусть для полинома $P_{n-k} \in \mathfrak{P}_{n-k}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ выполнено неравенство

$$|P_{n-k}(x)(1-x^2)^{k/2}| \leq 1, \quad x \in [\xi_{n-k+1}, \xi_1]. \quad (3.12)$$

Тогда имеет место неравенство

$$|P_{n-k}(x)| \leq N_{n,k}(x)/M_{n,k}(0), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (3.12), (3.9) и первого утверждения леммы 3.2 следуют неравенства

$$\begin{aligned} |P_{n-k}(x)| &\leq (1-x^2)^{-k/2} \leq M_{n,k}(0)(1-x^2)^{-k/2} M_{n,k}^{-1}(0) \\ &\leq M_{n,k}(x) M_{n,k}^{-1}(0) \end{aligned} \quad (3.14)$$

для $x \in [\xi_{n-k+1}, \xi_1]$. Из (3.14) и замечания 2.2 следует (3.13).

Введем обозначения. Пусть $x_1^{(k-1)} > x_2^{(k-1)} > \dots > x_{n-k+1}^{(k-1)}$ – нули полинома $T_n^{(k-1)}(x) - (k-1)$ -ой производной полинома Чебышева $T_n(x)$, $x \in \mathbb{R}$;

$$\begin{aligned} a_{n,k} &= \min_{i=1, n-k+1} |T_n^{(k)}(x_i^{(k-1)})(1-(x_i^{(k-1)})^2)^{k/2}|, \\ c_{n,k} &= a_{n,k}/M_{n,k}(0). \end{aligned}$$

ЛЕММА 3.4. Пусть $X = \mathbb{R}$, $P_{n-k}(x) \in \mathfrak{P}_{n-k}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Пусть для $x \in [x_{n-k+1}^{(k-1)}, x_1^{(k-1)}] = \mu$ выполнено неравенство

$$|(1-x^2)^{k/2} P_{n-k}(x)| \leq 1. \quad (3.15)$$

Тогда справедливы неравенства

$$|P_{n-k}(x)| \leq T_n^{(k)}(x)/a_{n,k}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mu, \quad (3.16)$$

$$|P_{n-k}(x)| \leq M_{n,k}(x)/M_{n,k}(0), \quad x \in \mu, \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} c_{n,1} &= 1, \quad c_{n,2} = 1, \quad c_{n,3} \geq 0.9761, \\ c_{n,4} &\geq 0.9418, \quad c_{n,5} \geq 0.512, \quad c_{n,6} \geq 0.482. \end{aligned} \quad (3.18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выпишем для полинома $P_{n-k}(x)$ интерполяционную формулу Лагранжа:

$$P_{n-k}(x) = \sum_{i=1}^{n-k+1} (T_n^{(k-1)}(x)P_{n-k}(x_i))/(T_n^{(k)}(x_i)(x-x_i)), \quad (3.19)$$

где $x_i = x_i^{(k-1)}$, $i = \overline{1, n-k+1}$.

Если $x \in [-1, 1] \setminus [x_{n-k+1}, x_1]$, то умножая в (3.19) числитель и знаменатель слагаемых на $(1-x_i^2)^{k/2}$, из (3.15) получим (3.16).

Если $x \in [x_{n-k+1}, x_1]$, то из (3.15) и леммы 3.2 следует (3.17). Неравенства (3.18), кроме $c_{n,4} \geq 0.9418$, доказаны в [29]. Используя тождество

$$(1-x^2)T_n^{(k)}(x) - (2k-3)xT_n^{(k-1)}(x) + (n^2 - (k-2)^2)T_n^{(k-2)}(x) \equiv 0, \quad (3.20)$$

нетрудно показать, что в точках $y_i^{(k)} = \cos((\frac{k}{2} + i - 1)\frac{\pi}{n})$ и $z_i^{(k)} = \cos((\frac{k+1}{2} + i - 1)\frac{\pi}{n})$, $i \in J_k = \{j: x_j^{(k)} > 0\}$, для полинома $T_n^{(k)}(x)$, $k = 2, 5$, справедливы равенства

$$\begin{aligned}\operatorname{sign} T_n^{(k)}(y_i^{(k)}) &= (-1)^{i-1}, \\ \operatorname{sign} T_n^{(k)}(z_i^{(k)}) &= (-1)^i.\end{aligned}$$

Пусть $k = 3$. Вычисления показывают, что $c_{n,4} \geq 0.9689$ при $n \leq 8$. Пусть $n \geq 9$ и $x_i^{(3)} = \cos v_i$, $i = 1, \overline{[(n-3)/2]}$, – положительные корни полинома $T_n^{(3)}(x)$. Тогда из (3.20) для v_i следует равенство

$$3 \sin^2 v_i T_{n_{x_2}}^{(2)}(\cos v_i) = n(n^2 - 1) \sin(nv_i) \operatorname{tg} v_i. \quad (3.21)$$

Для v_i имеем представление $v_i = (i + 1 - \beta_i)\pi/n$, где $\beta_i \in (0, 1/2)$. Пусть $i < j$; тогда $\operatorname{tg} v_i < \operatorname{tg} v_j$, и если $\beta_j \geq \beta_i$, то имеют место неравенства

$$\begin{aligned}|\sin(nv_j)| &> |\sin(nv_i)|, \\ |(1 - x_j^2)T_n^{(2)}(x_j)| &> |(1 - x_i^2)T_n^{(2)}(x_i)|.\end{aligned} \quad (3.22)$$

Если $T_n^{(3)}(x)$ имеет корень $x = 0$, то n четно и $|T_n^{(2)}(0)| = n^2$.

Пусть $v = \alpha/n$. Имеем

$$-T_{n_{x_3}}^{(3)}(\cos v) \sin^3 v = n\{\sin(nv)[n^2 - 1 - 3 \operatorname{ctg}^2 v] + 3n \operatorname{ctg} v \cos(nv)\}. \quad (3.23)$$

Из неравенства $\operatorname{ctg} y < 1/y - y/3$ при $0 < y < \pi$ следует неравенство

$$1 + 3 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{n} < \frac{3n^2}{\alpha^2} \quad \text{при } |\alpha| < 3\pi \text{ и } n \geq 6. \quad (3.24)$$

Поэтому из (3.23) для $3\pi/2 < \alpha < 2\pi$ имеем

$$-T_{n_{x_3}}^{(3)}(\cos v) \sin^3 v/n^3 < \sin \alpha(1 - 3/\alpha^2) + 3 \cos \alpha/\alpha = f_1(\alpha).$$

Функция $f_1(\alpha) < 0$ при $3\pi/2 \leq \alpha < \alpha_1 = 1.83456\pi$. Поэтому $v_1 > \alpha_1/n$.

Для $\alpha \in ((i + 1/2)\pi, (i + 1)\pi)$, $i = 1, \overline{[(n-3)/2]}$, имеет место равенство

$$|\sin^2 v T_{n_{x_2}}^{(2)}(\cos v)|/n^2 = |\cos \alpha| + |\sin \alpha| \operatorname{ctg}(\alpha/n)/n = f_2(\alpha, n). \quad (3.25)$$

Из разложения функции $\operatorname{ctg} y$ в ряд по степеням y следует неравенство

$$\operatorname{ctg} y > 1/y - y/(3(1 - y^2/\pi^2)), \quad 0 < y < \pi. \quad (3.26)$$

Из (3.25) и (3.26) вытекает неравенство

$$f_2(\alpha, n) > |\cos \alpha| + |\sin \alpha|(\alpha^{-1} - \alpha/(3(3^4 - \alpha^2/\pi^2))) = f_3(\alpha), \quad n \geq 9. \quad (3.27)$$

Имеем $f_3(\alpha) \geq f_3(\alpha_1) \approx 0.9418$ при $\alpha_1 \leq \alpha \leq 2\pi$. При $5\pi/2 < \alpha < 3\pi$ из (3.23) и (3.24) следует неравенство

$$\sin^3 v T_n^{(3)}(\cos v)/n^3 < \sin \alpha(3\alpha^{-2} - 1) - 3 \cos \alpha/\alpha = f_4(\alpha). \quad (3.28)$$

Функция $f_4(\alpha) < 0$ при $\alpha < \alpha_2 = 2.895\pi$. Поэтому $3\pi > nv_2 > \alpha_2$.

Так как $|\cos(\alpha_2)| \approx 0.94608$, то из (3.22), (3.25), (3.27) и (3.28) следует, что $c_{n,4} \geq 0.9418$.

ЛЕММА 3.5. Для первых трех нулей x_1, x_2, x_3 функции $S_n^{(2)}(x)$ справедливы неравенства

$$\cos(\pi/n) < x_1 < \cos(\gamma_1 \pi/n), \quad \gamma_1 = 0.890753, \quad n > 2, \quad (3.29)$$

$$\cos(2\pi/n) < x_2 < \cos(\gamma_2 \pi/n), \quad \gamma_2 = 1.94845, \quad n > 4, \quad (3.30)$$

$$\cos(3\pi/n) < x_3 < \cos(\gamma_3 \pi/n), \quad \gamma_3 = 2.96595, \quad n > 6. \quad (3.31)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x = \cos v$. Имеем равенство

$$\sin^2 v S_{n_{x^2}}^{(2)}(\cos v) = -n^2 (\sin \alpha + n^{-1} \operatorname{ctg}(\alpha/n) \cos \alpha), \quad v = \alpha/n. \quad (3.32)$$

Отсюда следует, что все положительные корни x_i , $i = 1, \overline{[(n-1)/2]}$ функции $S_n^{(2)}(x)$ лежат в интервалах $(\cos(i\pi/n), \cos((i-1/2)\pi/n))$. Для $\alpha \in (\pi/2, \pi)$ из (3.32) вытекает неравенство

$$\sin^2 v S_{n_{x^2}}^{(2)}(\cos v) \leq -n^2 (\sin \alpha + \alpha^{-1} \cos \alpha) = -n^2 f(\alpha). \quad (3.33)$$

Так как $f(\alpha) > 0$ при $\pi/2 \leq \alpha < 0.890753\pi$, то из (3.33) следует (3.29). Неравенства (3.30) и (3.31) доказываются аналогично.

ЛЕММА 3.6. Пусть $Q_n(\theta): \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ – тригонометрический полином n -го порядка, $Q_n(\theta_0) = \varepsilon$, $\alpha = \operatorname{sign} Q_n^{(2k)}(\theta_0)$. Тогда справедливо неравенство

$$|Q_n^{(2k)}(\theta_0)| \leq |T_{n_{\theta_0^{2k}}}^{(2k)}((\cos(\theta - \theta_0) - y)/(1 + y))|_{\theta=\theta_0}, \quad (3.34)$$

где $y = \operatorname{tg}^2(\arccos((-1)^k \alpha \varepsilon / (2n)))$ и равенство будет иметь место только для полинома из правой части (3.34).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя замену $Q_n(\theta) = R_n(\theta - \theta_0)$, будем полагать, что $\theta_0 = 0$. В этом случае достаточно рассматривать только четные тригонометрические полиномы. Рассмотрим следующую задачу выпуклого программирования:

$$\begin{aligned} R_n(\theta) &= \sum_{i=0}^n \mu_i \cos(i\theta), \quad R_n^{(2k)}(0) \rightarrow \min, \\ R_n(0) &= \varepsilon, \quad \|R_n(\theta)\|_{C[0, \pi]} \leq 1, \end{aligned} \quad (3.35)$$

где $\mu_i \in \mathbb{R}$.

Пусть $|\varepsilon| < 1$. Из принципа Вейерштрасса о компактности следует, что существует решение

$$\hat{R}_n(\theta) = \sum_{i=0}^n \hat{\mu}_i \cos(i\theta)$$

задачи (3.35). Выпишем функцию Лагранжа задачи (3.35):

$$\begin{aligned} L(\mu, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) &= \lambda_0 (-1)^k \sum_{i=1}^n \mu_i i^{2k} + \lambda_1 \left(\sum_{i=0}^n \mu_i - \varepsilon \right) \\ &\quad + \lambda_2 \left(\left\| \sum_{i=0}^n \mu_i \cos(i\theta) \right\|_{C[0, \pi]} - 1 \right). \end{aligned}$$

Из теоремы Куна–Таккера [42, с. 210] вытекает существование чисел $\hat{\lambda}_0, \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2$ таких, что

$$|\hat{\lambda}_0| + |\hat{\lambda}_1| + |\hat{\lambda}_2| > 0, \quad \hat{\lambda}_0 \geq 0, \quad \hat{\lambda}_2 \geq 0, \quad (3.36)$$

$$0 \in \partial_\mu L(\hat{\mu}, \hat{\lambda}_0, \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2), \quad (3.37)$$

$$\hat{\lambda}_2 \left(\left\| \sum_{i=0}^n \hat{\mu}_i \cos(i\theta) \right\|_{C[0, \pi]} - 1 \right) = 0, \quad (3.38)$$

где ∂ – знак обобщенного градиента Кларка.

Из (3.36)–(3.38) и теоремы о градиенте поточечного максимума [42, с. 83] имеем систему уравнений

$$\hat{\lambda}_0(-1)^k i^{2k} + \hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2 \sum_{s=1}^r c_s \nu_s \cos(i\theta_s) = 0, \quad i = \overline{0, n}, \quad (3.39)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_2 > 0, \quad |\hat{R}_n(\theta_s)| = 1, \quad \theta_s \in [0, \pi], \quad \nu_s = \operatorname{sgn} \hat{R}_n(\theta_s), \\ s = \overline{1, r}, \quad c_s \geq 0, \quad \sum_{s=1}^r c_s = 1. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Число r не больше n , так как иначе $\hat{R}'_n(\theta)$ имеет не менее $2n + 1$ нулей на $(-\pi, \pi]$.

Из системы уравнений (3.39) вытекает равенство для любого четного тригонометрического полинома $R_n(\theta)$ порядка не больше n :

$$\hat{\lambda}_0 R_n^{(2k)}(0) + \hat{\lambda}_1 R_n(0) + \hat{\lambda}_2 \sum_{s=1}^r c_s \nu_s R_n(\theta_s) = 0. \quad (3.41)$$

Покажем, что $\hat{\lambda}_0 \neq 0$. Если $\hat{\lambda}_0 = 0$ и $\hat{\lambda}_1 \neq 0$, то из (3.41) следует, что любой полином $R_n(\theta)$, имеющий нуль в точках θ_s , $s = \overline{1, r}$, будет иметь нуль и в нуле. Если $\hat{\lambda}_0 = \hat{\lambda}_1 = 0$, то из (3.41) следует, что для любого $R_n(\theta)$ вытекает равенство

$$\sum_{s=1}^r c_s \nu_s R_n(\theta_s) = 0. \quad (3.42)$$

Подставив в (3.42) полином $\hat{R}_n(\theta)$, получим равенство

$$\sum_{s=1}^r c_s = 0,$$

которое противоречит (3.40). Если $r < n$, то рассмотрим некоторый четный полином $R_n(\theta)$ порядка n , который имеет на $(-\pi, \pi]$ $2n$ корней с учетом кратности и для которого выполняются соотношения

$$R_n(0) = R_n(\theta_1) = R_n(\theta_2) = \dots = R_n(\theta_r) = 0, \quad R_n^{(2)}(0) \neq 0. \quad (3.43)$$

Так как $R_n^{(2k+1)}(0) = 0$, то из (3.41) и (3.43) следует, что $R_n^{(2k)}(\theta)$ имеет в нуле двойной корень. Так как R_n имеет на $(-\pi, \pi]$ $2n$ корней, то из теоремы

Ролля следует, что $R_n(\theta)$ имеет в нуле корень кратности $2k + 2$, что противоречит (3.43). Следовательно, $r = n$. Полином $\hat{R}_n(\theta)$ на отрезке $[0, \pi]$ имеет n -альтернанс, так как в противном случае в силу теоремы Ролля и четности $\hat{R}_n(\theta)$ функция $\hat{R}_n^{(1)}(\theta)$ будет иметь не менее $2n + 1$ нулей на $(-\pi, \pi]$. Отсюда $\hat{P}_n(x) = \hat{R}_n(\theta)$, $x = \cos \theta$, – полином Золотарева, где $\hat{P}_n(1) = \varepsilon$. Имеет место равенство для $R_n(\theta) = P_n(\cos \theta)$, которое нетрудно доказать по индукции:

$$R_n^{(2k)}(\theta) = \sum_{k_1, 2k_2} (-1)^{k+k_2} \alpha_{k_1+2k_2} P_{n_{x^{k_1+2k_2}}}^{(k_1+2k_2)}(\cos \theta) \cos^{k_1} \theta \sin^{2k_2} \theta, \quad (3.44)$$

где $\alpha_{k_1+2k_2} \geq 0$ и суммирование ведется по всем $k_1, 2k_2 \geq 0, 1 \leq k_1 + 2k_2 \leq 2k$.

Из (3.44) следует [43, с. 297], что решением задачи (3.35) является полином

$$(-1)^{k-1} T_n((\cos \theta - y)/(1 + y)), \quad y = \operatorname{tg}^2(\arccos((-1)^{k-1} \varepsilon/(2n))). \quad (3.45)$$

Из симметрии полиномов вытекает неравенство

$$R_n^{(2k)}(0) \leq |T_{n_{\theta^{2k}}}^{(2k)}((\cos \theta - y)/(1 + y))|, \quad y = \operatorname{tg}^2(\arccos((-1)^k \varepsilon/(2n))), \quad (3.46)$$

для $R_n^{(2k)}(0) > 0$, $R_n(0) = \varepsilon$ и $\|R_n(\theta)\|_{C[-\pi, \pi]} \leq 1$.

Из (3.45) и (3.46) следует (3.34). Покажем, что равенство в (3.34) выполняется только для полинома из правой части (3.34). Достаточно рассмотреть случай $\theta_0 = 0$. Пусть полином $\bar{R}_n(\theta)$ удовлетворяет условиям леммы и для него выполнено равенство в (3.34) при $\theta = 0$. Пусть $\bar{R}_n(\theta) = Q_n(\theta) + U_n(\theta)$, где Q_n – четный, а U_n – нечетный тригонометрические полиномы. Тогда Q_n является полиномом из правой части (3.34) и справедливо неравенство $|Q_n(\theta)| + |U_n(\theta)| \leq 1$. Отсюда следует, что U_n имеет двойные нули в $2n - 1$ точках максимума $|Q_n(\theta)|$ на $(-\pi, \pi]$ и еще нуль в нуле, т. е. $U_n(\theta) \equiv 0$.

Пусть

$$t_n(\theta) = \cos 2n \arccos \frac{\sin(\theta/2)}{\sin(\omega/2)}, \quad u_n(\theta) = \sin 2n \arccos \frac{\sin(\theta/2)}{\sin(\omega/2)};$$

легко проверить, что $t_n(\theta)$ – тригонометрический полином порядка n при $-\omega \leq \theta \leq \omega$, $0 < \omega < \pi$.

ЛЕММА 3.7 [14]. Если тригонометрический полином $R_n(\theta)$ порядка n удовлетворяет неравенству $|R_n(\theta)| \leq 1$, $-\omega \leq \theta \leq \omega$, $0 < \omega < \pi$, то

$$|R'_n(\theta)| \leq |t'_n(\theta) + i u'_n(\theta)| = n \cos(\theta/2) [\sin^2(\omega/2) - \sin^2(\theta/2)]^{-1/2} \quad (3.47)$$

и при $n > [3 \operatorname{tg}^2(\omega/2) + 1]^{1/2}/2$

$$|R'_n(\omega)| \leq t'_n(\omega) = 2n^2 \operatorname{ctg}(\omega/2), \quad -\omega \leq \theta \leq \omega. \quad (3.48)$$

В (3.47) равенство достигается только для полиномов $R_n(\theta) = \gamma t_n(\theta)$, $|\gamma| = 1$, в $2n$ точках θ_ν , являющихся нулями $t_n(\theta)$ на $[-\omega, \omega]$, в (3.48) – для тех же полиномов, но только в точках $\theta = \pm \omega$.

ЛЕММА 3.8 [15, с. 141]. Если тригонометрический полином $R_n(\theta): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ порядка n удовлетворяет неравенству $|R_n(\theta)| \leq 1$, $-\omega \leq \theta \leq \omega$, $0 < \omega < \pi$, то имеет место оценка

$$|R_n^{(k)}(\theta)| \leq |t_n^{(k)}(\theta) + in^{-1}t_n^{(k+1)}(\theta)|, \quad -\omega \leq \theta \leq \omega,$$

где $i^2 = -1$, а полином $t_n(\theta)$ определен перед формулировкой леммы 3.7.

ЛЕММА 3.9. Пусть $R_n(\theta)$ – тригонометрический полином n -го порядка, $R_n(\theta): [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow [-1, 1]$. Тогда справедливы неравенства

$$|R_n^{(2)}(0)| \leq (1 - \varepsilon^2)^{1/2} n \operatorname{ctg}(\alpha(-\delta\varepsilon)/(2n)), \quad (3.49)$$

$$|R_n^{(3)}(0)| \leq 4n^3 - 2n, \quad (3.50)$$

$$|R_n^{(4)}(0)| \leq 4n^4 - 2n^2, \quad (3.51)$$

где $\varepsilon = R_n(0)$, $\delta = \operatorname{sgn} R_n^{(2)}(0)$, $\alpha(\varepsilon) = \arccos \varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $R_n(\theta)$ – четный полином. Тогда $R_n(\theta) = P_n(\cos \theta)$, где $P_n(x)$ – алгебраический полином n -ой степени и $|P_n(x)| \leq 1$ при $x \in [0, 1]$, $P_n(1) = \varepsilon$. Поэтому из равенства $R_n^{(2)}(0) = -P'_{n_x}(1)$ и экстремальных свойств полинома Золотарева (3.45) (см. [30]) следует (3.49). Из равенства $R_n^{(4)}(0) = P'_{n_x}(1) + 3P_{n_x2}^{(2)}(1)$ и неравенства В. А. Маркова вытекает неравенство

$$|R_n^{(4)}(0)| \leq 4n^4 - 2n^2. \quad (3.52)$$

Пусть теперь $R_n(\theta)$ – произвольный тригонометрический полином n -го порядка и $R_n(\theta): [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow [-1, 1]$. Тогда полином $\bar{R}_n(\theta) = (R_n(\theta) + R_n(-\theta))/2$ четный, $|\bar{R}_n(\theta)| \leq 1$ при $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\bar{R}_n(0) = R_n(0)$ и $\bar{R}_n^{(2)}(0) = R_n^{(2)}(0)$. Поэтому неравенство (3.49) имеет место для $R_n(\theta)$. Так как полиномы $t_n^{(3)}(\theta)$ и $t_n^{(5)}(\theta)$ нечетные, а $t_n^{(4)}(\theta)$ четный, то из (3.52) и леммы 3.8 следуют неравенства (3.50) и (3.51).

§ 4. Оценки производных полиномов на выпуклых телах

Всюду в дальнейшем будем полагать, если требуется, что система векторов, состоящая из множества направлений $\{h_i\}_1^k$ и исследуемой точки x , линейно независима. Если это не так и $\dim X \geq k + 1$, то можно выбрать линейно независимую систему близлежащих векторов. Если $\dim X = p < k + 1$, то вложим $X = X_p$ в пространство X_{k+1} ($\dim X_{k+1} = k + 1$) и построим цилиндрическое множество $G \subset X_{k+1}$ с основанием – телом K – и семейством линейно независимых образующих e_i , $i = p + 1, k + 1$. Положим для $x \in X_{k+1}$

$$x = (\bar{x}, x_{p+1}, \dots, x_{k+1}) = \bar{x} + \sum_{i=p+1}^{k+1} x_i e_i,$$

$$\|x\|_{X_{k+1}} = \|\bar{x}\|_{X_p} + \sum_{i=p+1}^{k+1} |x_i|, \quad \tilde{P}_n(x) = P_n(\bar{x}).$$

Цилиндрическое множество G построим таким, чтобы $r(G) = r(K)$, и так как $\|\tilde{P}_n\|_G \leq 1$, то мы приходим к рассмотренному варианту $K \subset X_{k+1}$.

Используемые ниже функции $M_{n,k}(t)$, $N_{n,k}(t)$, $\rho(x, x_0)$, $\rho(x) = \rho(x, \theta_X)$, $r_h(x_0)$, $r_h = r_h(\theta_X)$, $r(x_0)$, $r(V)$, $\omega_V(h)$ и множество $B_n(V)$ определены во введении.

Введем обозначения

$$\begin{aligned} B_{n,k}(t) &= k^{k/2} n(n-1) \dots (n-k+1) (1-t^2)^{-k/2}, \quad t \in [-1, 1]; \\ B_{n,k}^0(t) &= B_{n,k}(t) k^{-k/2}, \quad \tilde{B}_{n,k}(\rho) = 2^k B_{n,k}(2\rho-1), \quad \tilde{B}_{n,k}^0(\rho) = k^{-k/2} \tilde{B}_{n,k}(\rho), \\ \tilde{M}_{n,k}(\rho) &= 2^k M_{n,k}(2\rho-1), \quad \tilde{N}_{n,k}(\rho) = 2^k N_{n,k}(2\rho-1). \end{aligned}$$

Из формулы леммы 3.1 для значений $M_{n,k}(0) = N_{n,k}(0)$ и неравенства $n^2 - j^2 \geq (n-j)(n-j-1)$, $j < n$, имеем $B_{n,k}(0)/N_{n,k}(0) \leq k^{k/2}$, и равенство здесь будет только при $k = 1$.

ЛЕММА 4.1. Пусть X – гильбертово пространство, $S = \partial B$, $P_n \in \mathfrak{P}_n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\|P_n\|_S \leq 1$, $\|x_0\| = \|h_i\| = 1$, векторы x_0 и h_i , $i = \overline{1, k}$, взаимно ортогональны. Тогда

$$|\nabla^k P_n(x_0)[h_1, \dots, h_k]| \leq k! C_n^k.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не умаляя общности, положим, что $X = \mathbb{E}^{k+1}$, $x_0 = (1, 0, \dots, 0)$, $h_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$. Рассмотрим сферу $S = \{s : \sum_{i=0}^k s_i^2 = 1\}$. Так как на гиперсфере $\{s : s \in S, s_1 = 0\}$ выполнено тождество $(s, h_1) = 0$, то из неравенства (1.7) (либо из [34, теорема 5], либо из [29, лемма 3]) следует, что на ней справедливо неравенство

$$|P'_{ns_1}(s)| \leq n,$$

и далее, на сфере $\{s : s \in S, s_1 = s_2 = \dots = s_k = 0\} = \{(\pm 1, 0, \dots, 0)\}$

$$|P_{ns_1 \dots s_k}^{(k)}(s)| \leq n(n-1) \dots (n-k+1). \quad (4.1)$$

Пусть $x_0 \in \overset{\circ}{V}$, $x_0 \in (x_2, x_1)$, $x_2, x_1 \in \partial V$, $x - x_0 = c(x_1 - x_0)$, $c \geq 0$,

$$\rho(x, x_0) = \|x - x_0\|/\|x_1 - x_0\|, \quad \lambda(x, x_0) = \min\{1, \|x_2 - x_0\|/\|x_1 - x_0\|\};$$

для $x \in \overset{\circ}{V}$

$$\eta(x, x_0) = \rho\lambda(1 - \nu b)/(\lambda^2 + \rho^2 \nu^2),$$

где $\rho = \rho(x, x_0)$, $\lambda = \lambda(x, x_0)$, $b = (1 - \rho^2)^{1/2}$, $\nu = (1 - \lambda^2)^{1/2}$.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $x, x_0 \in \overset{\circ}{V} \subset X$, $P_n \in B_n(V)$, $\|h\| = 1$. Тогда справедливо неравенство

$$|\nabla P_n(x)[h]| \leq \frac{\sqrt{2n}}{r_h(x_0)((1 + \eta(x, x_0))(1 - \rho^2(x, x_0)))^{1/2}}. \quad (4.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\rho = \rho(x, x_0)$, $r = r_h(x_0)$, $x \neq x_0$, $x_1 = x_0 + (x - x_0)/\rho$. В теле V содержится четырехугольник $G = \{y \in V: y = x_0 + t_0(x_1 - x_0) + t_1 r h, t_0 \geq 0, t_0 + |t_1| \leq 1 \text{ или } t_0 \leq 0, -t_0/\lambda + |t_1| \leq 1\}$.

Полином $Q_n(t_0, t_1) = P_n(x_0 + t_0 x_1 + t_1 r h)$ является полиномом n -ой степени от двух переменных t_0 и t_1 , и $|Q_n(t_0, t_1)| \leq 1$ при $t_0 \geq 0, t_0 + |t_1| \leq 1$ или $t_0 \leq 0, -t_0/\lambda + |t_1| \leq 1$. Точке x соответствует точка $(\rho, 0)$. Имеет место равенство

$$r \nabla P_n(x)[h] = Q'_{n_{t_1}}(\rho, 0). \quad (4.3)$$

Эллипс

$$t_0^2/\rho^2 + t_1^2/b^2 = 1, \quad b^2 = 1 - \rho^2, \quad (4.4)$$

имеет с прямой $t_0 + t_1 = 1$ только одну общую точку, поэтому его половина принадлежит треугольнику $t_0 \geq 0, t_0 + |t_1| \leq 1$. Введем замену переменных $t_0 = \rho s_0$, $t_1 = b s_1$, и пусть $U_n(s_0, s_1) = Q_n(\rho s_0, b s_1)$. Если точка (t_0, t_1) принадлежит эллипсу (4.4), то точка (s_0, s_1) принадлежит окружности $C: s_0^2 + s_1^2 = 1$, которая пересекает прямую $\rho s_0/\lambda + 1 = b s_1$ в точке $s^*: s_0^* = -\eta(x, x_0)$. Пусть на C

$$s_0 = \cos \theta, \quad s_1 = \sin \theta, \quad R_n(\theta) = U_n(\cos \theta, \sin \theta).$$

Тогда $|R_n(\theta)| \leq 1$ при $|\theta| \leq \pi/2 + \arcsin(-s_0^*)$ и из леммы 3.7 следует неравенство

$$|b Q'_{n_{t_1}}(\rho, 0)| = |U'_{n_{s_1}}(1, 0)| = |R'_n(0)| \leq \sqrt{2} n / (1 + \eta(x, x_0))^{1/2}. \quad (4.5)$$

Из (4.3)–(4.5) вытекает неравенство (4.2).

СЛЕДСТВИЕ 4.1. При условиях теоремы 4.1 справедливо неравенство

$$|\nabla P_n(x)[h]| \leq n r_h^{-1}(x_0) (1 - \rho^2)^{-1/2} \min\{(1 + \rho)(1 - P_n^2(x))^{1/2}, \sqrt{2}\}, \quad \rho = \rho(x, x_0).$$

Доказательство вытекает из теоремы 4.1 и теоремы 9 работы [29].

ЛЕММА 4.2. Пусть $X = \mathbb{E}^{k+1}$, $S = \{s \in \mathbb{E}^{k+1}: \sum_{i=0}^k s_i^2 = 1, s_0 \in [0, 1]\}$, $s_* = (1, 0, \dots, 0)$, $P_n \in \mathfrak{P}_n(\mathbb{E}^{k+1}, \mathbb{R})$, $\|P_n\|_S \leq 1$. Тогда имеет место неравенство

$$|P_{n_{s_1 \dots s_k}}^{(k)}(s_*)| \leq 2^{k/2} n(n-1) \dots (n-k+1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На половине гиперсферы $\{s: s \in S, s_1 = 0\}$ в силу леммы 3.7 имеем неравенство

$$|P'_{n_{s_1}}(s)| \leq 2^{1/2} n,$$

и, далее, на половине сферы $\{s: s \in S, s_1 = \dots = s_k = 0\} = \{(1, 0, \dots, 0)\}$

$$|P_{n_{s_1 \dots s_k}}^{(k)}(s)| \leq 2^{k/2} n(n-1) \dots (n-k+1).$$

Пусть $h_i \in X$, $\|h_i\| = 1$, $i = \overline{1, k}$, и отображение $F: X \rightarrow \mathbb{E}^k$ определено соотношением

$$F: y = \sum_{i=1}^k t_i r_{h_i} h_i \rightarrow \bar{t} = \sum_{i=1}^k t_i e_i,$$

где $\{e_i\}$ – ортонормированный базис в $\mathbb{E}^k$.

Пусть $L(h_1, \dots, h_k)$ – линейная оболочка системы векторов $\{h_i\}_1^k$, $K_{h_1 \dots h_k} = K \cap L(h_1, \dots, h_k)$, $r_{h_1 h_2 \dots h_k}$ и $\bar{r}_F$ – радиусы шаров, вписанных во множества $K_{h_1 \dots h_k}$ и $F(K_{h_1 \dots h_k})$ в соответствующих метриках.

Так как множество $F(K_{h_1 \dots h_k})$ содержит октаэдр $\{\bar{t}: \sum_1^k |t_i| \leq 1\}$, то для $\bar{r}_F$ справедливо неравенство $k^{-1/2} \leq \bar{r}_F \leq 1$.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть $K \subset X$, $P_n \in B_n(K)$, векторы $h_1, \dots, h_k \in X$, $\|h_i\| = 1$, $i = \overline{1, k}$, $k = \overline{1, n}$. Тогда справедливы следующие неравенства:

$$\begin{aligned} |\nabla^k P_n(x)[h_1, \dots, h_k]| &\leq B_{n,k}^0(\rho(x)) / (\bar{r}_F^{k/2} r_{h_1} \dots r_{h_k}) \\ &\leq B_{n,k}(\rho(x)) / (r_{h_1} \dots r_{h_k}), \quad x \in \overset{\circ}{K}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} |\nabla^k P_n(x)[h_1, \dots, h_k]| &\leq B_{n,k}^0(0) N_{n,k}(\rho(x)) / (N_{n,k}(0) \bar{r}_F^{k/2} r_{h_1} \dots r_{h_k}) \\ &\leq B_{n,k}(0) N_{n,k}(\rho(x)) / (N_{n,k}(0) r_{h_1} \dots r_{h_k}). \end{aligned} \quad (4.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала неравенства (4.6). Пусть $x \in \overset{\circ}{K} \setminus \theta_X$, $x_0 = x/\rho(x)$, $y_i = r_{h_i} h_i$, $i = \overline{1, k}$, и отображение $\tilde{F}: X \rightarrow \mathbb{E}^{k+1}$ определено соотношением

$$\tilde{F}: y = t_0 x_0 + \sum_{i=1}^k t_i y_i \rightarrow t = \sum_{i=0}^k t_i e_i,$$

где $\{e_i\}_0^k$ – базис $\mathbb{E}^{k+1}$. Полином $Q_n(t) = (t_0, t_1, \dots, t_k) = P_n(y)$ является полиномом n -ой степени от $k+1$ переменных и $|Q_n(t)| \leq 1$ при $t \in \tilde{F}(K_{x_0 h_1 \dots h_k}) = D$. Точке x соответствует точка $(\rho(x), 0, \dots, 0)$. Имеет место равенство

$$r_{h_1} \dots r_{h_k} \nabla P_n(x)[h_1, \dots, h_k] = Q_{n_{t_1 \dots t_k}}^{(k)}(\rho(x), 0, \dots, 0). \quad (4.8)$$

Во множестве D содержится множество A – объединение частей двух противоположных конусов, – описываемое соотношением

$$A = \left\{ t \in \mathbb{E}^{k+1}: |t_0| + \frac{1}{\bar{r}_F} \left(\sum_{i=1}^k t_i^2 \right)^{1/2} \leq 1 \right\}.$$

Для любого $0 < a^2 < 1$ можно во множество A вписать эллипсоид

$$t_0^2/a^2 + \sum_{i=1}^k t_i^2/b^2 = 1, \quad b^2 = (1 - a^2) \bar{r}_F^2. \quad (4.9)$$

Введем замену переменных $t_0 = as_0$, $t_i = bs_i$, $i = \overline{1, k}$,

$$U_n(s) = U_n(s_0, s_1, \dots, s_k) = Q_n(as_0, bs_1, \dots, bs_k).$$

Если точка t принадлежит эллипсоиду (4.9), то точка s принадлежит сфере $S = \{s: \sum_{i=0}^k s_i^2 = 1\}$. Из леммы 4.1 при $s = (1, 0, \dots, 0)$ следует неравенство

$$|U_{n_{s_1 \dots s_k}}^{(k)}(s)| = |b^k Q_{n_{t_1 \dots t_k}}^{(k)}(a, 0, \dots, 0)| \leq n(n-1) \dots (n-k+1). \quad (4.10)$$

Из (4.8) и (4.10) вытекают при $a = \rho(x)$ неравенства (4.6). Из (4.6) и леммы 3.3 следует (4.7).

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть X – гильбертово пространство, $K \subset X$, $P_n \in B_n(K)$, векторы $h_i \in X$, $i = \overline{1, k}$, образуют ортонормированную систему векторов. Тогда справедливы следующие неравенства:

$$\begin{aligned} |\nabla^k P_n(x)[h_1, \dots, h_k]| &\leq B_{n,k}^0(\rho(x))/r_{h_1 \dots h_k}^k, \quad x \in \overset{\circ}{K}, \\ |\nabla^k P_n(x)[h_1, \dots, h_k]| &\leq B_{n,k}^0(0)N_{n,k}(\rho(x))/(N_{n,k}(0)r_{h_1 \dots h_k}^k). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in \overset{\circ}{K} \setminus \theta_X$, $x_0 = x/\rho(x)$ и $r = r_{h_1 \dots h_k}$. В теле K содержится множество C – объединение частей двух противоположных конусов, – описываемое соотношениями

$$C = \left\{ y \in K: y = t_0 x_0 + r \sum_{i=1}^k t_i h_i, |t_0| + \left(\sum_{i=1}^k t_i^2 \right)^{1/2} \leq 1 \right\}.$$

Пусть $Q_n(t_0, \dots, t_k) = P_n(t_0 x_0 + r \sum_{i=1}^k t_i h_i)$. Тогда $|Q_n(t)| \leq 1$ на множестве $A = \{t: |t_0| + (\sum_{i=1}^k t_i^2)^{1/2} \leq 1\}$. Во множество A можно вписать эллипсоид

$$t_0^2/a^2 + \sum_{i=1}^k t_i^2/(1-a^2) = 1, \quad 0 < a^2 < 1.$$

Далее, применяя схему доказательства теоремы 4.2, получим утверждение теоремы.

ТЕОРЕМА 4.4. Пусть $x_*, x_0 \in V \setminus \partial V$, $P_n \in \mathfrak{P}_n(X, \mathbb{R})$, $\|P_n\|_V \leq 1$, $\|h_i\| = 1$, $i = \overline{1, k}$. Тогда имеют место неравенства

$$\begin{aligned} |\nabla^k P_n(x_*)[h_1, \dots, h_k]| &\leq 2^{k/2} B_{n,k}(0)/((1-\rho^2)^{k/2} r_1 \dots r_k) \\ &< \tilde{B}_{n,k}(\rho)/(r_1 \dots r_k), \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$|\nabla^k P_n(x_*)[h_1, \dots, h_k]| < B_{n,k}(0) \tilde{N}_{n,k}(\rho)/(N_{n,k}(0) r_1 \dots r_k), \quad (4.12)$$

где $\rho = \rho(x_*, x_0)$, $r_i = r_{h_i}(x_0)$, $i = \overline{1, k}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим схему доказательства аналогичного неравенства для отрезка [3, с. 27]. Пусть $1 > \rho_1 > \rho$ и $V_{\rho_1} = \{x: \rho(x, x_0) \leq \rho_1\}$. Легко проверить, что V_{ρ_1} – выпуклое тело. Тогда из теоремы 4.1 для $x \in V_{\rho_1}$ имеет место неравенство

$$|\nabla P_n(x)[h_1]| \leq \frac{\sqrt{2}n}{r_1(1-\rho_1^2)^{1/2}}. \quad (4.13)$$

Используя повторно теорему 4.1 и неравенство (4.13), получим

$$|\nabla^2 P_n(x)[h_1, h_2]| \leq \frac{2n(n-1)}{r_1 r_2 \{(1-\rho_1^2)(\rho_1^2 - \rho_x^2)\}^{1/2}}, \quad \rho_x = \rho(x, x_0).$$

Применив этот прием k раз, получим для $1 > \rho_1^2 > \rho_2^2 > \dots > \rho^2$

$$\begin{aligned} |\nabla^k P_n(x_*)[h_1, h_2, \dots, h_k]| &\leq \\ &\leq \frac{2^{k/2} n(n-1) \dots (n-k+1)}{r_1 r_2 \dots r_k \{(1-\rho_1^2)(\rho_1^2 - \rho_2^2) \dots (\rho_{k-1}^2 - \rho^2)\}^{1/2}}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Положив в (4.14) $1 - \rho_1^2 = \rho_1^2 - \rho_2^2 = \dots = \rho_{k-1}^2 - \rho^2 = (i - \rho^2)/k$, получим первое неравенство в (4.11). Из полученного неравенства и неравенства

$$2/(1 - \rho^2) < 1/(\rho(1 - \rho)), \quad 0 < \rho < 1,$$

вытекает второе неравенство в (4.11). Отсюда и из леммы 3.3 следует неравенство (4.12).

Обозначим через $r_{h_1 h_2 \dots h_k}(x_0)$ радиус шара, вписанного во множество $(x_0 + L(h_1, h_2, \dots, h_k)) \cap V$, где $x_0 \in \overset{\circ}{V}$.

ТЕОРЕМА 4.5. Пусть X – гильбертово пространство, $x_0 \in \overset{\circ}{V} \subset X$, $P_n \in \mathfrak{P}_n(X, \mathbb{R})$, $\|P_n\|_V \leq 1$, векторы $h_i \in X$, $i = \overline{1, k}$, образуют ортонормированную систему векторов. Тогда справедливы следующие неравенства:

$$\begin{aligned} |\nabla^k P_n(x)[h_1, \dots, h_k]| &\leq \tilde{B}_{n,k}^0(\rho)/r^k, \quad x \in \overset{\circ}{V}, \\ |\nabla^k P_n(x)[h_1, \dots, h_k]| &\leq B_{n,k}^0(0)\tilde{N}_{n,k}(\rho)/(N_{n,k}(0)r^k), \end{aligned}$$

где $\rho = \rho(x, x_0)$, $r = r_{h_1 \dots h_k}(x_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in \overset{\circ}{V} \setminus x_0$, $x_1 - x_0 = (x - x_0)/\rho$. В теле V содержится часть конуса, описываемая соотношением

$$C = \left\{ y \in V : y = x_0 + t_0(x_1 - x_0) + r \sum_{i=1}^k t_i h_i, \quad t_0 + \left(\sum_{i=1}^k t_i^2 \right)^{1/2} \leq 1, \quad t_0 \geq 0 \right\}.$$

Пусть $Q_n(t_0, \dots, t_k) = P_n(x_0 + t_0(x_1 - x_0) + r \sum_{i=1}^k t_i h_i)$. Тогда $|Q_n(t)| \leq 1$ на множестве $A = \{t : t_0 + (\sum_{i=1}^k t_i^2)^{1/2} \leq 1, t_0 \geq 0\}$. Во множество A можно вписать половину эллипсоида

$$t_0^2/a^2 + \sum_{i=1}^k t_i^2/(1 - a^2) = 1, \quad t_0 \geq 0, \quad 0 < a^2 < 1.$$

Далее, применяя схему доказательства теоремы 4.2 и лемму 4.2, получим утверждение теоремы.

Пусть X – гильбертово пространство и $\{h_{ij}\}$, $i = \overline{1, k_j}$, $j = \overline{1, s}$, $\sum_{j=1}^s k_j = k$, – множество нормированных векторов из X , причем векторы с одним значением индекса j взаимно ортогональны. Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 4.6. Пусть $x_0 \in \overset{\circ}{V} \subset X$, $P_n \in B_n(V)$. Тогда имеют место оценки

$$|\nabla^k P_n(x_*)[\{h_{ij}\}]| \leq \frac{(2k)^{k/2} n(n-1) \dots (n-k+1)}{r^k(x_0)(1 - \rho^2)^{k/2} \prod_{j=1}^s k_j^{k_j/2}}, \quad x_* \in \overset{\circ}{V}, \quad (4.15)$$

$$|\nabla^k P_n(x_*)[\{h_{ij}\}]| \leq \frac{k^{k/2} \tilde{N}_{n,k}(\rho)}{r^k(x_0) \prod_{j=1}^s k_j^{k_j/2}}, \quad x_* \in X, \quad (4.16)$$

где $\rho = \rho(x_*, x_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x_* \in \overset{\circ}{V}$. Повторяя рассуждения доказательств теорем 4.5 и 4.4, для $1 > \rho_1^2 > \rho_2^2 > \dots > \rho_{s-1}^2 > \rho^2$ получим неравенство

$$|\nabla^k P_n(x_*)[\{h_{ij}\}]| \leq \frac{2^{k/2} n(n-1) \dots (n-k+1)}{r^k(x_0) \{(1-\rho_1^2)^{k_1} (\rho_1^2 - \rho_2^2)^{k_2} \dots (\rho_{s-1}^2 - \rho^2)^{k_s}\}^{1/2}}. \quad (4.17)$$

Положив в (4.17) $\rho_{u-1}^2 - \rho_u^2 = k_u(1-\rho^2)/k$, $\rho_0 = 1$, $\rho_s = \rho$, $u = \overline{1, s}$, получим неравенство (4.15), из которого по лемме 3.3 следует (4.16).

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Для тела K аналогично получаются неравенства при $\|P_n\|_K \leq 1$:

$$|\nabla^k P_n(x)[\{h_{ij}\}]| \leq \frac{k^{k/2} n(n-1) \dots (n-k+1)}{r^k(K) (1-\rho^2)^{k/2} \prod_{j=1}^s k_j^{k_j/2}}, \quad x \in \overset{\circ}{K},$$

$$|\nabla^k P_n(x)[\{h_{ij}\}]| \leq \frac{k^{k/2} N_{n,k}(\rho)}{r^k(K) \prod_{j=1}^s k_j^{k_j/2}}, \quad x \in X, \quad \rho = \rho(x).$$

Если в качестве направлений взять k различных нормированных векторов h_i и s одинаковых векторов $\bar{x} = x/\|x\|$, то для банахова пространства X получим следующую оценку.

ТЕОРЕМА 4.7. Пусть $K \subset X$, $P_n \in B_n(K)$, $1 \leq k+s \leq n$, $x \neq \theta_X$. Справедливо неравенство

$$|\nabla^{k+s} P_n(x)[h_1, \dots, h_k, \bar{x}, \dots, \bar{x}]| \leq \frac{B_{n,k}(0) N_{n,k+s}(\rho(x))}{M_{n,k}(0) r_{h_1} \dots r_{h_k} r_x^s}. \quad (4.18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in \overset{\circ}{K} \setminus \theta_X$. Применим схему доказательства теоремы 4.2. Произведем замену переменных:

$$Q_n(t_0, t_1, \dots, t_k) = P_n\left(t_0 x_0 + \sum_{i=1}^k t_i r_{h_i} h_i\right), \quad \text{где } x_0 = x/\rho(x). \quad (4.19)$$

Из (4.10) имеем неравенство

$$|(1-t_0^2)^{k/2} Q_{n_{t_1 \dots t_k}}^{(k)}(t_0, 0, \dots, 0)| \leq k^{k/2} n! / (n-k)!. \quad (4.20)$$

В силу теоремы 2.2 и леммы 3.3 из (4.20) следует неравенство

$$|Q_{n_{t_1 \dots t_k} t_0^s}^{(k+s)}(t_0, 0, \dots, 0)| \leq B_{n,k}(0) N_{n,k+s}(t_0) / M_{n,k}(0). \quad (4.21)$$

Из (4.21) и (4.19) вытекает (4.18).

Из теоремы 4.7 при $k=1$ получаем оценку

$$\sup_{\substack{P_n \in B_n(K) \\ h \in \partial B}} |\nabla^{1+s} P_n(x)[h, \bar{x}^s]| r_h \leq N_{n,1+s}(\rho(x)) / r_x^s. \quad (4.22)$$

В (4.22) равенство достигается для x , при которых $S_n^{(1+s)}(\rho(x)) = 0$ или $\rho(x) \geq t_1$, где t_1 – максимальный нуль $S_n^{(1+s)}(t)$ на $[-1, 1]$.

Из (4.22) следует неравенство

$$\sup_{\substack{P_n \in B_n(K) \\ h_i \in \partial B}} |\nabla^k P_n(\theta_X)[h_1, h_2^{k-1}]| r_{h_1} r_{h_2}^{k-1} \leq N_{n,k}(0). \quad (4.23)$$

Если $n - k$ четное, то в (4.23) будет равенство. При $k = 2$ из (4.23) получаем

$$\sup_{P_n \in B_n(K)} \|\nabla^2 P_n(\theta_X)\|_{\mathcal{L}^2(X, \mathbb{R})} \leq n^2 / r^2(K), \quad X \text{ – банахово.} \quad (4.24)$$

Эта оценка точная для четных n .

Из теорем 4.4, 2.2 и леммы 3.3 аналогично теореме 4.7 вытекает

ТЕОРЕМА 4.8. Пусть $x_0 \in \mathring{V} \subset X$, $P_n \in B_n(V)$, $\|h_i\| = 1$, $i = \overline{1, k}$, $x \neq x_0$, $\bar{x} = (x - x_0) / \|x - x_0\|$. Тогда имеет место неравенство

$$|\nabla^{k+s} P_n(x)[h_1, \dots, h_k, \bar{x}^s]| \leq \frac{B_{n,k}(0) \tilde{N}_{n,k+s}(\rho) \rho^s}{M_{n,k}(0) r_1 \dots r_k \|x - x_0\|^s}, \quad (4.25)$$

где $\rho = \rho(x, x_0)$, $r_i = r_{h_i}(x_0)$, $i = \overline{1, k}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Если X – гильбертово пространство и $\{h_i\}_1^k$ – ортонормированная система векторов, то в неравенствах (4.18) и (4.25) $B_{n,k}(0)$ заменяется на $B_{n,k}^0(0)$, а $\prod_{i=1}^k r_{h_i}$ на $r_{h_1 \dots h_k}^k$ или $r_{h_1 \dots h_k}^k(x_0)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. Для симметричных непрерывных k -линейных функционалов $f: X^k \rightarrow \mathbb{R}$ известны [38] неравенства

$$\sup_{\substack{\|x_i\| \leq 1 \\ i=1, \dots, k}} |f(x_1, x_2, \dots, x_k)| \leq c_k \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x, x, \dots, x)|, \quad (4.26)$$

$$c_k \leq k^k / k!. \quad (4.27)$$

Если X – гильбертово пространство, то (см. [39], [40])

$$c_k = 1. \quad (4.28)$$

Если $X = l_1$ или $X = L[0, 1]$, то существуют экстремальные функционалы [41], на которых неравенство (4.27) превращается в равенство. Поэтому из (4.26)–(4.28) и оценок производных по одному направлению вытекают оценки норм производных.

ТЕОРЕМА 4.9. Пусть $K \subset X$, $P_n \in B_n(K)$, $\|h\| = 1$. Тогда справедливы следующие неравенства:

$$|\nabla^2 P_n(x)[h, h]| \leq \frac{n(1 - \varepsilon^2)^{1/2} \{\operatorname{ctg}(\alpha(-\delta\varepsilon)/(2n))/2 + \rho/(1 - \rho^2)^{1/2}\}}{(1 - \rho^2)r_h^2}, \quad (4.29)$$

где $x \in \mathring{K}$, $\varepsilon = P_n(x)$, $\alpha(\varepsilon) = \arccos \varepsilon$, $\delta = \operatorname{sgn} \nabla^2 P_n(x)[h, h]$, $\rho = \rho(x)$;

$$|\nabla^2 P_n(x)[h, h]| < c_1 N_{n,2}(\rho(x)) r_h^{-2} \leq c_1 T_n^{(2)}(1) / r_h^2, \quad (4.30)$$

$$c_1 = 1.0858, \quad x \in K.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим схему доказательства теоремы 4.2. Пусть $x \in \overset{\circ}{K} \setminus \theta_X$, $x_0 = x/\rho(x)$,

$$\begin{aligned} Q_n(t_0, t_1) &= P_n(t_0 x_0 + t_1 r_h h), \\ t_0 &= a s_0, \quad t_1 = b s_1, \quad 0 < a^2 < 1, \quad b^2 = 1 - a^2, \\ U_n(s_0, s_1) &= Q_n(a s_0, b s_1) \end{aligned} \quad (4.31)$$

и на окружности $s_0^2 + s_1^2 = 1$

$$s_0 = \cos \theta, \quad s_1 = \sin \theta, \quad R_n(\theta) = U_n(\cos \theta, \sin \theta).$$

Из замен следует, что $R_n(\theta)$ – тригонометрический полином n -го порядка и $|R_n(\theta)| \leq 1$, $\theta \in \mathbb{R}$. В силу леммы 3.6 получим неравенство

$$|U_{n_{s_1^2}}^{(2)}(1, 0) - U_{n_{s_0}}^{(1)}(1, 0)| = |R_n^{(2)}(0)| \leq n(1 - \varepsilon^2)^{1/2} \operatorname{ctg}(\alpha(-\delta\varepsilon)/(2n))/2, \quad (4.32)$$

$\varepsilon = P_n(x) = R_n(0)$, $\delta = \operatorname{sgn} R_n^{(2)}(0)$. Положим $a = \rho(x)$. Тогда

$$U_{n_{s_1^2}}^{(2)}(1, 0) = b^2 Q_{n_{t_1^2}}^{(2)}(a, 0), \quad U'_{n_{s_0}}(1, 0) = a Q'_{n_{t_0}}(a, 0),$$

и из (4.32), (4.31) и неравенства (1.9) следует (4.29).

Пусть ρ_1 – максимальный нуль функции $S_n^{(2)}(\rho)$ на $[-1, 1]$ и

$$f(n, \rho, \varepsilon, \delta) = \frac{n(1 - \varepsilon^2)^{1/2}}{1 - \rho^2} \left\{ \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \left(\frac{\alpha(-\delta\varepsilon)}{2n} \right) + \frac{\rho}{(1 - \rho^2)^{1/2}} \right\}.$$

Для доказательства (4.30) по замечанию 2.2 достаточно показать, что

$$f(n, \rho, \varepsilon, \delta) < c_1 M_{n,2}(\rho)$$

для $\rho \in [0, \rho_1]$ и $\varepsilon \in [-1, 1]$, $\delta = -1, 0, 1$. Имеем равенство

$$M_{n,2}(\rho) = \frac{n^2}{1 - \rho^2} \left(1 + \frac{\rho^2}{n^2(1 - \rho^2)} \right)^{1/2}. \quad (4.33)$$

По лемме 3.5 для ρ_1 справедливо неравенство

$$\cos(\pi/n) < \rho_1 < \cos(c_2 \pi/n) = \beta(n), \quad c_2 = 0.890753.$$

Если $\delta\varepsilon \geq 0$, то из неравенства

$$\operatorname{ctg} y < 1/y, \quad 0 < y < \pi,$$

следует при $|\rho| < \beta(n)$ неравенство

$$f(n, \rho, \varepsilon, \delta) < c_3 n^2 / (1 - \rho^2), \quad c_3 < 0.994.$$

Если $\delta\varepsilon = -1$, то $f(n, \rho, \varepsilon, \delta) < n^2/(1 - \rho^2)$. Нам остается рассмотреть случай, когда $-1 < \delta\varepsilon < 0$. Пусть $\alpha(-\delta\varepsilon) = y$; тогда $(1 - \varepsilon^2)^{1/2} = \sin y$ и выполняется неравенство

$$\frac{f(n, \rho, \varepsilon, \delta)}{M_{n,2}(\rho)} < \frac{\sin y \{y^{-1} + n^{-1} \operatorname{ctg}(\gamma\pi/n)\}}{(1 + n^{-2} \operatorname{ctg}^2(\gamma\pi/n))^{1/2}} = \psi(n, y, \gamma),$$

где $\rho = \cos(\gamma\pi/n)$, $0 \leq y \leq \pi/2$, $c_2 \leq \gamma \leq n/2$. Так как $n^{-1} \operatorname{ctg}(\gamma\pi/n) = (\tilde{\gamma}\pi)^{-1}$, где $\tilde{\gamma} > \gamma$, то максимум функции $\psi(n, y, \gamma)$ при фиксированном n по переменным y и γ в указанных пределах не превышает максимума функции

$$\varphi(y, z) = \sin y (y^{-1} + z)/(1 + z^2)^{1/2}$$

в прямоугольнике $\Omega = \{(y, z): 0 \leq y \leq \pi/2, 0 \leq z \leq (c_2\pi)^{-1}\}$. Покажем, что внутри Ω максимум $\varphi(y, z)$ не достигается. Имеем

$$\varphi'_y(y, z) = \{y \cos y - \sin y + zy^2 \cos y\}/(y^2(1 + z^2)^{1/2}), \quad (4.34)$$

$$\varphi'_z(y, z) = \sin y (y - z)/(y(1 + z^2)^{3/2}). \quad (4.35)$$

Если максимум функции φ достигается в некоторой внутренней точке $(y_0, z_0) \in \overset{\circ}{\Omega}$, то из (4.34) и (4.35) имеем равенства

$$\operatorname{tg} y_0 = y_0 + z_0 y_0^2, \quad y_0 = z_0, \quad z_0 < (c_2\pi)^{-1} < 0.3574. \quad (4.36)$$

Из разложения функции $\operatorname{tg} y$ в ряд по степеням y при $y \in (0, \pi/2)$ получаем неравенство

$$\operatorname{tg} y < y(1 - 4\pi^{-2}y^2)^{-1}. \quad (4.37)$$

При $0 < y < 1.2$ справедливо неравенство

$$y(1 - 4\pi^{-2}y^2)^{-1} < y + y^3. \quad (4.38)$$

Но (4.37) и (4.38) противоречат (4.36). Итак, максимум φ достигается на границе прямоугольника Ω . Имеем неравенства на границе Ω :

$$\varphi(0, z) \leq 1, \quad \varphi(\pi/2, z) < 1, \quad \varphi(y, 0) \leq 1.$$

При $z = z_* = (c_2\pi)^{-1}$ уравнение $\varphi'_y(y, z_*) = 0$ или $\operatorname{tg} y = y + z_*y^2$, имеет решение только при $y = y_* \approx 0.798075$ и $\varphi(y_*, z_*) < c_1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.4. Из доказательства неравенства (4.29) следует, что при условиях теоремы 4.9 выполнено неравенство

$$|\nabla^2 P_n(x)[h, h]| \leq \frac{n(1 - \varepsilon^2)^{1/2} \{\operatorname{ctg}(\alpha(-\delta\varepsilon)/(2n))/2 + \delta\mu\}}{(1 - \rho^2)r_h^2},$$

где $\mu = \nabla P_n(x)[x]$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.5. Пусть выполнены условия теоремы 4.9 и

$$|\nabla P_n(x_*)[h]|r_h = d|\nabla P_n(x_*)[x_*]|/\rho(x_*), \quad x_* \in \overset{\circ}{K}, \quad d > 0. \quad (4.39)$$

Тогда имеет место неравенство

$$|\nabla^2 P_n(x_*)[h, h]| \leq \frac{n^2(1 + \rho^2/((1 - \rho^2)n^2d^2))^{1/2}}{(1 - \rho^2)r_h^2}, \quad \rho = \rho(x_*). \quad (4.40)$$

Действительно, известно неравенство [3, с. 335] для тригонометрического полинома $R_n(\theta): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ порядка n

$$|R'_n(\theta) + cR_n(\theta)| \leq L(n^2 + c^2)^{1/2}, \quad \|R_n(\theta)\|_{C[0, 2\pi]} \leq L, \quad c \in \mathbb{R}. \quad (4.41)$$

Тогда из (4.39) и (4.31) при $a = \rho$ получим

$$|U'_{n_{s_0}}(1, 0)| = \rho(d(1 - \rho^2)^{1/2})^{-1}|U'_{n_{s_1}}(1, 0)|. \quad (4.42)$$

Так как $|R'_n(\theta)| \leq n$ и $R'_n(0) = U'_{n_{s_1}}(1, 0)$, то из (4.42), (4.41) и равенства в левой части (4.32) получим (4.40). Очевидно, что при $d \geq 1$ правая часть в (4.40) не превышает $M_{n,2}(\rho)/r_h^2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.6. Если $x_0 \in \partial K$ и P_n на прямой tx_0 является полиномом Чебышева $T_n(t)$, то для любого h , $\|h\| = 1$, выполнено неравенство

$$|\nabla^2 P_n(tx_0)[h, h]| \leq T_n^{(2)}(1)/r_h^2, \quad t \in [-1, 1]. \quad (4.43)$$

Это следует из схемы И. Шура представления $Q_n^{(2)}(t_0, 0)$ интерполяционным полиномом Лагранжа по нулям $T'_n(t_0)$. Тогда из (29) и неравенства (см. [44])

$$\sum_{i=1}^{n-k} \left| \frac{T_n^{(k)}(t)}{t - t_i^{(k)}} \right| \leq T_n^{(k+1)}(1), \quad T_n^{(k)}(t_i^{(k)}) = 0, \quad i = \overline{1, n-k},$$

для $k = \overline{0, n-1}$ получим (4.43).

ЗАМЕЧАНИЕ 4.7. В (4.30) c_1 можно рассматривать как функцию от $\rho(x)$, которая монотонно убывает от 1.0858 до 1 при изменении $\rho(x)$ от $\cos(c_2\pi/n)$ до нуля. Например, в точке $\rho_2 = \cos(c\pi/n)$, $c = 1.94845$, – границе для второго нуля $S_n^{(2)}(t)$ – имеем $c_1(\rho_2) \leq 1.024074$, в точке $\rho_3 = \cos(c\pi/n)$, $c = 2.96595$, – границе для третьего нуля $S_n^{(2)}(t)$ – будет $c_1(\rho_3) \leq 1.011$ и т. д.

Пусть $\mu(X)$ – мера негильбертовости пространства X :

$$\mu(X) = \sup_{x, y} \frac{\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2}{2(\|x\|^2 + \|y\|^2)}.$$

Для $\mu(X)$ имеется точное неравенство $1 \leq \mu(X) \leq 2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.8. Если $P_n \in B_n(K)$, то выполнено неравенство

$$\|\nabla^2 P_n(x)\|_{\mathcal{L}^2(X, \mathbb{R})} \leq \min\{2, c_1 \mu(X)\} N_{n,2}(\rho(x)) r^{-2}(K), \quad x \in X. \quad (4.44)$$

Действительно, пусть ω_2 – симметричный непрерывный билинейный функционал на X^2 . Пусть

$$C = \sup_{\|h\|=1} \omega_2(h, h).$$

Тогда для нормированных h_1 и h_2 получим неравенства

$$\begin{aligned} \omega_2(h_1, h_2) &= \frac{1}{4} \{ \omega_2(h_1 + h_2, h_1 + h_2) - \omega_2(h_1 - h_2, h_1 - h_2) \} \\ &\leq \frac{C}{4} \{ \|h_1 + h_2\|^2 + \|h_1 - h_2\|^2 \} \leq C \mu(X). \end{aligned} \quad (4.45)$$

Отсюда и из теорем 4.9 и 4.2 следует (4.44).

ТЕОРЕМА 4.10. Пусть $K \subset X$, $P_n \in B_n(K)$, $\|h\| = 1$, $\bar{x} = x/\|x\|$, $x \neq \theta_X$. Тогда

$$|\nabla^{2+s} P_n(x)[h^2, \bar{x}^s]| \leq 1.0858 N_{n,2+s}(\rho(x)) r_h^{-2} r_x^{-s}.$$

Доказательство следует из теорем 4.9 и 2.2 и проводится аналогично доказательству теоремы 4.7.

ЛЕММА 4.3. Пусть $K \subset X$, $P_n \in B_n(K)$, $\|h\| = 1$, $x \in \overset{\circ}{K}$. Тогда имеет место неравенство

$$|\nabla^2 P_n(x)[h, h]| \leq \frac{cn^2}{(1 - \rho^2(x))r_h^2}, \quad c \leq 1.1544. \quad (4.46)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В точке $\rho_1 = \cos(c_2 \pi/n)$, $c_2 = 0.890753$, имеем

$$\varphi(\rho) = (1 + \rho^2(n^{-2}(1 - \rho^2)^{-1}))^{1/2} \leq \gamma_1 = 1.061932,$$

и так как $\varphi(\rho)$ возрастает на $[0, \rho_1]$, то из теоремы 4.9 следует неравенство

$$|\nabla^2 P_n(x)[h, h]| \leq \frac{c_1 \gamma_1 n^2}{(1 - \rho^2(x))r_h^2}, \quad c_1 \gamma_1 \leq 1.15305, \quad \rho(x) \leq \rho_1.$$

При $\rho \in [\cos(\pi/n), 1)$ имеем неравенства

$$(1 - \rho^2)T_n^{(2)}(\rho) = \rho T_n'(\rho) - n^2 T_n(\rho) \leq n^2(\sin \alpha/\alpha - \cos \alpha) = n^2 f(\alpha),$$

где $\rho = \cos(\alpha/n)$. Функция $f(\alpha)$ на интервале $(0, \pi]$ имеет максимум в точке $\alpha_* \approx 0.87335\pi$, не превышающий $\gamma_* = 1.06311$. Так как $N_{n,2}(\rho) = T_n^{(2)}(\rho)$ при $\rho \geq \rho_1$, то получаем, что $c = c_1 \gamma_* \leq 1.1544$.

Пусть

$$\begin{aligned} D_{n,2k}(\rho) &= \frac{\prod_{i=0}^{k-1} (n - 2i)^2}{(1 - \rho^2)^k}, \\ D_{n,2k+1}(\rho) &= \frac{n \prod_{i=1}^k (n - 2i + 1)^2}{(1 - \rho^2)^{(2k+1)/2}}, \quad 0 \leq \rho < 1, \quad c_0 = c/2 \leq 0.5772. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 4.11. Пусть $K \subset X$, $P_n \in B_n(K)$, $\|h_i\| = 1$, $i = \overline{1, 2k+s}$. Тогда справедливы неравенства

$$\begin{aligned} & |\nabla^{2k+s} P_n(x)[h_1^2, \dots, h_k^2, h_{2k+1}, \dots, h_{2k+s}]| \\ & \leq c_0^k (2k+s)^{(2k+s)/2} B_{n,s}^0(\rho) D_{n-s,2k}(\rho) \prod_{i=1}^k r_{h_i}^{-2} \prod_{i=2k+1}^{2k+s} r_{h_i}^{-1}, \end{aligned} \quad (4.47)$$

где $x \in \overset{\circ}{K}$, $\rho = \rho(x)$;

$$\begin{aligned} & |\nabla^{2k+s} P_n(x)[h_1^2, \dots, h_k^2, h_{2k+1}, \dots, h_{2k+s}]| \leq \\ & \leq c_0^k (2k+s)^{(2k+s)/2} N_{n,2k+s}(\rho) \prod_{i=1}^k r_{h_i}^{-2} \prod_{i=2k+1}^{2k+s} r_{h_i}^{-1}. \end{aligned} \quad (4.48)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя схему доказательства теоремы 4.4 и применяя s раз неравенство (1.20) и k раз неравенство (4.46), получим для $1 > \rho_1 > \rho_2 > \dots > \rho_{k+s-1} > \rho = \rho(x)$ неравенство

$$\begin{aligned} & |\nabla^{2k+s} P_n(x)[h_1^2, \dots, h_k^2, h_{2k+1}, \dots, h_{2k+s}]| \\ & \leq \frac{c^k B_{n,s}^0(0) D_{n-s,2k}(0) \prod_{i=1}^k r_{h_i}^{-2} \prod_{i=2k+1}^{2k+s} r_{h_i}^{-1}}{(1-\rho_1^2)^{1/2} \dots (\rho_{s-1}^2 - \rho_s^2)^{1/2} (\rho_s^2 - \rho_{s+1}^2) \dots (\rho_{k+s-1}^2 - \rho^2)}. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Положив в (4.49)

$$\begin{aligned} 1 - \rho_1^2 &= \rho_1^2 - \rho_2^2 = \dots = \rho_{s-1}^2 - \rho_s^2 = (1 - \rho^2)/(2k+s), \\ \rho_s^2 - \rho_{s+1}^2 &= \dots = \rho_{k+s-1}^2 - \rho^2 = 2(1 - \rho^2)/(2k+s), \end{aligned}$$

мы получим (4.47). Неравенство (4.48) следует из (4.47) и леммы 3.3.

Аналогично доказывается следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4.12. Пусть $K \subset X$, $P_n \in B_n(K)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $k > 2$, $c_X = \min(1, c_0 \mu(X))$. Тогда справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|\nabla^k P_n(x)\|_{\mathcal{L}^k(X, \mathbb{R})} &\leq c_X^{k_1} k^{k/2} D_{n,k}(\rho(x)) r^{-k}(K), & x \in \overset{\circ}{K}; \\ \|\nabla^k P_n(x)\|_{\mathcal{L}^k(X, \mathbb{R})} &\leq c_X^{k_1} k^{k/2} N_{n,k}(\rho(x)) r^{-k}(K), & x \in X, \quad k_1 = [k/2]. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 4.13. Пусть X – гильбертово пространство, $B = \{x \in X: \|x\| \leq 1\}$, $P_n \in \mathfrak{P}_n(X, \mathbb{R})$, $\|P_n\|_B \leq 1$, $\|x_0\| = \|h\| = 1$, $(x_0, h) = 0$, $P_n(x_0) = \varepsilon$. Тогда имеют место неравенства

$$|\nabla^2 P_n(x_0)[h, h]| \leq \frac{C_n(\varepsilon)}{2} \leq n \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4n} < \frac{4n^2}{\pi}, \quad (4.50)$$

где $C_n(\varepsilon)$ – функция, определенная во введении.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Произведем замену переменных $Q_n(t_0, t_1) = P_n(t_0 x_0 + t_1 h)$; пусть на окружности $t_0^2 + t_1^2 = 1$

$$t_0 = \cos \theta, \quad t_1 = \sin \theta, \quad R_n(\theta) = Q_n(\cos \theta, \sin \theta).$$

Из леммы 3.6 вытекает неравенство

$$|R_n^{(2)}(0)| \leq n(1 - \varepsilon^2)^{1/2} \operatorname{ctg}(\alpha(-\delta\varepsilon)/(2n))/2, \quad \delta = \operatorname{sgn} R_n^{(2)}(0). \quad (4.51)$$

Из экстремальных свойств полинома Золотарева (3.45) имеем неравенство

$$|Q'_{n_{t_0}}(1, 0)| \leq n(1 - \varepsilon^2)^{1/2} \operatorname{ctg}(\alpha(\beta\varepsilon)/(2n))/2, \quad \beta = \operatorname{sgn} Q'_{n_{t_0}}(1, 0). \quad (4.52)$$

Из (4.51) и (4.52) следуют неравенства

$$|Q_{n_{t_0}^2}^{(2)}(1, 0)| = |R_n^{(2)}(0) + Q'_{n_{t_0}}(1, 0)| \leq \frac{C_n(\varepsilon)}{2} \leq n \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4n} < \frac{4n^2}{\pi}.$$

Пусть

$$\begin{aligned} \gamma_1(n) &= 2(1 + \cos(c_2\pi/n))(3 + \cos(c_2\pi/n))^{-1}, \\ \gamma(n) &= \gamma_1(n) \min \left\{ c_1 + \frac{1}{4n}, c_3 \right\}, \end{aligned}$$

где $c_1 = 1.0858$, $c_2 = 0.890753$, $c_3 = 1.12584$.

ТЕОРЕМА 4.14. Пусть $V \subset X$, $P_n \in B_n(V)$, $x_0 \in \overset{\circ}{V}$. Справедливы следующие оценки для $x \in \overset{\circ}{V}$:

$$|\nabla^2 P_n(x)[h, h]| \leq \frac{n(1 - \varepsilon^2)^{1/2} \{ \operatorname{ctg}(\alpha(-\delta\varepsilon)/(2n)) + (\rho/(1 - \rho))^{1/2} \}}{(1 - \rho^2)r_h^2(x_0)}, \quad (4.53)$$

и для $x \in V$

$$|\nabla^2 P_n(x)[h, h]| \leq \inf_{x_0 \in V} \gamma(n) \tilde{N}_{n,2}(\rho) r_h^{-2}(x_0) \leq 2^4 \gamma(n) T_n^{(2)}(1) / \omega_V^2(h), \quad (4.54)$$

где $\varepsilon = P_n(x)$, $\alpha(\varepsilon) = \arccos \varepsilon$, $\delta = \operatorname{sgn} \nabla^2 P_n(x)[h, h]$, $\rho = \rho(x, x_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим схему доказательства теоремы 4.1. Пусть $x \in \overset{\circ}{V}$ и $x_1 - x_0 = (x - x_0)/\rho(x, x_0)$, $x \neq x_0$. Пусть

$$Q_n(t_0, t_1) = P_n(x_0 + t_0(x_1 - x_0) + t_1 r_h(x_0)h).$$

Тогда

$$Q_{n_{t_1^2}}^{(2)}(\rho, 0) = \nabla^2 P_n(x)[h, h] r_h^2(x_0). \quad (4.55)$$

Имеем $|Q_n(t_0, t_1)| \leq 1$, если $t_0 \geq 0$, $|t_0| + |t_1| \leq 1$.

Пусть

$$U_n(s_0, s_1) = Q_n(\rho s_0, (1 - \rho^2)^{1/2} s_1) \quad (4.56)$$

и $s_0 = \cos \theta$, $s_1 = \sin \theta$, $R_n(\theta) = U_n(\cos \theta, \sin \theta)$ на окружности $s_0^2 + s_1^2 = 1$. В силу замен следует, что $R_n(\theta)$ – тригонометрический полином n -го порядка и $|R_n(\theta)| \leq 1$ при $|\theta| \leq \pi/2$. В силу леммы 3.9 получим неравенство

$$|U_{n_{s_1}^{(2)}}(1, 0) - U_{n_{s_0}^{(1)}}(1, 0)| = |R_n^{(2)}(0)| \leq n(1 - \varepsilon^2)^{1/2} \operatorname{ctg}(\alpha(-\delta\varepsilon)/(2n)). \quad (4.57)$$

Из (4.55)–(4.57) следует (4.53).

Докажем неравенство (4.54). Пусть $2\rho - 1 = t$. Тогда

$$\begin{aligned} & n(1 - \varepsilon^2)^{1/2} \{ \operatorname{ctg}(\alpha(-\delta\varepsilon)/(2n)) + (\rho/(1 - \rho))^{1/2} \} (1 - \rho^2)^{-1} \\ &= 4n(1 - \varepsilon^2)^{1/2} \{ \operatorname{ctg}(\alpha(-\delta\varepsilon)/(2n)) + ((1 + t)/(1 - t))^{1/2} \} \\ &\quad \times (1 + t)(3 + t)^{-1}(1 - t^2)^{-1} = f(n, t, \varepsilon, \delta). \end{aligned} \quad (4.58)$$

При $|t| \leq \cos(\pi/n)$ имеем неравенство

$$\begin{aligned} & (1 - \varepsilon^2)^{1/2} \{ \operatorname{ctg}(\alpha(|\varepsilon|)/(2n)) + ((1 + t)/(1 - t))^{1/2} \} \\ & \leq 2n(1 - \varepsilon^2)^{1/2} \{ 1/\alpha(|\varepsilon|) + 1/\pi \} = 2nf_1(\varepsilon). \end{aligned}$$

Максимум функции $f_1(\varepsilon)$ достигается в точке $\varepsilon \approx 0.73624$ и не превышает c_3 . Поэтому из леммы 3.4 получаем неравенство

$$|\nabla^2 P_n(x)[h, h]| \leq 4\gamma_1(n)c_3 N_{n,2}(t)r_h^{-2}(x_0) = \gamma_1(n)c_3 \tilde{N}_{n,2}(t)r_h^{-2}(x_0). \quad (4.59)$$

Пусть $t = \cos(\beta\pi/n)$, $n/2 \geq \beta \geq c_2$, $\delta\varepsilon < 0$, и $\alpha(-\delta\varepsilon) = y$. Тогда

$$\frac{(3 + t)f(n, t, \varepsilon, \delta)}{4(1 + t)M_{n,2}(t)} < \frac{2 \sin y \{ y^{-1} + (2n)^{-1} \operatorname{ctg}(\beta\pi/(2n)) \}}{(1 + n^{-2} \operatorname{ctg}^2(\beta\pi/n))} = 2\psi(n, y, \beta). \quad (4.60)$$

Пусть $nz = \operatorname{ctg}(\beta\pi/n)$; тогда $\operatorname{ctg}(\beta\pi/(2n)) = nz + (nz + 1)^{1/2}$ и

$$\begin{aligned} \psi(n, y, \beta) & \leq \sin y \{ y^{-1} + z + (4n)^{-1} \} (1 + z^2)^{-1/2} \\ & = \varphi(y, z) + \sin(y)/(4n(1 + z^2)^{1/2}). \end{aligned} \quad (4.61)$$

При доказательстве теоремы 4.9 было показано, что максимум функции $\varphi(y, z)$ на прямоугольнике $\Omega = \{(y, z): 0 \leq y \leq \pi/2, 0 \leq z \leq (c_2\pi)^{-1}\}$ не превышает c_1 , поэтому из (4.61) и (4.60) вытекает, что при $|t| \leq \cos(c_2\pi/n)$ выполнены неравенства

$$\begin{aligned} f(n, t, \varepsilon, \delta) & \leq 4\gamma_1(n)\psi(n, y, \beta)M_{n,2}(t) \\ & \leq 4\gamma_1(n) \left(c_1 + \frac{1}{4n} \right) M_{n,2}(t). \end{aligned} \quad (4.62)$$

Из леммы 3.3 и соотношений (4.62), (4.56) получаем оценку

$$|\nabla^2 P_n(x)[h, h]| \leq \gamma_1(n) \left(c_1 + \frac{1}{4n} \right) \tilde{N}_{n,2}(\rho)r_h^{-2}(x_0), \quad x \in X. \quad (4.63)$$

Из (4.63) и (4.59) следует (4.54).

ЗАМЕЧАНИЕ 4.9. Из теоремы 4.14 и предыдущих теорем для тела V вытекают утверждения, аналогичные утверждениям, содержащимся в замечаниях 4.4, 4.7, 4.8 и теоремах 4.10–4.12 с заменой c_1 на $\gamma(n)$, $N_{n,k}$ на $\tilde{N}_{n,k}$, $\rho(x)$ на $\rho(x, x_0)$ и r_h на $r_h(x_0)$. Например, если $P_n \in B_n(V)$, то для $x \in X$, $x_0 \in \overset{\circ}{V}$, $\rho = \rho(x, x_0)$ имеют место неравенства

$$\begin{aligned} \|\nabla^2 P_n(x)\|_{\mathcal{L}^2(X, \mathbb{R})} &\leq \min(2, \gamma(n)\mu(X))\tilde{N}_{n,2}(\rho)r^{-2}(x_0), \\ |\nabla^{2+s} P_n(x)[h^2, (\overline{x-x_0})^s]| &\leq \gamma(n)\tilde{N}_{n,2+s}(\rho)r_h^{-2}(x_0)\|x-x_0\|^{-s}\rho^s, \end{aligned}$$

где $\|h\| = 1$, $\overline{x-x_0} = (x-x_0)/\|x-x_0\|$;

$$\begin{aligned} \|\nabla^k P_n(x)\|_{\mathcal{L}^k(X, \mathbb{R})} &\leq (2k)^{k/2}\gamma_X^{k_1} D_{n,k}(\rho)r^{-k}(x_0), \quad x \in V, \\ \|\nabla^k P_n(x)\|_{\mathcal{L}^k(X, \mathbb{R})} &\leq k^{k/2}\gamma_X^{k_1}\tilde{N}_{n,k}(\rho)r^{-k}(x_0), \\ \|\nabla^k P_n(x)\|_{\mathcal{L}^k(X, \mathbb{R})} &\leq 2^k k^{k/2}\gamma_X^{k_1} T_n^{(k)}(1)r^{-k}(V), \quad x \in V, \end{aligned}$$

где $k_1 = [k/2]$, $\gamma_X = \min\{1, \gamma_0\gamma(n)\mu(X)\}$, $\gamma_0 = 1.06311/2 = 0.531555$.

ТЕОРЕМА 4.15. Пусть $K \subset X$, $P_n \in B_n(K)$, $\|h\| = 1$. Тогда

$$|\nabla^3 P_n(x)[h^3]| \leq \beta_3(n)N_{n,3}(\rho(x))r_h^{-3}, \quad x \in X, \quad (4.64)$$

где $\beta_3(n) = (1.726n^2 + 1.025)/(n^2 - 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим схему доказательства теоремы 4.2. Пусть вначале $x \in \overset{\circ}{K}$, $x \neq \theta_X$, $x_0 = x/\rho(x)$, $Q_n(t_0, t_1) = P_n(t_0x_0 + t_1r_hh)$. Тогда

$$\begin{aligned} Q_{n_{t_1^3}}^{(3)}(\rho, 0) &= \nabla^3 P_n(x)[h^3]r_h^3, \\ |Q_n(t_0, t_1)| &\leq 1, \quad \text{если } |t_0| + |t_1| \leq 1. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Пусть

$$\rho = \rho(x), \quad b^2 = 1 - \rho^2, \quad b > 0, \quad U_n(s_0, s_1) = Q_n(\rho s_0, b s_1). \quad (4.66)$$

Пусть на окружности $s_0^2 + s_1^2 = 1$

$$s_0 = \cos \theta, \quad s_1 = \sin \theta, \quad R_n(\theta) = U_n(\cos \theta, \sin \theta).$$

Из неравенства С. Н. Бернштейна получаем

$$|U_{n_{s_1^3}}^{(3)}(1, 0) - 3U_{n_{s_1 s_0}}^{(2)}(1, 0) - U'_{n_{s_1}}(1, 0)| = |R_n^{(3)}(0)| \leq n^3. \quad (4.67)$$

Из (4.66) и (4.67) имеем неравенство

$$|b^3 Q_{n_{t_1^3}}^{(3)}(\rho, 0)| \leq n^3 + n + 3|b\rho Q_{n_{t_1 t_0}}^{(2)}(\rho, 0)|. \quad (4.68)$$

Из теоремы 4.7 следует неравенство

$$|Q_{n_{t_1 t_0}}^{(2)}(\rho, 0)| \leq M_{n,2}(\rho). \quad (4.69)$$

Из (4.68) и (4.69) получаем оценку

$$|b^3 Q_{n_{t_1^3}}^{(3)}(\rho, 0)| \leq n^3 + n + 3n^2 \rho b^{-1/2} (1 + \rho^2 / (n^2 b^2))^{1/2} = f(n, \rho). \quad (4.70)$$

Функция $f(n, \rho)$ является возрастающей по ρ на $[0, 1]$. Точка $\rho_0 = \cos(\alpha_1 \pi / n)$, $\alpha_1 = 1.430296$, оценивает сверху первый нуль функции $T_n^{(2)}(\rho)$ [29]. В ней выполнено неравенство

$$f(n, \rho_0) \leq 1.684n^3 + n. \quad (4.71)$$

Из (4.70), (4.71) и леммы 3.4 для любого ρ следует неравенство

$$|Q_{n_{t_1^3}}^{(3)}(\rho, 0)| \leq \frac{f(n, \rho_0) N_{n,3}(\rho)}{c_{n,3} M_{n,3}(0)} = \beta_3(n) N_{n,3}(\rho). \quad (4.72)$$

Из (4.72) и (4.65) вытекает (4.64).

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Пусть $K \subset X$, $P_n \in B_n(K)$. Тогда справедливо неравенство

$$|\nabla^{3+s} P_n(x)[h^3, \bar{x}^s]| \leq \beta_3(n) N_{n,3+s}(\rho(x)) r_h^{-3} r_x^{-s},$$

где $x \in X$, $x \neq \theta_X$, $\bar{x} = x / \|x\|$, $\|h\| = 1$.

ТЕОРЕМА 4.16. Пусть $V \subset X$, $P_n \in B_n(V)$, $x_0 \in \overset{\circ}{V}$, $\|h\| = 1$. Тогда выполнено неравенство

$$|\nabla^3 P_n(x)[h^3]| \leq \frac{2.136n^2}{n^2 - 1} \tilde{N}_{n,3}(\rho(x, x_0)) r_h^{-3}(x_0), \quad x \in X.$$

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 4.15, с использованием теоремы 4.8 и лемм 3.9 и 3.4.

СЛЕДСТВИЕ 4.3. Пусть $V \subset X$, $P_n \in B_n(V)$, $x_0 \in V$, $\|h\| = 1$. Тогда

$$|\nabla^{3+s} P_n(x)[h^3, \bar{x}^s]| \leq \frac{2.136n^2}{n^2 - 1} \tilde{N}_{n,3+s}(\rho) \rho^s r_h^{-3}(x_0) \|x - x_0\|^{-s},$$

где $x \in X \setminus x_0$, $\bar{x} = (x - x_0) / \|x - x_0\|$, $\rho = \rho(x, x_0)$.

ТЕОРЕМА 4.17. Пусть $K \subset X$, $P_n \in B_n(K)$, $\|h\| = 1$. Тогда имеет место неравенство

$$|\nabla^4 P_n(x)[h^4]| \leq \frac{2.43(n^2 + 1)}{n^2 - 4} N_{n,4}(\rho(x)) r_h^{-4}, \quad x \in X. \quad (4.73)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $x \in \overset{\circ}{K}$, $x \neq \theta_X$, $x_0 = x/\rho(x)$, $Q_n(t_0, t_1) = P_n(t_0 x_0 + t_1 r_h h)$. Тогда

$$\begin{aligned} Q_{n_{t_1^4}}^{(4)}(\rho, 0) &= \nabla^4 P_n(x)[h^4]r_h^4, \\ |Q_n(t_0, t_1)| &\leq 1, \quad \text{если } |t_0| + |t_1| \leq 1. \end{aligned} \quad (4.74)$$

Пусть

$$\rho = \rho(x), \quad b^2 = 1 - \rho^2, \quad b > 0, \quad U_n(s_0, s_1) = Q_n(\rho s_0, b s_1). \quad (4.75)$$

Пусть на окружности $s_0^2 + s_1^2 = 1$

$$s_0 = \cos \theta, \quad s_1 = \sin \theta, \quad R_n(\theta) = U_n(\cos \theta, \sin \theta).$$

Из неравенства С. Н. Бернштейна получаем

$$|U_{n_{s_1^4}}^{(4)}(1, 0) - 6U_{n_{s_1^2 s_0}}^{(3)}(1, 0) + 3U_{n_{s_0^2}}^{(2)}(1, 0) - 4U_{n_{s_1^2}}^{(2)}(1, 0) + U'_{n_{s_0}}(1, 0)| = |R_n^{(4)}(0)| \leq n^4. \quad (4.76)$$

Из (4.75) и (4.76) имеем неравенство

$$\begin{aligned} |b^4 Q_{n_{t_1^4}}^{(4)}(\rho, 0)| &\leq n^4 + 6\rho b^2 |Q_{n_{t_1^2 t_0}}^{(3)}(\rho, 0)| + 3\rho^2 |Q_{n_{t_0^2}}^{(2)}(\rho, 0)| \\ &\quad + 4b^2 |Q_{n_{t_1^2}}^{(2)}(\rho, 0)| + \rho |Q_{n_{t_0}}^{(1)}(\rho, 0)|. \end{aligned} \quad (4.77)$$

Оценим каждое слагаемое в правой части (4.77) на отрезке $[0, \rho_0]$, где число $\rho_0 = \cos(\alpha\pi/n)$, $\alpha = 1.83456$, – оценка сверху первого нуля функции $T_n^{(3)}(\rho)$ (см. доказательство леммы 3.4). Из теоремы 4.10 следует неравенство

$$6\rho b^2 |Q_{n_{t_1^2 t_0}}^{(3)}(\rho, 0)| \leq 6c_1 \rho b^2 M_{n,3}(\rho) < 1.19343n^2(n^2 - 1), \quad (4.78)$$

где $\rho \in [0, \rho_0]$, $n > 4$.

Из теоремы 2.2 имеем оценку

$$3\rho^2 |Q_{n_{t_0^2}}^{(2)}(\rho, 0)| \leq 3\rho^2 M_{n,2}(\rho) < 0.091664n^4, \quad \rho \in [0, \rho_0]. \quad (4.79)$$

Из доказательства теоремы 4.9 вытекает неравенство

$$4b^2 |Q_{n_{t_1^2}}^{(2)}(\rho, 0)| < 3.1404n^2, \quad \rho \in [0, \rho_0]. \quad (4.80)$$

Из неравенства А. А. Маркова получаем оценку

$$\rho |Q_{n_{t_0}}^{(1)}(\rho, 0)| \leq n\rho/(1 - \rho^2)^{1/2} < 0.1736n^2, \quad \rho \in [0, \rho_0]. \quad (4.81)$$

Из (4.77)–(4.81) вытекает неравенство

$$|(1 - t_0^2)^2 Q_{n_{t_1^4}}^{(4)}(t_0, 0)| \leq 2.2851n^4 + 2.2123n^2 = \beta_0(n), \quad t_0 \in [-\rho_0, \rho_0]. \quad (4.82)$$

Отсюда по лемме 3.4 следует оценка

$$|Q_{n_{t_1^4}}^{(4)}(t_0, 0)| \leq \frac{\beta_0(n)N_{n,4}(t_0)}{c_{n,4}M_{n,4}(0)} < \frac{2.43(n^2 + 1)}{n^2 - 4}N_{n,4}(t_0), \quad t_0 \in \mathbb{R}. \quad (4.83)$$

Из (4.83) и (4.74) следует (4.73).

СЛЕДСТВИЕ 4.4. Пусть $K \subset X$, $P_n \in B_n(K)$, $\|h\| = 1$. Тогда

$$|\nabla^{4+s} P_n(x)[h^4, \bar{x}^s]| \leq \frac{2.43(n^2 + 1)}{n^2 - 4} N_{n,4+s}(\rho(x)) r_h^{-4} r_x^{-s},$$

где $x \in X \setminus \theta_X$, $\bar{x} = x/\|x\|$.

ТЕОРЕМА 4.18. Пусть $V \subset X$, $P_n \in B_n(V)$, $\|h\| = 1$, $x_0 \in \overset{\circ}{V}$. Тогда справедливо неравенство

$$|\nabla^4 P_n(x)[h^4]| \leq \beta_4(n) \tilde{N}_{n,4}(\rho(x, x_0)) r_h^{-4}(x_0), \quad x \in X,$$

где $\beta_4(n) = (2.632n^2 + 1.775)/(n^2 - 4)$.

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 4.17, с использованием теорем 2.2, 4.14, замечания 4.9 и лемм 3.9 и 3.4.

СЛЕДСТВИЕ 4.5. Пусть $V \subset X$, $P_n \in B_n(V)$, $\|h\| = 1$, $x_0 \in \overset{\circ}{V}$, $x \neq x_0$, $\bar{x} = (x - x_0)/\|x - x_0\|$. Тогда имеет место оценка

$$|\nabla^{4+s} P_n(x)[h^4, \bar{x}^s]| \leq \beta_4(n) \tilde{N}_{n,4+s}(\rho) \rho^s r_h^{-4}(x_0) \|x - x_0\|^{-s},$$

где $\rho = \rho(x, x_0)$.

ТЕОРЕМА 4.19. Для фиксированных k и x справедливо асимптотическое равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-k} \sup_{\substack{P_n \in B_n(K) \\ \|h\|=1}} |\nabla^k P_n(x)[h^k]| r_h^k = (1 - \rho^2(x))^{-k/2}, \quad x \in \overset{\circ}{K}. \quad (4.84)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $P_n \in B_n(K)$. Следуя схеме доказательства теоремы 4.2, произведем замены переменных

$$\begin{aligned} Q_n(t_0, t_1) &= P_n(t_0 x_0 + t_1 r_h h), \quad x_0 = x/\rho(x), \\ \rho &= \rho(x), \quad b^2 = 1 - \rho^2, \quad b > 0, \quad U_n(s_0, s_1) = Q_n(\rho s_0, b s_1), \end{aligned} \quad (4.85)$$

и на окружности $s_0^2 + s_1^2 = 1$

$$s_0 = \cos \theta, \quad s_1 = \sin \theta, \quad R_n(\theta) = U_n(\cos \theta, \sin \theta).$$

Используя математическую индукцию, легко получить равенства

$$R_n^{(k)}(\theta) = \sum_{i=0}^k \alpha_i s_0^i s_1^{k-i} U_{n_{s_0^k s_1^i}}^{(k)}(s_0, s_1) + \Delta(s_0, s_1), \quad (4.86)$$

$$\Delta(s_0, s_1) = \sum_{i+j < k} Z_{i,j}(s_0, s_1) U_{n_{s_0^i s_1^j}}^{(i+j)}(s_0, s_1), \quad (4.87)$$

где $\alpha_k = 1$, $Z_{i,j}$ – полином степени $i + j$.

Из теоремы 4.2 и равенства (4.87) следует, что

$$|\Delta(1, 0)| = O(n^{k-1}), \quad n \rightarrow \infty. \quad (4.88)$$

Из (4.85), (4.86) и неравенства С. Н. Бернштейна для $R_n^{(k)}(\theta)$ получаем

$$|U_{n_{s_1^k}}^{(k)}(1, 0)| = |b^k Q_{n_{t_1^k}}^{(k)}(\rho, 0)| \leq n^k + |\Delta(1, 0)|. \quad (4.89)$$

Для отрезка $[-r_x, r_x]$ имеет место асимптотическое равенство С. Н. Бернштейна

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-k} \sup_{P_n \in B_n([-r_x, r_x])} |\nabla^k P_n(x) [\bar{x}^k]| r_x^k = (1 - \rho^2(x))^{-k/2}, \quad \bar{x} = x/\|x\|. \quad (4.90)$$

Из (4.86)–(4.90) следует (4.82).

Пусть H_n – множество всех тригонометрических полиномов $R_n(\theta): [-\omega, \omega] \rightarrow [-1, 1]$ порядка n , $0 < \omega < \pi$. В [15, с. 135] доказано для фиксированных θ и k асимптотическое равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-k} \sup_{R_n \in H_n} |R_n^{(k)}(\theta)| = \frac{\cos^k(\theta/2)}{(\sin^2(\omega/2) - \sin^2(\theta/2))^{k/2}}, \quad |\theta| < \omega. \quad (4.91)$$

Используя равенство (4.91) и схему доказательства теоремы 4.1, по аналогии с теоремой 4.19 получим следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4.20. Пусть $x, x_0 \in \overset{\circ}{V}$, k фиксировано. Имеет место асимптотическое неравенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-k} \sup_{\substack{P_n \in B_n(V) \\ \|h\|=1}} |\nabla^k P_n(x) [h^k]| r_h^k(x_0) \leq \left\{ 2 / \left((1 + \eta(x, x_0)) (1 - \rho^2(x, x_0)) \right) \right\}^{k/2}.$$

§ 5. Оценки производных полиномов на кубе в $\mathbb{R}^m$

Из леммы 3.2 для функции

$$M_{n,k}(x) = |T_n^{(k)}(x) + i S_n^{(k)}(x)|, \quad i^2 = -1, \quad x \in [-1, 1],$$

имеем следующие равенства:

$$M_{n,k}^2(x) = y^{-2k} \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j^{(k)} y^{-2j}, \quad \alpha_j^{(k)} > 0, \quad x = \cos \theta, \quad y = \sin \theta, \quad k = \overline{1, n}, \quad (5.1)$$

$$\alpha_j^{(k+1)} = \frac{k+j}{k-j} (n^2 - k^2) \alpha_j^{(k)}, \quad j = \overline{1, k-1},$$

$$\alpha_k^{(k+1)} = M_{n,k+1}^2(0) - \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j^{(k+1)}, \quad (5.2)$$

$$\alpha_0^{(k)} = \prod_{0 \leq s \leq k-1} (n^2 - s^2), \quad \alpha_j^{(k)} = c_j^{(k)} n^2 \prod_{j \leq s \leq k-1} (n^2 - s^2), \quad j = \overline{1, k-1};$$

$$\begin{aligned} c_1^{(2)} &= 1, \quad c_1^{(3)} = 3, \quad c_2^{(3)} = 9, \quad c_1^{(4)} = 6, \quad c_2^{(4)} = 45, \quad c_3^{(4)} = 225, \\ c_1^{(5)} &= 10, \quad c_2^{(5)} = 5 \cdot 3^3, \quad c_3^{(5)} = 7 \cdot (15)^2, \quad c_4^{(5)} = 7 \cdot 3^2 \cdot 5^3, \\ c_1^{(6)} &= 15, \quad c_2^{(6)} = 5 \cdot 7 \cdot 9, \quad c_3^{(6)} = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7, \quad c_4^{(6)} = 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7, \\ c_5^{(6)} &= 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7(2n^2 + 13). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Из равенств (5.2), (5.3) прямой подстановкой коэффициентов в представление (5.1) получаются утверждения следующей леммы.

ЛЕММА 5.1. Пусть $k, s \in \mathbb{Z}_+$, $k + s \leq n$. Справедливы следующие неравенства:

$$M_{n,k}(x)M_{n-k,s}(x) < M_{n,k+s}(x), \quad x \in (-1, 1), \quad (5.4)$$

если $s = 1$ или $k + s \leq 6$;

$$M_{n,k}(0)M_{n-k,s}(0) < M_{n,k+s}(0). \quad (5.5)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. По-видимому, неравенство (5.4) имеет место при любых k и s , $k + s \leq n$. При $k + s > 6$ автор не проверял неравенство (5.4).

Введем обозначение $Q^m = \{x \in \mathbb{R}^m: |x_i| \leq 1, i = \overline{1, m}\}$.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть $X = l_1^{(m)}$, $\|x\|_X = \sum_{i=1}^m |x_i|$, $P_n \in B_n(Q^m)$. Тогда имеют место следующие оценки:

$$\begin{aligned} \|\nabla^k P_n(x)\|_{\mathcal{L}^k(X, \mathbb{R})} &= \max_{\substack{s, k_i \in \mathbb{Z}, \sum_{i=1}^s k_i = k \\ 1 \leq j_i \leq m}} \left| \frac{\partial^k P_n(x)}{\partial x_{j_1}^{k_1} \dots \partial x_{j_s}^{k_s}} \right| \\ &\leq \max_{\substack{s, k_i \in \mathbb{Z}, \sum_{i=1}^s k_i = k \\ k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_s}} N_{n, k_1}(\rho) N_{n-k_1, k_2}(\rho) \dots N_{n-\sum_{i=1}^{s-1} k_i, k_s}(\rho), \end{aligned} \quad (5.6)$$

где $x \in X$, $\rho = \rho(x)$;

$$\|\nabla^k P_n(x)\|_{\mathcal{L}^k(X, \mathbb{R})} \leq N_{n,k}(\rho(x)), \quad k \leq 6, \quad x \in X. \quad (5.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_m)$ и $|\hat{x}_{i_0}| = \max |\hat{x}_i|$, $i = \overline{1, m}$. По определению $\rho(\hat{x}) = |\hat{x}_{i_0}|$. Из теоремы 2.2 следует неравенство

$$\left| \frac{\partial^k P_n(x)}{\partial x_{i_1}^{k_1} \dots \partial x_{i_s}^{k_s}} \right| \leq N_{n, k_1}(x_{i_1}) N_{n-k_1, k_2}(x_{i_2}) \dots N_{n-\sum_{i=1}^{s-1} k_i, k_s}(x_{i_s}), \quad (5.8)$$

где $\sum_{i=1}^s k_i = k$. Так как $N_{n,k}(t)$ – возрастающая функция, то из (5.8) вытекает (5.6). Из неравенства (5.6) и леммы 5.1 для $k \leq 6$ имеем оценку

$$\left| \frac{\partial^k P_n(x)}{\partial x_{i_1}^{k_1} \dots \partial x_{i_s}^{k_s}} \right| \leq M_{n,k}(\rho(x)), \quad x \in \overset{\circ}{Q}^m. \quad (5.9)$$

В силу замечания 2.2 из (5.9) вытекает (5.7).

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть $X = l_1^{(m)}$, $P_n \in B_n(Q^m)$, $k_i \in \mathbb{Z}_+$, $\sum_{i=1}^s k_i = k \leq n$, и выполнено хотя бы одно из следующих условий:

- а) за исключением одного, все $k_i = 1$;
- б) сумма k_i , отличных от единицы, не превышает шести;
- в) $k = n$.

Тогда имеет место неравенство

$$\max_{\substack{j_i = \overline{1, m} \\ i = \overline{1, s}}} \left| \frac{\partial^k P_n(x)}{\partial x_{j_1}^{k_1} \dots \partial x_{j_s}^{k_s}} \right| \leq N_{n,k}(\rho(x)), \quad x \in X.$$

Доказательство следует из леммы 5.1 и замечания 2.2.

**§ 6. Аналогии неравенства Шеффера–Даффина на теле,
ограниченном эллипсоидом в $\mathbb{E}^m$**

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть $K = \{x \in \mathbb{E}^m: \sum_{i=1}^m x_i^2/a_i^2 \leq 1\}$, $P_n \in B_n(K)$, $\|h\| = 1$. Тогда справедливо неравенство

$$|\nabla^k P_n(x)[h^k]| \leq N_{n,k}(\rho(x))/r_h^k. \quad (6.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассмотреть двумерный случай $X = \mathbb{E}^2$ и $K = \{x \in \mathbb{E}^2: x_1^2/a^2 + x_2^2 \leq 1\}$. Пусть отображение $U: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ определено равенством

$$Ux = x_U = (x_1/a, x_2).$$

Пусть $x \in \overset{\circ}{K} \setminus (0,0)$, $x \in [A, C]$, $A, C \in \partial K$, отрезок $[A, C]$ параллелен вектору h , пересекает ось $\theta_X x_1$ под углом α и точка D делит его пополам. Из подобия соответствующих треугольников имеем равенства

$$t = \|x - D\|/\|A - D\| = \|x_U - D_U\|/\|A_U - D_U\|. \quad (6.2)$$

Пусть $y = x/\rho(x)$. Тогда $\|y_U\| = 1$. Из подобия треугольников $\theta_X y_U$ и $\theta_X x_U$ получаем

$$\|x_U\|/\|y_U\| = \|x_U\| = \|x\|/\|y\| = \rho(x). \quad (6.3)$$

Пусть $r = \|A - D\|$, $r_0 = \|A_U - D_U\|$. Легко проверяется равенство

$$r_0/r = 1/r_h = (\cos^2 \alpha + a^2 \sin^2 \alpha)^{1/2}/a. \quad (6.4)$$

Известно, что произведения длин отрезков двух пересекающихся хорд круга равны. Отсюда и из (6.2), (6.3) вытекает равенство

$$\|A_U - x_U\| \cdot \|x_U - C_U\| = r_0^2(1 - t^2) = 1 - \rho^2(x). \quad (6.5)$$

Пусть $L_{n,k}(\nu) = \nu^k M_{n,k}(t)$, где $\nu = (1 - t^2)^{1/2}$. Тогда из леммы 3.2 следует равенство

$$L_{n,k}^2(\nu) = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i^{(k)}(n) \nu^{-2i}, \quad \alpha_i^{(k)}(n) > 0, \quad i = \overline{0, k-1}. \quad (6.6)$$

Из неравенства Шеффера–Даффина (1.6) и равенств (6.4), (6.5) получаем неравенство

$$|\nabla^k P_n(x)[h^k]| \leq \frac{M_{n,k}(t)}{r^k} = \frac{L_{n,k}(\nu)}{r^k(1 - t^2)^{k/2}} = \frac{L_{n,k}(\nu)}{r_h^k(1 - \rho^2(x))^{k/2}}. \quad (6.7)$$

Так как $r_0 \leq 1$, то из (6.6) следует

$$\frac{L_{n,k}(\mu/r_0)}{r_h^k \mu^k} \leq \frac{L_{n,k}(\mu)}{r_h^k \mu^k} = \frac{M_{n,k}(\rho(x))}{r_h^k}, \quad (6.8)$$

где $\mu = (1 - \rho^2(x))^{1/2}$.

Из (6.5), (6.7), (6.8) и теоремы 2.2 следует неравенство (6.1). Равенство в (6.1) достигается только при $h = x/\|x\|$, $P_n(th) = T_n(t/r_h)$, $t \in \mathbb{R}$, в $n - k + 1$ нулях $\{\xi_i\}_1^{n-k+1}$ функции $S_n^{(k)}(t/r_h)$ и при $|t| \geq \xi_1$. Для $k = 1$ и $K = B \subset \mathbb{E}^m$ это доказано в [40].

СЛЕДСТВИЕ 6.1. Пусть $K = \{x: \sum_{i=1}^m x_i^2/a_i^2 \leq 1\} \subset \mathbb{E}^m$ или K – шар в гильбертовом пространстве. Пусть $P_n \in \mathfrak{P}_n(X, \mathbb{R})$, $\|P_n\|_K \leq 1$. Тогда из теоремы 6.1 и замечания 4.3 вытекает неравенство

$$\|\nabla^k P_n(x)\|_{\mathcal{L}^k(X, \mathbb{R})} \leq N_{n,k}(\rho(x))/r^k(K).$$

СЛЕДСТВИЕ 6.2. Пусть $X = \mathbb{R}^m$ с некоторой нормой на нем, $K = \{x \in X: \sum_{i=1}^m x_i^2 \leq 1\}$, $P_n \in B_n(K)$, $\|h_i\| = 1$, $i = \overline{1, k}$. Имеет место неравенство

$$|\nabla^k P_n(x)[h_1, \dots, h_k]| \leq N_{n,k}(\rho(x))/(r_{h_1} \dots r_{h_k}). \quad (6.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\|\cdot\|_2$ – евклидова норма в $\mathbb{R}^m$. Тогда $\|h_i r_{h_i}\|_2 = 1$ и неравенство (6.9) вытекает из следствия 6.1.

Используя теорему 2.2, аналогично теореме 6.1 доказывается обобщающая ее

ТЕОРЕМА 6.2. Пусть $K = \{x: \sum_{i=1}^m x_i^2/a_i^2 \leq 1\} \subset \mathbb{E}^m$ или K – шар в гильбертовом пространстве. Пусть $P_n \in \mathfrak{P}_n(X, \mathbb{R})$, $\|h\| = 1$, $k \geq 0$ и для каждой точки $x \in K$ и для каждого отрезка $[C, D]$ такого, что $C, D \in \partial K$, $x \in [C, D]$, выполнено неравенство

$$|\nabla^k P_n(x)[(C - D)^k]| \leq 2^k M_{n,k}(t),$$

где $t = 2\|x - z\|/\|C - D\|$, z – середина отрезка $[C, D]$.

Тогда для $s \geq 0$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} |\nabla^{k+s} P_n(x)[h^{k+s}]| &\leq N_{n,k+s}(\rho(x))/r_h^{k+s}, \\ \|\nabla^{k+s} P_n(x)\|_{\mathcal{L}^{k+s}(X, \mathbb{R})} &\leq N_{n,k+s}(\rho(x))/r^{k+s}(K). \end{aligned}$$

Открытые проблемы:

1) точные оценки в задачах С. Н. Бернштейна (1.13), (1.14) для $\|P_n^{(k)}(x)\|$, $x \in \overset{\circ}{K}$ или $x \in \overset{\circ}{V}$, $k \geq 1$;

2) точные оценки в задаче В. А. Маркова (1.15) для $\|P_n^{(k)}\|_K$ или $\|P_n^{(k)}\|_V$ при $k \geq 2$.

По мнению автора, справедлива гипотеза: если $K \subset X$, $P_n \in \mathfrak{P}_n(X, \mathbb{R})$, $\|P_n\|_K \leq 1$, $\|h\| = 1$, то

$$|\nabla^k P_n(x)[h^k]| \leq N_{n,k}(\rho(x))/r_h^k.$$

Список литературы

1. Марков А. А. Об одном вопросе Д. И. Менделеева. Избранные труды. М.–Л.: ГИТТЛ, 1948.
2. Марков В. А. О функциях, наименее уклоняющихся от нуля в данном промежутке. СПб., 1892.
3. Бернштейн С. Н. Собрание сочинений. Т. 1. М.: Изд-во АН СССР, 1952.
4. Schaeffer A. C., Duffin R. J. On some inequalities of S. Bernstein and W. Markov for derivatives of polynomials // Bull. Amer. Math. Soc. 1938. V. 44. № 4. P. 289–297.
5. Вороновская Е. В. Функционал первой производной и уточнение теоремы А. А. Маркова // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1959. Т. 23. № 6. С. 951–962.
6. Гусев В. А. Функционалы производных от алгебраического полинома и теорема В. А. Маркова // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1961. Т. 25. № 3. С. 367–384.
7. Виденский В. С. Об оценках производных многочлена // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1951. Т. 15. № 5. С. 401–420.
8. Riesz M. // Deutsche Math.-Ver. 1914. V. 23. P. 354.
9. Szego G. Über einen Satz des Herrn Serge Bernstein // Schriften der Königsberger Gelehrten Gesellschaft. 1928. V. 5. P. 59–70.
10. Никольский С. М. Обобщение неравенства С. Н. Бернштейна // ДАН СССР. 1948. Т. 60. С. 1507–1510.
11. Стечкин С. Б. Обобщение некоторых неравенств С. Н. Бернштейна // ДАН СССР. 1948. Т. 60. С. 1511–1514.
12. Привалов И. И. Интеграл Коши // Изв. Саратов. универ. Физ.-мат. фак. 1918. № 1.
13. Jackson D. On application of Markoff's theorem to problems of approximation in the complex domain // Bull. Amer. Math. Soc. 1931. V. 37. P. 883–890.
14. Виденский В. С. Экстремальные оценки производной тригонометрического полинома на отрезке, меньшем, чем период // ДАН СССР. 1960. Т. 130. № 1. С. 13–16.
15. Зингер М. Я. Элементы дифференциальной теории чебышевских приближений. М.: Наука, 1975.
16. Теляковский С. А. О работах по теории приближения функций, выполненных в МИАН // Тр. МИАН СССР. 1988. Т. 182. С. 128–179.
17. Andrianov A. V. On some open problems for algebraic polynomials on bounded convex sets // EAST J. Approx. 1999. V. 5. № 1. P. 117–123.
18. Ганзбург М. И. Теоремы Джексона и Бернштейна в $\mathbb{R}^m$ // УМН. 1979. Т. 34. № 1. С. 225–226.
19. Бабенко К. И. Об аппроксимации периодических функций нескольких переменных тригонометрическими полиномами // ДАН СССР. 1960. Т. 132. С. 982–985.
20. Теляковский С. А. О неравенствах для производных тригонометрических полиномов нескольких переменных // Сиб. матем. журн. 1963. Т. 4. С. 1404–1411.
21. Темляков В. Н. Аппроксимация периодических функций нескольких переменных с ограниченной смешанной производной // Тр. МИАН СССР. 1980. Т. 156. С. 233–260.
22. Темляков В. Н. Аппроксимация функций с ограниченной смешанной производной // Тр. МИАН СССР. 1986. Т. 178.
23. Coatsworth C. Approximation et interpolation des fonctions differentiables de plusieurs variables // Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. Ser. 1966. V. 83. № 3. P. 271–341.
24. Don R., Wilhelmsen A. Markov Inequality in Several Dimensions // J. of Approx. Theory. 1974. V. 11. № 3. P. 216–220.
25. Наджмиддинов Д., Субботин Ю. Н. Неравенства Маркова на треугольниках // Матем. заметки. 1989. Т. 46. № 2. С. 76–82.
26. Bialas-Ciez L., Goetgheluck P. Constants in Markov's inequality on convex sets // EAST J. Approx. 1995. V. 1. № 3. P. 379–389.
27. Андрианов А. В. Аналоги неравенств А. Маркова и С. Бернштейна для многочленов в банаховых пространствах // Матем. заметки. 1992. Т. 52. № 5. С. 13–21.
28. Скалыга В. И. Аналоги неравенств Марковых и Бернштейна для полиномов в банаховых пространствах // Изв. РАН. Сер. матем. 1997. Т. 61. № 1. С. 141–156.
29. Скалыга В. И. Аналоги неравенств Марковых и Бернштейна на выпуклых телах в банаховых пространствах // Изв. РАН. Сер. матем. 1998. Т. 62. № 2. С. 169–192.

30. Скалыга В. И. Оценки производных полиномов на выпуклых телах // Тр. МИАН. 1997. Т. 218. С. 374–384.
31. Субботин Ю. Н., Васильев Ю. С. Неравенства Маркова в $\mathbb{R}^m$, не улучшаемые на классе всех выпуклых компактных тел // Докл. РАН. 1998. Т. 360. №6. С. 734–735.
32. Baran M. Markov inequality on sets with polynomial parametrization // Ann. Polon. Math. 1994. V. LX. № 1. P. 69–79.
33. Sarantopoulos Y. Bounds on the derivatives of polynomials on Banach spaces // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1991. V. 110. P. 307–312.
34. Kellogg O. D. On bounded polynomials on several variables // Math. Zeit. 1927. V. 27. № 1. P. 55–66.
35. The Scottish Book “Mathematics from the Scottish Cafe” / Ed. R. D. Mauldin. Birkhauser, 1981.
36. Harris L. A. Bernstein’s polynomial inequalities and functional analysis // Irish Math. Soc. Bulletin. 1996. V. 36. P. 19–33.
37. Harris L. A. A Bernstein–Markov theorem for normed spaces // J. Math. Analysis. 1997. V. 208. P. 476–486.
38. Taylor A. E. Additions to the theory of polynomials in normed linear spaces // Tohoku Math. J. 1938. V. 44. P. 302–318.
39. Banach S. Über homogene Polynome in L^2 // Studia Math. 1938. V. 7. P. 36–44.
40. Harris L. A. Bounds on the derivatives of holomorphic functions of vectors // Analyse Fonctionnelle et Applications / Ed. Leopoldo Nachbin. Paris: Hermann, 1975. P. 145–163.
41. Kopec J., Musielak J. On the estimation of the norm of the n -linear symmetric operation // Studia Math. 1955. V. 15. P. 29–30.
42. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988.
43. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. М.–Л.: ОГИЗ, 1947.
44. Schaeffer A. C., Duffin R. I. A refinement of an inequality of the brothers Markoff // Trans. Amer. Math. Soc. 1941. V. 50. № 3. P. 517–528.

Поступило в редакцию
17.II.2000