Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Туницкий, Уравнения Монжа–Ампера и функторы характеристической связности, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2001, том 65, выпуск 6, 173–222

DOI: <https://doi.org/10.4213/im368>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 16:57:10

УДК 517.95

Д. В. Туницкий

Уравнения Монжа–Ампера и функторы характеристической связности

Осуществлено исследование контактной эквивалентности уравнений Монжа–Ампера. Определена категория уравнений Монжа–Ампера и введено понятие функтора характеристической связности. Указанный функтор действует из категории уравнений Монжа–Ампера в категорию аффинных связностей. Для трех подкатегорий, включающих в себя широкий класс уравнений Монжа–Ампера эллиптического и гиперболического типа, описано конструктивное построение соответствующих функторов характеристической связности. Тем самым, в рассматриваемых случаях проблема контактной эквивалентности уравнений Монжа–Ампера, по существу, сводится к задаче об эквивалентности аффинных связностей. В итоге, используя известную теорию Э. Картана, удается сформулировать и доказать ряд признаков контактной эквивалентности для широкого класса эллиптических и гиперболических уравнений Монжа–Ампера.

Библиография: 21 наименование.

Если не оговорено противное, то все встречающиеся ниже объекты считаются гладкими, т.е. бесконечно дифференцируемыми, а все многообразия – связными, хаусдорфовыми, паракомпактными и вещественными. Для любого расслоения p через $\Gamma(p)$ обозначается множество всех сечений этого расслоения. Для любого подмножества $\mathfrak{T}$ модуля $\mathfrak{M}$ через $(\mathfrak{T})$ обозначается минимальный подмодуль в $\mathfrak{M}$, порожденный элементами множества $\mathfrak{T}$. При рассмотрении конструкций, связанных с теорией пучков, будем придерживаться терминологии, принятой в книге [1]. Все встречающиеся пучки являются пучками модулей над структурным пучком соответствующих функций базового многообразия.

Пункты 1–5 носят вводный характер. Основные конструкции и результаты излагаются в пп. 6–10 и 16. Пункты 11–15 посвящены, главным образом, доказательству этих результатов.

1. Уравнения Монжа–Ампера. Пусть M – пятимерное многообразие и C^∞ – структурный пучок этого многообразия, т.е. пучок гладких функций над M . Тем самым, для любого открытого подмножества U многообразия M множество $C^\infty(U)$ состоит из всех гладких на множестве U функций. Через l^n обозначим пучок гладких n -форм над M , так что

$$l^n(U) = \Gamma(\Lambda^n(U)).$$

Пучки l^n , $n = 0, \dots, 5$, являются пучками C^∞ -модулей над многообразием M . Рассмотрим локально свободный одномерный подпучок

$$I_0 \subset l^1 \tag{1.1}$$

и его слой над точкой m

$$I_0(m) = \lim_{U \ni m} I_0(U), \quad (1.2)$$

где прямой предел берется по всем открытым окрестностям U точки m . Этот пучок *невырожден* в точке m многообразия M , если для всякого ростка ω_0 из слоя (1.2) такого, что $\omega_0(m) \neq 0$, выполняется неравенство

$$d\omega_0(m) \wedge d\omega_0(m) \wedge \omega_0(m) \neq 0. \quad (1.3)$$

Невырожденный во всех точках m многообразия M подпучок (1.1) называется *контактным*. Векторное подрасслоение (*контактное*)

$$L \subset TM \quad (1.4)$$

с отвечающим контактному пучку (1.1) слоем

$$L(m) = \{\xi \in T_m M \mid \xi \lrcorner \omega_0(m) = 0 \text{ при всех } \omega_0 \in I_0(m)\}$$

четырёхмерно, невырождено и определяет на M контактную структуру.

Фиксируем на многообразии M контактный пучок I_0 . Определим в l^2 подпучок J равенством

$$J(U) = \{a \wedge \omega_0 + b d\omega_0 \mid \omega_0 \in I_0(U), \ a \in l^1(U), \ b \in C^\infty(U)\}. \quad (1.5)$$

Это локально свободный пятимерный подпучок пучка 2-форм на M . Следуя [2], назовем факторпучок

$$l_\varepsilon^2 = l^2/J \quad (1.6)$$

пучком эффективных форм на контактном многообразии M .

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Пусть U – открытое подмножество многообразия M и линейная дифференциальная форма $\tilde{\omega}_0 \in I_0(U)$ отлична от нуля во всех точках $m \in U$. Тогда для всякого сечения $\nu \in l^2(U)/J(U)$ найдется такая 2-форма $\omega \in l^2(U)$, что

$$\nu = \omega + J(U)$$

и

$$\omega \wedge d\omega_0 \wedge \omega_0 = 0 \quad (1.7)$$

для любой линейной дифференциальной формы $\omega_0 \in I_0(U)$.

Действительно, по условию имеем $\nu = \mu + J(U)$, где $\mu \in l^2(U)$. Согласно неравенству (1.3) уравнение

$$\mu \wedge d\tilde{\omega}_0 \wedge \tilde{\omega}_0 = b d\tilde{\omega}_0 \wedge d\tilde{\omega}_0 \wedge \tilde{\omega}_0$$

однозначно определяет функцию b на множестве U . Положим

$$\omega = \mu - b d\tilde{\omega}_0.$$

Очевидно, что

$$\omega \wedge d\tilde{\omega}_0 \wedge \tilde{\omega}_0 = 0,$$

причем указанным образом дифференциальная форма ω определяется однозначно, с точностью до слагаемого, пропорционального контактной форме ω_0 . В силу одномерности контактного пучка I_0 для любой формы $\omega_0 \in I_0(U)$ на U найдется такая функция c , что

$$\omega_0 = c\tilde{\omega}_0.$$

Следовательно,

$$\omega \wedge d\omega_0 \wedge \omega_0 = \omega \wedge (dc \wedge \tilde{\omega}_0 + c d\tilde{\omega}_0) \wedge c\tilde{\omega}_0 = 0,$$

и ω удовлетворяет условию (1.7).

Дифференциальные 2-формы, удовлетворяющие условию (1.7), будем называть *эффективными*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. а) Подпучок

$$I \subset I^2 \tag{1.8}$$

называется *пучком Монжа–Ампера*, если факторпучок

$$I/J \tag{1.9}$$

является локально свободным одномерным подпучком пучка эффективных форм, определенного (1.6).

б) *Уравнением Монжа–Ампера*, заданным пучком Монжа–Ампера (1.8), называется система внешних дифференциальных уравнений

$$I = 0, \quad I_0 = 0. \tag{1.10}$$

с) Погружение $\sigma: V \rightarrow M$ двумерного многообразия V называется *решением* уравнения Монжа–Ампера (1.10), если

$$\sigma^*\omega = 0, \quad \sigma^*\omega_0 = 0$$

для всех $\omega \in I(U)$, $\omega_0 \in I_0(U)$ и всякого открытого подмножества $U \subseteq M$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. Согласно сформулированному определению всякое уравнение Монжа–Ампера (1.10) задается пятимерным многообразием M , контактным пучком I_0 и пучком Монжа–Ампера I . Другими словами, уравнения Монжа–Ампера находятся во взаимно однозначном соответствии с тройками (M, I_0, I) . Ниже, в зависимости от контекста, *уравнениями Монжа–Ампера* называются как системы внешних дифференциальных уравнений вида (1.10), так и отвечающие им тройки (M, I_0, I) .

Предположим, что контактная форма $\omega_0 \in I_0(U)$ и эффективная 2-форма $\omega \in I(U)$ отличны от нуля во всех точках подмножества $U \subseteq M$. *Пфаффианом* эффективной формы ω относительно контактной формы ω_0 называется функция

$$\text{Pf}(\omega, \omega_0): U \rightarrow R,$$

удовлетворяющая равенству

$$\omega \wedge \omega \wedge \omega_0 = \text{Pf}(\omega, \omega_0) d\omega_0 \wedge d\omega_0 \wedge \omega_0. \tag{1.11}$$

Рассмотрим уравнение Монжа–Ампера (1.10). Выберем какую-либо контактную форму $\omega_0 \in I_0(U)$, отличную от нуля в точке m . По определению 1.2, а) и замечанию 1.1 существует эффективная 2-форма $\omega \in I(U)$, отличная от нуля в точке m . Уравнение Монжа–Ампера (1.10) принадлежит *эллиптическому* (соответственно, *параболическому* либо *гиперболическому*) *типу в точке m* , если в этой точке $\text{Pf}(\omega, \omega_0) > 0$ (соответственно, $\text{Pf}(\omega, \omega_0) = 0$ либо $\text{Pf}(\omega, \omega_0) < 0$). Уравнение Монжа–Ампера принадлежит *эллиптическому* (соответственно, *параболическому* либо *гиперболическому*) *типу на многообразии M* , если оно принадлежит эллиптическому (соответственно, параболическому либо гиперболическому) типу во всех точках многообразия M .

Это определение не зависит от выбора эффективной 2-формы ω из $I(U)$ и контактной формы ω_0 из $I_0(U)$. Действительно, если $\tilde{\omega} \in I(U)$, $\tilde{\omega}(m) \neq 0$, и $\tilde{\omega}_0 \in I_0(U)$, $\tilde{\omega}_0(m) \neq 0$, – другие эффективная и контактная формы, то в некоторой окрестности точки m имеют место равенства

$$\tilde{\omega} = a_2\omega + a_1 \wedge \omega_0, \quad \tilde{\omega}_0 = b\omega_0.$$

Отсюда, с одной стороны, по определению (1.11)

$$\tilde{\omega} \wedge \tilde{\omega} \wedge \tilde{\omega}_0 = \text{Pf}(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}_0) d\tilde{\omega}_0 \wedge d\tilde{\omega}_0 \wedge \tilde{\omega}_0 = b^3 \text{Pf}(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}_0) d\omega_0 \wedge d\omega_0 \wedge \omega_0,$$

а с другой стороны,

$$\tilde{\omega} \wedge \tilde{\omega} \wedge \tilde{\omega}_0 = a_2^2 b \omega \wedge \omega \wedge \omega_0 = a_2^2 b \text{Pf}(\omega, \omega_0) d\omega_0 \wedge d\omega_0 \wedge \omega_0.$$

Поэтому в силу условия невырожденности (1.3)

$$b^2 \text{Pf}(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}_0) = a_2^2 \text{Pf}(\omega, \omega_0),$$

и знаки $\text{Pf}(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}_0)$ и $\text{Pf}(\omega, \omega_0)$ совпадают.

ПРИМЕР 1.4. Традиционно уравнением Монжа–Ампера называют соотношение вида

$$A + Bz_{xx} + 2Cz_{xy} + Dz_{yy} + E(z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2) = 0 \quad (1.12)$$

(см. [3, с.491]). Здесь коэффициенты A, B, C, D и E – заданные функции от x, y, p, q и z , где x и y – независимые переменные, $z = z(x, y)$ – неизвестная функция и использованы обозначения Монжа $p = z_x, q = z_y$. Левой части уравнения (1.12) соответствует дифференциальная 2-форма

$$\tilde{\omega} = A dx \wedge dy + B dp \wedge dy + C(dx \wedge dp + dq \wedge dy) + D dx \wedge dq + E dp \wedge dq \quad (1.13)$$

на пространстве $\mathbb{R}^5$ параметров x, y, p, q и z [2]. Как известно, на $M = \mathbb{R}^5$ определена стандартная контактная линейная форма

$$\tilde{\omega}_0 = dz - p dx - q dy. \quad (1.14)$$

Поскольку

$$\tilde{\omega} \wedge d\tilde{\omega}_0 = 0, \quad (1.15)$$

то условие (1.7) выполнено и 2-форма (1.13) является эффективной. Кроме того, для этой формы выполнено условие

$$\frac{\partial}{\partial z} \lrcorner \tilde{\omega} = 0,$$

ликвидирующее произвол в выборе слагаемого, пропорционального контактной форме (1.14) (см. замечание 1.1). Очевидно, что между левыми частями уравнений вида (1.12) и дифференциальными 2-формами вида (1.13) имеется взаимно однозначное соответствие.

Для формы (1.14) во всех точках выполнено условие невырожденности (1.3), и потому она порождает на $\mathbb{R}^5$ контактный пучок (1.1):

$$I_0(U) = (\tilde{\omega}_0 \mid U). \quad (1.16)$$

Пучок (1.5) в данном случае порожден формами $\tilde{\omega}_0$ и $d\tilde{\omega}_0$:

$$J(U) = (b \wedge \tilde{\omega}_0 \mid U, \quad d\tilde{\omega}_0 \mid U : b \in l^1(U)), \quad (1.17)$$

а соответствующий уравнению (1.12) пучок Монжа–Ампера (1.8) порожден формами $\tilde{\omega}_0$, $d\tilde{\omega}_0$ и $\tilde{\omega}$:

$$I(U) = (b \wedge \tilde{\omega}_0 \mid U, \quad d\tilde{\omega}_0 \mid U, \quad \tilde{\omega} \mid U : b \in l^1(U)). \quad (1.18)$$

Из (1.18) и (1.17) ясно, что фактормодуль $I(U)/J(U)$ одномерен над кольцом $C^\infty(U)$ и, тем самым, одномерен соответствующий факторпучок (1.9).

Таким образом, выражения (1.16)–(1.18) однозначно сопоставляют уравнению (1.12) контактный пучок I_0 и пучок Монжа–Ампера I , так что системы внешних дифференциальных уравнений (1.10) и

$$\tilde{\omega} = 0, \quad \tilde{\omega}_0 = 0 \quad (1.19)$$

эквивалентны.

Пфаффиан формы (1.13) относительно формы (1.14) в соответствии с определением (1.11) вычисляется по формуле

$$\text{Pf}(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}_0) = -AE + BD - C^2. \quad (1.20)$$

Заметим, что правая часть выражения (1.20) совпадает по абсолютной величине и обратна по знаку дискриминанту характеристической формы уравнения Монжа–Ампера (1.12) [3, прил. 1 к гл. 5, § 2]. Иными словами, сформулированное выше определение типа уравнения Монжа–Ампера (1.10) в рассматриваемом случае совпадает с традиционным.

ПРИМЕР 1.5. Обратимся к общему случаю уравнения Монжа–Ампера (1.10) в окрестности фиксированной точки $m \in M$. Рассмотрим контактный пучок (1.1) и его слой (1.2) над точкой m . По определению невырожденности для всякого ростка ω_0 из слоя (1.2) такого, что $\omega_0(m) \neq 0$, выполняется неравенство (1.3). Следовательно, по теореме Дарбу найдется такая локальная система координат (U, φ) , $m \in U \subseteq M$,

$$\varphi: U \rightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^5, \quad (1.21)$$

что

$$\omega_0 = \varphi^* \tilde{\omega}_0,$$

где $\tilde{\omega}_0$ – стандартная контактная линейная форма (1.14) [4, с. 194]. Следовательно, аналогично примеру 1.4 ограничение контактного пучка I_0 на окрестность U порождено формой $\varphi^* \tilde{\omega}_0$:

$$I_0(U) = (\varphi^* \tilde{\omega}_0), \quad (1.22)$$

а пучка J – формами $\varphi^* \tilde{\omega}_0$ и $\varphi^* d\tilde{\omega}_0$:

$$J(U) = (b \wedge \varphi^* \tilde{\omega}_0, \varphi^* d\tilde{\omega}_0 \mid b \in l^1(U)).$$

По определению 1.2 пучка Монжа–Ампера, сужая в случае необходимости окрестность U точки m , всегда можно добиться того, чтобы для отвечающего уравнению (1.10) факторпучка (1.9) модуль $I(U)/J(U)$ был свободным и одномерным. Другими словами, найдется такая дифференциальная 2-форма ν над U , отличная от нуля во всех точках U , что

$$\nu + J(U)$$

служит базисным сечением фактормодуля $I(U)/J(U)$. Посредством карты (1.21) зададим на множестве $\varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^5$ дифференциальную 2-форму

$$\omega = (\varphi^{-1})^* \nu.$$

Получаем, что ограничение пучка Монжа–Ампера I на окрестность U порождено формами $\varphi^* \omega$, $\varphi^* \tilde{\omega}_0$ и $\varphi^* d\tilde{\omega}_0$:

$$I(U) = (\varphi^* \omega, b \wedge \varphi^* \tilde{\omega}_0, \varphi^* d\tilde{\omega}_0 \mid b \in l^1(U)).$$

Положим

$$c = \frac{\partial}{\partial z} \lrcorner \omega$$

и найдем функцию b из уравнения

$$\omega \wedge d\tilde{\omega}_0 \wedge \tilde{\omega}_0 = b d\tilde{\omega}_0 \wedge d\tilde{\omega}_0 \wedge \tilde{\omega}_0.$$

Тогда 2-форма $\tilde{\omega} = \omega - b d\tilde{\omega}_0 + c \wedge \tilde{\omega}_0$ определена в области $\varphi(U)$ и удовлетворяет условию (1.7), а для модуля $I(U)$ справедливо представление

$$I(U) = (\varphi^* \tilde{\omega}, b \wedge \varphi^* \tilde{\omega}_0, \varphi^* d\tilde{\omega}_0 \mid b \in l^1(U)). \quad (1.23)$$

Форма $\tilde{\omega}$ эффeктивна, имеет вид (1.13) и определена однозначно с точностью до ненулевого скалярного множителя.

Как и в примере 1.4, тип уравнения (1.10) в окрестности U вычисляется в соответствии со знаком пфаффиана (1.20).

Представления (1.22) и (1.23) показывают, что в общем случае уравнения Монжа–Ампера (1.10) локальная ситуация полностью исчерпывается уравнениями вида (1.19), (1.13), (1.14). Иными словами, произвольное уравнение Монжа–Ампера (1.10) на произвольном многообразии M локально сводится к соответствующему традиционному уравнению Монжа–Ампера (1.12). Более точно, нами доказана следующая

ЛЕММА 1.6. *Рассмотрим уравнение Монжа–Ампера (1.10) на многообразии M . Для любой точки $t \in M$ найдутся окрестность U этой точки и координатный диффеоморфизм (1.21) такие, что выполняются представления (1.22) и (1.23), где $\tilde{\omega}$ и $\tilde{\omega}_0$ – формы вида (1.13) и (1.14) соответственно.*

2. Контактная эквивалентность уравнений Монжа–Ампера. Пусть наряду с уравнением Монжа–Ампера

$$Q = (M, I_0, I) \quad (2.1)$$

задано еще одно уравнение Монжа–Ампера

$$\tilde{Q} = (\tilde{M}, \tilde{I}_0, \tilde{I}). \quad (2.2)$$

Диффеоморфизм

$$f: \tilde{M} \rightarrow M \quad (2.3)$$

называется *контактной эквивалентностью* уравнений (2.1) и (2.2), если

$$f^*(I_0) = \tilde{I}_0, \quad f^*(I) = \tilde{I}, \quad (2.4)$$

т.е. если для всякого открытого множества $U \subseteq \tilde{M}$

$$f^*(I_0(f(U))) = \tilde{I}_0(U), \quad f^*(I(f(U))) = \tilde{I}(U).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. В силу первого условия (2.4) диффеоморфизм (2.3) является контактным, поскольку переводит контактное расслоение L многообразия M в контактное расслоение $\tilde{L}$ многообразия $\tilde{M}$.

Основное внимание в настоящей статье уделяется задаче о контактной эквивалентности уравнений Монжа–Ампера. Эта задача заключается в нахождении содержательных признаков, выполнение которых для данных уравнений (2.1) и (2.2) приводит к существованию диффеоморфизма (2.3), для которого справедливы равенства (2.4). Она восходит к исследованиям Софуса Ли семидесятых–восемидесятых годов XIX в. Перечислим некоторые публикации, посвященные проблеме контактной эквивалентности уравнений Монжа–Ампера.

В работах [5]–[7] С. Ли сформулировал и доказал ряд результатов о локальной линеаризации параболических и гиперболических уравнений Монжа–Ампера посредством контактных диффеоморфизмов. Подробное доказательство части этих результатов можно найти в монографии [8, гл. 2].

В [9] и [10] найден критерий локальной контактной эквивалентности уравнений Монжа–Ампера эллиптического и гиперболического типа, имеющих хотя бы одну

инфинитезимальную контактную симметрию, уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами.

Заметка [11] посвящена контактной классификации комплексно-аналитических уравнений Монжа–Ампера с транзитивной группой симметрий. В частности, здесь объявлено о возможности сопоставления всякому комплексно-аналитическому уравнению Монжа–Ампера общего положения связности Картана типа $SL(3, \mathbb{C})/SL(2, \mathbb{C})$. Аналогичные построения для вещественных уравнений Монжа–Ампера гиперболического типа выполнены в работах [12] и [13].

В статье [14] описан конструктивный алгоритм, позволяющий естественным образом поставить в соответствие аффинную связность всякому гиперболическому и эллиптическому уравнению Монжа–Ампера в общем положении.

3. Категория уравнений Монжа–Ампера. Построим категорию МА уравнений Монжа–Ампера. В соответствии с замечанием 1.3 объектами $Ob(MA)$ этой категории служат тройки (2.1). Для произвольных уравнений Монжа–Ампера (2.1) и (2.2) множество морфизмов

$$Hom_{MA}(\tilde{Q}, Q) \quad (3.1)$$

состоит из всех контактных эквивалентностей этих уравнений, т.е. оно состоит из всех диффеоморфизмов (2.3), для которых выполнены условия (2.4).

Попросту говоря, объекты категории МА – это уравнения Монжа–Ампера с двумя независимыми переменными, а морфизмы – это контактные замены независимых и зависимых переменных, переводящие одно уравнение в другое.

На категорном языке задачу о контактной эквивалентности уравнений Монжа–Ампера можно переформулировать следующим образом: при каких условиях на данные уравнения (2.1) и (2.2) множество морфизмов (3.1) непусто.

4. Характеристические расслоения. Рассмотрим комплексное касательное расслоение $T^{\mathbb{C}}M = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} TM$ многообразия M . Комплексификация $L^{\mathbb{C}}$ контактного расслоения (1.4) является комплексным векторным подрасслоением расслоения $T^{\mathbb{C}}M$ комплексной коразмерности 1. Комплексный вектор $\xi \in T_m^{\mathbb{C}}M$ называется *характеристическим вектором* уравнения (1.10) в точке $m \in M$, если

$$\xi \lrcorner I_0(m) = 0, \quad \xi \lrcorner J(m) \equiv \xi \lrcorner I(m) \bmod I_0(m). \quad (4.1)$$

Здесь $I_0(m)$, $J(m)$ и $I(m)$ – слои соответствующих пучков над точкой m , и запись (4.1) означает, что для любых ростков ω_0 , ψ и ω ,

$$\omega_0 \in I_0(m), \quad \psi \in J(m), \quad \omega \in I(m),$$

выполняются равенства

$$\xi \lrcorner \omega_0(m) = 0, \quad (\xi \lrcorner \psi(m)) \wedge (\xi \lrcorner \omega(m)) \wedge \omega_0(m) = 0. \quad (4.2)$$

Положим

$$H = \bigcup_{m \in M} H(m), \quad (4.3)$$

где

$$H(m) = \{ \xi \in T_m^{\mathbb{C}}M \mid \xi \lrcorner I_0(m) = 0, \quad \xi \lrcorner J(m) \equiv \xi \lrcorner I(m) \bmod I_0(m) \}. \quad (4.4)$$

ПРИМЕР 4.1 (продолжение примера 1.4). Выясним, как устроено множество (4.3) в случае уравнения (1.12), или, что то же самое, в случае уравнения (1.19), (1.13), (1.14). В силу представлений (1.16)–(1.18) и соотношений (4.2) принадлежность вектора $\xi \in T_m^{\mathbb{C}} M$ множеству (4.4) равносильна тому, что

$$\xi \lrcorner \tilde{\omega}_0 = 0 \quad (4.5)$$

и компланарны ковекторы $\xi \lrcorner d\tilde{\omega}_0$, $\xi \lrcorner \tilde{\omega}$ и $\tilde{\omega}_0$. Последнее означает существование такого комплексного числа λ , для которого

$$(\xi \lrcorner (\tilde{\omega} - \lambda d\tilde{\omega}_0)) \wedge \tilde{\omega}_0 = 0. \quad (4.6)$$

Выполнение соотношений (4.5), (4.6) для $\xi \neq 0$ обеспечивает равенство

$$(\tilde{\omega} - \lambda d\tilde{\omega}_0) \wedge (\tilde{\omega} - \lambda d\tilde{\omega}_0) \wedge \tilde{\omega}_0 = 0,$$

из которого согласно (1.15) заключаем, что

$$\tilde{\omega} \wedge \tilde{\omega} \wedge \tilde{\omega}_0 + \lambda^2 d\tilde{\omega}_0 \wedge d\tilde{\omega}_0 \wedge \tilde{\omega}_0 = 0. \quad (4.7)$$

Сопоставляя (4.7) с (1.11), получаем относительно λ уравнение

$$\lambda^2 + \text{Pf}(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}_0) = 0. \quad (4.8)$$

Положим

$$\Delta = \sqrt{|\text{Pf}(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}_0)|}.$$

Тогда корни λ_1 и λ_2 уравнения (4.8) вычисляются следующим образом. В тех точках, где уравнение (1.12) эллиплично,

$$\lambda_j = i(-1)^{3-j} \Delta, \quad (4.9)$$

где i – мнимая единица, $j = 1, 2$, и

$$\lambda_j = (-1)^{3-j} \Delta \quad (4.10)$$

в тех точках, где это уравнение гиперболично либо параболично.

Таким образом, в рассматриваемом случае для $j = 1, 2$ и $m \in \mathbb{R}^5$

$$H_j(m) = \{\xi \in T_m^{\mathbb{C}} \mathbb{R}^5 = \mathbb{C}^5 \mid \xi \lrcorner \tilde{\omega}_0 = 0, \quad \xi \lrcorner (\tilde{\omega} - \lambda_j d\tilde{\omega}_0) = 0\}, \quad (4.11)$$

где параметр λ_j вычислен в соответствии с (4.9), (4.10). Можно показать, что $H_j(m)$ – линейное пространство, порождаемое векторами

$$\begin{aligned} e_{j1} &= E \left(\frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial z} \right) - D \frac{\partial}{\partial p} + (C - \lambda_j) \frac{\partial}{\partial q}, \\ e_{j2} &= E \left(\frac{\partial}{\partial y} + q \frac{\partial}{\partial z} \right) + (C + \lambda_j) \frac{\partial}{\partial p} - B \frac{\partial}{\partial q}, \\ e_{j3} &= B \left(\frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial z} \right) + (C - \lambda_j) \left(\frac{\partial}{\partial y} + q \frac{\partial}{\partial z} \right) - A \frac{\partial}{\partial p}, \\ e_{j4} &= (C + \lambda_j) \left(\frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial z} \right) + D \left(\frac{\partial}{\partial y} + q \frac{\partial}{\partial z} \right) - A \frac{\partial}{\partial q}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

среди которых ровно два линейно независимых в каждой точке m пространства $\mathbb{R}^5$. Ясно, что если уравнение параболично в точке m , т.е. $\text{Pf}(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}_0) = 0$, то $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ и

$$H_1(m) = H_2(m). \quad (4.13)$$

Если $\text{Pf}(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}_0) \neq 0$, то

$$H_1(m) \cap H_2(m) = 0, \quad (4.14)$$

потому что из принадлежности ξ пересечению $H_1(m) \cap H_2(m)$ в силу (4.11) и (4.9), (4.10) вытекает (4.5) и $\xi \lrcorner d\tilde{\omega}_0 = 0$, т.е. $\xi = 0$.

Проведенные при рассмотрении примера 4.1 рассуждения доказывают, что для уравнения (1.12) справедлива

ЛЕММА 4.2. *Множество (4.4) характеристических векторов уравнения (1.12) в точке $m \in M$ представимо как объединение:*

$$H(m) = H_1(m) \cup H_2(m), \quad (4.15)$$

где $H_1(m)$ и $H_2(m)$ – двумерные линейные пространства, вычисленные в соответствии с (4.11). Если уравнение (1.12) параболично в точке m , то выполнено равенство (4.13), а если оно в этой точке эллиплично либо гиперболично, то выполнено равенство (4.14). Объединение

$$H_j = \bigcup_{m \in M} H_j(m) \quad (4.16)$$

является двумерным комплексным подрасслоением в $T^{\mathbb{C}}M$ при $j = 1, 2$, которое порождается векторными полями (4.12), среди которых ровно два линейно независимых в каждой точке пространства $\mathbb{R}^5$.

Комбинируя леммы 4.2 и 1.6, заключаем, что имеет место

ЛЕММА 4.3. *Рассмотрим уравнение Монжа–Ампера (1.10) на многообразии M . Для любой точки $m_0 \in M$ найдутся окрестность этой точки U и двумерные комплексные подрасслоения H_1 и H_2 ограничения $L^{\mathbb{C}}|U$ контактного расслоения на U , обладающие следующими свойствами: расслоения H_1, H_2 и $L^{\mathbb{C}}|U$ тривиальны и множество (4.4) характеристических векторов уравнения (1.10) в точке $m \in U$ представимо как объединение (4.15). Если уравнение (1.10) параболично в точке $m \in U$, то выполнено равенство (4.13), а если оно в этой точке эллиплично либо гиперболично, то – равенство (4.14).*

Из леммы 4.3 вытекает, что справедливо

СЛЕДСТВИЕ 4.4. *Пусть уравнение (1.10) либо эллиплично, либо гиперболично на многообразии M . Тогда объединение (4.3) является локально тривиальным расслоением над M , типичным слоем которого служит букет $\mathbb{C}^2 \vee \mathbb{C}^2$ комплексных плоскостей с отмеченными нулями. При этом для каждой точки $m \in M$ линейная оболочка слоя $H(m)$ совпадает с комплексификацией $L^{\mathbb{C}}$ контактного подрасслоения (1.4), т.е.*

$$\text{span}(H(m)) = L^{\mathbb{C}}.$$

Расслоение (4.3) называется *характеристическим расслоением* уравнения Монжа–Ампера (1.10).

5. Свойства характеристических расслоений. Все встречающиеся в настоящем пункте уравнения Монжа–Ампера предполагаются либо эллиптически-ми, либо гиперболическими во всей области своего определения.

ЛЕММА 5.1. *Рассмотрим уравнение Монжа–Ампера (1.10) на многообразии M и его характеристическое расслоение (4.3). Пусть U – открытое подмножество многообразия M , ω_0 – линейная дифференциальная форма из $I_0(U)$, отличная от нуля во всех точках $t \in U$, и ξ_1, ξ_2 – линейно независимые сечения ограничения характеристического расслоения $H \mid U$: $\xi_1, \xi_2 \in \Gamma(H \mid U)$. Справедливы следующие свойства:*

а) *если при всех $t \in U$ векторы $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ не лежат в одной и той же плоскости слоя $H(t)$, то и эти векторы, и ковекторы $\xi_1 \lrcorner d\omega_0(t)$, $\xi_2 \lrcorner d\omega_0(t)$ косоортогональны относительно $d\omega_0(t)$, т.е.*

$$(\xi_1 \wedge \xi_2) \lrcorner d\omega_0(t) = 0, \quad (\xi_1 \lrcorner d\omega_0(t)) \wedge (\xi_2 \lrcorner d\omega_0(t)) \wedge d\omega_0(t) \wedge \omega_0(t) = 0;$$

б) *если при всех $t \in U$ векторы $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ лежат в одной и той же плоскости слоя $H(t)$, то модуль $I(U)$ порожден формами ω_0 , $d\omega_0$ и $(\xi_1 \lrcorner d\omega_0) \wedge (\xi_2 \lrcorner d\omega_0)$, точнее говоря,*

$$I(U) = (b \wedge \omega_0, d\omega_0, (\xi_1 \lrcorner d\omega_0) \wedge (\xi_2 \lrcorner d\omega_0) \mid b \in l^1(U));$$

с) *слой $H(t) \subseteq T_m^{\mathbb{C}}M$ замкнут относительно операции комплексного сопряжения, т.е. $\overline{H}(t) = H(t)$; более точно, если уравнение Монжа–Ампера (1.10) эллиплично в точке $t \in M$, то двумерные комплексные подпространства $H_1(t)$ и $H_2(t)$ из леммы 4.3 комплексно сопряжены, $\overline{H}_j(t) = H_{3-j}(t)$, $j = 1, 2$, а если гиперболично, то эти пространства вещественны, $\overline{H}_j(t) = H_j(t)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что свойства а), б) и с) носят локальный характер. По лемме 1.6 всякое уравнение (1.10) на многообразии M локально сводится к случаю уравнений (1.19), (1.13), (1.14) на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^5$. Поэтому доказываемые свойства достаточно установить лишь для этого случая, что осуществляется на основании формул (1.13), (1.14) и (4.9)–(4.12) путем непосредственной проверки. Лемма доказана.

Фиксируем произвольную точку t многообразия M . Напомним, что по определению для произвольного двумерного подрасслоения $Z \subseteq T^{\mathbb{C}}M$ его *первая производная* $Z^{(1)}(t)$ в точке t порождена векторами

$$\xi_1(t), \quad \xi_2(t), \quad [\xi_1, \xi_2](t),$$

а *вторая производная* $Z^{(2)}(t)$ в точке t порождена векторами

$$\xi_1(t), \xi_2(t), [\xi_1, \xi_2](t), [\xi_1, [\xi_1, \xi_2]](t), [\xi_2, [\xi_1, \xi_2]](t),$$

где ξ_1 и ξ_2 – линейно независимые в точке t локальные сечения расслоения Z . Рассмотрим окрестность U точки t и двумерные комплексные подрасслоения H_1 и H_2 контактного расслоения $L^{\mathbb{C}} \mid U$, выбранные в соответствии с леммой 4.3. Для этих подрасслоений имеет место

ЛЕММА 5.2. а) Объединение пересечений первых производных подрасслоений H_1 и H_2

$$h_U = \bigcup_{m \in M} (H_1^{(1)} \cap H_2^{(1)})(m) \quad (5.1)$$

является одномерным вещественным подрасслоением расслоения $T^{\mathbb{C}}U$, для которого справедливо разложение в прямую сумму:

$$TU = h_U \oplus L \mid U. \quad (5.2)$$

б) Соотношение

$$h \mid U = h_U \quad (5.3)$$

корректно определяет одномерное вещественное подрасслоение h расслоения TM , для которого справедливо разложение в прямую сумму:

$$TM = h \oplus L. \quad (5.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) По лемме 1.6 для модуля $I(U)$ выполнено представление (1.23). Поэтому доказываемые утверждения достаточно установить лишь для случая уравнения (1.19), (1.13), (1.14) на многообразии $\mathbb{R}^5$.

Пусть ξ_{j1}, ξ_{j2} – базисные сечения расслоения H_j : $\xi_{j1}, \xi_{j2} \in \Gamma(H_j)$. По определению (4.11), (4.16) этого расслоения

$$\tilde{\omega}_0 \mid H_j = 0,$$

откуда по свойству скобки Ли получаем

$$[\xi_{j1}, \xi_{j2}] \lrcorner \tilde{\omega}_0 = -(\xi_{j1} \wedge \xi_{j2}) \lrcorner d\tilde{\omega}_0.$$

По лемме 5.1, а) отсюда заключаем, что

$$[\xi_{j1}, \xi_{j2}] \lrcorner \tilde{\omega}_0 \neq 0.$$

Следовательно, $\dim_{\mathbb{C}} H_j^{(1)} = 3$ и $h_U = H_1^{(1)} \cap H_2^{(1)}$ – одномерное подрасслоение, ограничение на которое контактной формы $\tilde{\omega}_0$ отлично от нуля. Последний факт означает, что h_U пересекается с $\ker(\tilde{\omega}_0)$ только в нуле. Вещественность h_U следует из леммы 5.1, с). Свойство а) доказано.

б) Пересечение $(H_1^{(1)} \cap H_2^{(1)})(m)$ не зависит от выбора удовлетворяющей лемме 1.6 окрестности U точки m и удовлетворяющих лемме 4.3 расслоений H_1 и H_2 , т.е. определение (5.3) корректно. Разложение (5.4) вытекает из (5.2). Лемма доказана.

ЛЕММА 5.3. Рассмотрим два уравнения (2.1) и (2.2) на многообразии M (т.е. $\tilde{M} = M$) и отвечающие этим уравнениям характеристические расслоения H и $\tilde{H}$. Имеем $Q = \tilde{Q}$ тогда и только тогда, когда

$$\tilde{H} = H. \quad (5.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $Q = \tilde{Q}$, то выполнение (5.5) очевидно. Пусть выполнено равенство (5.5). По следствию 4.4 отвечающие уравнениям (2.1) и (2.2) контактные пучки совпадают:

$$I_0 = \tilde{I}_0.$$

Тем самым, по лемме 5.1, б) заключаем, что $Q = \tilde{Q}$. Лемма доказана.

ЛЕММА 5.4. *Рассмотрим уравнения (2.1) и (2.2) на многообразиях M и $\tilde{M}$ соответственно, отвечающие этим уравнениям характеристические расслоения H и $\tilde{H}$ и некоторый диффеоморфизм (2.3). Равенства (2.4) выполняются тогда и только тогда, когда*

$$f_*(\tilde{H}) = H. \quad (5.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнены равенства (2.4). Тогда для любого открытого подмножества $U \subseteq \tilde{M}$ и сечения $\xi \in \Gamma(H | f(U))$

$$\begin{aligned} f^*(\xi \lrcorner I(f(U))) &= f_*^{-1}\xi \lrcorner f^*(I(f(U))) = f_*^{-1}\xi \lrcorner \tilde{I}(U), \\ f^*(\xi \lrcorner J(f(U))) &= f_*^{-1}\xi \lrcorner f^*(J(f(U))) = f_*^{-1}\xi \lrcorner \tilde{J}(U), \\ f^*(\xi \lrcorner I_0(f(U))) &= f_*^{-1}\xi \lrcorner f^*(I_0(f(U))) = f_*^{-1}\xi \lrcorner \tilde{I}_0(U) \end{aligned}$$

в силу замечания 2.1. Отсюда по определению (4.4)

$$f_*^{-1}\xi \lrcorner \tilde{I}_0(U) = 0, \quad f_*^{-1}\xi \lrcorner \tilde{I}(U) \equiv f_*^{-1}\xi \lrcorner \tilde{J}(U) \pmod{\tilde{I}_0(U)}.$$

Следовательно,

$$f_*^{-1}\xi \in \Gamma(\tilde{H} | U),$$

и равенство (5.6) выполнено.

Пусть выполнено равенство (5.6). По доказанному характеристическим расслоением уравнения $(M, f^*(I_0), f^*(I))$ служит $f_*^{-1}(H)$, и согласно (5.6) $f_*^{-1}(H) = \tilde{H}$. Отсюда по лемме 5.3 получаем (2.4). Лемма доказана.

ЛЕММА 5.5. *Рассмотрим уравнения (2.1) и (2.2) на многообразиях M и $\tilde{M}$ соответственно и некоторый диффеоморфизм (2.3), удовлетворяющий равенствам (2.4). Выберем для уравнения (2.2) согласно лемме 4.3 открытое подмножество $\tilde{U} \subseteq \tilde{M}$ и расслоения $\tilde{H}_1, \tilde{H}_2$ над ним. Тогда множество $U = f(\tilde{U})$ и расслоения $H_1 = f_*(\tilde{H}_1), H_2 = f_*(\tilde{H}_2)$ удовлетворяют лемме 4.3 для уравнения (2.1). Кроме того,*

$$f_*(\tilde{H}_1^{(l)}(m) \cap \tilde{H}_2^{(r)}(m)) = H_1^{(l)}(f(m)) \cap H_2^{(r)}(f(m))$$

для всех $m \in \tilde{U}$ и целых положительных l и r .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [14, лемма 6.2, а)] и [15, лемма 2].

СЛЕДСТВИЕ 5.6. *Предположим, что выполнены все условия леммы 5.4. Пусть h – одномерное расслоение, построенное для уравнения (2.1) согласно лемме 5.2, а $\tilde{h}$ – аналогичное расслоение, построенное для уравнения (2.2). Если выполнено равенство (2.4), то*

$$f_*(\tilde{h}) = h. \quad (5.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выражение (5.8) вытекает из лемм 5.4, 5.5 и определений (5.1), (5.3). Следствие доказано.

6. Подкатегории уравнений Монжа–Ампера. Рассмотрим три примера полных подкатегорий в категории уравнений Монжа–Ампера. Эти примеры будут существенно использоваться в дальнейшем изложении.

ПРИМЕР 6.1. *Подкатегория MA_1 .* Пусть дано уравнение Монжа–Ампера (2.1). Для произвольной точки $m \in M$ в соответствии с леммой 4.3 выберем некоторую окрестность U этой точки и комплексные линейные расслоения H_1 и H_2 над ней. Рассмотрим условие на вторые производные этих расслоений H_1 и H_2 :

$$\dim_{\mathbb{C}} H_1^{(2)}(m) = \dim_{\mathbb{C}} H_2^{(2)}(m) = 5. \quad (6.1)$$

Выполнение этого условия не зависит от выбора окрестности U точки m и расслоений H_1 и H_2 . Объекты $\text{Ob}(\text{MA}_1)$ категории MA_1 – это все эллиптические и гиперболические уравнения Монжа–Ампера (2.1), для которых в каждой точке m многообразия M выполняется условие (6.1). Если $\tilde{Q}$ и Q – объекты категории MA , то положим

$$\text{Hom}_{\text{MA}_1}(\tilde{Q}, Q) = \text{Hom}_{\text{MA}}(\tilde{Q}, Q).$$

Тем самым, по построению MA_1 – полная подкатегория категории MA уравнений Монжа–Ампера.

Заметим, что требование эллиптичности и гиперболичности сводится к выполнению соответствующего неравенства для пфаффиана (см. (1.11)). Условие (6.1) означает, что при $j = 1, 2$ для базисных локальных сечений ξ_{j1} и ξ_{j2} линейного расслоения H_j справедливо неравенство

$$\xi_{j1} \wedge \xi_{j2} \wedge [\xi_{j1}, \xi_{j2}] \wedge [\xi_{j1}, [\xi_{j1}, \xi_{j2}]] \wedge [\xi_{j2}, [\xi_{j1}, \xi_{j2}]] \neq 0.$$

Значит, уравнение категории MA_1 находится в общем положении по отношению ко множеству всех уравнений Монжа–Ампера.

ПРИМЕР 6.2. *Подкатегория $\text{MA}_{0.5}$.* К объектам $\text{Ob}(\text{MA}_{0.5})$ принадлежат гиперболические уравнения Монжа–Ампера, чьи характеристические расслоения H обладают тремя следующими свойствами:

- 1) на всем M определены два линейных двумерных расслоения H_1 и H_2 (так что во всех точках $m \in M$ имеет место представление (4.15));
- 2) в каждой точке m многообразия M выполняется условие

$$\dim_{\mathbb{C}} H_1^{(2)}(m) = 5;$$

3) существует по крайней мере одна точка $m_0 \in M$, в которой

$$\dim_{\mathbb{C}} H_2^{(2)}(m_0) < 5.$$

Если $\tilde{Q}$ и Q – объекты категории $\text{MA}_{0.5}$, то, как и выше, положим

$$\text{Hom}_{\text{MA}_{0.5}}(\tilde{Q}, Q) = \text{Hom}_{\text{MA}}(\tilde{Q}, Q).$$

Заметим, что в силу лемм 4.3 и 5.1, с) уравнение Монжа–Ампера, удовлетворяющее условиям 2) и 3), обязательно гиперболично хотя бы в одной точке многообразия M .

ПРИМЕР 6.3. *Подкатегория MA_0 .* Для произвольного уравнения Монжа–Ампера (2.1) и точки $m \in M$ в соответствии с леммой 4.3 выберем некоторую окрестность U точки m и комплексные линейные расслоения H_1 и H_2 над U . По леммам 5.2, 4.3 и следствию 4.4 для $T^{\mathbb{C}}U$ имеет место разложение

$$T^{\mathbb{C}}U = H_0 \oplus H_1 \oplus H_2, \quad (6.2)$$

где

$$H_0 = h \mid U. \quad (6.3)$$

Через χ_j , $j = 0, 1, 2$, обозначим оператор проектирования

$$\chi_j: T^{\mathbb{C}}U \rightarrow H_j, \quad (6.4)$$

определенный разложением (6.2). Положим для всякого базисного сечения ζ расслоения H_0 и сечения ξ расслоения H_j

$$A_j^{\zeta}(\xi) = \chi_{3-j}([\zeta, \xi]), \quad j = 1, 2. \quad (6.5)$$

Очевидно, что отображение A_j^{ζ} линейно относительно ξ , т.е.

$$A_j^{\zeta}(a\xi + b\eta) = aA_j^{\zeta}(\xi) + bA_j^{\zeta}(\eta)$$

для функций $a, b \in C^{\infty}(U)$ и сечений $\xi, \eta \in \Gamma(H_j)$. Следовательно, выражение (6.5) определяет линейный морфизм векторных расслоений

$$A_j^{\zeta}: H_j \ni \xi \mapsto \chi_{3-j}([\zeta, \xi]) \in H_{3-j}$$

(см. [16, с. 199, 200]), для которого

$$A_j^{a\zeta}(\xi) = aA_j^{\zeta}(\xi).$$

Тем самым, над каждой точкой u окрестности U подпространства

$$\ker(A_j^{\zeta})(u) \subseteq H_j(u), \quad \text{im}(A_j^{\zeta})(u) \subseteq H_{3-j}(u),$$

являющиеся соответственно ядром и образом оператора (6.5), не зависят от выбора базисного сечения $\zeta \in \Gamma(H_0)$.

К объектам $\text{Ob}(\text{MA}_0)$ принадлежат эллиптические и гиперболические уравнения Монжа–Ампера, для которых линейные подрасслоения h_{11} , h_{12} , h_{21} , h_{22} , чьи слои над u определены равенствами

$$h_{j1}(u) = \text{im}(A_{3-j}^\zeta)(u), \quad h_{j2}(u) = \ker(A_j^\zeta)(u), \quad (6.6)$$

дизъюнкты. Другими словами, для $j = 1, 2$ имеет место разложение

$$H_j(u) = h_{j1}(u) \oplus h_{j2}(u), \quad (6.7)$$

что с учетом (6.2), (6.3) дает

$$T^\mathbb{C}U = H_0 \oplus h_{11} \oplus h_{12} \oplus h_{21} \oplus h_{22}. \quad (6.8)$$

Определим морфизмы. Если $\tilde{Q}$ и Q – объекты категории MA_0 , то положим

$$\text{Hom}_{\text{MA}_0}(\tilde{Q}, Q) = \text{Hom}_{\text{MA}}(\tilde{Q}, Q).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.4. Полная подкатегория S категории MA уравнений Монжа–Ампера называется *замкнутой*, если из условий

$$\tilde{Q} \in S, \quad Q \in \text{MA}, \quad \text{Hom}_{\text{MA}}(\tilde{Q}, Q) \neq \emptyset$$

необходимо следует, что $Q \in S$.

Другими словами, если уравнение Монжа–Ампера $\tilde{Q}$ является объектом замкнутой подкатегории S и контактно эквивалентно уравнению Q , то Q также является объектом категории S .

ЛЕММА 6.5. Подкатегории MA_0 , $\text{MA}_{0.5}$ и MA_1 замкнуты.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Замкнутость подкатегорий MA_0 , $\text{MA}_{0.5}$ и MA_1 вытекает из их определений в силу лемм 5.4, 5.5 и следствия 5.6.

7. Функтор характеристической связности. Обозначим через AC категорию аффинных связностей на пятимерных многообразиях. Объектами $\text{Ob}(\text{AC})$ служат аффинные связности, т.е. пары (M, Σ) , где M – пятимерное многообразие, а Σ – аффинная связность на M . Для двух произвольных объектов $\tilde{W} = (\tilde{M}, \tilde{\Sigma})$, $W = (M, \Sigma)$ множество морфизмов $\text{Hom}_{\text{AC}}(\tilde{W}, W)$ состоит из всех аффинных диффеоморфизмов

$$f: \tilde{M} \rightarrow M \quad (7.1)$$

таких, что $f_*(\tilde{\Sigma}) = \Sigma$.

Попросту говоря, объекты категории AC – это аффинные связности на пятимерных многообразиях, а морфизмы этой категории – это эквивалентности аффинных связностей.

Фиксируем некоторую замкнутую подкатегорию S уравнений Монжа–Ампера и рассмотрим произвольные уравнения

$$Q = (M, I_0, I), \quad (7.2)$$

$$\tilde{Q} = (\tilde{M}, \tilde{I}_0, \tilde{I}), \quad (7.3)$$

являющиеся объектами S , а также их характеристические расслоения H и $\tilde{H}$ соответственно. Сформулируем

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.1. Ковариантный функтор

$$\Xi: S \rightarrow \text{AC} \quad (7.4)$$

называется *функтором характеристической связности*, если он обладает следующими свойствами:

- а) из $(\widetilde{M}, \Sigma) = \Xi(Q)$ вытекает $\widetilde{M} = M$, т.е. связность $\Xi(Q)$ определена на том же многообразии, что и уравнение Q ;
- б) для любого морфизма $f \in \text{Hom}_S(\widetilde{Q}, Q)$

$$\Xi(f) = f,$$

т.е. функтор (7.4) переводит контактные эквивалентности уравнений Монжа–Ампера $\widetilde{Q}$ и Q в эквивалентности соответствующих аффинных связностей $\Xi(\widetilde{Q})$ и $\Xi(Q)$;

- с) пусть r и m – произвольные точки многообразия M и

$$F: T_r^{\mathbb{C}}M \rightarrow T_m^{\mathbb{C}}M \quad (7.5)$$

– параллельный перенос относительно аффинной связности $\Xi(Q)$ вдоль некоторой непрерывной кривой на M , соединяющей точки r и m ; тогда линейный изоморфизм F отображает множество $H(r)$ характеристических векторов уравнения Q в точке r на множество $H(m)$ характеристических векторов этого уравнения Q в точке m , т.е.

$$F(H(r)) = H(m).$$

Функтор характеристической связности, по-существу, позволяет свести проблеме контактной эквивалентности уравнений Монжа–Ампера к проблеме эквивалентности аффинных связностей. Механизм этого сведения описывает

ТЕОРЕМА 7.2. Пусть (7.4) – функтор характеристической связности, а уравнения (7.2) и (7.3) – объекты категории S . Тогда следующие утверждения равносильны:

- а) диффеоморфизм (7.1) является морфизмом категории S , т.е.

$$f \in \text{Hom}_S(\widetilde{Q}, Q); \quad (7.6)$$

- б) диффеоморфизм (7.1) является морфизмом категории AC , т.е.

$$f \in \text{Hom}_{\text{AC}}(\Xi(\widetilde{Q}), \Xi(Q)), \quad (7.7)$$

и найдется хотя бы одна пара $(t, \tilde{t})$ точек $t \in M$, $\tilde{t} \in \widetilde{M}$ такая, что $t = f(\tilde{t})$ и отображение $f_*(\tilde{t})$ отображает множество $\tilde{H}(\tilde{t})$ характеристических векторов уравнения $\widetilde{Q}$ в точке $\tilde{t}$ на множество $H(t)$ характеристических векторов уравнения Q в точке t ,

$$f_*(\tilde{H}(\tilde{t})) = H(t). \quad (7.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) $\Rightarrow$ б). Пусть диффеоморфизм (7.1) удовлетворяет включению (7.6), т.е. осуществляет контактную эквивалентность уравнений (7.2) и (7.3). По определению 7.1, б) этот диффеоморфизм является аффинным, т.е. справедливо включение (7.7), а по лемме 5.4 для всякой точки $\tilde{m} \in \widetilde{M}$ выполнено (7.8).

б) $\Rightarrow$ а). Пусть имеет место включение (7.7), т.е. диффеоморфизм (7.1) является аффинным, и для некоторых точек $m \in M$ и $\tilde{m} \in \widetilde{M}$, связанных соотношением $m = f(\tilde{m})$, выполнено (7.8). В силу связности $\widetilde{M}$ для произвольной точки $r \in \widetilde{M}$ найдется гладкая кривая

$$l: [0, 1] \rightarrow \widetilde{M}, \quad (7.9)$$

соединяющая точки $\tilde{m}$ и r :

$$l(0) = \tilde{m}, \quad l(1) = r. \quad (7.10)$$

Образ кривой (7.9) относительно диффеоморфизма (7.1)

$$f \circ l: [0, 1] \rightarrow M \quad (7.11)$$

соединяет точки $f(\tilde{m}) = m$ и $f(r)$:

$$f \circ l(0) = m, \quad f \circ l(1) = f(r). \quad (7.12)$$

Обозначим через $\tilde{\tau}$ параллельный перенос вдоль кривой (7.9) из $\tilde{m}$ в r , а через τ – параллельный перенос вдоль кривой (7.11) из m в $f(r)$. По условию (7.7) f является аффинным диффеоморфизмом, и потому

$$f_* \circ \tilde{\tau} = \tau \circ f_*. \quad (7.13)$$

Следовательно,

$$f_* \circ \tilde{\tau}(\tilde{H}(\tilde{m})) = \tau \circ f_*(\tilde{H}(\tilde{m})), \quad (7.14)$$

откуда, учитывая (7.10) и (7.12), по определению 7.1, с) получаем, что для всех точек $r \in \widetilde{M}$ выполнено равенство (5.6). Поэтому в силу леммы 5.4 для диффеоморфизма (7.1) выполнены равенства (2.4), т.е. справедливо включение (7.6). Теорема доказана.

По лемме 6.5 построенные в примерах 6.1–6.3 подкатегории уравнений Монжа–Ампера MA_1 , $MA_{0.5}$ и MA_0 замкнуты.

ТЕОРЕМА 7.3. *Для каждой из подкатегорий MA_1 , $MA_{0.5}$ и MA_0 существует функтор характеристической связности Ξ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в п. 12 (случай MA_1), п. 13 (случай $MA_{0.5}$) и п. 14 (случай MA_0).

ЗАМЕЧАНИЕ 7.4. Следует отметить эффективность конструкции аффинных связностей, о которых идет речь в теореме 7.3. Точнее, пусть U – окрестность, выбранная в соответствии с леммой 4.3. Тогда для вычисления в этой окрестности коэффициентов аффинной связности уравнения (7.2), являющегося объектом одной из трех подкатегорий MA_1 , $MA_{0.5}$ или MA_0 , требуется выполнение лишь конечного числа операций дифференцирования, сложения, вычитания, умножения и деления над координатами отвечающих этому уравнению векторных полей (4.12). (Подробности см. в пп. 11–14, 16.)

8. Теоремы эквивалентности гладких уравнений. Ниже через S всюду обозначена фиксированная подкатегория уравнений Монжа–Ампера, совпадающая либо с MA_1 , либо с $MA_{0.5}$, либо с MA_0 (см. п. 6).

Пусть уравнения (7.2) и (7.3) являются объектами категории S , H и $\tilde{H}$ – их характеристические расслоения, а (7.4) – функтор характеристической связности, существующий согласно теореме 7.3. Положим

$$(M, \Sigma) = \Xi(Q), \quad (8.1)$$

$$(\tilde{M}, \tilde{\Sigma}) = \Xi(\tilde{Q}). \quad (8.2)$$

Через $\exp_m(tX)$ и $\exp_{\tilde{m}}(t\tilde{X})$, $m \in M$, $\tilde{m} \in \tilde{M}$, $X \in T_m M$, $\tilde{X} \in T_{\tilde{m}} \tilde{M}$, $0 \leq t \leq 1$, обозначим геодезические линии связностей (8.1) и (8.2):

$$\frac{d}{dt} \exp_m(tX)|_{t=0} = X(m), \quad \exp_m(tX)|_{t=0} = m.$$

Возьмем произвольный линейный изоморфизм

$$F: T_{\tilde{m}} \tilde{M} \rightarrow T_m M \quad (8.3)$$

и некоторые выпуклые открытые подмножества

$$V \subseteq T_m M, \quad \tilde{V} \subseteq T_{\tilde{m}} \tilde{M} \quad (8.4)$$

соответствующих касательных расслоений, для которых

$$F(\tilde{V}) = V \quad (8.5)$$

и которым отвечают нормальные координатные окрестности

$$U = \exp_m(V), \quad \tilde{U} = \exp_{\tilde{m}}(\tilde{V}), \quad (8.6)$$

где $\exp_m(X) = \exp_m(tX)|_{t=1}$. Определим диффеоморфизм

$$f: \tilde{U} \rightarrow U \quad (8.7)$$

таким образом, чтобы

$$f \circ \exp_{\tilde{m}} = \exp_m \circ F. \quad (8.8)$$

Кроме того, для всякой точки $r \in \tilde{U}$ определим линейный изоморфизм

$$F_r: T_r \tilde{M} \rightarrow T_{f(r)} M \quad (8.9)$$

таким образом, чтобы

$$F_r \circ \tilde{\tau} = \tau \circ F. \quad (8.10)$$

Здесь $\tilde{\tau}$ – параллельный перенос вдоль радиальной геодезической $\{\exp_{\tilde{m}}(tZ) \mid 0 \leq t \leq 1\}$ из $\tilde{m}$ в $r = \exp_{\tilde{m}}(Z)$, $Z \in \tilde{V}$, а τ – параллельный перенос вдоль радиальной геодезической $\{\exp_m(tFZ) \mid 0 \leq t \leq 1\}$ из m в $f(r) = \exp_m(FZ)$ (см. (8.8)). В силу (8.10) ясно, что $F_{\tilde{m}} = F$.

Следующая теорема представляет собой критерий локальной контактной эквивалентности уравнений Монжа–Ампера из категории S .

ТЕОРЕМА 8.1. Рассмотрим уравнения Монжа–Ампера (7.2) и (7.3), являющиеся объектами категории S . Фиксируем точки m и $\tilde{m}$, $m \in M$, $\tilde{m} \in \tilde{M}$. Следующие утверждения эквивалентны:

а) найдутся такие окрестности U точки m , $\tilde{U}$ точки $\tilde{m}$ и диффеоморфизм (8.7), которые удовлетворяют равенствам $m = f(\tilde{m})$ и

$$f^*(I_0(U)) = \tilde{I}_0(\tilde{U}), \quad f^*(I(U)) = \tilde{I}(\tilde{U}); \quad (8.11)$$

б) найдется линейный изоморфизм (8.3), отображающий множество $\tilde{H}(\tilde{m})$ характеристических векторов уравнения (7.3) в точке $\tilde{m}$ на множество $H(m)$ характеристических векторов уравнения (7.2) в точке m ,

$$F(\tilde{H}(\tilde{m})) = H(m), \quad (8.12)$$

такой, что построенные для него в соответствии с (8.4)–(8.6) нормальные координатные окрестности U и $\tilde{U}$, диффеоморфизм (8.7) и линейные изоморфизмы F_r обладают следующим свойством: для каждой точки $r \in \tilde{U}$ линейный изоморфизм F_r переводит тензоры кривизны $\tilde{R}_r$ и кручения $\tilde{T}_r$ характеристической аффинной связности (8.2) уравнения (7.3) соответственно в тензоры кривизны $R_{f(r)}$ и кручения $T_{f(r)}$ характеристической аффинной связности (8.1) уравнения (7.2);

с) найдется линейный изоморфизм (8.3) такой, что построенные для него в соответствии с (8.4)–(8.6) нормальные координатные окрестности U и $\tilde{U}$ обладают следующим свойством: если Ξ – произвольный фиксированный базис касательного пространства $T_{\tilde{m}}\tilde{M}$,

$$\Xi: \mathbb{R}^5 \rightarrow T_{\tilde{m}}\tilde{M} \quad (8.13)$$

– определенный этим базисом изоморфизм, $F(\Xi)$ – образ базиса Ξ и

$$F(\Xi): \mathbb{R}^5 \rightarrow T_m M \quad (8.14)$$

– изоморфизм, определенный базисом $F(\Xi)$, то справедливы равенства

$$(\exp_{\tilde{m}} \circ \Xi)^*(\tilde{I}_0(\tilde{U})) = (\exp_m \circ F(\Xi))^*(I_0(U)), \quad (8.15)$$

$$(\exp_{\tilde{m}} \circ \Xi)^*(\tilde{I}(\tilde{U})) = (\exp_m \circ F(\Xi))^*(I(U)). \quad (8.16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в п. 15.

Предположим, что $\tilde{M}$ – полное многообразие относительно характеристической аффинной связности (8.2) уравнения (7.3). Выберем точку $\tilde{m} \in \tilde{M}$ и произвольный упорядоченный набор касательных векторов

$$G = \{g_1, \dots, g_k\} \in T_{\tilde{m}}\tilde{M}. \quad (8.17)$$

Набору (8.17) сопоставим геодезическую ломаную

$$\gamma_G: [0, k] \rightarrow \tilde{M}, \quad (8.18)$$

построенную следующим образом. При $0 \leq t \leq 1$ полагаем

$$\gamma_G(t) = \exp_{\tilde{m}}(tg_1). \quad (8.19)$$

Далее, по индукции, для $1 \leq l \leq k-1$ и $l \leq t \leq l+1$ полагаем

$$\gamma_G(t) = \exp_{\gamma_G(l)}((t-l)\tau_l g_{l+1}), \quad (8.20)$$

где τ_l – параллельный перенос вдоль ломаной (8.18) из $\tilde{m}$ в $\gamma_G(l)$. Иными словами, мы сначала идем вдоль геодезической $\exp_{\tilde{m}}(tg_1)$, $0 \leq t \leq 1$, а затем вдоль геодезической ломаной, соответствующей набору векторов $\{\tau_1 g_2, \dots, \tau_1 g_k\} \in T_{\gamma_G(1)}\tilde{M}$, полученному с помощью параллельного переноса τ_1 . Обозначим через τ_G параллельный перенос вдоль ломаной (8.18) из $\tilde{m}$ в $\gamma_G(k)$.

Далее, предположим, что M – также полное многообразие относительно характеристической аффинной связности (8.1) уравнения (7.2). Выберем точку $m \in M$ и линейный изоморфизм (8.3). Образом набора касательных векторов (8.17) при этом изоморфизме служит набор

$$F(G) = \{Fg_1, \dots, Fg_k\} \in T_m M. \quad (8.21)$$

По аналогии с (8.19), (8.20) сопоставим этому набору геодезическую ломаную

$$\gamma_{F(G)}: [0, k] \rightarrow M \quad (8.22)$$

и параллельный перенос $\tau_{F(G)}$.

Для всякого набора (8.17) построим линейный изоморфизм

$$F_G: \tilde{M}_{\tau_G(k)} \rightarrow M_{\tau_{F(G)}(k)}, \quad (8.23)$$

для которого

$$F_G \circ \tau_G = \tau_{F(G)} \circ F. \quad (8.24)$$

Глобальным вариантом теоремы 8.1 служит

ТЕОРЕМА 8.2. Пусть выполнены все условия теоремы 8.1, и, сверх того, пусть многообразия M и $\tilde{M}$ односвязны, а аффинные характеристические связности (8.1) и (8.2) уравнений (7.2) и (7.3) полны. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

а) найдется диффеоморфизм

$$f: \tilde{M} \rightarrow M, \quad (8.25)$$

для которого справедливо равенство $m = f(\tilde{m})$ и включение

$$f \in \text{Hom}_{\text{MA}}(\tilde{Q}, Q); \quad (8.26)$$

б) найдется линейный изоморфизм (8.3), удовлетворяющий условию (8.12), такой, что построенные для него в соответствии с (8.17)–(8.24) ломаные геодезические γ_G , $\gamma_{F(G)}$ и линейные изоморфизмы F_G обладают следующим свойством: для всякого набора (8.17) линейный изоморфизм F_G переводит тензоры кривизны $\tilde{R}_{\gamma_G(k)}$ и кручения $\tilde{T}_{\gamma_G(k)}$ характеристической аффинной связности (8.2) уравнения (7.3) соответственно в тензоры кривизны $R_{\gamma_{F(G)}(k)}$ и кручения $T_{\gamma_{F(G)}(k)}$ характеристической аффинной связности (8.1) уравнения (7.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в п. 15.

9. Теоремы эквивалентности аналитических уравнений. Уравнение (7.2) называется *вещественно-аналитическим*, если многообразие M и пучки I_0, I вещественно-аналитичны. Последнее означает, что для любого открытого подмножества $U \subseteq M$ множества $I_0(U)$ и $I(U)$ являются модулями вещественно-аналитических форм над кольцом $C^\omega(U)$ вещественно-аналитических функций.

ЗАМЕЧАНИЕ 9.1. Условие вещественной аналитичности многообразия M не ограничивает общности, поскольку для всякого гладкого многообразия M существует вещественно-аналитическая структура, согласованная с его гладкой структурой [17, гл. 2, § 5].

Рассмотрим вещественно-аналитические варианты MA_1^ω , $\text{MA}_{0.5}^\omega$ и MA_0^ω подкатегорий MA_1 , $\text{MA}_{0.5}$ и MA_0 , введенных в п. 6. Их объектами являются вещественно-аналитические уравнения из $\text{Ob}(\text{MA}_1)$, $\text{Ob}(\text{MA}_{0.5})$ и $\text{Ob}(\text{MA}_0)$ соответственно, а морфизмами, как и в гладком случае, – гладкие контактные эквивалентности. Более точно, если Q и $\tilde{Q}$ лежат в $\text{Ob}(\text{MA}_1^\omega)$, то

$$\text{Hom}_{\text{MA}_1^\omega}(Q, \tilde{Q}) = \text{Hom}_{\text{MA}_1}(Q, \tilde{Q}),$$

если Q и $\tilde{Q}$ лежат в $\text{Ob}(\text{MA}_{0.5}^\omega)$, то

$$\text{Hom}_{\text{MA}_{0.5}^\omega}(Q, \tilde{Q}) = \text{Hom}_{\text{MA}_{0.5}}(Q, \tilde{Q}),$$

если Q и $\tilde{Q}$ лежат в $\text{Ob}(\text{MA}_0^\omega)$, то

$$\text{Hom}_{\text{MA}_0^\omega}(Q, \tilde{Q}) = \text{Hom}_{\text{MA}_0}(Q, \tilde{Q}).$$

Ниже через Ω обозначена фиксированная подкатегория уравнений Монжа–Ампера, совпадающая либо с MA_1^ω , либо с $\text{MA}_{0.5}^\omega$, либо с MA_0^ω .

ЛЕММА 9.2. Если Q – объект категории Ω , то отвечающая ему характеристическая связность (8.1) вещественно-аналитична.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидным образом вытекает из конструкций характеристических связностей, описанных в пп. 11–14.

Следующая теорема представляет собой критерий локальной контактной эквивалентности уравнений Монжа–Ампера из категории Ω .

ТЕОРЕМА 9.3. Рассмотрим уравнения Монжа–Ампера (7.2) и (7.3), являющиеся объектами категории Ω . Фиксируем точки t и $\tilde{t}$, $t \in M$, $\tilde{t} \in \tilde{M}$. Следующие утверждения эквивалентны:

а) найдутся такие окрестности U точки t , $\tilde{U}$ точки $\tilde{t}$ и вещественно-аналитический диффеоморфизм

$$f: \tilde{U} \rightarrow U, \tag{9.1}$$

которые удовлетворяют равенствам $t = f(\tilde{t})$ и

$$f^*(I_0(U)) = \tilde{I}_0(\tilde{U}), \quad f^*(I(U)) = \tilde{I}(\tilde{U}); \tag{9.2}$$

б) найдется линейный изоморфизм

$$F: T_{\tilde{m}}\tilde{M} \rightarrow T_m M, \quad (9.3)$$

обладающий двумя следующими свойствами: во-первых, он отображает множество $\tilde{H}(\tilde{m})$ характеристических векторов уравнения (7.3) в точке $\tilde{m}$ на множество $H(m)$ характеристических векторов уравнения (7.2) в точке m ,

$$F(\tilde{H}(\tilde{m})) = H(m), \quad (9.4)$$

во-вторых, если T , R и ∇ (соответственно, $\tilde{T}$, $\tilde{R}$ и $\tilde{\nabla}$) – кручение, кривизна и оператор ковариантного дифференцирования связности (8.1) (соответственно, (8.2)), то изоморфизм (9.3) переводит тензоры $\tilde{\nabla}^k \tilde{T}(\tilde{m})$ и $\tilde{\nabla}^k \tilde{R}(\tilde{m})$ в тензоры $\nabla^k T(m)$ и $\nabla^k R(m)$ соответственно при $k = 0, 1, 2, \dots$

Доказательство см. в п. 15.

Глобальным вариантом теоремы 9.3 служит

ТЕОРЕМА 9.4. Пусть выполнены все условия теоремы 9.3, и, сверх того, пусть многообразия M и $\tilde{M}$ односвязны, а аффинные характеристические связности Σ и $\tilde{\Sigma}$ полны. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

а) найдется вещественно-аналитический диффеоморфизм

$$f: \tilde{M} \rightarrow M, \quad (9.5)$$

для которого выполнены равенство $m = f(\tilde{m})$ и включение $f \in \text{Hom}_{\text{МА}}(\tilde{Q}, Q)$;

б) утверждение б) теоремы 9.3.

Доказательство см. в п. 15.

ЗАМЕЧАНИЕ 9.5. Из доказательств теорем 9.3 и 9.4 вытекает, что выбор линейного изоморфизма (9.3) в случае теоремы 9.3 однозначно определяет диффеоморфизм (9.1), а в случае теоремы 9.4 – диффеоморфизм (9.5).

10. Теоремы эквивалентности однородных уравнений. Рассмотрим уравнение Монжа–Ампера, являющееся объектом категории S , и фиксируем функтор характеристической связности

$$\Xi: S \rightarrow \text{AC}, \quad (10.1)$$

существующий согласно теореме 7.3. Следуя [18, гл. 6, § 7], введем

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.1. Уравнение Монжа–Ампера $Q \in \text{Ob}(S)$ инвариантно при параллелизме, если для характеристической связности (8.1) этого уравнения и любых двух точек r и m многообразия M выполнено следующее свойство: для любой непрерывной кривой на M , соединяющей точки r и m , и параллельного переноса

$$\tau: T_r^{\mathbb{C}} M \rightarrow T_m^{\mathbb{C}} M \quad (10.2)$$

вдоль этой кривой относительно аффинной связности (8.1) существуют окрестность U точки m , окрестность V точки r и диффеоморфизм

$$f: V \rightarrow U \quad (10.3)$$

такой, что

$$f^*(I_0(U)) = I_0(V), \quad f^*(I(U)) = I(V), \quad (10.4)$$

и справедливы равенства $f(r) = m$ и $f_*(r) = \tau$.

ТЕОРЕМА 10.2. *Уравнение $Q \in \text{Ob}(S)$ инвариантно при параллелизме тогда и только тогда, когда*

$$\nabla R = 0, \quad \nabla T = 0, \quad (10.5)$$

где T , R и ∇ – кручение, кривизна и оператор ковариантного дифференцирования характеристической связности (8.1) этого уравнения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в п. 15.

Пусть уравнение (7.2) является объектом категории S и M – вещественно-аналитическое многообразие. Это уравнение порождено вещественно-аналитическим уравнением

$$Q^\omega = (M, I_0^\omega, I^\omega), \quad Q^\omega \in \text{Ob}(\Omega),$$

если имеют место представления

$$I_0 = I_0^\omega \otimes_{C^\omega} C^\infty, \quad I = I^\omega \otimes_{C^\omega} C^\infty.$$

Всякое инвариантное при параллелизме уравнение Монжа–Ампера порождено некоторым вещественно-аналитическим уравнением. Точнее говоря, справедлива

ТЕОРЕМА 10.3. *Пусть уравнение (7.2), являющееся объектом категории S , инвариантно при параллелизме. Относительно атласа, состоящего из нормальных систем координат характеристической связности (8.1) этого уравнения, M является вещественно-аналитическим многообразием. Характеристическая связность (8.1) вещественно-аналитична на M , и уравнение (7.2) порождено некоторым вещественно-аналитическим уравнением.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в п. 15.

Из теорем 10.2, 10.3 и 9.3 вытекает следующий критерий локальной контактной эквивалентности инвариантных при параллелизме уравнений Монжа–Ампера.

СЛЕДСТВИЕ 10.4. *Рассмотрим уравнения Монжа–Ампера (7.2) и (7.3), являющиеся объектами категории S , и предположим, что они инвариантны при параллелизме. Следующие утверждения эквивалентны:*

а) для любой пары $(m, \tilde{m})$ точек $m \in M$, $\tilde{m} \in \tilde{M}$ найдутся такие окрестности U точки m , $\tilde{U}$ точки $\tilde{m}$ и аналитический диффеоморфизм

$$f: \tilde{U} \rightarrow U, \quad (10.6)$$

которые удовлетворяют равенствам $t = f(\tilde{m})$ и

$$f^*(I_0(U)) = \tilde{I}_0(\tilde{U}), \quad f^*(I(U)) = \tilde{I}(\tilde{U}); \quad (10.7)$$

б) найдется хотя бы одна пара $(t, \tilde{m})$ точек $t \in M$, $\tilde{m} \in \tilde{M}$ и линейный изоморфизм

$$F: T_{\tilde{m}}\tilde{M} \rightarrow T_t M, \quad (10.8)$$

обладающий двумя следующими свойствами: во-первых, он отображает множество $\tilde{H}(\tilde{m})$ характеристических векторов уравнения (7.3) в точке $\tilde{m}$ на множество $H(t)$ характеристических векторов уравнения (7.2) в точке t ,

$$F(\tilde{H}(\tilde{m})) = H(t), \quad (10.9)$$

во-вторых, если T , R и ∇ (соответственно, $\tilde{T}$, $\tilde{R}$ и $\tilde{\nabla}$) – кручение, кривизна и оператор ковариантного дифференцирования связности (8.1) (соответственно, (8.2)), то изоморфизм (10.8) переводит тензоры $\tilde{T}(\tilde{m})$ и $\tilde{R}(\tilde{m})$ в тензоры $T(t)$ и $R(t)$ соответственно.

Напомним, что диффеоморфизм

$$f: M \rightarrow M \quad (10.10)$$

называется *контактной симметрией уравнения (7.2)*, если

$$f \in \text{Hom}_{\text{MA}}(Q, Q). \quad (10.11)$$

Уравнение (7.2) называется *однородным*, если множество всех его контактных симметрий образует конечномерную группу Ли, которая транзитивно действует на многообразии M . Тем самым, в этом случае многообразие однородно. Если, сверх того, M редуктивно, то (7.2) называется *однородным редуктивным* уравнением Монжа–Ампера.

ТЕОРЕМА 10.5. Пусть уравнение (7.2) является объектом категории S , и пусть M – односвязное многообразие. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- а) уравнение (7.2) – это однородное редуктивное уравнение, а его характеристическая связность (8.1) – это каноническая связность многообразия M ;
- б) характеристическая связность (8.1) уравнения (7.2) полна и удовлетворяет уравнениям (10.5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в п. 15.

Из теорем 10.5, 10.3 и 9.4 вытекает глобальный вариант следствия 10.4.

СЛЕДСТВИЕ 10.6. Пусть уравнения (7.2) и (7.3) являются объектами категории S . Предположим, что это однородные редуктивные уравнения Монжа–Ампера, а отвечающие им характеристические связности (8.1) и (8.2) – это канонические связности многообразий M и $\tilde{M}$ соответственно. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- а) для любой пары $(t, \tilde{m})$ точек $t \in M$, $\tilde{m} \in \tilde{M}$ найдется аналитический диффеоморфизм $f: \tilde{M} \rightarrow M$ такой, что справедливы равенство $t = f(\tilde{m})$ и включение $f \in \text{Hom}_{\text{MA}}(\tilde{Q}, Q)$;
- б) утверждение б) следствия 10.4.

11. Вспомогательные конструкции. Построение характеристической аффинной связности для уравнения Монжа–Ампера (7.2), являющегося объектом категории MA_1 , подчинено следующему плану. Сначала для этого уравнения строятся линейные связности Σ_h и Σ_L на одномерном расслоении h , описанном в лемме 5.2, и контактном расслоении L (см. (1.4)) соответственно. По указанной лемме имеет место разложение

$$TM = h \oplus L. \quad (11.1)$$

Через χ_L и χ_h обозначим операторы проектирования:

$$\chi_L: TM \rightarrow L, \quad (11.2)$$

$$\chi_h: TM \rightarrow h, \quad (11.3)$$

определенные этим разложением. Искомая характеристическая аффинная связность (8.1) конструируется исходя из этого разложения как прямая сумма линейных связностей Σ_h и Σ_L , построенных на расслоениях h и L соответственно:

$$\Sigma = \Sigma_h \oplus \Sigma_L. \quad (11.4)$$

Настоящий пункт посвящен построению линейной связности Σ_h на одномерном расслоении h . Предполагается, что все встречающиеся ниже уравнения Монжа–Ампера являются либо эллиптическими, либо гиперболическими во всей области своего определения.

Рассмотрим уравнение (7.2) и выберем открытое множество $U \subseteq M$ в соответствии с леммой 4.3. Над U определены расслоения H_1 и H_2 . По леммам 5.2, 4.3 и следствию 4.4 для $T^{\mathbb{C}}U$ имеет место разложение

$$T^{\mathbb{C}}U = H_0 \oplus H_1 \oplus H_2, \quad (11.5)$$

где

$$H_0 = h|U. \quad (11.6)$$

Через χ_j , $j = 0, 1, 2$, обозначим оператор проектирования

$$\chi_j: T^{\mathbb{C}}U \rightarrow H_j, \quad (11.7)$$

определенный разложением (11.5). Справедлива

ЛЕММА 11.1. *На одномерном расслоении (11.6) для фиксированного $j = 1, 2$ существует единственная линейная комплексная связность Σ такая, что отвечающие ей операторы ковариантного дифференцирования ∇ и кривизны R обладают следующими свойствами: для любых сечений Z и Y расслоений H_0 и $L|U$ соответственно*

$$\nabla_Y Z = \chi_0([Y, Z]); \quad (11.8)$$

для любых сечений X и Y расслоения H_j

$$R(X, Y) = 0. \quad (11.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Единственность.* Предположим, что на векторном расслоении H_0 определены две связности Σ и $\tilde{\Sigma}$, удовлетворяющие свойствам (11.8) и (11.9). Отвечающие им операторы ковариантного дифференцирования обозначим через ∇ и $\tilde{\nabla}$ соответственно. По свойству (11.8)

$$\nabla_X = \tilde{\nabla}_X \quad (11.10)$$

для всех сечений X расслоения $L \mid U$. Отсюда согласно свойству (11.9) и определению оператора кривизны

$$R(X, Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]} \quad (11.11)$$

имеем

$$\nabla_{[X, Y]} = [\nabla_X, \nabla_Y] = [\tilde{\nabla}_X, \tilde{\nabla}_Y] = \tilde{\nabla}_{[X, Y]} \quad (11.12)$$

для любых сечений X и Y расслоения H_j . Для любых базисных сечений X_1 и Y_1 расслоения H_1 и любых базисных сечений X_2 и Y_2 расслоения H_2 комплексные векторные поля

$$X_1, Y_1, X_2, Y_2, [X_j, Y_j]$$

линейно независимы в каждой точке своего определения (см. доказательство леммы 5.2, а)). Поэтому из справедливости (11.10) для сечений расслоения $L \mid U$ и справедливости (11.12) для сечений расслоения H_j вытекает справедливость (11.10) для всех касательных векторов X многообразия M . Тем самым, связности Σ и $\tilde{\Sigma}$ совпадают.

Существование. Множество U выбрано в соответствии с леммой 4.3, и потому расслоения H_0 , H_1 и H_2 тривиальны. Пусть X_{k1} и X_{k2} – базисные сечения расслоения H_k , $k = 1, 2$. Положим в соответствии с (11.8)

$$\nabla_{X_{kl}} Z = \chi_0([X_{kl}, Z]) \quad (11.13)$$

для $k, l = 1, 2$ и всякого сечения Z расслоения H_0 . Далее, в соответствии с (11.12) положим

$$\nabla_{[X_{j1}, X_{j2}]} Z = [\nabla_{X_{j1}}, \nabla_{X_{j2}}] Z. \quad (11.14)$$

Легко проверить, что определенные согласно (11.13), (11.14) операторы относительно аргумента Z линейны и удовлетворяют условию Лейбница. Комплексные векторные поля

$$X_{11}, X_{12}, X_{21}, X_{22}, [X_{j1}, X_{j2}]$$

образуют базис расслоения $T^{\mathbb{C}}U$ (см. доказательство леммы 5.2, а)). Поэтому выражения (11.13), (11.14) определяют на расслоении H_j оператор ковариантного дифференцирования, отвечающий некоторой комплексной линейной связности Σ . В силу (11.13) ковариантная производная, отвечающая этой связности, удовлетворяет условию (11.8), а для ее кривизны R в силу (11.14) имеем

$$R(X_{j1}, X_{j2}) = 0,$$

т.е. выполнено условие (11.9). Лемма доказана.

ЛЕММА 11.2. Рассмотрим уравнения (7.2), (7.3) и некоторый диффеоморфизм

$$f: \widetilde{M} \rightarrow M, \quad (11.15)$$

удовлетворяющий включению

$$f \in \text{Hom}_{\text{MA}}(\widetilde{Q}, Q). \quad (11.16)$$

Выберем для уравнения (7.3) согласно лемме 4.3 некоторое множество $\widetilde{U} \subseteq \widetilde{M}$ и расслоения $\widetilde{H}_1$ и $\widetilde{H}_2$ на нем. Тогда справедливы следующие утверждения:

а) множество $U = f(\widetilde{U})$ и расслоения

$$H_1 = f_*(\widetilde{H}_1), \quad H_2 = f_*(\widetilde{H}_2) \quad (11.17)$$

удовлетворяют лемме 4.3 для уравнения (7.2);

б) операторы проектирования (11.7), отвечающие разложению (11.5) для уравнения (7.2), и операторы проектирования $\tilde{\chi}_j$, отвечающие аналогичному разложению для уравнения (7.3), удовлетворяют коммутационному соотношению

$$f_*^{-1} \circ \chi_j(X) = \tilde{\chi}_j \circ f_*^{-1}(X), \quad (11.18)$$

здесь $j = 0, 1, 2$, а X – произвольное векторное поле на U .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение а) очевидно. Докажем утверждение б). Согласно разложению (11.5)

$$X = \sum_{l=0}^2 \chi_l(X).$$

Аналогичным образом $f_*^{-1}(X) = \sum_{l=0}^2 \tilde{\chi}_l(f_*^{-1}(X))$. Полученные равенства показывают, что

$$\sum_{l=0}^2 f_*^{-1} \circ \chi_l(X) = \sum_{l=0}^2 \tilde{\chi}_l \circ f_*^{-1}(X). \quad (11.19)$$

Из (11.19) в силу (11.17) и следствия 5.6 получаем (11.18).

ЛЕММА 11.3. Рассмотрим уравнения (7.2), (7.3) и некоторый диффеоморфизм (11.15), удовлетворяющий включению (11.16). Выберем для уравнения (7.3) согласно лемме 4.3 произвольное множество $\widetilde{U} \subseteq \widetilde{M}$ и расслоения $\widetilde{H}_1$ и $\widetilde{H}_2$ на нем. Построим расслоения (11.17) над множеством $U = f(\widetilde{U})$ в соответствии с леммой 11.2, а) и линейные связности Σ и $\tilde{\Sigma}$ на расслоениях $h|U$ и $\tilde{h}|\tilde{U}$ в соответствии с леммой 11.1. Тогда под действием диффеоморфизма (11.15) эти связности отображаются друг в друга:

$$f_*^{-1}(\Sigma) = \tilde{\Sigma}.$$

Иными словами, если ∇ и $\tilde{\nabla}$ – операторы ковариантного дифференцирования, отвечающие соответственно связностям Σ и $\tilde{\Sigma}$, то для любого векторного поля X на U и любого сечения Z расслоения H_0

$$f_*^{-1}(\nabla_X Z) = \tilde{\nabla}_{f_*^{-1}(X)} f_*^{-1}(Z).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество U выбрано в соответствии с леммой 4.3, и поэтому расслоения H_0 , H_1 и H_2 тривиальны. Пусть X_{k1} и X_{k2} – базисные сечения расслоения H_k , $k = 1, 2$. В соответствии с (11.8)

$$f_*^{-1}(\nabla_{X_{kl}} Z) = f_*^{-1}(\chi_0([X_{kl}, Z])) \quad (11.20)$$

для $k, l = 1, 2$ и всякого сечения Z расслоения H_0 . По лемме 11.2, б) имеем

$$f_*^{-1} \circ \chi_0([X_{kl}, Z]) = \tilde{\chi}_0 \circ f_*^{-1}([X_{kl}, Z]).$$

Подставим полученное соотношение в правую часть равенства (11.20). В результате, учитывая свойство (11.8), выводим

$$f_*^{-1}(\nabla_{X_{kl}} Z) = \tilde{\chi}_0([f_*^{-1} X_{kl}, f_*^{-1} Z]) = \tilde{\nabla}_{f_*^{-1}(X_{kl})} f_*^{-1}(Z). \quad (11.21)$$

Согласно (11.9), (11.11) и (11.21)

$$f_*^{-1}(\nabla_{[X_{j1}, X_{j2}]} Z) = f_*^{-1}([\nabla_{X_{j1}}, \nabla_{X_{j2}}] Z) = [\tilde{\nabla}_{f_*^{-1}(X_{j1})}, \tilde{\nabla}_{f_*^{-1}(X_{j2})}] f_*^{-1}(Z).$$

Отсюда в силу (11.9) и (11.11) для связности $\tilde{\Sigma}$ получаем

$$f_*^{-1}(\nabla_{[X_{j1}, X_{j2}]} Z) = \tilde{\nabla}_{f_*^{-1}([X_{j1}, X_{j2}])} f_*^{-1}(Z). \quad (11.22)$$

Векторы X_{11} , X_{12} , X_{21} , X_{22} , $[X_{j1}, X_{j2}]$ линейно независимы, поэтому утверждение леммы вытекает из (11.21), (11.22). Лемма доказана.

ЛЕММА 11.4. Для всякой точки $m \in U$, вектора $\xi \in T_m^{\mathbb{C}} M$ и оператора χ_0

$$\chi_0(\bar{\xi}) = \overline{\chi_0(\xi)}. \quad (11.23)$$

Для операторов χ_j при $j = 1, 2$ в эллиптическом случае

$$\chi_j(\bar{\xi}) = \overline{\chi_{3-j}(\xi)}, \quad (11.24)$$

а в гиперболическом случае

$$\chi_j(\bar{\xi}) = \overline{\chi_j(\xi)}. \quad (11.25)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению (11.7) операторов проектирования

$$\xi = \sum_{\alpha=0}^2 \chi_{\alpha}(\xi), \quad \bar{\xi} = \sum_{\alpha=0}^2 \chi_{\alpha}(\bar{\xi}),$$

поэтому

$$\sum_{\alpha=0}^2 \chi_{\alpha}(\bar{\xi}) = \sum_{\alpha=0}^2 \overline{\chi_{\alpha}(\xi)}.$$

Отсюда в силу разложения (11.5) и леммы 5.2 вытекает равенство (11.23). Следовательно, по лемме 5.1, с) в эллиптическом случае имеет место равенство (11.24), а в гиперболическом – равенство (11.25). Лемма доказана.

ЛЕММА 11.5. Пусть Σ_j – линейная связность на расслоении H_0 , построенная в соответствии с леммой 11.1, $j = 1, 2$, и ∇^j – отвечающий ей оператор ковариантного дифференцирования. Тогда для всякого векторного поля X на U и сечения Z расслоения H_0 справедливо равенство

$$\nabla_{\overline{X}}^j \overline{Z} = \overline{\nabla_X^j Z}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество U выбрано в соответствии с леммой 4.3, и потому расслоения H_0 , H_1 и H_2 тривиальны. Пусть X_{k1} и X_{k2} – базисные сечения расслоения H_k , $k = 1, 2$, а Z – некоторое сечение расслоения H_0 . По свойству (11.8)

$$\nabla_{\overline{X}_{kl}}^j \overline{Z} = \chi_0([\overline{X}_{kl}, \overline{Z}]) = \chi_0([\overline{X}_{kl}, Z]).$$

Отсюда в силу леммы 11.4

$$\nabla_{\overline{X}_{kl}}^j \overline{Z} = \overline{\chi_0([X_{kl}, Z])} = \overline{\nabla_{X_{kl}}^j Z}. \quad (11.26)$$

Далее, по свойству (11.9)

$$\nabla_{[X_{j1}, X_{j2}]}^j \overline{Z} = [\nabla_{X_{j1}}^j, \nabla_{X_{j2}}^j] \overline{Z},$$

откуда согласно (11.26)

$$\nabla_{[X_{j1}, X_{j2}]}^j \overline{Z} = \overline{[\nabla_{X_{j1}}^j, \nabla_{X_{j2}}^j] Z} = \overline{\nabla_{[X_{j1}, X_{j2}]}^j Z}. \quad (11.27)$$

Векторы X_{11} , X_{12} , X_{21} , X_{22} , $[X_{j1}, X_{j2}]$ линейно независимы, поэтому из (11.26), (11.27) вытекает утверждение леммы. Лемма доказана.

ЛЕММА 11.6. Пусть выполнены все условия леммы 11.5. Тогда для всякого вещественного векторного поля X на U и сечения Y расслоения H_0 выражение

$$\nabla_X Y = (\nabla_X^1(Y) + \nabla_X^2(Y))/2 \quad (11.28)$$

задает оператор ковариантного дифференцирования. Отвечающая ему линейная связность Σ_U на расслоении H_0 вещественна, т.е.

$$\overline{\nabla_X Y} = \nabla_X Y. \quad (11.29)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверка линейности и выполнения для оператора (11.28) условия Лейбница относительно аргумента Y тривиальна. Свойство (11.29) вытекает из (11.28) и леммы 11.5.

ЛЕММА 11.7. Для уравнения (7.2) существует единственная линейная связность Σ на построенном согласно лемме 5.2 расслоении h , для которой справедливо следующее свойство. Выражение

$$\Sigma \mid U = \Sigma_U \quad (11.30)$$

справедливо для всякого множества U , выбранного в соответствии с леммой 4.3, и линейной связности Σ_U , построенной на расслоении H_0 согласно лемме 11.6.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как известно, любая линейная связность обладает свойством локальности [16, с. 196]. Поэтому единственность связности Σ , обладающей свойством (11.30), очевидна. Докажем ее существование. Для этого достаточно показать, что если выбранные в соответствии с леммой 4.3 множества U и W таковы, что

$$V = U \cap W \neq \emptyset,$$

то

$$\Sigma_U \mid V = \Sigma_V = \Sigma_W \mid V.$$

Последнее равенство является следствием определения (11.28) и доказанного в лемме 11.1 свойства единственности. Лемма доказана.

ЛЕММА 11.8. *Рассмотрим уравнения (7.2), (7.3) и отвечающие этим уравнениям линейные связности Σ и $\tilde{\Sigma}$, построенные согласно лемме 11.7 на под-расслоениях h и $\tilde{h}$. Если некоторый диффеоморфизм (11.15) удовлетворяет включению (11.16), то для него выполняется условие*

$$f_*(\tilde{h}) = h, \quad (11.31)$$

и он переводит указанные связности друг в друга:

$$f_*(\tilde{\Sigma}) = \Sigma. \quad (11.32)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выполнение (11.31) гарантировано следствием 5.6. Докажем равенство (11.32).

Выберем в соответствии с леммой 4.3 некоторое подмножество $\tilde{U}$ многообразия $\tilde{M}$, на котором определены отвечающие уравнению (7.3) расслоения $\tilde{H}_1$ и $\tilde{H}_2$. В силу леммы 11.2, а) их образы $U = f(\tilde{U})$ и расслоения (11.17) также удовлетворяют лемме 4.3 применительно к уравнению (7.2). По лемме 11.6 на расслоениях $\tilde{h} \mid \tilde{U}$ и $h \mid U$ существуют линейные связности $\tilde{\Sigma}_{\tilde{U}}$ и Σ_U . Поскольку согласно лемме 11.7 связности $\tilde{\Sigma}$ и Σ однозначно определяются свойством (11.30), то достаточно показать, что

$$f_*^{-1}(\Sigma_U) = \tilde{\Sigma}_{\tilde{U}}. \quad (11.33)$$

Обозначим через ∇ и $\tilde{\nabla}$ операторы ковариантного дифференцирования, отвечающие связностям Σ_U и $\tilde{\Sigma}_{\tilde{U}}$. Через ∇^1 и ∇^2 обозначим соответствующие ∇ операторы из определения (11.28), а через $\tilde{\nabla}^1$ и $\tilde{\nabla}^2$ – аналогичные операторы, соответствующие $\tilde{\nabla}$. Применим к левой и правой частям выражения (11.28) отображение f_*^{-1} . В результате для любого векторного поля X на U и сечения Y расслоения H_0 имеем

$$f_*^{-1}(\nabla_X Y) = f_*^{-1}(\nabla_X^1(Y)) + f_*^{-1}(\nabla_X^2(Y)),$$

откуда по лемме 11.3 получаем

$$f_*^{-1}(\nabla_X Y) = \tilde{\nabla}_{f_*^{-1}(X)}^1 f_*^{-1}(Y) + \tilde{\nabla}_{f_*^{-1}(X)}^2 f_*^{-1}(Y).$$

Таким образом, согласно определению (11.28) заключаем, что

$$f_*^{-1}(\nabla_X Y) = \tilde{\nabla}_{f_*^{-1}(X)}(f_*^{-1}(Y))$$

для любого векторного поля X на U и сечения Y расслоения H_0 . Иными словами, справедливо равенство (11.33). Лемма доказана.

В соответствии с леммами 11.1–11.7 на расслоении h (см. (5.1) и (5.3)) построена линейная связность, которая в дальнейшем обозначается через Σ_h . По лемме 11.8 эта связность инвариантна относительно контактных диффеоморфизмов. Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 11.9. *Для всякого уравнения Монжа–Ампера (7.2) эллиптического или гиперболического типа существует единственная линейная связность Σ на построенном согласно лемме 5.2 расслоении h , для которой справедливы следующие свойства:*

а) для любого множества U , выбранного в соответствии с леммой 4.3, и линейной связности Σ_U , построенной на расслоении (11.6) согласно лемме 11.6, имеет место выражение (11.30);

б) рассмотрим наряду с уравнением (7.2) другое уравнение (7.3) и отвечающую этому уравнению линейную связность $\tilde{\Sigma}$, построенную на подрасслоении $\tilde{h}$ согласно предыдущему пункту; если некоторый диффеоморфизм (11.15) удовлетворяет включению (11.16), то для него выполняется условие (11.31) и он переводит указанные связности друг в друга, т.е. справедливо соотношение (11.32).

12. Характеристические связности в случае MA_1 . Продолжим реализацию плана, намеченного в начале предыдущего пункта (см. (11.1)–(11.4)). Все встречающиеся в настоящем пункте уравнения предполагаются объектами категории MA_1 . Построим для таких уравнений линейную связность Σ_L на контактном расслоении L (см. (1.4)).

Выберем для уравнения (7.2) открытое подмножество $U \subseteq M$ в соответствии с леммой 4.3. Над U определены линейные расслоения H_1 и H_2 . По леммам 5.2, 4.3 и следствию 4.4 имеет место разложение (11.5) и определены операторы проектирования (11.7). Причем по лемме 4.3 и следствию 4.4

$$L|U = H_1 \oplus H_2, \quad (12.1)$$

и поэтому

$$\chi_L|T^{\mathbb{C}}U = \chi_1 + \chi_2. \quad (12.2)$$

Вторая производная каждого из двух расслоений H_1 и H_2 в рассматриваемом случае пятимерна (см. пример 6.1). Иными словами, при $j = 1, 2$

$$\dim_{\mathbb{C}} H_j^{(2)} = 5. \quad (12.3)$$

ЛЕММА 12.1. *На расслоении H_j , $j = 1, 2$, существует единственная линейная комплексная связность Σ такая, что отвечающие ей операторы ковариантного дифференцирования ∇ и кривизны R обладают следующими свойствами: для любых сечений $X_1 \in \Gamma(H_1)$ и $X_2 \in \Gamma(H_2)$*

$$\nabla_{X_{3-j}} X_j = \chi_j([X_{3-j}, X_j]); \quad (12.4)$$

для любых сечений X и Y первой производной $H_{3-j}^{(1)}$ расслоения H_{3-j}

$$R(X, Y) = 0. \quad (12.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Единственность.* Предположим, что на векторном расслоении H_j определены две линейные связности Σ и $\tilde{\Sigma}$, удовлетворяющие свойствам (12.4) и (12.5). Отвечающие им операторы ковариантного дифференцирования обозначим через ∇ и $\tilde{\nabla}$ соответственно. По свойству (12.4)

$$\nabla_X = \tilde{\nabla}_X \quad (12.6)$$

для всех сечений X расслоения H_{3-j} . Отсюда согласно свойству (12.5) и определению оператора кривизны

$$R(X, Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]} \quad (12.7)$$

имеем

$$\nabla_{[X, Y]} = [\nabla_X, \nabla_Y] = [\tilde{\nabla}_X, \tilde{\nabla}_Y] = \tilde{\nabla}_{[X, Y]} \quad (12.8)$$

для любых сечений X и Y расслоения H_{3-j} . Аналогичным образом, по определению производной $H_{3-j}^{(1)}$ из свойства (12.5) вытекает, что

$$\nabla_{[X, [X, Y]]} = \tilde{\nabla}_{[X, [X, Y]]}. \quad (12.9)$$

По определению второй производной равенство (12.3) означает, что для любых базисных сечений X и Y расслоения H_{3-j} векторные поля

$$X, Y, [X, Y], [X, [X, Y]], [Y, [X, Y]]$$

линейно независимы в каждой точке своего определения. Поэтому из справедливости (12.6), (12.8) и (12.9) для сечений расслоения H_{3-j} вытекает справедливость (12.6) для всех касательных векторов X многообразия M . Тем самым, связности Σ и $\tilde{\Sigma}$ совпадают.

Существование. Расслоение H_{3-j} выбрано в соответствии с леммой 4.3 и потому тривиально. Пусть $X_{3-j,1}$ и $X_{3-j,2}$ – базисные сечения этого расслоения. Положим в соответствии с (12.4)

$$\nabla_{X_{3-j,l}} X = \chi_j([X_{3-j,l}, X]) \quad (12.10)$$

для $l = 1, 2$ и всякого сечения X расслоения H_j . Далее, в соответствии с (12.7) и (12.5) положим

$$\begin{aligned} \nabla_{[X_{j1}, X_{j2}]} X &= [\nabla_{X_{j1}}, \nabla_{X_{j2}}] X, \\ \nabla_{[X_{jl}, [X_{j1}, X_{j2}]]} X &= [\nabla_{X_{jl}}, \nabla_{[X_{j1}, X_{j2}]]} X. \end{aligned} \quad (12.11)$$

Легко проверить, что определенные согласно (12.10), (12.11) операторы относительно аргумента X линейны и удовлетворяют условию Лейбница. В силу (12.3) комплексные векторные поля

$$X_{j1}, X_{j2}, [X_{j1}, X_{j2}], [X_{j1}, [X_{j1}, X_{j2}]], [X_{j2}, [X_{j1}, X_{j2}]]$$

образуют базис расслоения $T^{\mathbb{C}}U$. Поэтому выражения (12.10), (12.11) определяют на расслоении H_j оператор ковариантного дифференцирования некоторой комплексной линейной связности Σ . В силу (12.10) ковариантная производная, отвечающая этой связности, удовлетворяет условию (12.4), а для ее кривизны R в силу (12.11) имеем

$$R(X_{j1}, X_{j2}) = 0, \quad R(X_{jl}, [X_{j1}, X_{j2}]) = 0$$

при $l = 1, 2$, т.е. выполнено условие (12.5). Лемма доказана.

ЛЕММА 12.2. Рассмотрим уравнения (7.2), (7.3) и некоторый диффеоморфизм (11.15), удовлетворяющий включению (11.16). Выберем для уравнения (7.3) согласно лемме 4.3 некоторое множество $\tilde{U} \subseteq \tilde{M}$ и расслоения $\tilde{H}_1$ и $\tilde{H}_2$ на нем. Построим согласно лемме 12.1 линейные связности Σ и $\tilde{\Sigma}$ на удовлетворяющих соотношениям (11.17) расслоениях H_j и $\tilde{H}_j$. Тогда под действием диффеоморфизма (11.15) эти связности отображаются друг в друга:

$$f_*^{-1}(\Sigma) = \tilde{\Sigma}.$$

Иными словами, если ∇ и $\tilde{\nabla}$ – операторы ковариантного дифференцирования, отвечающие соответственно связностям Σ и $\tilde{\Sigma}$, то для любого векторного поля X на U и любого сечения Y расслоения H_j

$$f_*^{-1}(\nabla_X Y) = \tilde{\nabla}_{f_*^{-1}(X)} f_*^{-1}(Y).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X_1 и X_2 – базисные сечения расслоения H_{3-j} . В силу (12.4) для любого сечения Y расслоения H_j

$$f_*^{-1}(\nabla_{X_k} Y) = f_*^{-1}(\chi_j([X_k, Y])), \quad k = 1, 2. \quad (12.12)$$

По лемме 11.2, b) имеем

$$f_*^{-1} \circ \chi_j([X_k, Y]) = \tilde{\chi}_j \circ f_*^{-1}([X_k, Y]).$$

Подставим полученное соотношение в правую часть равенства (12.12). В результате, учитывая свойство (12.4), выводим

$$f_*^{-1}(\nabla_{X_k} Y) = \tilde{\chi}_j([f_*^{-1}X_k, f_*^{-1}Y]) = \tilde{\nabla}_{f_*^{-1}(X_k)} f_*^{-1}(Y). \quad (12.13)$$

Согласно (12.5), (12.7) и (12.13) для любого сечения Y расслоения H_j

$$f_*^{-1}(\nabla_{[X_1, X_2]} Y) = f_*^{-1}([\nabla_{X_1}, \nabla_{X_2}] Y) = [\tilde{\nabla}_{f_*^{-1}(X_1)}, \tilde{\nabla}_{f_*^{-1}(X_2)}] f_*^{-1}(Y).$$

Отсюда в силу (12.5) и (12.7) для связности $\tilde{\Sigma}$ получаем

$$f_*^{-1}(\nabla_{[X_1, X_2]} Y) = \tilde{\nabla}_{f_*^{-1}([X_1, X_2])} f_*^{-1}(Y). \quad (12.14)$$

Аналогичным образом устанавливается, что для $k = 1, 2$

$$f_*^{-1}(\nabla_{[X_k, [X_1, X_2]]} Y) = \tilde{\nabla}_{f_*^{-1}([X_k, [X_1, X_2]])} f_*^{-1}(Y). \quad (12.14')$$

Векторы

$$X_1, X_2, [X_1, X_2], [X_1, [X_1, X_2]], [X_2, [X_1, X_2]]$$

линейно независимы в силу свойства (12.3), поэтому утверждение леммы вытекает из (12.13)–(12.14'). Лемма доказана.

ЛЕММА 12.3. Пусть Σ_j – линейная связность на расслоении H_j , построенная в соответствии с леммой 12.1, $j = 1, 2$, и ∇^j – отвечающий ей оператор ковариантного дифференцирования. Тогда для всякого векторного поля X на U и сечения Y расслоения H_j в эллиптическом случае

$$\nabla_{\overline{X}}^{3-j} \overline{Y} = \overline{\nabla_X^j Y},$$

а в гиперболическом случае

$$\nabla_{\overline{X}}^j \overline{Y} = \overline{\nabla_X^j Y}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X_1 и X_2 – базисные сечения расслоения H_j . По свойству (12.4)

$$\begin{aligned} \nabla_{\overline{X}_k}^{3-j} \overline{Y} &= \chi_{3-j}([\overline{X}_k, \overline{Y}]) = \chi_{3-j}(\overline{[X_k, Y]}), \\ \nabla_{\overline{X}_k}^j \overline{Y} &= \chi_j([\overline{X}_k, \overline{Y}]) = \chi_j(\overline{[X_k, Y]}). \end{aligned}$$

Отсюда в силу леммы 11.4 в эллиптическом случае

$$\nabla_{\overline{X}_k}^{3-j} \overline{Y} = \overline{\chi_j([X_k, Y])} = \overline{\nabla_{X_k}^j Y}, \quad (12.15)$$

а в гиперболическом случае

$$\nabla_{\overline{X}_k}^j \overline{Y} = \overline{\chi_j([X_k, Y])} = \overline{\nabla_{X_k}^j Y}. \quad (12.16)$$

Далее, по свойству (12.5)

$$\nabla_{[X_1, X_2]}^{3-j} \overline{Y} = [\nabla_{X_1}^{3-j}, \nabla_{X_2}^{3-j}] \overline{Y}, \quad \nabla_{[X_1, X_2]}^j \overline{Y} = [\nabla_{X_1}^j, \nabla_{X_2}^j] \overline{Y},$$

откуда в эллиптическом случае согласно (12.15)

$$\nabla_{[X_1, X_2]}^{3-j} \overline{Y} = \overline{[\nabla_{X_1}^j, \nabla_{X_2}^j] Y} = \overline{\nabla_{[X_1, X_2]}^j Y}, \quad (12.17)$$

а в гиперболическом случае согласно (12.16)

$$\nabla_{[X_1, X_2]}^j \overline{Y} = \overline{[\nabla_{X_1}^j, \nabla_{X_2}^j] Y} = \overline{\nabla_{[X_1, X_2]}^j Y}. \quad (12.18)$$

Аналогичным образом устанавливается, что в эллиптическом случае

$$\nabla_{[X_k, [X_1, X_2]]}^{3-j} \overline{Y} = \overline{\nabla_{[X_k, [X_1, X_2]]}^j Y}, \quad (12.19)$$

а в гиперболическом случае

$$\nabla_{[X_k, [X_1, X_2]]}^j \overline{Y} = \overline{\nabla_{[X_k, [X_1, X_2]]}^j Y} \quad (12.20)$$

при $k = 1, 2$. Векторы

$$X_1, X_2, [X_1, X_2], [X_1, [X_1, X_2]], [X_2, [X_1, X_2]]$$

линейно независимы в силу соотношения (11.3), поэтому из (12.15), (12.20) вытекает утверждение леммы. Лемма доказана.

ЛЕММА 12.4. Пусть выполнены все условия леммы 12.3. Тогда для всякого вещественного векторного поля X на U и сечения Y расслоения $L \mid U$ выражение

$$\nabla_X Y = \nabla_X^1(\chi_1 Y) + \nabla_X^2(\chi_2 Y) \quad (12.21)$$

задает оператор ковариантного дифференцирования. Отвечающая ему линейная связность $\Sigma_U = \Sigma_1 \oplus \Sigma_2$ на расслоении $L \mid U$ вещественна, т.е.

$$\overline{\nabla_X Y} = \nabla_X Y. \quad (12.22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверка линейности и выполнения для оператора (12.21) условия Лейбница относительно аргумента Y тривиальна. Свойство (12.22) вытекает из (12.21) и лемм 11.4 и 12.3.

ЛЕММА 12.5. Для уравнения (7.2) существует единственная линейная связность Σ на контактном расслоении L такая, что выражение

$$\Sigma \mid U = \Sigma_U \quad (12.23)$$

справедливо для всякого множества U , выбранного в соответствии с леммой 4.3, и линейной связности Σ_U , построенной на расслоении $L \mid U$ согласно лемме 12.4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству леммы 11.7.

ЛЕММА 12.6. Рассмотрим уравнения (7.2) и (7.3) и отвечающие этим уравнениям линейные связности Σ и $\tilde{\Sigma}$, построенные согласно лемме 12.5 на контактных подрасслоениях L и $\tilde{L}$ соответственно. Если некоторый диффеоморфизм (11.15) удовлетворяет включению (11.16), то для него выполняется условие

$$f_*(\tilde{L}) = L \quad (12.24)$$

и он переводит указанные связности друг в друга, т.е.

$$f_*(\tilde{\Sigma}) = \Sigma. \quad (12.25)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выполнение (12.24) гарантировано замечанием 2.1. Докажем равенство (12.25).

Выберем в соответствии с леммой 4.3 некоторое подмножество $\tilde{U}$ многообразия $\tilde{M}$, на котором определены отвечающие уравнению (7.3) расслоения $\tilde{H}_1$ и $\tilde{H}_2$. В силу леммы 11.2, а) их образы $U = f(\tilde{U})$ и расслоения (11.17) также удовлетворяют лемме 4.3 применительно к уравнению (7.2). По лемме 12.4 на расслоениях $\tilde{L} \mid \tilde{U}$ и $L \mid U$ существуют линейные связности $\tilde{\Sigma}_{\tilde{U}}$ и Σ_U . Поскольку согласно лемме 12.5 связности $\tilde{\Sigma}$ и Σ однозначно определяются свойством (12.23), то достаточно показать, что

$$f_*^{-1}(\Sigma_U) = \tilde{\Sigma}_{\tilde{U}}. \quad (12.26)$$

Обозначим через ∇ и $\tilde{\nabla}$ операторы ковариантного дифференцирования, отвечающие связностям Σ_U и $\tilde{\Sigma}_{\tilde{U}}$. Через ∇^1 и ∇^2 обозначим соответствующие ∇ операторы из определения (12.21), а через $\tilde{\nabla}^1$ и $\tilde{\nabla}^2$ – аналогичные операторы, соответствующие $\tilde{\nabla}$. Применим к левой и правой частям (12.21) отображение f_*^{-1} . В результате для любого векторного поля X на U и сечения Y расслоения $L \mid U$ имеем

$$f_*^{-1}(\nabla_X Y) = f_*^{-1}(\nabla_X^1(\chi_1 Y)) + f_*^{-1}(\nabla_X^2(\chi_2 Y)),$$

откуда по лемме 12.2 получаем

$$f_*^{-1}(\nabla_X Y) = \tilde{\nabla}_{f_*^{-1}(X)}^1 f_*^{-1}(\chi_1 Y) + \tilde{\nabla}_{f_*^{-1}(X)}^2 f_*^{-1}(\chi_2 Y).$$

Применяя к полученному выражению лемму 11.2, b), выводим

$$f_*^{-1}(\nabla_X Y) = \tilde{\nabla}_{f_*^{-1}(X)}^1 \tilde{\chi}_1(f_*^{-1}(Y)) + \tilde{\nabla}_{f_*^{-1}(X)}^2 \tilde{\chi}_2(f_*^{-1}(Y)).$$

Таким образом, согласно определению (12.21) заключаем, что

$$f_*^{-1}(\nabla_X Y) = \tilde{\nabla}_{f_*^{-1}(X)}(f_*^{-1}(Y))$$

для любого векторного поля X на U и сечения Y расслоения $L \mid U$. Иными словами, справедливо равенство (12.26). Лемма доказана.

ЛЕММА 12.7. *Рассмотрим уравнение (7.2) и отвечающую этому уравнению линейную связность Σ , построенную согласно лемме 12.5 на контактном подрасслоении L . Пусть $t \in M$ и ξ_0 – характеристический вектор уравнения (7.2) в точке t , $\xi_0 \in H(t)$, а*

$$l: [0, 1] \rightarrow M \tag{12.27}$$

– произвольная кусочно гладкая кривая, $l(0) = t$. Тогда для всех $0 \leq t \leq 1$

$$\xi(l(t)) \in H(l(t)), \tag{12.28}$$

где $\xi(l(t))$ – вектор, параллельный ξ_0 относительно связности Σ вдоль кривой (12.27).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Кривая (12.27) компактна, поэтому ее можно покрыть конечным числом открытых множеств, удовлетворяющих лемме 4.3. Следовательно, утверждение леммы достаточно доказать лишь в случае, когда кривая (12.27) целиком лежит внутри множества U , удовлетворяющего лемме 4.3. В этом случае, если $j = 1, 2$ и $\xi_0 \in H_j(t)$, включение (12.28) выполняется в силу единственности векторного поля, параллельного ξ_0 относительно линейной связности Σ_j на расслоении H_j вдоль кривой (12.27). Отсюда по свойству (12.23) связности Σ и определению (12.21) связности Σ_U получаем утверждение леммы.

ЗАМЕЧАНИЕ 12.8. В соответствии с леммами 12.1–12.5 на контактном расслоении L построена линейная связность, которая в дальнейшем обозначается через Σ_L . По лемме 12.6 эта связность инвариантна относительно контактных диффеоморфизмов, а по лемме 12.7 характеристическое расслоение параллельно относительно Σ_L .

По лемме 5.2, b) для расслоений L и h справедливо разложение (11.1) и определены операторы проектирования (11.2), (11.3).

ЛЕММА 12.9. *Рассмотрим уравнение (7.2) и отвечающие этому уравнению линейные связности Σ_h и Σ_L , построенные согласно теореме 11.9 и замечанию 12.8 на подрасслоениях h и L . Пусть ∇^h и ∇^L – отвечающие указанным связностям операторы ковариантного дифференцирования. Тогда для всяких векторных полей X и Y на M выражение*

$$\nabla_X Y = \nabla_X^h(\chi_h Y) + \nabla_X^L(\chi_L Y) \quad (12.29)$$

задает оператор ковариантного дифференцирования. Иными словами, оператор (12.29) определяет на M аффинную связность

$$\Sigma = \Sigma_h \oplus \Sigma_L.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверка линейности по X, Y и выполнения для оператора (12.29) условия Лейбница относительно аргумента Y тривиальна. Лемма доказана.

ЛЕММА 12.10. *Рассмотрим уравнения (7.2) и (7.3) и отвечающие этим уравнениям связности Σ и $\tilde{\Sigma}$, построенные согласно лемме 12.9. Если некоторый диффеоморфизм (11.15) удовлетворяет включению (11.16), то он переводит указанные связности друг в друга:*

$$f_*(\tilde{\Sigma}) = \Sigma.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из определения связности (12.29), теоремы 11.9 и леммы 12.6.

ЛЕММА 12.11. *Рассмотрим уравнение (7.2) и отвечающую этому уравнению связность Σ , построенную согласно лемме 12.9. Пусть $t \in M$ и ξ_0 – характеристический вектор уравнения (7.2) в точке $t \in M$, $\xi_0 \in H(t)$, а (12.27) – произвольная кусочно гладкая кривая, $l(0) = t$. Тогда для всех $0 \leq t \leq 1$ выполнено включение (12.28), где $\xi(l(t))$ – вектор, параллельный ξ_0 относительно связности Σ вдоль кривой (12.27).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из леммы 12.7.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7.3 (случай MA_1). В соответствии с леммой 12.9 сопоставим всякому уравнению (7.2), являющемуся объектом категории MA_1 , аффинную связность Σ , т.е. положим

$$\Xi(Q) = \Sigma. \quad (12.30)$$

Для всякого уравнения (7.3) и диффеоморфизма (11.15), удовлетворяющего включению (11.16), положим

$$\Xi(f) = f. \quad (12.31)$$

По лемме 12.10 диффеоморфизм f является аффинным, т.е. справедливо включение

$$f \in \text{Hom}_{\text{AC}}(\Xi(\tilde{Q}), \Xi(Q)). \quad (12.32)$$

Тем самым, выражения (12.30) и (12.31) определяют на категории MA_1 функтор Ξ , удовлетворяющий ограничениям а) и б) определения 7.1. Согласно определению (12.29) и в силу леммы 12.11 этот функтор также удовлетворяет и ограничению с). В случае MA_1 теорема доказана.

13. Характеристические связности в случае $\text{MA}_{0.5}$. Построение функтора характеристической связности в случае категории $\text{MA}_{0.5}$ несколько отклоняется от плана, намеченного в начале пункта 11. Это связано со спецификой этой категории. Так, согласно определению категории $\text{MA}_{0.5}$ (см. п. 1) примера 6.2) в этом случае имеет место не только локальное разложение (11.5), но и глобальное разложение

$$T^{\mathbb{C}}M = h \oplus H_1 \oplus H_2. \quad (13.1)$$

Кроме того, в этом случае для всех $m \in M$

$$\dim_{\mathbb{C}} H_1^{(2)}(m) = 5. \quad (13.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7.3 (случай $\text{MA}_{0.5}$). Рассмотрим произвольное уравнение (7.2), являющееся объектом категории $\text{MA}_{0.5}$, и отвечающее ему характеристическое разложение (13.1). На основании (13.2) из леммы 12.1 при $j = 1$ выводим, что на характеристическом расслоении H_2 существует единственная линейная связность Σ_2 , обладающая свойствами (12.4) и (12.5). Пусть (7.3) – еще один объект категории $\text{MA}_{0.5}$, $\tilde{H}_1$, $\tilde{H}_2$ и $\tilde{h}$ – соответствующие ему характеристические расслоения, а $\tilde{\Sigma}_2$ – линейная связность на $\tilde{H}_2$. По леммам 5.5 и 12.2 для всякого диффеоморфизма (11.15), удовлетворяющего включению (11.6),

$$f_*(\tilde{H}_2) = H_2, \quad f_*(\tilde{\Sigma}_2) = \Sigma_2. \quad (13.3)$$

Обозначим через Σ_h линейную связность на h , построенную согласно теореме 11.9. Определим на расслоении

$$H_2 \oplus h \quad (13.4)$$

линейную связность $\Sigma_{\oplus}$ как прямую сумму связностей Σ_2 и Σ_h :

$$\Sigma_{\oplus} = \Sigma_2 \oplus \Sigma_h.$$

Если $\tilde{\Sigma}_{\oplus}$ – аналогичная связность, отвечающая уравнению (7.3), то по теореме 11.9 и свойству (13.3)

$$f_*(\tilde{H}_2 \oplus \tilde{h}) = H_2 \oplus h, \quad f_*(\tilde{\Sigma}_{\oplus}) = \Sigma_{\oplus}. \quad (13.5)$$

Рассмотрим ассоциированное с линейным расслоением (13.4) главное расслоение реперов G_3 , слой $G_3(m)$ которого состоит из адаптированных реперов линейного расслоения (13.4) над m :

$$G_3(m) = \{(e, e_1, e_2) \mid e \in h(m), e_1, e_2 \in H_2(m), e \wedge e_1 \wedge e_2 \neq 0\}.$$

Аналогичным образом рассмотрим ассоциированное с расслоением H_2 главное расслоение реперов G_2 , слой которого состоит из всех реперов над m . В силу (13.2) при $j = 1$ линейный оператор (6.5) невырожден и потому задает гомоморфизм g главного расслоения G_3 на G_2 :

$$g: G_3 \ni (e, e_1, e_2) \mapsto ((A_1^e)^{-1}(e_1), (A_1^e)^{-1}(e_2)) \in G_2. \quad (13.6)$$

Для уравнения (7.2) в соответствии с разложением (13.1) положим

$$\Sigma = \Sigma_h \oplus g(\Sigma_{\oplus}) \oplus \Sigma_2, \quad (13.7)$$

где $g(\Sigma_{\oplus})$ – линейная связность, являющаяся образом связности $\Sigma_{\oplus}$ относительно гомоморфизма (13.6) (см. [18, гл. 2, § 6]).

По аналогии со случаем MA_1 для всякого уравнения (7.2) и диффеоморфизма (11.15), удовлетворяющего включению (11.16), определим функтор характеристической связности Ξ выражениями (12.30), (12.31). Если $\tilde{g}$ – гомоморфизм главного расслоения $\tilde{G}_3$ на $\tilde{G}_2$, построенный для уравнения (7.3) в соответствии с (13.6), то аналогично доказательству леммы 11.2, б) устанавливается коммутационное соотношение

$$g \circ f_* = f_* \circ \tilde{g}.$$

Отсюда по построению (13.7) и в силу (13.3), (13.5) выводим, что диффеоморфизм f является аффинным, т.е. справедливо включение (12.32). Тем самым, выражения (12.30) и (12.31) определяют функтор Ξ из категории $MA_{0.5}$ в категорию AC , удовлетворяющий ограничениям а) и б) определения 7.1. Согласно определению (13.7) по аналогии с доказательством леммы 12.11 устанавливается, что этот функтор удовлетворяет также и ограничению с). В случае $MA_{0.5}$ теорема доказана.

14. Характеристические связности в случае MA_0 . Построение функтора характеристической связности в случае категории MA_0 во многом аналогично случаям категорий $MA_{0.5}$ и MA_1 . Для уравнений категории MA_0 кроме разложения (11.5) имеет место более тонкое локальное разложение (см. пример 6.3, формула (6.7))

$$T^{\mathbb{C}}U = H_0 \oplus h_{11} \oplus h_{12} \oplus h_{21} \oplus h_{22}. \quad (14.1)$$

Через χ_{jk} , $j, k = 1, 2$, обозначим оператор проектирования

$$\chi_{jk}: T^{\mathbb{C}}U \rightarrow h_{jk},$$

определенный разложением (14.1).

ЛЕММА 14.1. На одномерном расслоении h_{j1} для фиксированного $j = 1, 2$ существует единственная линейная комплексная связность Σ_j такая, что отвечающие ей операторы ковариантного дифференцирования ∇^j и кривизны R_j обладают следующими свойствами: для любых сечений Z и Y расслоений h_{j1} и $H_0 \oplus h_{3-j1} \oplus h_{12} \oplus h_{22}$ соответственно

$$\nabla_Y^j Z = \chi_{j1}([Y, Z]);$$

для любых сечений X и Y расслоений H_0 и h_{3-j1} соответственно

$$R_j(X, Y) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству лемм 11.1 и 12.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7.3 (случай MA_0). Рассмотрим уравнение (7.2), являющееся объектом категории MA_0 , и выберем открытое множество $U \subseteq M$ в соответствии с леммой 4.3. Над U имеет место разложение (14.1). По лемме 14.1 и теореме 11.9 на расслоении

$$H_0 \oplus h_{j1} \quad (14.2)$$

определена линейная связность $\Sigma_{j\oplus} = \Sigma_h \mid U \oplus \Sigma_j$.

Рассмотрим ассоциированное с линейным расслоением (14.2) главное расслоение реперов G_{j2} , слой $G_{j2}(m)$ которого состоит из адаптированных реперов линейного расслоения (14.2) над m :

$$G_{j2}(m) = \{(e, e_j) \mid e \in H_0(m), \quad e_j \in h_{j1}(m), \quad e \wedge e_j \neq 0\}.$$

Аналогичным образом рассмотрим ассоциированное с линейным расслоением h_{j2} главное расслоение реперов G_{j1} , слой $G_{j1}(m)$ которого состоит из всех реперов расслоения h_{j2} над m . Для всякого базисного сечения e расслоения H_0 определим линейный оператор

$$B_j^e: h_{j1} \ni \xi \mapsto \eta \in h_{j2} \quad (14.3)$$

так, чтобы $d\omega_0(\xi, \eta) = \omega_0(e)$ для всех контактных форм $\omega_0 \in I_0(U)$. По лемме 5.1, а) и в силу условия невырожденности (1.3) линейный оператор (14.3) невырожден и потому задает гомоморфизм g_j главного расслоения G_{j2} на G_{j1} :

$$g_j: G_{j2} \ni (e, e_j) \mapsto B_j^e(e_j). \quad (14.4)$$

Для уравнения (7.2) в соответствии с разложением (14.1) положим

$$\Sigma_U = \Sigma_h \oplus \Sigma_1 \oplus g_1(\Sigma_{1\oplus}) \oplus \Sigma_2 \oplus g_2(\Sigma_{2\oplus}), \quad (14.5)$$

где $g_j(\Sigma_{j\oplus})$ – линейная связность, являющаяся образом связности $\Sigma_{j\oplus}$ относительно гомоморфизма (14.4) (см. [18, гл. 2, § 6]).

По аналогии с леммой 12.5 устанавливается, что равенство (12.23) однозначно определяет аффинную связность Σ на многообразии M . По аналогии со случаем $MA_{0.5}$ для всякого уравнения (7.3) и диффеоморфизма (11.15), удовлетворяющего включению (11.16), определим функтор характеристической связности Ξ выражениями (12.30). (12.31). Аналогично случаю $MA_{0.5}$ доказывается, что этот диффеоморфизм f является аффинным, т.е. справедливо включение (12.32). Тем самым, выражения (12.30) и (12.31) определяют функтор Ξ из категории MA_0 в категорию АС, удовлетворяющий ограничениям а) и б) определения 7.1. Согласно определению (14.5) по аналогии с доказательством леммы 12.11 устанавливается, что этот функтор также удовлетворяет и ограничению с). Теорема доказана.

15. Доказательства теорем эквивалентности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 8.1. а) $\Rightarrow$ б). Пусть выполнено утверждение а). Выберем окрестности (8.4) так, чтобы им отвечали нормальные координатные окрестности (8.6). При этом всегда можно добиться того, чтобы U и $\tilde{U}$ удовлетворяли утверждению а). Определим линейный изоморфизм F посредством равенства

$$F = f_*(\tilde{m}). \quad (15.1)$$

Справедливость (8.12) вытекает из леммы 5.4. По теореме 7.2 диффеоморфизм (8.7) является аффинным, т.е. имеет место равенство

$$f_*(\tilde{\Sigma} \mid \tilde{U}) = \Sigma \mid U. \quad (15.2)$$

Поэтому справедливо соотношение (7.13), где $\tilde{\tau}$ – параллельный перенос вдоль любой гладкой кривой (7.9) из точки $\tilde{m}$ в точку r , а τ – параллельный перенос вдоль кривой (7.11) из точки m в точку $f(r)$. Из (7.13) вытекает, что изоморфизм (8.9), построенный из соотношения коммутативности (8.10), удовлетворяет равенству $F_r = f_*(r)$. Но $f_*(r)$ переводит $\tilde{R}_r$ в $R_{f(r)}$ и $\tilde{T}_r$ в $T_{f(r)}$, где $\tilde{R}$ и $\tilde{T}$ (соответственно, R и T) – кривизна и кручение связности $\tilde{\Sigma}$ (соответственно, Σ), по известным свойствам аффинных отображений [18, гл. 6, § 1].

б) $\Rightarrow$ с). Пусть имеет место утверждение б). По теореме Э. Картана [19, § 1.7] построенный из соотношения коммутативности (8.8) диффеоморфизм (8.7) является аффинным, т.е. выполнено (15.2). Кроме того, справедливы равенства $m = f(\tilde{m})$ и (15.1). По теореме 7.2 из (15.2), (15.1) и (8.12) вытекает, что диффеоморфизм (8.7) удовлетворяет равенствам (8.11). Выберем базис Ξ касательного пространства $T_{\tilde{m}}\tilde{M}$ и вычислим его образ $F(\Xi)$. Отвечающие этим базисам изоморфизмы (8.13) и (8.14) удовлетворяют соотношению

$$F \circ \Xi = F(\Xi). \quad (15.3)$$

Сопоставляя (15.3) и (8.8), приходим к равенству

$$f \circ (\exp_{\tilde{m}} \circ \Xi) = \exp_m \circ F(\Xi). \quad (15.4)$$

Из равенств (8.11), (15.4) заключаем справедливость (8.15), (8.16).

с) $\Rightarrow$ а). Пусть имеет место утверждение с). Выберем диффеоморфизм (8.7) из коммутационного соотношения (15.4), т.е.

$$f = \exp_m \circ F(\Xi) \circ (\exp_{\tilde{m}} \circ \Xi)^{-1}.$$

Тем самым, для f справедливо $m = f(\tilde{m})$ и

$$f^* = ((\exp_{\tilde{m}} \circ \Xi)^{-1})^* \circ (\exp_m \circ F(\Xi))^*.$$

Отсюда и из (8.15), (8.16) вытекает (8.11). Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 8.2. а) $\Rightarrow$ б). Пусть имеет место утверждение а). Определим линейный изоморфизм F посредством равенства (15.1). Из леммы 5.4 вытекает справедливость равенства (8.12). По теореме 7.2 диффеоморфизм (8.25) является аффинным, т.е. справедливо равенство

$$f_*(\tilde{\Sigma}) = \Sigma. \quad (15.5)$$

Следовательно, справедливо коммутационное соотношение (7.13). Из этого соотношения вытекает, что линейный изоморфизм (8.23), построенный в соответствии с (8.24), удовлетворяет равенству

$$F_G = f_*(\gamma_G(k)). \quad (15.6)$$

Поскольку аффинный диффеоморфизм (8.25) необходимо переводит $\tilde{R}_{\gamma_G(k)}$ в $R_{\gamma_{F(G)}(k)}$ и $\tilde{T}_{\gamma_G(k)}$ в $T_{\gamma_{F(G)}(k)}$, то этим свойством обладает и F_G .

б) $\Rightarrow$ а). Пусть имеет место утверждение б). По теореме Картана–Амброуза–Хикса [19, § 1.9] существует единственный аффинный диффеоморфизм (8.25), для которого выполнены равенства (15.6) и

$$f(\gamma_G(k)) = \gamma_{F(G)}(k).$$

Следовательно, для этого диффеоморфизма $m = f(\tilde{m})$ и справедливы свойства (15.5) и (15.1). По теореме 7.2 из $m = f(\tilde{m})$, (15.5), (8.12) и (15.1) вытекает, что диффеоморфизм (8.25) удовлетворяет включению (8.26). Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 9.3. а) $\Rightarrow$ б). Пусть выполнено утверждение а). Определим изоморфизм (9.3) выражением (15.1). Выполнение (9.4) вытекает из леммы 5.4. По теореме 7.2 в силу равенств (9.2) диффеоморфизм (9.1) является аффинным, т.е. справедливо (15.2). Поэтому то, что изоморфизм (15.1) переводит тензоры $\tilde{\nabla}^k \tilde{T}(\tilde{m})$ и $\tilde{\nabla}^k \tilde{R}(\tilde{m})$ в тензоры $\nabla^k T(m)$ и $\nabla^k R(m)$, вытекает из известных свойств аффинных отображений [18, гл. 6, § 1] и ковариантного дифференциала [18, гл. 3, § 2].

б) $\Rightarrow$ а). Пусть выполнено утверждение б). Тогда по известной теореме о локальной эквивалентности аффинных связностей [18, гл. 6, § 7] найдется аналитический диффеоморфизм (9.1) некоторой связной окрестности $\tilde{U}$ точки $\tilde{m}$ на окрестность U точки m , удовлетворяющий равенствам $m = f(\tilde{m})$, (15.1) и (15.2), т.е. являющийся аффинным. Отсюда и из (9.4) по теореме 7.2 заключаем, что диффеоморфизм (9.1) удовлетворяет равенствам (9.2). Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 9.4. а) $\Rightarrow$ б). Дословно совпадает с доказательством импликации а) $\Rightarrow$ б) теоремы 9.3.

б) $\Rightarrow$ а). Аналогично доказательству импликации б) $\Rightarrow$ а) теоремы 9.3. Ссылку на теорему о локальной эквивалентности аффинных связностей следует заменить ссылкой на теорему о глобальной эквивалентности аффинных связностей [18, гл. 6, § 7]. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 10.2. Как известно [18, гл. 6, § 7, следствие 7.6], условия (10.5) необходимы и достаточны для того, чтобы характеристическая связность (8.1) была инвариантна при параллелизме. Это означает, что для любых двух точек r и m многообразия M , любой непрерывной кривой на M , соединяющей эти точки, и параллельного переноса (10.2) вдоль этой кривой относительно аффинной связности (8.1) существуют окрестность U точки m , окрестность V точки r и диффеоморфизм (10.3) такой, что

$$f_*(\tilde{\Sigma} \mid V) = \Sigma \mid U, \quad (15.7)$$

и справедливы равенства $f(r) = m$ и $f_*(r) = \tau$. Кроме того, по определению 7.1, с) выполняется равенство

$$\tau(H(r)) = H(m).$$

Тем самым, из теоремы 7.2 вытекает истинность доказываемой теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 10.3. По теореме 10.2 характеристическая связность (8.1) уравнения (7.2) тогда и только тогда инвариантна при параллелизме, когда таковым является само уравнение (7.2). Относительно атласа, состоящего из нормальных систем координат связности (8.1) уравнения (7.2), M является вещественно-аналитическим многообразием с вещественно-аналитической связностью (8.1) [18, гл. 6, теорема 7.7]. По определению 7.1, с) и в силу известных теорем об аналитичности решений обыкновенных дифференциальных уравнений [20, гл. 6, § 2, 4] характеристическое расслоение H уравнения (7.2) также вещественно-аналитично. Таким образом, по следствию 4.4 и по лемме 5.1, b) уравнение (7.2) порождено некоторым вещественно-аналитическим уравнением. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 10.5. а) $\Rightarrow$ б). Если характеристическая связность (8.1) является канонической, то она необходимо полна и удовлетворяет уравнениям (10.5) [21, гл. 10, следствие 2.5, теорема 2.6].

б) $\Rightarrow$ а). Пусть характеристическая связность (8.1) полна и удовлетворяет уравнениям (10.5). Тогда по теореме 10.2 эта связность инвариантна при параллелизме. Следовательно, для любых двух точек r и m многообразия M , любой непрерывной кривой на M , соединяющей эти точки, и параллельного переноса (10.2) вдоль этой кривой относительно аффинной связности (8.1) существуют окрестность U точки m , окрестность V точки r и локальный диффеоморфизм (10.3) такой, что справедливы равенства (15.7), $f(r) = m$ и $f_*(r) = \tau$. Этот локальный аффинный диффеоморфизм можно однозначно продолжить до глобального аффинного диффеоморфизма (10.10) [18, гл. 6, следствие 6.2]. По определению 7.1, с) выполняется равенство

$$\tau(H(r)) = H(m).$$

Тем самым, из теоремы 7.2 вытекает (10.11), т.е. построенный диффеоморфизм (10.10) является контактной симметрией. Рассмотрим группу всех построенных указанным образом контактных симметрий. Эта группа является конечномерной группой Ли и транзитивно действует на M , превращая его в однородное редуктивное многообразие с канонической связностью (8.1) [21, гл. 10, § 2, с. 181].

16. Примеры вычисления характеристических связностей. Согласно замечанию 7.4 для вычисления характеристической аффинной связности уравнения Монжа–Ампера, являющегося объектом одной из трех подкатегорий MA_1 , $MA_{0.5}$ или MA_0 , требуется выполнение лишь конечного числа операций дифференцирования, сложения, вычитания, умножения и деления над координатами отвечающих этому уравнению векторных полей (4.12). Ниже приведены два примера соответствующих вычислений и один пример решения задачи о локальной эквивалентности двух конкретных уравнений Монжа–Ампера.

ПРИМЕР 16.1. Рассмотрим уравнение Монжа–Ампера Q вида

$$(1 + z_x^2 + z_y^2)^2 + z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = 0, \quad (16.1)$$

определенное в пространстве $\mathbb{R}^5$. Геометрический смысл этого уравнения заключается в том, что гауссова кривизна графика его решения $z = z(x, y)$ равна минус единице. Уравнение (16.1) гиперболично, и в соответствии с примерами 1.4 и 4.1 его характеристическое расслоение H_1 порождено векторными полями

$$e_{11} = \frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial q}, \quad e_{12} = \frac{\partial}{\partial y} + q \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial p},$$

а характеристическое расслоение H_2 – векторными полями

$$e_{21} = \frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial q}, \quad e_{22} = \frac{\partial}{\partial y} + q \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial p}.$$

По лемме 5.2 определено одномерное векторное расслоение

$$h = H_1^{(1)} \cap H_2^{(1)}, \quad (16.2)$$

являющееся пересечением первых производных характеристических расслоений H_1 и H_2 . Оно порождено векторным полем

$$e = \frac{\partial}{\partial z} + p \frac{\partial}{\partial x} + q \frac{\partial}{\partial y}.$$

Непосредственная проверка показывает, что в данном случае для $j = 1, 2$ выполнено условие общего положения

$$e_{j1} \wedge e_{j2} \wedge [e_{j1}, e_{j2}] \wedge [e_{j1}, [e_{j1}, e_{j2}]] \wedge [e_{j2}, [e_{j1}, e_{j2}]] \neq 0. \quad (16.3)$$

Тем самым, уравнение (16.1) принадлежит подкатегории MA_1 уравнений Монжа–Ампера общего положения. По теореме 7.3 существует характеристическая аффинная связность $\Xi[Q]$, отвечающая рассматриваемому уравнению Q . Следуя алгоритму, изложенному в пп. 11 и 12, вычисляем

$$\nabla_e e = 0, \quad \nabla_{e_{11}} e = -qe, \quad \nabla_{e_{12}} e = pe, \quad \nabla_{e_{21}} e = qe, \quad \nabla_{e_{22}} e = -pe;$$

$$\nabla_{e_{11}} e = - \left((p^4 + 2p^2q^2 + 2p^2 + q^4 + 2q^2 + 1) \left(\frac{\partial}{\partial y} + q \frac{\partial}{\partial z} \right) \right)$$

$$\begin{aligned}
& + (p^6 + 3p^4q^2 + 3p^4 + 3p^2q^4 + 6p^2q^2 + 3p^2 + q^6 + 3q^4 + \\
& + 3q^2 + 1) \frac{\partial}{\partial p} \Big) / (2(1 + p^2 + q^2)), \\
\nabla_{e_{11}} e_{11} &= 2pq \frac{\partial}{\partial z} + q \frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial y} + (p^2 + q^2 + 1) \left(p \frac{\partial}{\partial p} - q \frac{\partial}{\partial q} \right), \\
\nabla_{e_{12}} e_{11} &= 2(p^2 + 2q^2) \frac{\partial}{\partial z} + 2p \frac{\partial}{\partial x} + 2q \frac{\partial}{\partial y} + (p^2 + q^2 + 1) \left(4q \frac{\partial}{\partial p} - 2p \frac{\partial}{\partial q} \right), \\
\nabla_{e_{21}} e_{11} &= \nabla_{e_{22}} e_{12} = 0, \\
\nabla_{e_{22}} e_{11} &= -(p^2 + q^2) \frac{\partial}{\partial z} - p \frac{\partial}{\partial x} - q \frac{\partial}{\partial y} - (p^2 + q^2 + 1) \left(q \frac{\partial}{\partial p} + p \frac{\partial}{\partial q} \right); \\
\nabla_e e_{12} &= \left((p^4 + 2p^2q^2 + 2p^2 + q^4 + 2q^2 + 1) \left(\frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial z} \right) \right. \\
& \quad \left. - (p^6 + 3p^4q^2 + 3p^4 + 3p^2q^4 + 6p^2q^2 + 3p^2 + q^6 + 3q^4 \right. \\
& \quad \left. + 3q^2 + 1) \frac{\partial}{\partial q} \right) / (2(1 + p^2 + q^2)), \\
\nabla_{e_{11}} e_{12} &= -2(2p^2 + q^2) \frac{\partial}{\partial z} - 2p \frac{\partial}{\partial x} - 2q \frac{\partial}{\partial y} + (p^2 + q^2 + 1) \left(-2q \frac{\partial}{\partial p} + 4p \frac{\partial}{\partial q} \right), \\
\nabla_{e_{12}} e_{12} &= -2pq \frac{\partial}{\partial z} - q \frac{\partial}{\partial x} - p \frac{\partial}{\partial y} + (p^2 + q^2 + 1) \left(-p \frac{\partial}{\partial p} + q \frac{\partial}{\partial q} \right), \\
\nabla_{e_{21}} e_{12} &= (p^2 + q^2) \frac{\partial}{\partial z} + p \frac{\partial}{\partial x} + q \frac{\partial}{\partial y} + q(p^2 + q^2 + 1) \left(q \frac{\partial}{\partial p} - p \frac{\partial}{\partial q} \right); \\
\nabla_e e_{21} &= \left((p^4 + 2p^2q^2 + 2p^2 + q^4 + 2q^2 + 1) \left(\frac{\partial}{\partial y} + q \frac{\partial}{\partial z} \right) \right. \\
& \quad \left. - (p^6 + 3p^4q^2 + 3p^4 + 3p^2q^4 + 6p^2q^2 + 3p^2 + q^6 + 3q^4 \right. \\
& \quad \left. + 3q^2 + 1) \frac{\partial}{\partial p} \right) / (2(1 + p^2 + q^2)), \\
\nabla_{e_{11}} e_{21} &= \nabla_{e_{12}} e_{22} = 0, \\
\nabla_{e_{12}} e_{21} &= (p^2 + q^2) \frac{\partial}{\partial z} + p \frac{\partial}{\partial x} + q \frac{\partial}{\partial y} + (p^2 + q^2 + 1) \left(-q \frac{\partial}{\partial p} + p \frac{\partial}{\partial q} \right), \\
\nabla_{e_{21}} e_{21} &= -2pq \frac{\partial}{\partial z} - q \frac{\partial}{\partial x} - p \frac{\partial}{\partial y} + (p^2 + q^2 + 1) \left(p \frac{\partial}{\partial p} - q \frac{\partial}{\partial q} \right), \\
\nabla_{e_{22}} e_{21} &= -2(p^2 + 2q^2) \frac{\partial}{\partial z} - 2p \frac{\partial}{\partial x} - 2q \frac{\partial}{\partial y} + (p^2 + q^2 + 1) \left(4q \frac{\partial}{\partial p} - 2p \frac{\partial}{\partial q} \right); \\
\nabla_e e_{22} &= \left(-(p^4 + 2p^2q^2 + 2p^2 + q^4 + 2q^2 + 1) \left(\frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial z} \right) \right. \\
& \quad \left. - (p^6 + 3p^4q^2 + 3p^4 + 3p^2q^4 + 6p^2q^2 + 3p^2 + q^6 + 3q^4 \right. \\
& \quad \left. + 3q^2 + 1) \frac{\partial}{\partial q} \right) / (2(1 + p^2 + q^2)), \\
\nabla_{e_{11}} e_{22} &= -(p^2 + q^2) \frac{\partial}{\partial z} - p \frac{\partial}{\partial x} - q \frac{\partial}{\partial y} + q(p^2 + q^2 + 1) \left(q \frac{\partial}{\partial p} - p \frac{\partial}{\partial q} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla_{e_{21}} e_{22} &= 2(2p^2 + q^2) \frac{\partial}{\partial z} + 2p \frac{\partial}{\partial x} + 2q \frac{\partial}{\partial y} + (p^2 + q^2 + 1) \left(-2q \frac{\partial}{\partial p} + 4p \frac{\partial}{\partial q} \right), \\ \nabla_{e_{22}} e_{22} &= 2pq \frac{\partial}{\partial z} + q \frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial y} + (p^2 + q^2 + 1) \left(-p \frac{\partial}{\partial p} + q \frac{\partial}{\partial q} \right).\end{aligned}$$

ПРИМЕР 16.2. Рассмотрим уравнение Монжа–Ампера $\tilde{Q}$ вида

$$z_{xx} - (y + q)^2 z_{yy} = 0, \quad (16.4)$$

определенное в пространстве $\mathbb{R}^5$. Это уравнение гиперболично во всех точках открытого множества

$$G = \{(x, y, p, q, z) \in \mathbb{R}^5 : y + q \neq 0\}. \quad (16.5)$$

На этом множестве характеристическое расслоение H_1 рассматриваемого уравнения $\tilde{Q}$ порождено векторными полями

$$e_{11} = \frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial z} - (y + q) \left(\frac{\partial}{\partial y} + q \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad e_{12} = \frac{\partial}{\partial y} + q \frac{\partial}{\partial z} + (y + q) \frac{\partial}{\partial p},$$

а характеристическое расслоение H_2 – векторными полями

$$e_{21} = \frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial z} + (y + q) \left(\frac{\partial}{\partial y} + q \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad e_{22} = \frac{\partial}{\partial y} + q \frac{\partial}{\partial z} - (y + q) \frac{\partial}{\partial p}.$$

Пересечение (16.2) первых производных характеристических расслоений H_1 и H_2 порождено векторным полем

$$e = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial q} + (2y + 3q) \frac{\partial}{\partial z}.$$

Непосредственная проверка показывает, что во всех точках открытого множества (16.5) при $j = 1, 2$ для уравнения (16.4) выполнено условие общего положения (16.3). Тем самым, ограничение $\tilde{Q}|_G$ уравнения (16.4) на открытое множество G принадлежит подкатегории MA_1 уравнений Монжа–Ампера общего положения. Следуя алгоритму, изложенному в пп. 11 и 12, вычисляем характеристическую аффинную связность $\Xi(\tilde{Q}|_G)$ ограничения $\tilde{Q}|_G$ рассматриваемого уравнения на G :

$$\begin{aligned}\nabla_e e &= \frac{3e}{y + q}, \quad \nabla_{e_{11}} e = \frac{3e}{2(y + q)}, \quad \nabla_{e_{12}} e = -\frac{e}{2}, \\ \nabla_{e_{21}} e &= \frac{3e}{2(y + q)}, \quad \nabla_{e_{22}} e = \frac{e}{2};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_e e_{11} &= \frac{1}{y+q} \frac{\partial}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial p}, & \nabla_{e_{11}} e_{11} &= \frac{2}{y+q} \frac{\partial}{\partial q} - 2 \frac{\partial}{\partial p}, \\
\nabla_{e_{12}} e_{11} &= \frac{3}{2(y+q)} \left(\frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial z} \right) - \frac{3}{2} \left(\frac{\partial}{\partial y} + q \frac{\partial}{\partial z} \right) + \frac{y+q}{2} \frac{\partial}{\partial p} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q}, \\
\nabla_{e_{21}} e_{11} &= \frac{1}{y+q} \frac{\partial}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial p}, \\
\nabla_{e_{22}} e_{11} &= \frac{1}{2(y+q)} \left(\frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial z} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial y} + q \frac{\partial}{\partial z} \right) - \frac{y+q}{2} \frac{\partial}{\partial p} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q}; \\
\nabla_e e_{12} &= \frac{1}{y+q} \left(\frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial y} - q \frac{\partial}{\partial z}, \\
\nabla_{e_{11}} e_{12} &= \frac{1}{2(y+q)} \left(\frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial z} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial y} + q \frac{\partial}{\partial z} \right) + \frac{y+q}{2} \frac{\partial}{\partial p} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q}, \\
\nabla_{e_{12}} e_{12} &= -\frac{\partial}{\partial x} - p \frac{\partial}{\partial z} + (y+q) \left(\frac{\partial}{\partial y} + q \frac{\partial}{\partial z} \right), \\
\nabla_{e_{21}} e_{12} &= \frac{1}{2(y+q)} \left(\frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial z} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial y} + q \frac{\partial}{\partial z} \right) + \frac{y+q}{2} \frac{\partial}{\partial p} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q}, \\
\nabla_{e_{22}} e_{12} &= \nabla_{e_{12}} e_{22} = 0; \\
\nabla_e e_{21} &= \frac{1}{y+q} \frac{\partial}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial p}, & \nabla_{e_{11}} e_{21} &= \frac{1}{y+q} \frac{\partial}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial p}, \\
\nabla_{e_{12}} e_{21} &= \frac{1}{2(y+q)} \left(\frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial z} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial y} + q \frac{\partial}{\partial z} \right) - \frac{y+q}{2} \frac{\partial}{\partial p} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q}, \\
\nabla_{e_{21}} e_{21} &= \frac{2}{y+q} \frac{\partial}{\partial q} + 2 \frac{\partial}{\partial p}, \\
\nabla_{e_{22}} e_{21} &= \frac{3}{2(y+q)} \left(\frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial z} \right) + \frac{3}{2} \left(\frac{\partial}{\partial y} + q \frac{\partial}{\partial z} \right) + \frac{y+q}{2} \frac{\partial}{\partial p} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q}; \\
\nabla_e e_{22} &= \frac{1}{y+q} \left(\frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} + q \frac{\partial}{\partial z}, \\
\nabla_{e_{11}} e_{22} &= \frac{1}{2(y+q)} \left(\frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial z} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial y} + q \frac{\partial}{\partial z} \right) + \frac{y+q}{2} \frac{\partial}{\partial p} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q}, \\
\nabla_{e_{21}} e_{22} &= \frac{1}{2(y+q)} \left(\frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial z} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial y} + q \frac{\partial}{\partial z} \right) + \frac{y+q}{2} \frac{\partial}{\partial p} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q}, \\
\nabla_{e_{22}} e_{22} &= \frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial z} + (y+q) \left(\frac{\partial}{\partial y} + q \frac{\partial}{\partial z} \right).
\end{aligned}$$

ПРИМЕР 16.3. Выясним, возможно ли выбрать в пространстве $\mathbb{R}^5$ два открытых множества U и $\tilde{U}$ так, чтобы существовал диффеоморфизм

$$f: \tilde{U} \rightarrow U, \quad (16.6)$$

принадлежащий множеству $\text{Hom}_{\text{MA}}(\tilde{Q}|_{\tilde{U}}, Q|_U)$, т.е. удовлетворяющий для некоторых скаляров c , b и линейной дифференциальной формы a уравнениям

$$\begin{aligned}
f^*(dp \wedge dy + (1+p^2+q^2)^2 dp \wedge dq) &= c(dp \wedge dy - (y+q)^2 dx \wedge dq) \\
&+ b(dx \wedge dp + dy \wedge dq) + a \wedge (dz - p dx - q dy), \\
f^*(dz - p dx - q dy) \wedge (dz - p dx - q dy) &= 0.
\end{aligned} \quad (16.7)$$

Другими словами, выясним, можно ли найти такие открытые множества U и $\tilde{U}$, чтобы ограничение $Q|_U$ уравнения (16.1) на U было контактно эквивалентно ограничению $\tilde{Q}|_{\tilde{U}}$ уравнения (16.4) на $\tilde{U}$.

Покажем, что уравнения $Q|_U$ и $\tilde{Q}|_{\tilde{U}}$ при любом выборе открытых множеств U и $\tilde{U}$ контактно эквивалентными не являются. Если пересечение множеств $\tilde{U}$ и (16.5) непусто, то невозможность эквивалентности этих уравнений очевидна. Действительно, в этом случае ограничение $Q|_U$ уравнения (16.1) на множество U гиперболично, в то время как ограничение $\tilde{Q}|_{\tilde{U}}$ уравнения (16.4) на множество $\tilde{U}$ в точках множества (16.5) параболично. Если пересечение множеств $\tilde{U}$ и (16.5) пусто, то уравнения $Q|_U$ и $\tilde{Q}|_{\tilde{U}}$ гиперболичны и принадлежат к подкатегории MA_1 уравнений Монжа–Ампера общего положения. Отвечающие им характеристические аффинные связности $\Xi(Q|_U)$ и $\Xi(\tilde{Q}|_{\tilde{U}})$ строятся исходя из разложения касательного расслоения в прямую сумму (11.1) контактного расслоения L и пересечения (16.2) путем взятия прямой суммы (11.4) соответствующих линейных связностей:

$$\Xi(Q|_U) = \Sigma_h \oplus \Sigma_L, \quad \Xi(\tilde{Q}|_{\tilde{U}}) = \tilde{\Sigma}_h \oplus \tilde{\Sigma}_L.$$

Предположим, что диффеоморфизм (16.6) осуществляет контактную эквивалентность уравнений $Q|_U$ и $\tilde{Q}|_{\tilde{U}}$. Тогда по теореме 11.9 этот диффеоморфизм переводит линейную связность $\tilde{\Sigma}_h$ уравнения $\tilde{Q}|_{\tilde{U}}$ в линейную связность Σ_h уравнения $Q|_U$. Следовательно, диффеоморфизм (16.6) переводит кривизну $\tilde{R}$ связности $\tilde{\Sigma}_h$ в кривизну R связности Σ_h , и потому эти кривизны либо обе нулевые, либо обе ненулевые. Используя результаты примеров 16.1 и 16.2, находим

$$R = 0, \\ \tilde{R} = \frac{dx \wedge (2p dy - (y + q) dp + 2p dq) + dy \wedge ((y + 3q) dq + 2dz) + 2dq \wedge dz}{2(y + q)^3}.$$

Получили противоречие, подтверждающее, что при любом выборе открытых множеств U и $\tilde{U}$ уравнения $Q|_U$ и $\tilde{Q}|_{\tilde{U}}$ контактно эквивалентными не являются.

Список литературы

1. Уэллс Р. Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях. М.: Мир, 1976.
2. Лычагин В. В. Контактная геометрия и нелинейные дифференциальные уравнения второго порядка // УМН. 1979. Т. 34. № 1(205). С. 137–165.
3. Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.
4. Кобаяси Ш. Группы преобразований в дифференциальной геометрии. М.: Мир, 1986.
5. Lie S. Kurzes Résumé mehrerer neuer Theorien // Gesammelte Abhandlungen. B. 3. Leipzig: B.G.Teubner–Oslo: H.Aschehoug & Co, 1922. P. 1–4.
6. Lie S. Neue Integrationsmethode der Monge–Ampèreschen Gleichung // Gesammelte Abhandlungen. V. 3. Leipzig: B.G.Teubner–Oslo: H.Aschehoug & Co, 1922. P. 287–294.
7. Lie S. Untersuchungen üß Differentialgleichungen // Gesammelte Abhandlungen. V. 3. Leipzig: B.G.Teubner–Oslo: H.Aschehoug & Co, 1922. P. 537–547.
8. Goursat E. Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre. V. 1. Paris: Hermann, 1896.
9. Лычагин В. В., Рубцов В. Н. О теоремах Софуса Ли для уравнений Монжа–Ампера // ДАН БССР. 1983. Т. 27. № 5. С. 396–398.
10. Lychagin V. V., Rubtsov V. N., Chekalov I. V. A classification of Monge–Ampère equations // Ann. scient. Éc. Norm. Sup. 4 série. 1993. V. 26. P. 281–308.

11. *Morimoto T.* La géométrie des équations Monge–Ampère // C.R. Acad. Sc. Paris. Série A. 1979. V. 289. P. 25–28.
12. *Чиж О. П.* Гиперболические уравнения Монжа–Ампера с транзитивными группами симметрий // ДАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. 1998. Т. 42. № 2. С. 45–48.
13. *Чиж О. П.* Контактная геометрия уравнений Монжа–Ампера // Изв. АН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. 1998. Т. 42. № 4. С. 52–56.
14. *Тунцкий Д. В.* Эквивалентность и характеристические связности уравнений Монжа–Ампера // Матем. сб. 1997. Т. 188. № 5. С. 131–157.
15. *Тунцкий Д. В.* О контактной линеаризации уравнений Монжа–Ампера // Изв. РАН. Сер. матем. 1996. Т. 60. № 2. С. 195–200.
16. *Постников М. М.* Дифференциальная геометрия. М.: Наука, 1988.
17. *Хирш М.* Дифференциальная топология. М.: Мир, 1979.
18. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. Т. 1. М.: Наука, 1981.
19. *Вольф Дж.* Пространства постоянной кривизны. М.: Наука, 1982.
20. *Бибиков Ю. Н.* Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Высшая школа, 1991.
21. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. Т. 2. М.: Наука, 1981.

Международный Центр “Софус Ли”
E-mail: dtunitsky@yahoo.com

Поступило в редакцию
1.XII.1999