Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ф. Бутузов, И. В. Неделко, О глобальной области влияния устойчивых решений с внутренними слоями в двумерном случае, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2002, том 66, выпуск 1, 3–42

DOI: <https://doi.org/10.4213/im369>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 13:56:33

УДК 517.956.226

В. Ф. Бутузов, И. В. Неделько

О глобальной области влияния устойчивых решений с внутренними слоями в двумерном случае

Рассматривается начально-краевая задача для сингулярно возмущенного нестационарного уравнения реакции-диффузии с нелинейностью кубического типа. Наложённые условия обеспечивают существование устойчивого стационарного решения с внутренним переходным слоем в окрестности определенной кривой. Исследован вопрос о том, какие начальные функции принадлежат области влияния такого решения.

Библиография: 11 наименований.

§ 1. Введение. Постановка задачи

Рассмотрим задачу:

$$\varepsilon^2 \Delta u - u_t = f(u, x, \varepsilon), \quad (x, t) \in D \times (0, +\infty), \quad (1.1)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\partial D} = 0, \quad t \in (0, +\infty), \quad (1.2)$$

$$u(x, 0, \varepsilon) = u_0(x, \varepsilon), \quad x \in \bar{D}, \quad (1.3)$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр, $x = (x_1, x_2)$, $D \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная односвязная область с достаточно гладкой границей ∂D , $\frac{\partial}{\partial n}$ – производная по направлению внешней нормали к ∂D .

Предположим, что функция f удовлетворяет следующему условию.

(A1) *Существуют функции $\bar{u}(x)$ и $\hat{u}(x)$ из $C^2(\bar{D})$ такие, что $\bar{u}(x) < \hat{u}(x)$, $x \in \bar{D}$, и в области $\Pi = \{(u, x): \bar{u}(x) \leq u \leq \hat{u}(x), x \in \bar{D}\}$ функция $f(u, x, 0)$ обращается в нуль только на поверхностях $u = \varphi_i(x)$, $i = 0, 1, 2$, причем*

$$\begin{aligned} \bar{u}(x) < \varphi_1(x) < \varphi_0(x) \equiv 0 < \varphi_2(x) < \hat{u}(x), \quad x \in \bar{D}, \\ f_u(\varphi_i(x), x, 0) > 0, \quad i = 1, 2; \quad f_u(\varphi_0(x), x, 0) < 0, \quad x \in \bar{D}; \end{aligned}$$

$f(u, x, \varepsilon)$ – достаточно гладкая функция в области $\Pi_1 \times [0, \varepsilon_0]$, где Π_1 – некоторая открытая область, содержащая Π , а $\varepsilon_0 > 0$ – некоторое число.

Нулевые условия в (1.2), а также предположение $\varphi_0 \equiv 0$ взяты для простоты изложения. Все результаты несложно переформулировать для случая ненулевых краевых условий и $\varphi_0 \not\equiv 0$.

Введем функцию

$$J(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(u, x, 0) du. \quad (1.4)$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 99-01-01208).

(A2) Пусть существует достаточно гладкая замкнутая кривая $\Gamma \subset D$ без самопересечений, разделяющая область D на две подобласти: $D_0^{(+)}$ (внутри кривой Γ) и $D_0^{(-)}$, и такая, что

$$J(x) = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial n_0}(x) < 0, \quad x \in \Gamma,$$

где $\frac{\partial}{\partial n_0}$ – производная по направлению нормали к Γ , направленной внутрь подобласти $D_0^{(+)}$.

Известно [1], [2], что при выполнении условий (A1), (A2) для достаточно малых ε существует стационарное решение $u_s(x, \varepsilon)$ задачи (1.1), (1.2), имеющее внутренний переходный слой в окрестности кривой Γ , т.е. такое, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_s(x, \varepsilon) = \begin{cases} \varphi_1(x), & x \in D_0^{(-)}, \\ \varphi_2(x), & x \in D_0^{(+)}. \end{cases} \quad (1.5)$$

Решения такого типа называют *контрастными структурами типа ступеньки* (КСТС). Асимптотическое разложение КСТС можно построить методом пограничных функций [3], [4].

Анализ устойчивости двумерных КСТС проведен в работах [5], [6]. Из указанных работ следует, что при выполнении условий (A1), (A2) решение $u_s(x, \varepsilon)$ задачи (1.1), (1.2) асимптотически устойчиво.

Одной из основных проблем как с теоретической, так и с прикладной точек зрения является ответ на вопрос о том, как устроено множество начальных функций $u_0(x, \varepsilon)$ (см. (1.3)), из которых формируется при $t \rightarrow +\infty$ КСТС $u_s(x, \varepsilon)$, если выполнены условия (A1), (A2) и ε достаточно мало. Иными словами, как устроена область влияния стационарного решения $u_s(x, \varepsilon)$ в случае, когда оно асимптотически устойчиво.

В работе [6] показано, что области влияния КСТС $u_s(x, \varepsilon)$ при условиях (A1), (A2) и достаточно малых ε принадлежат все функции $u_0(x, \varepsilon)$ (удовлетворяющие определенным условиям гладкости и условию (1.2)) такие, что

$$|u_0(x, \varepsilon) - u_s(x, \varepsilon)| \leq C\varepsilon^2,$$

где $C > 0$ – некоторое фиксированное (при $\varepsilon \rightarrow 0$) число. Иными словами, было доказано, что область влияния решения $u_s(x, \varepsilon)$ содержит окрестность этого решения порядка $O(\varepsilon^2)$. Проблема усиления указанного результата, носящего локальный характер, в частности ответа на вопрос, может ли решение $u_s(x, \varepsilon)$ сформироваться из начальной функции, отстоящей от него на величину порядка $O(1)$, оставалась открытой и была решена только для КСТС, возникающих в одномерном аналоге ($D = [a, b]$) задачи (1.1)–(1.3) [7].

Как и в соответствующем одномерном случае, рассмотренном в [7], в настоящей работе речь идет о глобальной области влияния КСТС $u_s(x, \varepsilon)$, под которой будем понимать множество всех функций $u_0(x, \varepsilon)$, для каждой из которых $\exists \varepsilon' > 0$ такое, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon']$ решение задачи (1.1)–(1.3) существует и своим пределом при $t \rightarrow +\infty$ имеет $u_s(x, \varepsilon)$. Более точное определение глобальной области влияния дано в заключительном § 5, где приведен основной результат данной работы – теорема 5.1 о глобальной области влияния КСТС $u_s(x, \varepsilon)$. Чтобы сформулировать

этот результат, введем еще одно требование. С этой целью выделим в области $D_0^{(+)}$ все (отделенные друг от друга) множества и отдельные точки, если таковые имеются, где $J(x) \geq 0$, а в области $D_0^{(-)} \cup \partial D$ – все (отделенные друг от друга) множества и отдельные точки, если таковые имеются, где $J(x) \leq 0$. Класс (возможно, пустой) указанных элементов обозначим через N .

(A3) Пусть:

1) $J(x) \neq 0$, $x \in \partial D$;

2) если класс N не пуст, то он содержит конечное число элементов, причем любой элемент класса N , не являющийся точкой, представляет из себя либо достаточно гладкую замкнутую кривую без самопересечений, либо область с достаточно гладкой границей.

Теорема 5.1 утверждает, что при выполнении условий (A1)–(A3) глобальной области влияния КСТС $u_s(x, \varepsilon)$ принадлежат все функции $u_0(x, \varepsilon)$, удовлетворяющие следующим двум условиям:

$$(A4) \quad u_0(x, \varepsilon) \equiv u_0(x) \in C_B^2(\bar{D}) \equiv \left\{ v(x) : v(x) \in C^2(\bar{D}); \frac{\partial v}{\partial n} \Big|_{\partial D} = 0 \right\} \quad u$$

$$\bar{u}(x) < u_0(x) < \hat{u}(x), \quad x \in \bar{D}.$$

(A5) $\exists x^{(-)} \in D_0^{(-)}$ и $\exists x^{(+)} \in D_0^{(+)}$ такие, что:

$$u_0(x^{(-)}) < 0 \quad \text{и} \quad u_0(x) < 0 \quad \text{во всех точках} \quad x \in D_0^{(-)} \cup \partial D, \quad \text{где} \quad J(x) \leq 0; \quad (1.6)$$

$$u_0(x^{(+)}) > 0 \quad \text{и} \quad u_0(x) > 0 \quad \text{во всех точках} \quad x \in D_0^{(+)}, \quad \text{где} \quad J(x) \geq 0. \quad (1.7)$$

Условие (A5), в частности, показывает, что начальная функция, из которой при $t \rightarrow +\infty$ формируется решение $u_s(x, \varepsilon)$, может иметь форму, весьма далекую от формы КСТС. Более того (см. следствие 5.1), если $J(x) > 0$ при $x \in D_0^{(-)} \cup \partial D$ и $J(x) < 0$ при $x \in D_0^{(+)}$, то в (1.6) и (1.7) можно оставить лишь требование существования хотя бы одной точки $x^{(-)} \in D_0^{(-)}$ такой, что $u_0(x^{(-)}) < 0$, и хотя бы одной точки $x^{(+)} \in D_0^{(+)}$ такой, что $u_0(x^{(+)}) > 0$.

Отметим, что если $\varphi_0(x) \neq 0$, то неравенства в (1.6) и (1.7) для $u_0(x)$ нужно заменить соответственно на $u_0(x) < \varphi_0(x)$ и $u_0(x) > \varphi_0(x)$.

Чтобы оценить, насколько полно наш основной результат характеризует глобальную область влияния КСТС $u_s(x, \varepsilon)$, в § 5 приведена теорема 5.2, показывающая, что установленные нами условия, обеспечивающие принадлежность начальной функции указанной области, близки к необходимым.

Скажем кратко о содержании других параграфов.

В § 2 при условиях (A1), (A4) исследовано поведение решения задачи (1.1)–(1.3) на конечном промежутке времени, а также доказаны существование и ограниченность решения на бесконечном промежутке времени.

В § 3 получены более тонкие оценки на бесконечном промежутке времени. Сначала доказан ряд вспомогательных лемм, в которых представлены локальные оценки решения при выполнении требований (A1), (A4) и некоторых локальных условий на $J(x)$ и начальную функцию $u_0(x)$, а затем доказаны теорема 3.1 и усиливающая ее результат теорема 3.2 об оценках решения при выполнении всех требований (A1)–(A5).

В § 4 с помощью теоремы 3.2 доказана теорема 4.1 о том, что пределом решения задачи (1.1)–(1.3) при $t \rightarrow \infty$ является КСТС $u_s(x, \varepsilon)$.

Доказательства большинства вспомогательных и основных утверждений основано на построении барьеров для решения задачи (1.1)–(1.3).

В заключение отметим, что представленный в настоящей работе метод позволяет исследовать глобальные области влияния стационарных решений задачи (1.1), (1.2) без внутренних переходных слоев, т.е. решений $u^{(1)}(x, \varepsilon)$ и $u^{(2)}(x, \varepsilon)$, близких при малых ε соответственно к $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ во всей области $\bar{D}$. Как известно, такие решения существуют в задаче (1.1), (1.2) при выполнении условия (A1) для достаточно малых ε , причем являются асимптотически устойчивыми.

§ 2. Лемма существования. Основные результаты для конечного промежутка времени

2.1. Существование решения. Для точек $M(x_1, x_2)$ из малой окрестности ∂D введем локальные координаты (z, ℓ) , где z – расстояние от точки M до кривой ∂D вдоль нормали к ∂D , которая проходит через M , а ℓ – координата той точки на ∂D , из которой выпущена указанная нормаль, $\ell \in [0, \ell_0]$, ℓ_0 – некоторое число. Известно (см., например, [3]), что существует число $\delta > 0$ такое, что при $z \leq \delta$ соответствие между (z, ℓ) и (x_1, x_2) взаимно однозначно.

ЛЕММА 2.1. Пусть выполнены условия (A1), (A4).

Тогда при достаточно малых ε задача (1.1)–(1.3) имеет единственное решение $u(x, t, \varepsilon) \in C^{1,0}(\bar{D} \times [0, +\infty)) \cap C^{2,1}(\bar{D} \times (0, +\infty))$, причем

$$\bar{u}(x) - C\varepsilon < u(x, t, \varepsilon) < \hat{u}(x) + C\varepsilon, \quad (x, t) \in \bar{D} \times [0, +\infty),$$

где $C > 0$ – некоторое число, не зависящее от ε .

Утверждение леммы 2.1 следует из [8], [9] и того факта, что функции $(\hat{u} + \varepsilon \hat{P}(z, \varepsilon))$ и $(\bar{u} - \varepsilon \hat{P}(z, \varepsilon))$, где

$$\hat{P}(z, \varepsilon) = \exp\left(-\frac{kz}{\varepsilon}\right) \zeta\left(\frac{z}{\delta}\right), \quad (2.1)$$

$\zeta(y)$ – срезающая функция, $\zeta(y) \in C^\infty([0, +\infty))$, $\zeta(y) = 1$ при $0 \leq y \leq 1/4$, $0 \leq \zeta(y) \leq 1$ при $1/4 \leq y \leq 1/2$, $\zeta(y) = 0$ при $y \geq 1/2$, δ – указанное выше число, при достаточно большом $k > 0$ и достаточно малых ε являются соответственно верхним и нижним решениями задачи (1.1)–(1.3).

2.2. Асимптотическое приближение решения на конечном промежутке времени. Пусть выполнены условия (A1) и (A4). Асимптотику (нулевого порядка по ε) решения задачи (1.1)–(1.3) на промежутке $[0, T]$, где $T > 0$ – произвольное, но фиксированное при $\varepsilon \rightarrow 0$ число, построим в виде

$$U(x, t, \varepsilon) = \bar{u}(x, t) + \varepsilon W(\xi, \ell, t) \zeta\left(\frac{z}{\delta}\right), \quad \xi = -\frac{z}{\varepsilon}. \quad (2.2)$$

Функцию $\tilde{u}(x, t)$ определим как решение задачи (x играет роль параметра, $x \in \bar{D}$):

$$-\tilde{u}_t = f(\tilde{u}, x, 0), \quad t > 0, \quad (2.3)$$

$$\tilde{u}(x, 0) = u_0(x). \quad (2.4)$$

Из условий (A1) и (A4) следует, что решение $\tilde{u}(x, t)$ задачи (2.3), (2.4) существует, единственно и

$$\bar{u}(x) < \tilde{u}(x, t) < \hat{u}(x), \quad (x, t) \in \bar{D} \times [0, +\infty). \quad (2.5)$$

Определим теперь функцию

$$W(\xi, \ell, t) = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z}(0, \ell, t) \exp(\xi),$$

где $\tilde{u}(z, \ell, t) \equiv \tilde{u}(x(z, \ell), t)$.

По построению функция $U(x, t, \varepsilon)$ удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\varepsilon^2 \Delta U - U_t = f(U, x, \varepsilon) + O(\varepsilon), \quad (x, t) \in D \times (0, T], \quad (2.6)$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial n} \right|_{\partial D} = 0, \quad t \in (0, T], \quad (2.7)$$

$$U(x, 0, \varepsilon) = u_0(x), \quad x \in \bar{D}, \quad (2.8)$$

$$U(x, t, \varepsilon) = \tilde{u}(x, t) + O(\varepsilon), \quad (x, t) \in \bar{D} \times [0, T]. \quad (2.9)$$

ЛЕММА 2.2. Пусть выполнены условия (A1) и (A4). Тогда для любого $T > 0$, фиксированного при $\varepsilon \rightarrow 0$, существует число $C > 0$ такое, что при достаточно малых ε решение $u(x, t, \varepsilon)$ задачи (1.1)–(1.3) удовлетворяет неравенству

$$|u(x, t, \varepsilon) - \tilde{u}(x, t)| \leq C\varepsilon, \quad (x, t) \in \bar{D} \times [0, T]. \quad (2.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $T > 0$ фиксировано. Рассмотрим функцию

$$w(x, t, \varepsilon) = (u(x, t, \varepsilon) - U(x, t, \varepsilon)) \exp(-At),$$

где число $A > 0$ выбрано так, что

$$B(x, t, \varepsilon) = \int_0^1 f_u(U(x, t, \varepsilon) + (u(x, t, \varepsilon) - U(x, t, \varepsilon))s, x, \varepsilon) ds + A > 1$$

при $(x, t) \in \bar{D} \times [0, T]$ и малых ε . В силу леммы 2.1, (2.5) и (2.9) такой выбор A возможен. Из (1.1)–(1.3) и (2.6)–(2.8) получаем

$$\varepsilon^2 \Delta w - B(x, t, \varepsilon)w - w_t = O(\varepsilon), \quad (x, t) \in D \times (0, T],$$

$$\left. \frac{\partial w}{\partial n} \right|_{\partial D} = 0, \quad t \in (0, T],$$

$$w(x, 0, \varepsilon) = 0, \quad x \in \bar{D}.$$

Отсюда следует, что

$$|w(x, t, \varepsilon)| \leq C_0 \varepsilon, \quad (x, t) \in \bar{D} \times [0, T],$$

где $C_0 > 0$ – некоторое число, а потому в силу (2.9) существует $C > 0$ такое, что при достаточно малых ε выполнено (2.10). Лемма доказана.

2.3. Основные результаты.

ЛЕММА 2.3. Пусть выполнены условия (A1), (A4), и пусть существует область $\Omega^{(-)} \subseteq D$ ($\Omega^{(+)} \subseteq D$) такая, что

$$u_0(x) < 0, \quad x \in \overline{\Omega}^{(-)} \quad (u_0(x) > 0, \quad x \in \overline{\Omega}^{(+)}).$$

Тогда для любого $\eta > 0$ существует $T_* = T_*(\eta) > 0$ такое, что для любого $T \geq T_*$ при достаточно малых ε решение $u(x, t, \varepsilon)$ задачи (1.1)–(1.3) удовлетворяет неравенствам

$$\begin{aligned} u(x, t, \varepsilon) &< \varphi_1(x) + \eta, & (x, t) &\in \overline{\Omega}^{(-)} \times [T_*, T] \\ u(x, t, \varepsilon) &> \varphi_2(x) - \eta, & (x, t) &\in \overline{\Omega}^{(+)} \times [T_*, T], \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\varphi_1(x) - \eta < u(x, t, \varepsilon) < \varphi_2(x) + \eta, \quad (x, t) \in \overline{D} \times [T_*, T]. \quad (2.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 2.2 достаточно доказать, что для любого $\eta > 0$ существует $T_* > 0$ такое, что неравенства (2.11), (2.12) выполняются при $t \geq T_*$ для функции $\tilde{u}(x, t)$ (т.е. при $t \geq T_*$ имеют место неравенства (2.11), (2.12), в которых u заменено на $\tilde{u}$). Докажем, например, что по заданному $\eta > 0$ можно указать $T_* > 0$ такое, что

$$\tilde{u}(x, t) < \varphi_1(x) + \eta, \quad (x, t) \in \overline{\Omega}^{(-)} \times [T_*, +\infty). \quad (2.13)$$

Остальные неравенства (2.11), (2.12) для $\tilde{u}$ доказываются аналогично.

Зафиксируем произвольное $\eta > 0$. Пусть

$$h = \min \left\{ \eta; -\frac{1}{2} \max_{\overline{\Omega}^{(-)}} u_0(x); -\frac{1}{2} \max_{\overline{\Omega}^{(-)}} \varphi_1(x) \right\}.$$

Введем функции

$$\begin{aligned} v_1(x, t) &= -h + \frac{t}{T_*} \left(\varphi_1(x) + \frac{3}{2}h \right), & (x, t) &\in \overline{\Omega}^{(-)} \times [0, T_*], \\ v_2(x) &= \varphi_1(x) + \frac{1}{2}h, & (x, t) &\in \overline{\Omega}^{(-)} \times [T_*, +\infty), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} T_* &= \frac{2 \max_{\overline{D}} |\varphi_1(x)| + 3h}{m}, & m &= \min_{\Pi^{(+)}} f(u, x, 0) > 0, \\ \Pi^{(+)} &= \left\{ (u, x) : \varphi_1(x) + \frac{1}{2}h \leq u \leq -h, \quad x \in \overline{\Omega}^{(-)} \right\}. \end{aligned}$$

При таком выборе T_* , как показывают простые вычисления,

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + f(v_1, x, 0) \geq \frac{1}{2}m, \quad (x, t) \in \overline{\Omega}^{(-)} \times [0, T_*].$$

Используя это неравенство и уравнение (2.3), получаем

$$\frac{\partial(v_1 - \tilde{u})}{\partial t} + f(v_1, x, 0) - f(\tilde{u}, x, 0) \geq \frac{1}{2}m > 0$$

или

$$\frac{\partial(v_1 - \tilde{u})}{\partial t} + f_u^* \cdot (v_1 - \tilde{u}) > 0, \quad (x, t) \in \overline{\Omega}^{(-)} \times [0, T_*]. \quad (2.14)$$

Отсюда, учитывая начальное условие

$$(v_1 - \tilde{u})|_{t=0} = -h - u_0(x) > 0, \quad x \in \overline{\Omega}^{(-)},$$

приходим к неравенству

$$v_1 - \tilde{u} > 0, \quad (x, t) \in \overline{\Omega}^{(-)} \times [0, T_*],$$

и, следовательно,

$$\tilde{u}|_{t=T_*} < v_1|_{t=T_*} = \varphi_1(x) + \frac{1}{2}h = v_2(x), \quad x \in \overline{\Omega}^{(-)},$$

т.е.

$$(v_2 - \tilde{u})|_{t=T_*} > 0, \quad x \in \overline{\Omega}^{(-)}. \quad (2.15)$$

Для $v_2 - \tilde{u}$ аналогично (2.14) получаем

$$\frac{\partial(v_2 - \tilde{u})}{\partial t} + f_u^{**} \cdot (v_2 - \tilde{u}) \geq \frac{1}{2}m > 0, \quad (x, t) \in \overline{\Omega}^{(-)} \times [T_*, +\infty).$$

Отсюда и из (2.15) следует, что

$$v_2 - \tilde{u} > 0, \quad (x, t) \in \overline{\Omega}^{(-)} \times [T_*, +\infty),$$

и, значит,

$$\tilde{u}(x, t) < v_2(x) = \varphi_1(x) + h \leq \varphi_1(x) + \eta, \quad (x, t) \in \overline{\Omega}^{(-)} \times [T_*, +\infty).$$

Тем самым неравенство (2.13) и лемма доказаны.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. *Лемма 2.3 останется в силе, если в (2.12) заменить $[T_*, T]$ на $[T_*, +\infty)$.*

Действительно, для любого $\eta > 0$ возьмем $T_* = T_*(\eta/2) > 0$. Тогда при достаточно малых ε в силу (2.12) будут выполнены неравенства

$$\varphi_1(x) - \frac{\eta}{2} < u(x, T_*, \varepsilon) < \varphi_2(x) + \frac{\eta}{2}, \quad x \in \bar{D}.$$

Положим

$$\hat{v}(x, \varepsilon) = \varphi_2(x) + \frac{\eta}{2} + \varepsilon \hat{P}(z, \varepsilon), \quad \bar{v}(x, \varepsilon) = \varphi_1(x) - \frac{\eta}{2} - \varepsilon \hat{P}(z, \varepsilon),$$

где функция $\hat{P}(z, \varepsilon)$ определена формулой (2.1). Для любого достаточно малого η при достаточно малых ε и достаточно большом k (см. (2.1)) функции $\hat{v}(x, \varepsilon)$ и $\bar{v}(x, \varepsilon)$ являются верхним и нижним барьерами для решения $u(x, t, \varepsilon)$ при $t \geq T_*$, т.е.

$$\bar{v}(x, \varepsilon) < u(x, t, \varepsilon) < \hat{v}(x, \varepsilon), \quad (x, t) \in \bar{D} \times [T_*, +\infty).$$

Отсюда, взяв ε столь малым, что $\varepsilon \hat{P}(z, \varepsilon) < \eta/2$, приходим к неравенствам (2.12) для $(x, t) \in \bar{D} \times [T_*, +\infty)$.

Из леммы 2.3 и следствия 2.1 непосредственно вытекает следующий результат.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть выполнены условия (A1), (A4), и пусть существует область $\Omega^{(-)} \subseteq D$ ($\Omega^{(+)} \subseteq D$) такая, что

$$u_0(x) < 0, \quad x \in \bar{\Omega}^{(-)} \quad (u_0(x) > 0, \quad x \in \bar{\Omega}^{(+)}).$$

Тогда для любого $\eta > 0$ существует $T_0 = T_0(\eta) > 0$ такое, что для любого $T \geq T_0$ при достаточно малых ε решение $u(x, t, \varepsilon)$ задачи (1.1)–(1.3) удовлетворяет неравенствам

$$\begin{aligned} u(x, t, \varepsilon) &< \varphi_1(x) + \eta, & (x, t) &\in \bar{\Omega}^{(-)} \times [T_0, T] \\ (u(x, t, \varepsilon) &> \varphi_2(x) - \eta, & (x, t) &\in \bar{\Omega}^{(+)} \times [T_0, T]), \\ \varphi_1(x) - \eta &< u(x, t, \varepsilon) < \varphi_2(x) + \eta, & (x, t) &\in \bar{D} \times [T_0, +\infty). \end{aligned}$$

§ 3. Поведение решения на бесконечном промежутке времени

3.1. Вспомогательные леммы.

ЛЕММА 3.1. Пусть выполнены условия (A1), (A4) и существует открытый круг K с центром в некоторой точке $x^{(-)}$ ($x^{(+)}$) такой, что $\bar{K} \subset D$ и

$$\begin{aligned} J(x) &> 0, \quad x \in \bar{K} & (J(x) < 0, \quad x \in \bar{K}), \\ u_0(x^{(-)}) &< 0 & (u_0(x^{(+)}) > 0). \end{aligned}$$

Тогда для любого $\eta > 0$ при достаточно малых ε существует $T = T(\eta, \varepsilon) > 0$ такое, что решение $u(x, t, \varepsilon)$ задачи (1.1)–(1.3) удовлетворяет неравенству

$$u(x, t, \varepsilon) < \varphi_1(x) + \eta, \quad (x, t) \in \bar{K} \times [T, +\infty) \quad (3.1)$$

$$(u(x, t, \varepsilon) > \varphi_2(x) - \eta, \quad (x, t) \in \bar{K} \times [T, +\infty)). \quad (3.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем утверждение леммы, относящееся к неравенству (3.1). Утверждение, относящееся к неравенству (3.2), доказывается аналогично. Далее буквой R обозначаем радиус круга K .

Пусть K_0 – круг некоторого радиуса a с центром в точке $x^{(-)}$ такой, что

$$\bar{K}_0 \subset K, \quad u_0(x) < 0, \quad x \in \bar{K}_0.$$

Существование K_0 следует из неравенства $u_0(x^{(-)}) < 0$ и непрерывности $u_0(x)$.

Введем полярную систему координат (ρ, σ) с центром в точке $x^{(-)}$. Пусть число $b \in (0, a)$ таково, что для круга K_1 радиуса $R + b$ с центром в точке $x^{(-)}$ выполнены соотношения

$$\bar{K}_1 \subset D, \quad J(x) > 0, \quad x \in \bar{K}_1. \quad (3.3)$$

Введем семейство окружностей Γ_γ , $\gamma \in [0, 1]$, задав его в координатах (ρ, σ) в виде

$$\rho = a + \gamma(R + b - a) \equiv R_\gamma.$$

Очевидно, что

$$\Gamma_\gamma \in \overline{K_1 \setminus K_0}, \quad \gamma \in [0, 1], \quad (3.4)$$

окружность Γ_0 является границей круга K_0 , а окружность Γ_1 — границей круга K_1 .

Через K_γ обозначим круг, ограниченный Γ_γ .

Введем обозначения: $f(u, \rho, \sigma, \varepsilon) \equiv f(u, x(\rho, \sigma), \varepsilon)$, $\varphi_i(\rho, \sigma) \equiv \varphi_i(x(\rho, \sigma))$.

Определим функцию

$$\beta(x, \gamma, \mu) = \varphi_1(x) + \mu + Q_0(\tau_\gamma, \sigma, \gamma) + \mu Q_1(\tau_\gamma, \sigma, \gamma), \quad x \in \overline{K_\gamma}, \quad \gamma \in [0, 1],$$

где $\mu > 0$ — число, которое уточним ниже, $\tau_\gamma = (R_\gamma - \rho)/\varepsilon$.

Функция $Q_0(\tau_\gamma, \sigma, \gamma)$ является решением задачи (γ играет роль параметра, $\gamma \in [0, 1]$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \tau_\gamma^2} Q_0 &= f(\varphi_1(R_\gamma, \sigma) + Q_0, R_\gamma, \sigma, 0), \quad \tau_\gamma > 0, \\ Q_0(0, \sigma, \gamma) &= \varphi_2(R_\gamma, \sigma) - \varphi_1(R_\gamma, \sigma), \quad Q_0(+\infty, \sigma, \gamma) = 0. \end{aligned}$$

Так как в силу (3.3), (3.4) $J(x) > 0$ при $x \in \Gamma_\gamma$, $\gamma \in [0, 1]$, то Q_0 определяется однозначно, является положительной монотонно убывающей функцией τ_γ при $\tau_\gamma \geq 0$ и имеет экспоненциальные оценки по переменной τ_γ сверху и снизу, причем эти оценки равномерны по $\gamma \in [0, 1]$ и $\sigma \in [0, 2\pi]$, т.е. существуют постоянные $C_i > 0$ и $m_i > 0$, $i = 1, 2$, не зависящие от τ_γ , γ и σ и такие, что

$$|Q_0(\tau_\gamma, \sigma, \gamma)| \leq C_1 \exp(-m_1 \tau_\gamma), \quad \tau_\gamma \geq 0, \quad (3.5)$$

$$|Q_0(\tau_\gamma, \sigma, \gamma)| \geq C_2 \exp(-m_2 \tau_\gamma), \quad \tau_\gamma \geq 0. \quad (3.6)$$

Функцию $Q_1(\tau_\gamma, \sigma, \gamma)$ определим как решение задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \tau_\gamma^2} Q_1 &= f_u(\tau_\gamma, \sigma, \gamma) Q_1 + f_1(\tau_\gamma, \sigma, \gamma), \quad \tau_\gamma > 0, \\ Q_1(0, \sigma, \gamma) &= 0, \quad Q_1(+\infty, \sigma, \gamma) = 0, \end{aligned}$$

где $f_u(\tau_\gamma, \sigma, \gamma) = f_u(\varphi_1(R_\gamma, \sigma) + Q_0, R_\gamma, \sigma, 0)$, $f_1(\tau_\gamma, \sigma, \gamma) = [f_u(\tau_\gamma, \sigma, \gamma) - f_u(\varphi_1(R_\gamma, \sigma), R_\gamma, \sigma, 0)]$.

Функция Q_1 допускает явное представление [4] и имеет равномерную по $\gamma \in [0, 1]$ и $\sigma \in [0, 2\pi]$ экспоненциальную оценку типа (3.5).

Домножим функции Q_i , $i = 1, 2$, на срезающую функцию $\zeta((R_\gamma - \rho)/b)$ (функция ζ была определена в § 2) и получившиеся в результате этой процедуры функции снова обозначим через Q_i , $i = 1, 2$.

По самому построению функция $\beta(x, \gamma, \mu)$ удовлетворяет соотношению

$$\varepsilon^2 \Delta \beta - f(\beta, x, \varepsilon) = -\mu f_u(\varphi_1(x), x, 0) + O(\varepsilon) + O(\mu^2), \quad x \in \overline{K_\gamma}, \quad \gamma \in [0, 1],$$

откуда следует, что существует постоянная $C_3 > 0$, не зависящая от ε , μ , γ и такая, что для любого достаточно малого μ при достаточно малых ε выполняется неравенство

$$\varepsilon^2 \Delta \beta - f(\beta, x, \varepsilon) < -C_3 \mu, \quad x \in \overline{K_\gamma}, \quad \gamma \in [0, 1]. \quad (3.7)$$

Используя равномерные экспоненциальные оценки функций Q_i , нетрудно доказать, что для любого достаточно малого μ при достаточно малых ε имеет место неравенство

$$\beta(x, \gamma, \mu) > \varphi_1(x) + \frac{\mu}{2}, \quad x \in \overline{K}_\gamma, \quad \gamma \in [0, 1]. \quad (3.8)$$

Отметим также очевидное равенство

$$\beta(x, \gamma, \mu) = \varphi_2(x) + \mu, \quad x \in \Gamma_\gamma, \quad \gamma \in [0, 1], \quad (3.9)$$

и воспользуемся теоремой 2.1, согласно которой существует $T_0 = T_0(\mu/2) > 0$ такое, что при достаточно малых ε решение $u(x, t, \varepsilon)$ задачи (1.1)–(1.3) удовлетворяет неравенствам

$$u(x, T_0, \varepsilon) < \varphi_1(x) + \frac{\mu}{2}, \quad x \in \overline{K}_0, \quad (3.10)$$

$$u(x, t, \varepsilon) < \varphi_2(x) + \mu, \quad (x, t) \in \overline{D} \times [T_0, +\infty). \quad (3.11)$$

Введем функцию

$$w(x, t, \mu, \varepsilon) = [\beta(x, \gamma(t), \mu) - u(x, t, \varepsilon)] \exp(-A(t - T_0)), \quad x \in \overline{K}_{\gamma(t)}, \quad t \in [T_0, T],$$

где

$$\gamma(t) = \frac{t - T_0}{T - T_0},$$

а величины A и $T = T(\mu, \varepsilon)$ уточним ниже. Очевидно, что $0 \leq \gamma(t) \leq 1$ при $t \in [T_0, T]$, $\gamma(T_0) = 0$, $\gamma(T) = 1$. Используя (3.7), нетрудно получить неравенство

$$\varepsilon^2 \Delta w - w_t - Bw < \left(-C_3 \mu - \frac{\partial \beta}{\partial \gamma} \cdot \frac{1}{T - T_0} \right) \exp(-A(t - T_0)), \quad x \in \overline{K}_{\gamma(t)}, \quad t \in [T_0, T],$$

где $B = B(x, t, \varepsilon, \mu) = A + \int_0^1 f_u(u + (\beta - u)s, x, \varepsilon) ds$, и, следовательно, $B > 0$, если взять достаточно большое $A > 0$.

Из вида $\beta(x, \gamma, \mu)$ следует, что $\frac{\partial \beta}{\partial \gamma}$ имеет оценку

$$\left| \frac{\partial \beta}{\partial \gamma} \right| \leq \frac{C}{\varepsilon},$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от ε, γ, μ (для ограниченного интервала изменения μ). Поэтому если взять $T = T(\mu, \varepsilon)$ такое, что

$$T > T_0 + \frac{C}{C_3 \mu \varepsilon},$$

то для любого достаточно малого μ при достаточно малых ε будет выполнено неравенство

$$\varepsilon^2 \Delta w - w_t - Bw < 0, \quad x \in \overline{K}_{\gamma(t)}, \quad t \in [T_0, T]. \quad (3.12)$$

Из (3.8) и (3.10) имеем

$$w(x, T_0, \mu, \varepsilon) > 0, \quad x \in \overline{K}_{\gamma(T_0)}, \quad (3.13)$$

а из (3.9) и (3.11) получаем

$$w(x, t, \mu, \varepsilon) > 0, \quad x \in \Gamma_{\gamma(t)}, \quad t \in [T_0, T]. \quad (3.14)$$

Из (3.12)–(3.14) очевидным образом следует, что $w(x, t, \mu, \varepsilon) > 0$, $x \in \overline{K}_{\gamma(t)}$, $t \in [T_0, T]$, в частности, при $t = T$ имеем неравенство

$$w(x, T, \mu, \varepsilon) > 0, \quad x \in \overline{K}_{\gamma(T)} = \overline{K}_1,$$

откуда получаем

$$u(x, T, \varepsilon) < \beta(x, \gamma(T), \mu) = \beta(x, 1, \mu), \quad x \in \overline{K}_1. \quad (3.15)$$

Из (3.9) и (3.11) следует, что

$$u(x, t, \varepsilon) < \beta(x, 1, \mu), \quad x \in \Gamma_1, \quad t \in [T, +\infty). \quad (3.16)$$

Неравенства (3.15), (3.16) и неравенство (3.7), взятое при $\gamma = 1$, показывают, что функция $\beta(x, 1, \mu)$ является стационарным верхним барьером для решения $u(x, t, \varepsilon)$ при $(x, t) \in \overline{K}_1 \times [T, +\infty)$, т.е.

$$u(x, t, \varepsilon) < \beta(x, 1, \mu), \quad (x, t) \in \overline{K}_1 \times [T, +\infty). \quad (3.17)$$

Рассматривая выражение для $\beta(x, 1, \mu)$ и учитывая, что функции Q_i , $i = 1, 2$, домножены на срезающую функцию, приходим к выводу, что выполнено равенство

$$\beta(x, 1, \mu) = \varphi_1(x) + \mu, \quad x \in \overline{K}. \quad (3.18)$$

Возьмем теперь столь малое $\eta > 0$, чтобы для $\mu = \eta$ при достаточно малых ε было выполнено неравенство (3.17). Тогда из (3.17) и (3.18) получим неравенство (3.1):

$$u(x, t, \varepsilon) < \varphi_1(x) + \eta, \quad (x, t) \in \overline{K} \times [T, +\infty).$$

Лемма доказана.

Следующая лемма обобщает результат леммы 3.1 на случай, когда берется не круг K , а произвольная область $D^{(-)}$ ($D^{(+)}$), замыкание которой лежит внутри D .

ЛЕММА 3.2. Пусть выполнены условия (A1), (A4) и $D^{(-)}$ ($D^{(+)}$) – область такая, что $\overline{D}^{(-)} \subset D$ ($\overline{D}^{(+)} \subset D$) и

$$J(x) > 0, \quad x \in \overline{D}^{(-)} \quad (J(x) < 0, \quad x \in \overline{D}^{(+)}).$$

Пусть, далее, существует точка $\bar{x}^{(-)} \in D^{(-)}$ ($\bar{x}^{(+)} \in D^{(+)}$) такая, что $u_0(\bar{x}^{(-)}) < 0$ ($u_0(\bar{x}^{(+)}) > 0$).

Тогда для любого $\eta > 0$ при достаточно малых ε существует $T_1 = T_1(\eta, \varepsilon) > 0$ такое, что решение $u(x, t, \varepsilon)$ задачи (1.1)–(1.3) удовлетворяет неравенствам

$$u(x, t, \varepsilon) < \varphi_1(x) + \eta, \quad (x, t) \in \overline{D}^{(-)} \times [T_1, +\infty) \quad (3.19)$$

$$u(x, t, \varepsilon) > \varphi_2(x) - \eta, \quad (x, t) \in \overline{D}^{(+)} \times [T_1, +\infty). \quad (3.20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем утверждение леммы, относящееся к неравенству (3.19). Утверждение, относящееся к неравенству (3.20), доказывается аналогично.

Пусть число $h > 0$ столь мало, что для области D^h , представляющей собой объединение $D^{(-)}$ с h -окрестностью ее границы $\partial D^{(-)}$, выполнены соотношения

$$\bar{D}^h \subset D, \quad J(x) > 0, \quad x \in \bar{D}^h. \quad (3.21)$$

Пусть $\{E_i^{h/4}\}$, $i = 1, 2, \dots, n$ (где n – некоторое натуральное число) – множество открытых кругов радиуса $h/4$ с центрами в некоторых точках $x_i \in D$ такое, что

$$D^{(-)} \subset \bigcup_{i=1}^n E_i^{h/4}, \quad (3.22)$$

и для любого $j \in \overline{1, n}$ имеем $\bar{E}_j^{h/4} \cap \bar{D}^{(-)} \neq \emptyset$. Тогда

$$\bigcup_{i=1}^n \bar{E}_i^{h/4} \subset D^h.$$

Покажем, что $\forall \eta > 0$ и $\forall j \in \overline{1, n}$ при достаточно малых ε найдется $T_{(j)} > 0$ такое, что решение $u(x, t, \varepsilon)$ задачи (1.1)–(1.3) удовлетворяет неравенству

$$u(x, t, \varepsilon) < \varphi_1(x) + \eta, \quad (x, t) \in \bar{E}_j^{h/4} \times [T_{(j)}, +\infty). \quad (3.23)$$

Зафиксируем произвольное $\eta > 0$ и $j \in \overline{1, n}$. Если $x_j = \bar{x}^{(-)}$, то (3.23) следует из леммы 3.1.

Пусть $x_j \neq \bar{x}^{(-)}$. Соединим точку x_j с точкой $\bar{x}^{(-)}$ непрерывной спрямляемой кривой S , лежащей вместе со своей d -окрестностью (где $d > 0$ – некоторое число) внутри D^h . Пусть s – координата точки M на кривой S , равная расстоянию между $\bar{x}^{(-)}$ и M вдоль S . Выберем целое число $m \geq 0$ так, чтобы разность между длиной кривой S и числом $s_m = (m/2)d$ была неотрицательной и не превосходила $d/2$. Пусть V_k , $k = 0, 1, \dots, m$, – круги радиуса d с центрами в точках M_k кривой S с координатами $s_k = (kd)/2$. Без ограничения общности можно считать, что $M_m \neq x_j$ (случай $M_m = x_j$ рассматривается аналогично). Через V_{m+1} обозначим круг $E_j^{h/4}$. Отметим, что центром V_0 является $\bar{x}^{(-)}$, $\forall k \in \overline{1, m+1}$ центр круга V_k лежит в круге V_{k-1} и $\bar{V}_k \subset \bar{D}^h$, $k = 0, 1, \dots, m+1$, а значит, вследствие (3.21)

$$J(x) > 0, \quad x \in \bar{V}_k \subset D, \quad k = 0, 1, \dots, m+1. \quad (3.24)$$

Так как $u_0(\bar{x}^{(-)}) < 0$, то в силу (3.24) для круга V_0 выполнены условия леммы 3.1. Используя лемму 3.1 и теорему 2.1, получаем, что для любого $\mu > 0$ при достаточно малых ε существует $t_0 = t_0(\mu, \varepsilon) > 0$ такое, что решение $u(x, t, \varepsilon)$ задачи (1.1)–(1.3) удовлетворяет неравенствам

$$u(x, t, \varepsilon) < \varphi_1(x) + \mu/2, \quad (x, t) \in \bar{V}_0 \times [t_0, +\infty), \quad (3.25)$$

$$u(x, t, \varepsilon) < \varphi_2(x) + \mu, \quad (x, t) \in \bar{D} \times [t_0, +\infty). \quad (3.26)$$

Введем обозначения: $x^{(-)} = M_1$, $K = V_1$. Так как центр $x^{(-)}$ круга K лежит внутри V_0 и выполнено неравенство (3.25), можно утверждать, что найдется круг K_0 с центром в $x^{(-)}$ такой, что $\bar{K}_0 \subset K$,

$$u(x, t_0, \varepsilon) < \varphi_1(x) + \mu/2, \quad x \in \bar{K}_0. \quad (3.27)$$

Обозначим через R радиус круга K , через a – радиус круга K_0 . Пользуясь тем, что в силу (3.24) $J(x) > 0$, $x \in \bar{K} \subset D$, введем полярные координаты (ρ, σ) с центром в точке $x^{(-)}$, число b , семейство Γ_γ и функцию $\beta(x, \gamma, \mu)$ точно так же, как в доказательстве леммы 3.1. Теперь с помощью функции $\beta(x, \gamma, \mu)$, используя неравенства (3.27) и (3.26) вместо (3.10) и (3.11) (с заменой T_0 на t_0), тем же путем, что и при доказательстве леммы 3.1, приходим к выводу, что для любого достаточно малого $\eta > 0$ при достаточно малых ε существует $T = T(\eta, \varepsilon) > 0$ такое, что

$$u(x, t, \varepsilon) < \varphi_1(x) + \eta, \quad (x, t) \in \bar{K} \times [T, +\infty).$$

Отсюда и из (3.26) следует, что $\forall \mu > 0$ при достаточно малых ε можно указать такое $t_1 = t_1(\mu, \varepsilon) > 0$, что справедливы неравенства

$$u(x, t, \varepsilon) < \varphi_1(x) + \mu/2, \quad (x, t) \in \bar{V}_1 \times [t_1, +\infty), \quad (3.28)$$

$$u(x, t, \varepsilon) < \varphi_2(x) + \mu, \quad (x, t) \in \bar{D} \times [t_1, +\infty). \quad (3.29)$$

Если $m > 0$, то уже на основании (3.28), (3.29), пользуясь тем, что центр M_2 круга V_2 лежит в круге V_1 , можно провести аналогичные рассуждения по отношению к кругу V_2 и таким образом доказать, что $\forall \mu > 0$ при достаточно малых ε существует $t_2 = t_2(\mu, \varepsilon) > 0$ такое, что

$$u(x, t, \varepsilon) < \varphi_1(x) + \mu/2, \quad (x, t) \in \bar{V}_2 \times [t_2, +\infty),$$

$$u(x, t, \varepsilon) < \varphi_2(x) + \mu, \quad (x, t) \in \bar{D} \times [t_2, +\infty).$$

Если $m > 1$, то, используя тот же подход, устанавливаем соответствующие неравенства для V_3 и так далее до V_{m+1} (если $m > 2$). На последнем шаге мы приходим к выводу, что $\forall \mu > 0$ при достаточно малых ε существует $t_{m+1} = t_{m+1}(\mu, \varepsilon) > 0$ такое, что справедливо неравенство

$$u(x, t, \varepsilon) < \varphi_1(x) + \mu, \quad (x, t) \in \bar{V}_{m+1} \times [t_{m+1}, +\infty). \quad (3.30)$$

Так как $V_{m+1} = E_j^{h/4}$, то из (3.30) при $\mu = \eta$ следует (3.23) с $T_{(j)} = t_{m+1}(\eta, \varepsilon)$.

Итак, доказано, что $\forall \eta > 0$ и $\forall j \in \overline{1, n}$ при достаточно малых ε существует $T_{(j)} > 0$ такое, что для решения $u(x, t, \varepsilon)$ задачи (1.1)–(1.3) выполнено неравенство (3.23).

Так как число кругов $E_i^{h/4}$ конечно, то из доказанного утверждения следует, что $\forall \eta > 0$ при достаточно малых ε выполнено неравенство

$$u(x, t, \varepsilon) < \varphi_1(x) + \eta, \quad (x, t) \in \bigcup_{i=1}^n \bar{E}_i^{h/4} \times [T_1, +\infty), \quad (3.31)$$

с $T_1(\eta, \varepsilon) = \max_{1 \leq i \leq n} T_{(i)} > 0$. Из (3.22) и (3.31) следует (3.19). Лемма доказана.

В следующей лемме содержится такое же утверждение, как в лемме 3.2, но для того случая, когда граница $D^{(-)}$ ($D^{(+)}$) содержит границу ∂D области D .

ЛЕММА 3.3. Пусть выполнены условия (A1), (A4) и $D^{(-)}$ ($D^{(+)}$) – область с гладкой границей $\partial D^{(-)}$ ($\partial D^{(+)}$) такая, что $D^{(-)} \subseteq D$ ($D^{(+)} \subseteq D$), $\partial D \subseteq \partial D^{(-)}$ ($\partial D \subseteq \partial D^{(+)}$) и

$$J(x) > 0, \quad x \in \bar{D}^{(-)} \quad (J(x) < 0, \quad x \in \bar{D}^{(+)}).$$

Пусть, далее, существует точка $x^{(-)} \in D^{(-)}$ ($x^{(+)} \in D^{(+)}$) такая, что

$$u_0(x^{(-)}) < 0 \quad (u_0(x^{(+)} > 0).$$

Тогда $\forall \eta > 0$ при достаточно малых ε существует $T_2 = T_2(\eta, \varepsilon) > 0$ такое, что решение $u(x, t, \varepsilon)$ задачи (1.1)–(1.3) удовлетворяет неравенствам

$$u(x, t, \varepsilon) < \varphi_1(x) + \eta, \quad (x, t) \in \bar{D}^{(-)} \times [T_2, +\infty) \quad (3.32)$$

$$(u(x, t, \varepsilon) > \varphi_2(x) - \eta, \quad (x, t) \in \bar{D}^{(+)} \times [T_2, +\infty)). \quad (3.33)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем первое утверждение леммы, относящееся к неравенству (3.32). Утверждение, относящееся к неравенству (3.33), доказывается аналогично.

Будем использовать локальные координаты (z, ℓ) в малой δ -окрестности ∂D , введенные в § 2.

Пусть число $z_1 \in (0, \delta/2]$ таково, что область, ограниченная кривой, имеющей в локальных координатах (z, ℓ) уравнение $z = z_1$, и кривой ∂D , принадлежит $D^{(-)}$, и пусть $z_0 = z_1/2$. Обозначим через $D_{\text{ex}}^{(-)}$ область, ограниченную кривой с уравнением $z = z_0$ и кривой ∂D , и введем область

$$D_{\text{in}}^{(-)} = D^{(-)} \setminus D_{\text{ex}}^{(-)}. \quad (3.34)$$

Уменьшим, если потребуется, z_1 так, чтобы

$$\exists \bar{x}^{(-)} \in D_{\text{in}}^{(-)}: \quad u_0(\bar{x}^{(-)}) < 0. \quad (3.35)$$

Введем обозначения: $f(u, z, \ell, \varepsilon) \equiv f(u, x(z, \ell), \varepsilon)$; $\varphi_i(z, \ell) \equiv \varphi_i(x(z, \ell))$, $i = 1, 2$; $u(z, \ell, t, \varepsilon) \equiv u(x(z, \ell), t, \varepsilon)$, где $u(x, t, \varepsilon)$ – решение задачи (1.1)–(1.3).

Определим функцию

$$\beta(z, \ell, \mu, \nu) = \varphi_1(z, \ell) + \mu + Q_0(\tau, \ell, \nu) + \mu Q_1(\tau, \ell, \nu), \quad z \in [\nu, z_1], \quad \ell \in [0, \ell_0],$$

где $\mu > 0$ – число, которое уточним ниже, $\nu \in [0, z_0]$, $\tau = (z - \nu)/\varepsilon$.

Функция $Q_0(\tau, \ell, \nu)$ является решением задачи (ν играет роль параметра, $\nu \in [0, z_0]$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} Q_0 &= f(\varphi_1(\nu, \ell) + Q_0, \nu, \ell, 0), \quad \tau > 0, \\ Q_0(0, \ell, \nu) &= \varphi_2(\nu, \ell) - \varphi_1(\nu, \ell), \quad Q_0(+\infty, \ell, \nu) = 0. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Число z_0 выбрано таким образом, что $J(x(\nu, \ell)) > 0$ при $\nu \in [0, z_0]$, $\ell \in [0, \ell_0]$, поэтому Q_0 определяется однозначно, является положительной монотонно убывающей функцией τ при $\tau \geq 0$ и имеет экспоненциальные оценки по переменной τ сверху и снизу типа (3.5), (3.6), причем эти оценки равномерны по $\nu \in [0, z_0]$ и $\ell \in [0, \ell_0]$.

Функцию $Q_1(\tau, \ell, \nu)$ определим как решение задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} Q_1 &= f_u(\tau, \ell, \nu) Q_1 + f_1(\tau, \ell, \nu), \quad \tau > 0, \\ Q_1(0, \ell, \nu) &= 0, \quad Q_1(+\infty, \ell, \nu) = 0, \end{aligned} \quad (3.37)$$

где $f_u(\tau, \ell, \nu) = f_u(\varphi_1(\nu, \ell) + Q_0, \nu, \ell, 0)$, $f_1(\tau, \ell, \nu) = [f_u(\tau, \ell, \nu) - f_u(\varphi_1(\nu, \ell), \nu, \ell, 0)]$.

Функция Q_1 допускает явное представление и имеет равномерную по $\nu \in [0, z_0]$ и $\ell \in [0, \ell_0]$ экспоненциальную оценку типа (3.5).

По самому построению функция $\beta(z, \ell, \mu, \nu)$ удовлетворяет соотношению

$$\varepsilon^2 \Delta \beta - f(\beta, z, \ell, \varepsilon) = -\mu \bar{f}_u(z, \ell) + O(\varepsilon) + O(\mu^2), \quad z \in [\nu, z_1], \quad \ell \in [0, \ell_0], \quad \nu \in [0, z_0],$$

где $\bar{f}_u(z, \ell) \equiv f_u(\varphi_1(z, \ell), z, \ell, 0)$, откуда следует, что существует постоянная $C_0 > 0$, не зависящая от ε, μ, ν и такая, что для любого достаточно малого μ при достаточно малых ε выполняется неравенство

$$\varepsilon^2 \Delta \beta - f(\beta, z, \ell, \varepsilon) < -C_0 \mu, \quad z \in [\nu, z_1], \quad \ell \in [0, \ell_0], \quad \nu \in [0, z_0]. \quad (3.38)$$

Используя экспоненциальные оценки функций Q_i , нетрудно доказать, что для любого достаточно малого μ при достаточно малых ε имеет место неравенство

$$\beta(z, \ell, \mu, \nu) > \varphi_1(z, \ell) + \mu/2, \quad z \in [\nu, z_1], \quad \ell \in [0, \ell_0], \quad \nu \in [0, z_0]. \quad (3.39)$$

Отметим также очевидное равенство

$$\beta(z, \ell, \mu, \nu)|_{z=\nu} = \varphi_2(\nu, \ell) + \mu, \quad \ell \in [0, \ell_0], \quad \nu \in [0, z_0]. \quad (3.40)$$

В силу (3.35) и того, что $D_{\text{in}}^{(-)} \subset D^{(-)}$ (см. (3.34)), на основании леммы 3.2 и теоремы 2.1 можно заключить, что $\forall \mu > 0$ при достаточно малых ε существует $T_{(0)} = T_{(0)}(\mu, \varepsilon) > 0$ такое, что решение $u(x, t, \varepsilon)$ задачи (1.1)–(1.3) удовлетворяет неравенствам

$$u(x, t, \varepsilon) < \varphi_1(x) + \frac{\mu}{2}, \quad x \in \bar{D}_{\text{in}}^{(-)}, \quad t \in [T_{(0)}, +\infty), \quad (3.41)$$

$$u(x, t, \varepsilon) < \varphi_2(x) + \mu, \quad (x, t) \in \bar{D}, \quad t \in [T_{(0)}, +\infty). \quad (3.42)$$

Введем функцию

$$\begin{aligned} w(z, \ell, t, \mu, \varepsilon) &= [\beta(z, \ell, \mu, \nu(t)) - u(z, \ell, t, \varepsilon)] \exp(-A(t - T_{(0)})), \\ z &\in [\nu(t), z_1], \quad \ell \in [0, \ell_0], \quad t \in [T_{(0)}, T_{(1)}], \end{aligned}$$

где

$$\nu(t) = z_0 \frac{T_{(1)} - t}{T_{(1)} - T_{(0)}},$$

а величины A и $T_{(1)} = T_{(1)}(\mu, \varepsilon)$ уточним ниже. Очевидно, что

$$0 \leq \nu(t) \leq z_0 \quad \text{при} \quad t \in [T_{(0)}, T_{(1)}], \quad \nu(T_{(0)}) = z_0, \quad \nu(T_{(1)}) = 0.$$

Используя (3.38), нетрудно получить неравенство

$$\varepsilon^2 \Delta w - w_t - Bw < \left(-C_0 \mu - \frac{\partial \beta}{\partial \nu} \cdot \frac{z_0}{T_{(1)} - T_{(0)}} \right) \exp(-A(t - T_{(0)})),$$

$$z \in [\nu(t), z_1], \quad \ell \in [0, \ell_0], \quad t \in [T_{(0)}, T_{(1)}],$$

где $B = B(z, \ell, t, \varepsilon, \mu) = A + \int_0^1 f_u(u + (\beta - u)s, z, \ell, \varepsilon) ds$ и, следовательно, $B > 0$, если взять достаточно большое $A > 0$.

Из вида $\beta(z, \ell, \mu, \nu)$ следует, что $\frac{\partial \beta}{\partial \nu}$ имеет оценку

$$\left| \frac{\partial \beta}{\partial \nu} \right| \leq \frac{C_1}{\varepsilon},$$

где постоянная $C_1 > 0$ не зависит от ε, ν, μ (для ограниченного интервала изменения μ). Поэтому, если взять $T_{(1)} = T_{(1)}(\mu, \varepsilon)$ такое, что

$$T_{(1)} > T_{(0)} + \frac{C_1 z_0}{C_0 \mu \varepsilon},$$

то для любого достаточно малого μ при достаточно малых ε будет выполнено неравенство

$$\varepsilon^2 \Delta w - w_t - Bw < 0, \quad z \in [\nu(t), z_1], \quad \ell \in [0, \ell_0], \quad t \in [T_{(0)}, T_{(1)}]. \quad (3.43)$$

Из (3.39) и (3.41) имеем

$$w(z, \ell, T_{(0)}, \mu, \varepsilon) > 0, \quad z \in [\nu(T_{(0)}), z_1], \quad \ell \in [0, \ell_0], \quad (3.44)$$

$$w(z, \ell, t, \mu, \varepsilon)|_{z=z_1} > 0, \quad t \in [T_{(0)}, T_{(1)}], \quad \ell \in [0, \ell_0], \quad (3.45)$$

а из (3.40) и (3.42) получаем

$$w(z, \ell, t, \mu, \varepsilon)|_{z=\nu(t)} > 0, \quad \ell \in [0, \ell_0], \quad t \in [T_{(0)}, T_{(1)}]. \quad (3.46)$$

Из (3.43)–(3.46) очевидным образом следует, что

$$w(z, \ell, t, \mu, \varepsilon) > 0, \quad z \in [\nu(t), z_1], \quad \ell \in [0, \ell_0], \quad t \in [T_{(0)}, T_{(1)}],$$

в частности, при $t = T_{(1)}$ имеем неравенство

$$w(z, \ell, T_{(1)}, \mu, \varepsilon) > 0, \quad z \in [\nu(T_{(1)}), z_1] = [0, z_1], \quad \ell \in [0, \ell_0],$$

откуда получаем

$$u(z, \ell, T_{(1)}, \varepsilon) < \beta(z, \ell, \mu, \nu(T_{(1)})) = \beta(z, \ell, \mu, 0), \quad z \in [0, z_1], \quad \ell \in [0, \ell_0]. \quad (3.47)$$

Возьмем произвольное $\eta > 0$ и положим

$$\eta_0 = \min \left\{ \eta, \min_{[0, \ell_0]} (\varphi_2(0, \ell) - \varphi_1(0, \ell)) \right\}.$$

Введем функцию

$$\tilde{\beta}(z, \ell, \mu, \gamma) = \varphi_1(z, \ell) + \mu + \tilde{Q}_0(\tau, \ell, \gamma) + \mu \tilde{Q}_1(\tau, \ell, \gamma), \quad z \in [0, z_1], \quad \ell \in [0, \ell_0], \quad (3.48)$$

где $\tau = z/\varepsilon$, $\gamma \in [0, 1]$, число $\mu > 0$ – то же, что и в выражении для $\beta(z, \ell, \mu, \nu)$, а функции $\tilde{Q}_i(\tau, \ell, \gamma)$ определим следующим образом.

Функция $\tilde{Q}_0(\tau, \ell, \gamma)$ является решением задачи (γ играет роль параметра, $\gamma \in [0, 1]$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \tilde{Q}_0 &= f(\varphi_1(0, \ell) + \tilde{Q}_0, 0, \ell, 0), \quad \tau > 0, \\ \tilde{Q}_0(0, \ell, \gamma) &= \varphi_2(0, \ell) - \varphi_1(0, \ell) - \gamma \psi(\ell), \quad \tilde{Q}_0(+\infty, \ell, \gamma) = 0, \end{aligned} \quad (3.49)$$

где $\psi(\ell) = \varphi_2(0, \ell) - \varphi_1(0, \ell) - \eta_0/2$. При любом $\gamma \in [0, 1]$ функция $\tilde{Q}_0(\tau, \ell, \gamma)$ положительна, монотонно убывает при $\tau \geq 0$ и имеет равномерные по $\gamma \in [0, 1]$ и $\ell \in [0, \ell_0]$ экспоненциальные оценки сверху и снизу типа (3.5), (3.6). Из (3.49) следует, что

$$\frac{\partial \tilde{Q}_0}{\partial \tau}(0, \ell, \gamma) = - \left(2 \int_{\varphi_1(0, \ell)}^{\varphi_2(0, \ell) - \gamma \psi(\ell)} f(u, 0, \ell, 0) du \right)^{\frac{1}{2}} \equiv -\sqrt{2} J_\gamma(\ell). \quad (3.50)$$

Так как по условию леммы

$$J_0(\ell) = (J(x(0, \ell)))^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\varphi_1(0, \ell)}^{\varphi_2(0, \ell)} f(u, 0, \ell, 0) du \right)^{\frac{1}{2}} > 0,$$

выполнено (A1) и $\varphi_2(0, \ell) - \gamma \psi(\ell) > \varphi_1(0, \ell)$, то $J_\gamma(\ell) > 0$ при $\ell \in [0, \ell_0]$, $\gamma \in [0, 1]$, и поэтому

$$\frac{\partial \tilde{Q}_0}{\partial \tau}(0, \ell, \gamma) \leq -C_2 < 0, \quad \ell \in [0, \ell_0], \quad \gamma \in [0, 1], \quad (3.51)$$

где $C_2 = C_2(\eta_0) > 0$ – некоторая постоянная.

Заметим, что

$$\tilde{Q}_0(\tau, \ell, 0) = Q_0(\tau, \ell, 0), \quad (3.52)$$

где $Q_0(\tau, \ell, 0)$ – решение задачи (3.36) при $\nu = 0$.

Функция $\tilde{Q}_1(\tau, \ell, \gamma)$ определяется аналогично функции $Q_1(\tau, \ell, \nu)$ (см. (3.37)) как решение задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \tilde{Q}_1 &= \tilde{f}_u(\tau, \ell, \gamma) \tilde{Q}_1 + \tilde{f}_1(\tau, \ell, \gamma), \quad \tau > 0, \\ \tilde{Q}_1(0, \ell, \gamma) &= 0, \quad \tilde{Q}_1(+\infty, \ell, \gamma) = 0, \end{aligned}$$

где $\tilde{f}_u(\tau, \ell, \gamma) = f_u(\varphi_1(0, \ell) + \tilde{Q}_0, 0, \ell, 0)$, $\tilde{f}_1(\tau, \ell, \gamma) = [f_u(\tau, \ell, \gamma) - f_u(\varphi_1(0, \ell), 0, \ell, 0)]$.

Отметим, что

$$\tilde{Q}_1(\tau, \ell, 0) = Q_1(\tau, \ell, 0). \quad (3.53)$$

В силу (3.52) и (3.53) $\tilde{\beta}(z, \ell, \mu, 0) = \beta(z, \ell, \mu, 0)$, и поэтому неравенство (3.47) можно переписать в виде

$$u(z, \ell, T_{(1)}, \varepsilon) < \tilde{\beta}(z, \ell, \mu, 0), \quad z \in [0, z_1], \quad \ell \in [0, \ell_0]. \quad (3.54)$$

Отметим также, что при достаточно малых ε имеет место очевидное неравенство

$$\tilde{\beta}(z, \ell, \mu, \gamma)|_{z=z_1} > \varphi_1(z_1, \ell) + \frac{\mu}{2}, \quad \ell \in [0, \ell_0], \quad \gamma \in [0, 1]. \quad (3.55)$$

Из (3.51) следует, что для любого достаточно малого μ при достаточно малых ε

$$\tilde{\beta}_z(0, \ell, \mu, \gamma) = \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{\partial \tilde{Q}_0}{\partial \tau}(0, \ell, \gamma) + \mu \frac{\partial \tilde{Q}_1}{\partial \tau}(0, \ell, \gamma) \right] + O(1) < 0, \quad \ell \in [0, \ell_0], \quad \gamma \in [0, 1]. \quad (3.56)$$

Кроме того, по самому построению функции $\tilde{\beta}(z, \ell, \mu, \gamma)$ для любого достаточно малого μ при достаточно малых ε имеет место неравенство вида (3.38):

$$\varepsilon^2 \Delta \tilde{\beta} - f(\tilde{\beta}, z, \ell, \varepsilon) < -\tilde{C}_0 \mu, \quad z \in [0, z_1], \quad \ell \in [0, \ell_0], \quad \gamma \in [0, 1], \quad (3.57)$$

где $\tilde{C}_0 > 0$ – не зависящая от ε , μ и γ постоянная.

Введем функцию

$$\begin{aligned} \tilde{w}(z, \ell, t, \mu, \varepsilon) &= [\tilde{\beta}(z, \ell, \mu, \gamma(t)) - u(x, t, \varepsilon)] \exp(-\tilde{A}(t - T_{(1)})), \\ z &\in [0, z_1], \quad \ell \in [0, \ell_0], \quad t \in [T_{(1)}, T_{(2)}], \end{aligned}$$

где

$$\gamma(t) = \frac{t - T_{(1)}}{T_{(2)} - T_{(1)}},$$

а величины $\tilde{A}$ и $T_{(2)}$ уточнены ниже. Заметим, что $\gamma(T_{(1)}) = 0$, $\gamma(T_{(2)}) = 1$.

Используя (3.57), получаем неравенство

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \Delta \tilde{w} - \tilde{w}_t - \tilde{B} \tilde{w} &< \left(-\tilde{C}_0 \mu - \frac{\partial \tilde{\beta}}{\partial \gamma} \cdot \frac{1}{T_{(2)} - T_{(1)}} \right) \exp(-\tilde{A}(t - T_{(1)})), \\ z &\in [0, z_1], \quad \ell \in [0, \ell_0], \quad t \in [T_{(1)}, T_{(2)}], \end{aligned}$$

где $\tilde{B} = \tilde{A} + \int_0^1 f_u(u + (\tilde{\beta} - u)s, x, \varepsilon) ds > 0$ при достаточно большом $\tilde{A} > 0$.

Производная $\frac{\partial \tilde{\beta}}{\partial \gamma}$ имеет оценку $|\frac{\partial \tilde{\beta}}{\partial \gamma}| \leq \tilde{C}_1$, где $\tilde{C}_1 > 0$ – постоянная, не зависящая от ε , γ и μ (для ограниченного интервала изменения μ). Поэтому если взять $T_{(2)} = T_{(2)}(\mu, \varepsilon)$ такое, что

$$T_{(2)} > T_{(1)} + \frac{\tilde{C}_1}{\tilde{C}_0 \mu},$$

то будет выполнено неравенство

$$\varepsilon^2 \Delta \tilde{w} - \tilde{w}_t - \tilde{B} \tilde{w} < 0, \quad z \in [0, z_1], \quad \ell \in [0, \ell_0], \quad t \in [T_{(1)}, T_{(2)}]. \quad (3.58)$$

Из (3.54) имеем неравенство

$$\tilde{w}(z, \ell, T_{(1)}, \mu, \varepsilon) > 0, \quad z \in [0, z_1], \quad \ell \in [0, \ell_0], \quad (3.59)$$

а из (3.56) и (1.2) получаем

$$\tilde{w}_z(0, \ell, t, \mu, \varepsilon) < 0, \quad t \in [T_{(1)}, T_{(2)}], \quad \ell \in [0, \ell_0]. \quad (3.60)$$

Наконец, (3.41) и (3.55) дают неравенство

$$\tilde{w}(z_1, \ell, t, \mu, \varepsilon) > 0, \quad t \in [T_{(1)}, T_{(2)}], \quad \ell \in [0, \ell_0]. \quad (3.61)$$

Из (3.58)–(3.61) очевидным образом следует, что $\tilde{w}(z, \ell, t, \mu, \varepsilon) > 0$, $z \in [0, z_1]$, $\ell \in [0, \ell_0]$, $t \in [T_{(1)}, T_{(2)}]$, в частности, $\tilde{w}(z, \ell, T_{(2)}, \mu, \varepsilon) > 0$, $z \in [0, z_1]$, $\ell \in [0, \ell_0]$, откуда получаем

$$u(z, \ell, T_{(2)}, \varepsilon) < \tilde{\beta}(z, \ell, \mu, \gamma(T_{(2)})) = \tilde{\beta}(z, \ell, \mu, 1), \quad z \in [0, z_1], \quad \ell \in [0, \ell_0]. \quad (3.62)$$

Из (3.41) и (3.55) следует, что

$$u(z_1, \ell, t, \varepsilon) < \tilde{\beta}(z_1, \ell, \mu, 1), \quad \ell \in [0, \ell_0], \quad t \in [T_{(2)}, +\infty). \quad (3.63)$$

Неравенства (3.62), (3.63) и неравенства (3.56), (3.57), взятые при $\gamma = 1$, показывают, что для любого достаточно малого μ при достаточно малых ε функция $\tilde{\beta}(z, \ell, \mu, 1)$ является стационарным верхним барьером для решения $u(z, \ell, t, \varepsilon)$ при $z \in [0, z_1]$, $\ell \in [0, \ell_0]$, $t \in [T_{(2)}, +\infty)$, т.е.

$$u(z, \ell, t, \varepsilon) < \tilde{\beta}(z, \ell, \mu, 1), \quad z \in [0, z_1], \quad \ell \in [0, \ell_0], \quad t \in [T_{(2)}, +\infty). \quad (3.64)$$

Поскольку $0 \leq \tilde{Q}_0(\tau, \ell, 1) \leq \eta_0/2 \leq \eta/2$, то для любого достаточно малого μ при достаточно малых ε будет выполнено неравенство

$$\tilde{\beta}(z, \ell, \mu, 1) < \varphi_1(z, \ell) + \eta, \quad z \in [0, z_1], \quad \ell \in [0, \ell_0]. \quad (3.65)$$

Из (3.64), (3.65) следует, что

$$u(x, t, \varepsilon) < \varphi_1(x) + \eta, \quad x \in \bar{D}_{\text{ex}}^{(-)}, \quad t \in [T_{(2)}, +\infty). \quad (3.66)$$

Зафиксируем столь малое $\mu \in [0, \eta]$, чтобы при достаточно малых ε выполнялись неравенства (3.41) и (3.66). Тогда из (3.41) и (3.66) в силу (3.34) получим неравенство (3.32) с $T_2 = T_{(2)}$. Очевидно, что $T_2 = T_2(\eta, \varepsilon) > 0$. Лемма доказана.

В следующей лемме показано, что решение задачи (1.1)–(1.3) удовлетворяет неравенствам (3.32), (3.33) и при иных условиях, нежели в лемме 3.3.

ЛЕММА 3.4. Пусть выполнены условия (A1), (A4), и пусть $\Omega^{(-)}$ ($\Omega^{(+)}$) – область с гладкой границей $\partial\Omega^{(-)}$ ($\partial\Omega^{(+)}$) такая, что:

1) $\Omega^{(-)} \subseteq D$ ($\Omega^{(+)} \subseteq D$) и либо $\bar{\Omega}^{(-)} \cap \partial D = \emptyset$ ($\bar{\Omega}^{(+)} \cap \partial D = \emptyset$), либо $\partial D \subseteq \partial\Omega^{(-)}$ ($\partial D \subseteq \partial\Omega^{(+)}$);

2) $u_0(x) < 0$, $x \in \bar{\Omega}^{(-)}$ ($u_0(x) > 0$, $x \in \bar{\Omega}^{(+)}$);

3) $J(x) > 0$, $x \in \partial\Omega^{(-)} \setminus \partial D$ ($J(x) < 0$, $x \in \partial\Omega^{(+)} \setminus \partial D$).

Тогда для любого $\eta > 0$ существует $T_3 = T_3(\eta) > 0$ такое, что при достаточно малых ε решение $u(x, t, \varepsilon)$ задачи (1.1)–(1.3) удовлетворяет неравенству

$$u(x, t, \varepsilon) < \varphi_1(x) + \eta, \quad (x, t) \in \bar{\Omega}^{(-)} \times [T_3, +\infty) \quad (3.67)$$

$$(u(x, t, \varepsilon) > \varphi_2(x) - \eta, \quad (x, t) \in \bar{\Omega}^{(+)} \times [T_3, +\infty)). \quad (3.68)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем утверждение, относящееся к неравенству (3.67). Утверждение, относящееся к неравенству (3.68), доказывается аналогично.

Рассмотрим сначала случай, когда $\overline{\Omega}^{(-)} \cap \partial D = \emptyset$.

Через $\partial\Omega_1^{(-)} \subset \partial\Omega^{(-)}$ обозначим ту (замкнутую) кривую, для которой область $\Omega^{(-)}$ является внутренней. Если $\Omega^{(-)}$ – многосвязная область, то через $\partial\Omega_i^{(-)}$, $i = 2, \dots, n$, обозначим те (замкнутые) кривые, входящие в $\partial\Omega^{(-)}$, для которых область $\Omega^{(-)}$ является внешней.

Для точек M из малой окрестности кривой $\partial\Omega_1^{(-)}$ введем локальные координаты (z, ℓ) , где $|z|$ – расстояние от M до $\partial\Omega_1^{(-)}$ вдоль нормали к $\partial\Omega_1^{(-)}$, $z = |z|$, если M принадлежит внутренней по отношению к $\partial\Omega_1^{(-)}$ подобласти области D , $z = -|z|$, если – внешней подобласти, и $z = 0$, если $M \in \partial\Omega_1^{(-)}$, а ℓ – координата той точки на $\partial\Omega_1^{(-)}$, из которой выпущена указанная нормаль, $\ell \in [0, \ell_0]$, где ℓ_0 – некоторое число.

Будем считать, что число $\delta > 0$ таково, что при $|z| \leq \delta$ соответствие между координатами (z, ℓ) и $x = (x_1, x_2)$ взаимно однозначно, а число $d \in (0, \delta/2]$ выберем так, что

$$J(x(z, \ell)) > 0, \quad z = -d, \quad \ell \in [0, \ell_0], \quad (3.69)$$

$$u_0(x(z, \ell)) < 0, \quad z \in [-d, 0], \quad \ell \in [0, \ell_0], \quad (3.70)$$

и кривая $\partial\Omega_1$, имеющая в локальных координатах (z, ℓ) уравнение $z = -d$, целиком лежит в D .

Пусть $\varphi_i(z, \ell) \equiv \varphi_i(x(z, \ell))$, $f(u, z, \ell, \varepsilon) \equiv f(u, x(z, \ell), \varepsilon)$.

Определим функцию $Q_0(\tau, \ell, -d)$, $\tau = (z + d)/\varepsilon$, как решение задачи (3.36) (см. доказательство леммы 3.3) при $\nu = -d$.

Аналогично тому, как это было сделано при доказательстве леммы 3.3, введем обозначения $f_u(\tau, \ell, -d)$, $f_1(\tau, \ell, -d)$ и определим функцию $Q_1(\tau, \ell, -d)$ как решение задачи (3.37) при $\nu = -d$. Положим

$$Q^{(1)} = [Q_0(\tau, \ell, -d) + \mu Q_1(\tau, \ell, -d)] \zeta\left(\frac{z + d}{d}\right), \quad \tau \geq 0,$$

где ζ – срезающая функция, введенная в § 2.

Если область $\Omega^{(-)}$ многосвязна, то для каждой кривой $\partial\Omega_i^{(-)}$, $i \in \overline{2, n}$, аналогичным образом введем (свои) локальные координаты (z, ℓ) и соответствующее число $\delta_i > 0$ и выберем число $d_i \in [0, \delta_i/2]$ так, что выполнено неравенство из (3.69) при $z = d_i$, $\ell \in [0, \ell_0]$, а неравенство из (3.70) – при $z \in [0, d_i]$. Через $\partial\Omega_i$ обозначим кривую, имеющую в локальных координатах (z, ℓ) уравнение $z = d_i$.

Далее, так же, как и выше, используя аналогичные обозначения, определим функции $Q_0(\tau, \ell, d_i)$, $\tau = (z - d_i)/\varepsilon$, и $Q_1(\tau, \ell, d_i)$ как решения задач (3.36) и (3.37) при $\nu = d_i$ и положим

$$Q^{(i)} = [Q_0(-\tau, \ell, d_i) + \mu Q_1(-\tau, \ell, d_i)] \zeta\left(\frac{d_i - z}{d_i}\right), \quad \tau \leq 0.$$

Пусть Ω – область с границей $\partial\Omega = \bigcup_{i=1}^n \partial\Omega_i$.

Ясно, что $u_0(x) < 0$, $x \in \bar{\Omega}$, а значит, в силу теоремы 2.1 существует $T_0 = T_0(\mu/2) > 0$ такое, что при достаточно малых ε решение $u(x, t, \varepsilon)$ задачи (1.1)–(1.3) удовлетворяет неравенствам

$$u(x, T_0, \varepsilon) < \varphi_1(x) + \mu/2, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (3.71)$$

$$u(x, t, \varepsilon) < \varphi_2(x) + \mu, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [T_0, +\infty). \quad (3.72)$$

Введем функцию

$$\beta(x, \mu) = \varphi_1(x) + \mu + \sum_{i=1}^n Q^{(i)}, \quad x \in \bar{\Omega}.$$

Используя (3.71), (3.72), нетрудно проверить (это делается таким же образом, как при доказательстве леммы 3.3), что для любого достаточно малого μ при достаточно малых ε функция $\beta(x, \mu)$ является стационарным верхним барьером для решения $u(x, t, \varepsilon)$ при $(x, t) \in \bar{\Omega} \times [T_0, +\infty)$, т.е.

$$u(x, t, \varepsilon) < \beta(x, \mu), \quad (x, t) \in \bar{\Omega} \times [T_0, +\infty). \quad (3.73)$$

Учитывая наличие срезающих функций в выражениях для $Q^{(i)}$, можно утверждать, что $\beta(x, \mu) = \varphi_1(x) + \mu$ при $x \in \bar{\Omega}^{(-)}$, и поэтому из неравенства (3.73) при $\mu = \eta$ следует (3.67) с $T_3 = T_0$.

Перейдем теперь к случаю, когда $\partial D \subseteq \partial\Omega^{(-)}$. В этом случае функцию $\beta(x, \mu)$ строим аналогичным образом, с тем отличием, что теперь $\partial\Omega_1 \equiv \partial D$, а в качестве $Q^{(1)}$ возьмем функцию

$$Q^{(1)} = \varepsilon \exp(-\kappa\tau) \zeta\left(\frac{z}{\delta}\right), \quad \tau \geq 0,$$

где $\tau = z/\varepsilon$ (локальные координаты (z, ℓ) в малой δ -окрестности ∂D были введены в § 2), а $\kappa > 0$ – число, которое выбирается так, что

$$\frac{\partial\beta}{\partial n} > 0, \quad x \in \partial D;$$

$\frac{\partial}{\partial n}$ – производная по направлению внешней нормали к ∂D .

Как и выше, нетрудно доказать, что для любого достаточно малого μ при достаточно малых ε функция $\beta(x, \mu)$ является стационарным верхним барьером для решения $u(x, t, \varepsilon)$ при $(x, t) \in \bar{\Omega} \times [T_0, +\infty)$, откуда при $\mu = (2/3)\eta$ следует (3.67) с $T_3 = T_0$. Лемма доказана.

3.2. Основные результаты. Для точек $M(x_1, x_2)$ из малой окрестности кривой Γ (см. условие (A2)) введем локальные координаты (r, θ) , где $|r|$ – расстояние от точки M до кривой Γ вдоль нормали к Γ , которая проходит через M , $\theta \in [0, \theta_0]$ (θ_0 – некоторое число) – координата той точки кривой Γ , из которой выпущена указанная нормаль, $r = |r|$, если $M \in D_0^{(+)}$, $r = -|r|$, если $M \in D_0^{(-)}$, $r = 0$, если $M \in \Gamma$.

Пусть число $\delta_0 > 0$ таково, что при $|r| \leq 2\delta_0$ соответствие между координатами (r, θ) и (x_1, x_2) взаимно однозначно.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть выполнены условия (A1)–(A5).

Тогда $\forall \eta > 0$ и $\forall d \in (0, \delta_0]$ при достаточно малых ε существует $T_4 = T_4(\eta, d, \varepsilon) > 0$ такое, что решение $u(x, t, \varepsilon)$ задачи (1.1)–(1.3) удовлетворяет неравенствам

$$u(x, t, \varepsilon) < \varphi_1(x) + \eta, \quad (x, t) \in \overline{D_0^{(-)} \setminus D^d} \times [T_4, +\infty), \quad (3.74)$$

$$u(x, t, \varepsilon) > \varphi_2(x) - \eta, \quad (x, t) \in \overline{D_0^{(+)} \setminus D^d} \times [T_4, +\infty), \quad (3.75)$$

$$\varphi_1(x) - \eta < u(x, t, \varepsilon) < \varphi_2(x) + \eta, \quad (x, t) \in \bar{D} \times [T_4, +\infty), \quad (3.76)$$

где $D^d = \{M(r, \theta) \in D : |r| < d\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем (3.74) (неравенство (3.75) доказывается аналогично, а неравенства (3.76) доказаны в теореме 2.1).

Пусть $d \in (0, \delta_0]$ столь мало, что

$$x^{(-)} \in D_0^{(-)} \setminus \bar{D}^d, \quad J(x) > 0, \quad x \in D_0^{(-)} \cap \bar{D}^d,$$

где $x^{(-)}$ – точка из условия (A5), и $\bar{D}^d \cap \partial D = \emptyset$.

Возможны два случая:

1) $J(x) > 0$, $x \in \overline{D_0^{(-)} \setminus D^d}$; в этом случае (3.74) следует из леммы 3.3;

2) $\exists x \in \overline{D_0^{(-)} \setminus D^d}$: $J(x) \leq 0$; в этом случае через Ω_i , $i = 1, 2, \dots, n$, обозначим элементы класса N (см. § 1), принадлежащие $\overline{D_0^{(-)} \setminus D^d}$ (т.е. те точки, кривые и подобласти области $\overline{D_0^{(-)} \setminus D^d}$, где $J(x) \leq 0$).

В силу (A3) число таких элементов конечно.

Учитывая требования (A3) и (A5), можно выбрать столь малое число $h > 0$, что для каждого из пересечений Ω_i^h h -окрестностей элементов Ω_i , $i = 1, 2, \dots, n$, с $D_0^{(-)}$ будут выполнены следующие условия:

- 1) область Ω_i^h имеет гладкую границу $\partial\Omega_i^h$;
- 2) $\bar{\Omega}_i^h \cap \bar{\Omega}_{i'}^h = \emptyset$ при $i \neq i'$, $\bar{\Omega}_i^h \cap \bar{D}^d = \emptyset$ и либо $\partial D \subset \partial\Omega_i^h$, либо $\partial D \cup \bar{\Omega}_i^h = \emptyset$;
- 3) $J(x) > 0$, $x \in \partial\Omega_i^h \setminus \partial D$; $u_0(x) < 0$, $x \in \bar{\Omega}_i^h$.

Отсюда согласно лемме 3.4 следует, что для любого $\eta > 0$ существует такое $T' = T'(\eta) > 0$, что при достаточно малых ε неравенство из (3.74) выполняется для $(x, t) \in \bar{\Omega}_i^h \times [T', +\infty)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Удалим теперь из области $\bar{D}_0^{(-)} \setminus \bar{D}^d$ все $\bar{\Omega}_i^h$, $i = 1, 2, \dots, n$. Останутся области, которые обозначим через D_j , $j = 1, 2, \dots, m$.

Очевидно, что при $j = 1, 2, \dots, m$ справедливы следующие утверждения:

- 1) область D_j имеет гладкую границу ∂D_j ;
- 2) либо $\partial D \subset \partial D_j$, либо $\partial D \cup \bar{D}_j = \emptyset$;
- 3) $J(x) > 0$, $x \in \bar{D}_j$, и на границе ∂D_j имеются точки, в которых $u_0(x) < 0$, а значит,

$$\exists x_j^{(-)} \in D_j : u_0(x_j^{(-)}) < 0.$$

Отсюда следует, что $\forall j \in \overline{1, m}$ на области $D^{(-)} = D_j$ мы можем использовать либо лемму 3.2, если $\bar{D}_j \cap \partial D = \emptyset$, либо лемму 3.3, если $\partial D \subset \partial D_j$. Поэтому $\forall \eta > 0$ при достаточно малых ε существует такое $T'' = T''(\eta, d, \varepsilon) > 0$, что неравенство из (3.74) выполняется для $(x, t) \in \bar{D}_j \times [T'', +\infty)$, $j = 1, 2, \dots, m$.

Объединяя полученные в п. 2) результаты, получаем, что $\forall \eta > 0$ при достаточно малых ε существует $T_4 = T_4(\eta, d, \varepsilon) > 0$ такое, что выполнено неравенство (3.74). Теорема доказана.

Результат теоремы 3.1 можно усилить, заменив в (3.74)–(3.76) η на величину порядка ε^{n+1} , а T_4 – на некоторое $T_5(n, d, \varepsilon)$. С этой целью рассмотрим упоминавшиеся в § 1 стационарные решения $u^{(1)}(x, \varepsilon)$ и $u^{(2)}(x, \varepsilon)$ задачи (1.1), (1.2) без внутренних переходных слоев, близкие при малых ε соответственно к функциям $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ во всей области $\bar{D}$. Используя алгоритм метода пограничных функций [3], для этих решений нетрудно построить и обосновать $\forall n \geq 0$ асимптотики $U_n^{(1)}(x, \varepsilon)$ и $U_n^{(2)}(x, \varepsilon)$, имеющие вид

$$\begin{aligned} U_n^{(1)}(x, \varepsilon) &= \bar{u}_n^{(-)}(x, \varepsilon) + P_{n+1}^{(-)}(\xi, \ell, \varepsilon), \quad x \in \bar{D}, \\ U_n^{(2)}(x, \varepsilon) &= \bar{u}_n^{(+)}(x, \varepsilon) + P_{n+1}^{(+)}(\xi, \ell, \varepsilon), \quad x \in \bar{D}, \end{aligned}$$

где

$$\bar{u}_n^{(-)}(x, \varepsilon) = \varphi_1(x) + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i \bar{u}_i^{(-)}(x), \quad (3.77)$$

$$\bar{u}_n^{(+)}(x, \varepsilon) = \varphi_2(x) + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i \bar{u}_i^{(+)}(x),$$

$$P_{n+1}^{(\pm)}(\xi, \ell, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{n+1} \varepsilon^i P_i^{(\pm)}(\xi, \ell), \quad (3.78)$$

$$\xi = -\frac{z}{\varepsilon};$$

локальные координаты (z, ℓ) в окрестности ∂D были введены в § 2. Функции $\bar{u}_i^{(\pm)}$ (регулярные члены асимптотики) определяются как решения линейных алгебраических уравнений, например: $\bar{u}_1^{(-)}(x) = -f_\varepsilon(\varphi_1(x), x, 0)/f_u(\varphi_1(x), x, 0)$; функции $P_i^{(\pm)}(\xi, \ell)$ являются решениями линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами при $\xi < 0$, они имеют экспоненциальные оценки вида $|P_1^{(\pm)}(\xi, \ell)| \leq C \exp(m\xi)$, равномерные по $\ell \in [0, \ell_0]$, а при $\xi = 0$ удовлетворяющие условиям

$$\frac{\partial P_i^{(\pm)}}{\partial \xi}(0, \ell) = \frac{\partial \bar{u}_{i-1}^{(\pm)}}{\partial z}(0, \ell)$$

($\bar{u}_{i-1}^{(\pm)}(z, \ell) \equiv \bar{u}_{i-1}^{(\pm)}(x(z, \ell))$), откуда следует, что $U_n^{(1)}$ и $U_n^{(2)}$ удовлетворяют граничным условиям (1.2). Будем считать, что функции $P_i^{(\pm)}$ умножены на срезающие функции.

Для удобства результат о существовании и асимптотике решений $u^{(1)}(x, \varepsilon)$ и $u^{(2)}(x, \varepsilon)$ задачи (1.1), (1.2) сформулируем в виде леммы.

ЛЕММА 3.5. Пусть выполнено условие (A1). Тогда при достаточно малых ε существуют стационарные решения $u^{(1)}(x, \varepsilon)$ и $u^{(2)}(x, \varepsilon)$ из $C^2(\bar{D})$ задачи (1.1), (1.2) такие, что $\forall n \geq 0$

$$\begin{aligned} \|u^{(1)}(x, \varepsilon) - U_n^{(1)}(x, \varepsilon)\|_{C(\bar{D})} &= O(\varepsilon^{n+1}), \\ \|u^{(2)}(x, \varepsilon) - U_n^{(2)}(x, \varepsilon)\|_{C(\bar{D})} &= O(\varepsilon^{n+1}). \end{aligned} \quad (3.79)$$

СЛЕДСТВИЕ 3.1. В неравенствах (3.74)–(3.76) можно заменить $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ на $u^{(1)}(x, \varepsilon)$ и $u^{(2)}(x, \varepsilon)$ соответственно.

Усилением результатов теорем 2.1 и 3.1 является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть выполнены условия (A1)–(A5).

Тогда $\forall n \geq 0$ и $\forall d \in (0, \delta_0]$ при достаточно малых ε существуют $T_5 = T_5(n, d, \varepsilon) > 0$ и число $\bar{C}_n > 0$, не зависящее от ε , такие, что решение $u(x, t, \varepsilon)$ задачи (1.1)–(1.3) удовлетворяет неравенствам

$$u(x, t, \varepsilon) < u^{(1)}(x, \varepsilon) + \bar{C}_n \varepsilon^{n+1}, \quad (x, t) \in \overline{D_0^{(-)} \setminus D^d} \times [T_5, +\infty), \quad (3.80)$$

$$u(x, t, \varepsilon) > u^{(2)}(x, \varepsilon) - \bar{C}_n \varepsilon^{n+1}, \quad (x, t) \in \overline{D_0^{(+)} \setminus D^d} \times [T_5, +\infty), \quad (3.81)$$

$$u^{(1)}(x, \varepsilon) - \bar{C}_n \varepsilon^{n+1} < u(x, t, \varepsilon) < u^{(2)}(x, \varepsilon) + \bar{C}_n \varepsilon^{n+1}, \quad (x, t) \in \bar{D} \times [T_5, +\infty), \quad (3.82)$$

где $D^d = \{M(r, \theta) \in D: |r| < d\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $d \in (0, \delta_0]$ фиксировано так, что $\bar{D}^d \cap \partial D = \emptyset$ и $J(x) > 0$, $x \in D_0^{(-)} \cap \bar{D}^d$.

Докажем неравенство (3.80). Положим $\bar{r} = -d/2$ и введем область $D^{\bar{r}} = \{M(r, \theta) \in D: \bar{r} < r \leq 0\}$. Через $\Gamma_{\bar{r}}$ будем обозначать кривую, имеющую в локальных координатах (r, θ) уравнение $r = \bar{r}$. Определим $\forall n \geq 0$ функцию $\beta_n(x, \varepsilon)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \beta_n(x, \varepsilon) &= \beta_n^{(-)}(x, \varepsilon) = \bar{u}_{n+1}^{(-)}(x, \varepsilon) + \varepsilon^{n+1} + P_{n+2}^{(-)}(\xi, \ell, \varepsilon) + Q_{n+1}^{(-)}(\tau, \theta, \varepsilon) \\ &\quad + \varepsilon^{n+1} q_{\beta}^{(-)}(\tau, \theta), \quad x \in \overline{D_0^{(-)} \setminus D^{\bar{r}}}, \\ \beta_n(x, \varepsilon) &= \beta_n^{(+)}(x, \varepsilon) + v_{n\beta}(r, \theta, \varepsilon) = \bar{u}_{n+1}^{(+)}(x, \varepsilon) + \varepsilon^{n+1} + Q_{n+1}^{(+)}(\tau, \theta, \varepsilon) \\ &\quad + \varepsilon^{n+1} q_{\beta}^{(+)}(\tau, \theta) + v_{n\beta}(r, \theta, \varepsilon), \quad x \in \overline{D_0^{(+)} \cup D^{\bar{r}}}, \end{aligned}$$

где $\bar{u}_{n+1}^{(\pm)}(x, \varepsilon)$, $P_{n+2}^{(-)}(\xi, \ell, \varepsilon)$ определены формулами (3.77), (3.78),

$$Q_{n+1}^{(\pm)}(\tau, \theta, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i Q_i^{(\pm)}(\tau, \theta), \quad \tau = \frac{r - \bar{r}}{\varepsilon},$$

$Q_i^{(-)}(\tau, \theta)$ и $Q_i^{(+)}(\tau, \theta)$ – погранслоиные функции из асимптотических разложений таких решений краевых задач

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \Delta u^{(-)} &= f(u^{(-)}, x, \varepsilon), \quad x \in D_0^{(-)} \setminus D^{\bar{r}}, \\ \frac{\partial u^{(-)}}{\partial n} \Big|_{\partial D} &= 0, \quad u^{(-)} \Big|_{\Gamma_{\bar{r}}} = 0, \end{aligned}$$

и

$$\varepsilon^2 \Delta u^{(+)} = f(u^{(+)}, x, \varepsilon), \quad x \in D_0^{(+)} \cup D^{\bar{r}}, \quad u^{(+)} \Big|_{\Gamma_{\bar{r}}} = 0,$$

которые близки при малых ε соответственно к $\varphi_1(x)$ на $\bar{D}_0^{(-)} \setminus \bar{D}^{\bar{r}}$ и к $\varphi_2(x)$ на $D_0^{(+)} \cup D^{\bar{r}}$. Функции $Q_i^{(\pm)}(\tau, \theta)$ нетрудно построить, используя алгоритм метода пограничных функций [3].

Функция $Q_0^{(-)}$ определяется как решение задачи

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} Q_0^{(-)} &= f(\varphi_1(\bar{r}, \theta) + Q_0^{(-)}, \bar{r}, \theta, 0), \quad \tau < 0, \\ Q_0^{(-)}(0, \theta) &= -\varphi_1(\bar{r}, \theta), \quad Q_0^{(-)}(-\infty, \theta) = 0,\end{aligned}$$

где использованы обозначения $f(u, r, \theta, \varepsilon) \equiv f(u, x(r, \theta), \varepsilon)$, $\varphi_i(r, \theta) \equiv \varphi_i(x(r, \theta))$, а функция $Q_0^{(+)}$ определяется как решение аналогичной задачи

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} Q_0^{(+)} &= f(\varphi_2(\bar{r}, \theta) + Q_0^{(+)}, \bar{r}, \theta, 0), \quad \tau > 0, \\ Q_0^{(+)}(0, \theta) &= -\varphi_2(\bar{r}, \theta), \quad Q_0^{(+)}(+\infty, \theta) = 0.\end{aligned}$$

Функции $Q_0^{(\pm)}$ монотонно возрастают и

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q_0^{(-)}}{\partial \tau}(0, \theta) &= \left(2 \int_{\varphi_1(\bar{r}, \theta)}^0 f(u, \bar{r}, \theta, 0) du \right)^{1/2}, \\ \frac{\partial Q_0^{(+)}}{\partial \tau}(0, \theta) &= \left(2 \int_{\varphi_2(\bar{r}, \theta)}^0 f(u, \bar{r}, \theta, 0) du \right)^{1/2}.\end{aligned}\tag{3.83}$$

Формулы (3.83) получаются так же, как (3.50).

При $i \geq 1$ функции $Q_i^{(\pm)}(\tau, \theta)$ являются решениями линейных задач. Отметим, что $Q_i^{(\pm)}(\tau, \theta)$ имеют равномерные по $\theta \in [0, \theta_0]$ экспоненциальные оценки сверху по переменной τ типа (3.5), а $Q_0^{(\pm)}(\tau, \theta)$ – еще и оценки снизу типа (3.6).

Функции $q_\beta^{(-)}$, $q_\beta^{(+)}$ – погранслойные добавки, появляющиеся при построении верхних решений указанных краевых задач методом, описанным в [10]. Например, функция $q_\beta^{(-)}(\tau, \theta)$ определяется как решение задачи

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} q_\beta^{(-)} &= f_u^{(-)}(\tau, \theta) q_\beta^{(-)} + f_u^{(-)}(\tau, \theta) - \bar{f}_u^{(-)}(\theta) - \Psi^{(-)}(\tau), \quad \tau < 0, \\ q_\beta^{(-)}(0, \theta) &= 0, \quad q_\beta^{(-)}(-\infty, \theta) = 0,\end{aligned}$$

где $f_u^{(-)}(\tau, \theta) \equiv f_u(\varphi_1(\bar{r}, \theta) + Q_0^{(-)}(\tau, \theta), \bar{r}, \theta, 0)$, $\bar{f}_u^{(-)}(\theta) \equiv f_u(\varphi_1(\bar{r}, \theta), \bar{r}, \theta, 0)$, а $\Psi^{(-)}(\tau) > 0$ – функция, которая имеет экспоненциальную оценку и выбирается так, что при достаточно малых ε выполняется неравенство

$$\beta_n^{(-)}(x, \varepsilon) - \beta_{n+1}^{(-)}(x, \varepsilon) \geq m_n \varepsilon^{n+1}, \quad x \in \overline{D_0^{(-)}} \setminus D^{\bar{r}},\tag{3.84}$$

m_n – положительное число, не зависящее от ε .

Умножим функции $Q_i^{(\pm)}$, $q_\beta^{(\pm)}$, $P_i^{(-)}$ на соответствующие срезающие функции, не изменяя при этом их обозначений, и определим функцию

$$v_{n\beta} = [\beta_n^{(-)}(x, \varepsilon) - \beta_n^{(+)}(x, \varepsilon)]|_{\Gamma_{\bar{r}}} \zeta((r - \bar{r})/d);$$

функция ζ определена в § 2.

Функция $v_{n\beta}$ обеспечивает непрерывность $\beta_n(x, \varepsilon)$ при $x \in \Gamma_{\bar{r}}$. Заметим, что $v_{n\beta} = O(\varepsilon^{n+2})$, а на кривой $\Gamma_{\bar{r}}$ при достаточно малых ε справедливо неравенство

$$\varepsilon \left[\frac{\partial}{\partial r} \beta_n^{(-)} - \frac{\partial}{\partial r} \beta_n^{(+)} \right] \Big|_{\Gamma_{\bar{r}}} \geq C_0 J(x)|_{\Gamma_{\bar{r}}} + O(\varepsilon) > 0, \quad (3.85)$$

где $C_0 > 0$ – некоторое число. Неравенство (3.85) нетрудно доказать, используя формулы (3.83).

Из самого способа построения функции $\beta_n(x, \varepsilon)$ при достаточно малых ε следуют соотношения (см. также [10])

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \Delta \beta_n - f(\beta_n, x, \varepsilon) &= -[f_u(\varphi_1(x), x, 0) + \Psi^{(-)}(\tau)] \varepsilon^{n+1} + O(\varepsilon^{n+2}) < 0, \\ x &\in \overline{D_0^{(-)} \setminus D^{\bar{r}}}, \end{aligned} \quad (3.86)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \Delta \beta_n - f(\beta_n, x, \varepsilon) &= -[f_u(\varphi_2(x), x, 0) + \Psi^{(+)}(\tau)] \varepsilon^{n+1} + O(\varepsilon^{n+2}) < 0, \\ x &\in \overline{D_0^{(+)} \cup D^{\bar{r}}}, \end{aligned} \quad (3.87)$$

$$\frac{\partial \beta_n}{\partial n} \Big|_{\partial D} = 0, \quad (3.88)$$

где $\Psi^{(+)}(\tau) > 0$ – функция, аналогичная упомянутой выше функции $\Psi^{(-)}(\tau)$.

Зафиксируем $n \geq 0$ и введем функцию

$$\hat{v}(x, t, \varepsilon) = \beta_n(x, \varepsilon) + \frac{\mu}{\varepsilon} \Theta(x, \varepsilon) \exp(-\mu t),$$

где $\Theta(x, \varepsilon) = \beta_0(x, \varepsilon) - \beta_1(x, \varepsilon)$, причем $\mu > 0$ выберем настолько малым (но фиксированным при $\varepsilon \rightarrow 0$), что при достаточно малых ε будут выполнены неравенства

$$\varepsilon^2 \Delta \hat{v} - \hat{v}_t - f(\hat{v}, x, \varepsilon) < 0, \quad (x, t) \in D \times (0, +\infty), \quad (3.89)$$

$$\frac{\partial \hat{v}}{\partial r} \Big|_{r=\bar{r}-0} \geq \frac{\partial \hat{v}}{\partial r} \Big|_{r=\bar{r}+0}, \quad t \in [0, +\infty) \quad (3.90)$$

(на кривой $\Gamma_{\bar{r}}$ неравенство (3.89) будет выполнено для предельных значений левой части (3.89) с одной и с другой стороны от $\Gamma_{\bar{r}}$). Покажем для (3.89), что такой выбор μ возможен. Раскладывая $f(\hat{v}, x, \varepsilon)$ по формуле Тейлора с центром разложения $(\beta_n, x, \varepsilon)$, получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \Delta \hat{v} - \hat{v}_t - f(\hat{v}, x, \varepsilon) &= \{ \varepsilon^2 \Delta \beta_n - f(\beta_n, x, \varepsilon) \} \\ &+ \left\{ \frac{\mu}{\varepsilon} [\varepsilon^2 \Delta \Theta - f_u(\beta_n, x, \varepsilon) \Theta] \exp(-\mu t) \right\} \\ &+ \left\{ -\frac{\mu^2}{\varepsilon} \Theta \left[-1 + \frac{1}{2} f_{uu}^* \cdot \frac{\Theta}{\varepsilon} \exp(-\mu t) \right] \exp(-\mu t) \right\}. \end{aligned} \quad (3.91)$$

Первое из трех слагаемых, заключенных в фигурные скобки в правой части (3.91), при достаточно малых ε отрицательно в силу (3.86), (3.87). Второе слагаемое в силу очевидной оценки $\Theta(x, \varepsilon) = O(\varepsilon)$ при достаточно малых ε не превосходит по абсолютной величине функции $C_1 \mu^2 \exp(-\mu t)$, где $C_1 > 0$ не зависит от ε и μ .

Оценим функцию $\varepsilon^2 \Delta \Theta - f_u(\beta_n, x, \varepsilon) \Theta$, входящую во второе слагаемое в правой части (3.91). Вычитая из равенств (3.86), (3.87) при $n = 0$ эти же равенства при $n = 1$ и учитывая, что $[f_u(\varphi_i(x), x, 0) + \Psi^{(\pm)}(\tau)] \geq C_2 > 0$, получаем

$$\varepsilon^2 \Delta \Theta - [f(\beta_0, x, \varepsilon) - f(\beta_1, x, \varepsilon)] \leq -C_2 \varepsilon + O(\varepsilon^2). \quad (3.92)$$

Так как $\forall n \geq 0$

$$f(\beta_0, x, \varepsilon) - f(\beta_1, x, \varepsilon) = f_u(\beta_1, x, \varepsilon) \Theta + \frac{1}{2} f_{uu}^* \cdot \Theta^2 = f_u(\beta_n, x, \varepsilon) \Theta + O(\varepsilon^2),$$

то из (3.92) при достаточно малых ε следует неравенство

$$\varepsilon^2 \Delta \Theta - f_u(\beta_n, x, \varepsilon) \Theta \leq -C_2 \varepsilon + O(\varepsilon^2) \leq -C_3 \varepsilon,$$

где $C_3 > 0$ не зависит от ε . Вследствие этого второе слагаемое в правой части (3.91) при достаточно малых ε не превосходит отрицательной функции $-C_3 \mu \exp(-\mu t)$, и, таким образом, мы приходим к неравенству

$$\varepsilon^2 \Delta \hat{v} - \hat{v}_t - f(\hat{v}, x, \varepsilon) \leq [-C_3 \mu + C_1 \mu^2] \exp(-\mu t),$$

откуда следует, что для любого достаточно малого μ при достаточно малых ε выполняется (3.89). Неравенство (3.90) будет выполнено для любого достаточно малого μ при достаточно малых ε в силу (3.85).

Далее, в силу (3.88) имеем

$$\left. \frac{\partial \hat{v}}{\partial n} \right|_{\partial D} = 0, \quad t \in [0, +\infty). \quad (3.93)$$

Из (3.84) при $n = 0$ и аналогичного неравенства для области $\overline{D_0^{(+)} \cup D^{\bar{r}}}$ имеем

$$\beta_0(x, \varepsilon) - \beta_1(x, \varepsilon) = \Theta(x, \varepsilon) \geq m_0 \varepsilon.$$

Отсюда и из неубывания функций $Q_0^{(\pm)}(\tau, \theta)$ следует, что существует постоянная $C_4 > 0$ такая, что при достаточно малых ε

$$\hat{v}(x, 0, \varepsilon) > \varphi_1(x) + C_4, \quad x \in \bar{D}. \quad (3.94)$$

В силу экспоненциальной оценки Q -функций и неравенства $\Theta(x, \varepsilon) \geq m_0 \varepsilon$ существует постоянная $C_5 > 0$ такая, что при достаточно малых ε

$$\hat{v}(x, 0, \varepsilon) > \varphi_2(x) + C_5, \quad x \in \overline{D_0^{(+)} \cup D^{\bar{r}/2}}, \quad (3.95)$$

где $D^{\bar{r}/2} = \{M(r, \theta) \in D: \bar{r}/2 < r \leq 0\}$.

Применяя теорему 3.1 для $\eta = \min\{C_4, C_5\}$ и $d = |\bar{r}|/2$, получаем, что при достаточно малых ε существует $T_4 > 0$ такое, что (см. (3.74), (3.76))

$$\begin{aligned} u(x, T_4, \varepsilon) &< \varphi_1(x) + C_4, & x \in \overline{D_0^{(-)} \setminus D^{\bar{r}/2}}, \\ u(x, T_4, \varepsilon) &< \varphi_2(x) + C_5, & x \in \bar{D}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (3.94), (3.95) имеем неравенство

$$u(x, T_4, \varepsilon) < \hat{v}(x, 0, \varepsilon), \quad x \in \bar{D}. \quad (3.96)$$

Соотношения (3.89), (3.90), (3.93) и (3.96) показывают, что функция $\hat{v}(x, t - T_4, \varepsilon)$ является (негладким) верхним барьером для решения $u(x, t, \varepsilon)$ задачи (1.1)–(1.3) при $t \geq T_4$, т.е.

$$u(x, t, \varepsilon) < \hat{v}(x, t - T_4, \varepsilon), \quad (x, t) \in \bar{D} \times [T_4, +\infty). \quad (3.97)$$

Но в силу экспоненциальной оценки функций $Q_i^{(-)}$ и $q_\beta^{(-)}$, выбора $\bar{r}$, а также леммы 3.5 существует постоянная $\bar{C}_n > 0$ такая, что при достаточно малых ε

$$\hat{v}(x, t, \varepsilon) < u^{(1)}(x, \varepsilon) + \bar{C}_n \varepsilon^{n+1}, \quad (x, t) \in \overline{D_0^{(-)} \setminus D^d} \times [1/\varepsilon, +\infty).$$

Отсюда и из (3.97) следует, что

$$u(x, t, \varepsilon) < u^{(1)}(x, \varepsilon) + \bar{C}_n \varepsilon^{n+1}, \quad (x, t) \in \overline{D_0^{(-)} \setminus D^d} \times [T_4 + 1/\varepsilon, +\infty),$$

т.е. неравенство (3.80) выполняется для $T_5 = T_4 + 1/\varepsilon > 0$.

Доказательство неравенства (3.81) проводится аналогично.

Неравенства (3.82) можно доказать при помощи верхнего $\hat{v}(x, t)$ и нижнего $\bar{v}(x, t)$ решений задачи (1.1), (1.2) следующего вида:

$$\hat{v}(x, t) = u^{(2)}(x, \varepsilon) + \mu \exp(-\mu t), \quad \bar{v}(x, t) = u^{(1)}(x, \varepsilon) - \mu \exp(-\mu t),$$

где $\mu > 0$ – достаточно малое, но фиксированное при $\varepsilon \rightarrow 0$ число. При этом надо воспользоваться следствием 3.1. Теорема доказана.

§ 4. Пределный переход к стационарному решению при $t \rightarrow \infty$

Пусть выполнены условия (A1)–(A5).

4.1. Построение асимптотики специального вида. Пусть $d \in (0, \delta_0]$ выбрано так, что $\bar{D}^d \cap \partial D = \emptyset$ и

$$J(x) > 0, \quad x \in \bar{D}^d \cap D_0^{(-)}; \quad J(x) < 0, \quad x \in \bar{D}^d \cap D_0^{(+)}; \quad (4.1)$$

число $\delta_0 > 0$ и множество D^d – те же, что в § 3.

Рассмотрим функцию

$$U(x, \tau, \gamma, \varepsilon) = U^{(-)}(x, \gamma, \varepsilon) = \bar{u}_3^{(-)}(x, \varepsilon) + \sum_{i=0}^3 \varepsilon^i \tilde{Q}_i^{(-)}(\tau, \theta, \gamma), \quad x \in \bar{\Omega}_\gamma^{(-)},$$

$$U(x, \tau, \gamma, \varepsilon) = U^{(+)}(x, \gamma, \varepsilon) = \bar{u}_3^{(+)}(x, \varepsilon) + \sum_{i=0}^3 \varepsilon^i \tilde{Q}_i^{(+)}(\tau, \theta, \gamma), \quad x \in \bar{\Omega}_\gamma^{(+)},$$

где $\bar{u}_3^{(\pm)}(x, \varepsilon)$ определены формулами (3.77),

$$\tau = \frac{r - r_\gamma}{\varepsilon}, \quad r_\gamma = \lambda_0(\gamma) + \sum_{i=1}^3 \varepsilon^i \lambda_i(\gamma, \theta), \quad \lambda_0(\gamma) = -\gamma, \quad (4.2)$$

функции $\tilde{Q}_i^{(\pm)}$ и λ_i определим ниже, $\Omega_\gamma^{(+)}$ – внутренняя, а $\Omega_\gamma^{(-)}$ – внешняя подобласти области D по отношению к кривой Λ_γ , имеющей в локальных координатах (r, θ) (см. § 3) уравнение $r = r_\gamma$, $\gamma \in [-\gamma_0, \gamma_0]$. Значение γ_0 мы уточним ниже, а пока будем считать, что $\gamma_0 < d$.

Заметим, что оператор $\varepsilon^2 \Delta$ имеет в координатах (r, θ) следующий вид:

$$\varepsilon^2 \Delta = \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + a_1(r, \theta) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + a_2(r, \theta) \frac{\partial}{\partial r} + a_3(r, \theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \right), \quad (4.3)$$

где $a_1(r, \theta)$, $a_2(r, \theta)$, $a_3(r, \theta)$ – известные функции [2]–[4].

Используя алгоритм метода пограничных функций [3], определим $\tilde{Q}_i^{(\pm)}$, $i = \overline{0, 3}$, и $\lambda_i(\gamma, \theta)$, $i = 1, 2, 3$, так, чтобы равенства

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \Delta U^{(-)} - f(U^{(-)}, x, \varepsilon) &= 0, \quad x \in \overline{\Omega}_\gamma^{(-)}, \quad \gamma \in [-\gamma_0, \gamma_0], \\ \varepsilon^2 \Delta U^{(+)} - f(U^{(+)}, x, \varepsilon) &= 0, \quad x \in \overline{\Omega}_\gamma^{(+)}, \quad \gamma \in [-\gamma_0, \gamma_0], \\ U^{(-)}|_{\Lambda_\gamma} &= U^{(+)}|_{\Lambda_\gamma} = 0, \quad \gamma \in [-\gamma_0, \gamma_0], \end{aligned}$$

выполнялись с точностью $O(\varepsilon^4)$, т.е. во всех приближениях по ε от нулевого до третьего порядка, а равенство

$$\varepsilon \frac{\partial U^{(-)}}{\partial r} \Big|_{\Lambda_\gamma} = \varepsilon \frac{\partial U^{(+)}}{\partial r} \Big|_{\Lambda_\gamma}, \quad \gamma \in [-\gamma_0, \gamma_0], \quad (4.4)$$

выполнялось во всех приближениях по ε до третьего порядка включительно, кроме, может быть, нулевого приближения.

Для функций $\tilde{Q}_0^{(\pm)}(\tau, \theta, \gamma)$ получаются такие же задачи, как и для функций $Q_0^{(\pm)}(\tau, \theta)$ в доказательстве теоремы 3.2, но с той разницей, что в задаче для $Q_0^{(-)}$ и аналогичной задаче для $Q_0^{(+)}$ нужно заменить $\bar{r}$ на $\lambda_0(\gamma)$. Поэтому для $\frac{\partial \tilde{Q}_0^{(\pm)}}{\partial \tau}(0, \theta, \gamma)$ имеют место выражения типа (3.83) и мы получаем равенство

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{Q}_0^{(-)}}{\partial \tau}(0, \theta, \gamma) - \frac{\partial \tilde{Q}_0^{(+)}}{\partial \tau}(0, \theta, \gamma) &= \sqrt{2} \left[\left(\int_{\varphi_1(\lambda_0(\gamma), \theta)}^0 f(u, \lambda_0(\gamma), \theta, 0) du \right)^{\frac{1}{2}} \right. \\ &\quad \left. - \left(\int_{\varphi_2(\lambda_0(\gamma), \theta)}^0 f(u, \lambda_0(\gamma), \theta, 0) du \right)^{\frac{1}{2}} \right], \end{aligned}$$

из которого при указанных ограничениях на γ_0 ($\gamma_0 < d$) в силу (4.1) следуют неравенства

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{Q}_0^{(-)}}{\partial \tau}(0, \theta, \gamma) - \frac{\partial \tilde{Q}_0^{(+)}}{\partial \tau}(0, \theta, \gamma) &> 0 \quad \text{при } \gamma \in (0, \gamma_0], \\ \frac{\partial \tilde{Q}_0^{(-)}}{\partial \tau}(0, \theta, \gamma) - \frac{\partial \tilde{Q}_0^{(+)}}{\partial \tau}(0, \theta, \gamma) &< 0 \quad \text{при } \gamma \in [-\gamma_0, 0). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Тем самым равенство (4.4) в нулевом приближении по ε , т.е. равенство

$$\frac{\partial \tilde{Q}_0^{(-)}}{\partial \tau}(0, \theta, \gamma) = \frac{\partial \tilde{Q}_0^{(+)}}{\partial \tau}(0, \theta, \gamma),$$

выполняется только при $\gamma = 0$.

Для $\tilde{Q}_1^{(-)}$ имеем задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \tilde{Q}_1^{(-)} &= f_u^{(-)}(\tau, \theta, \gamma) \tilde{Q}_1^{(-)} + f_1^{(-)}(\tau, \theta, \gamma), \quad \tau < 0, \\ \tilde{Q}_1^{(-)}(0, \theta, \gamma) &= -\varphi_{1r}(\lambda_0(\gamma), \theta) \lambda_1(\gamma, \theta) - \bar{u}_1^{(-)}(\lambda_0(\gamma), \theta), \quad \tilde{Q}_1^{(-)}(-\infty, \theta, \gamma) = 0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} f_1^{(-)}(\tau, \theta, \gamma) &= f_u^{(-)}(\tau, \theta, \gamma) [\bar{u}_1^{(-)}(\lambda_0(\gamma), \theta) + \varphi_{1r}(\lambda_0(\gamma), \theta)(\tau + \lambda_1(\gamma, \theta))] \\ &\quad + f_r^{(-)}(\tau, \theta, \gamma)(\tau + \lambda_1(\gamma, \theta)) + f_\varepsilon^{(-)}(\tau, \theta, \gamma) \\ &\quad - a_2(\lambda_0(\gamma), \theta) \frac{\partial \tilde{Q}_0^{(-)}}{\partial \tau}(\tau, \theta, \gamma); \end{aligned}$$

функция a_2 здесь та же, что и в (4.3), а обозначения $f_u^{(-)}(\tau, \theta, \gamma)$, $f_r^{(-)}(\tau, \theta, \gamma)$ и $f_\varepsilon^{(-)}(\tau, \theta, \gamma)$ здесь использованы для соответствующих производных функции $f(u, r, \theta, \varepsilon) = f(u, x(r, \theta), \varepsilon)$, вычисленных в точке $(\varphi_1(\lambda_0(\gamma), \theta) + \tilde{Q}_0^{(-)}(\tau, \theta, \gamma), \lambda_0(\gamma), \theta, 0)$. Аналогичная задача имеет место для $\tilde{Q}_1^{(+)}(\tau, \theta, \gamma)$ при $\tau > 0$.

Известно [4], что функции $\tilde{Q}_1^{(\pm)}(\tau, \theta, \gamma)$ однозначно определяются из этих задач, выражаются в явном виде и зависят линейно от неизвестной пока функции $\lambda_1(\gamma, \theta)$.

Из равенства (4.4) в первом приближении по ε получаем

$$\frac{\partial \tilde{Q}_1^{(-)}}{\partial \tau}(0, \theta, \gamma) + \varphi_{1r}(\lambda_0(\gamma), \theta) = \frac{\partial \tilde{Q}_1^{(+)}}{\partial \tau}(0, \theta, \gamma) + \varphi_{2r}(\lambda_0(\gamma), \theta).$$

Отсюда, используя явные выражения для $\tilde{Q}_1^{(\pm)}(\tau, \theta, \gamma)$, приходим к равенству

$$I(\gamma, \theta) \lambda_1(\gamma, \theta) = \Phi_1(\gamma, \theta), \quad (4.6)$$

где

$$\begin{aligned} I(\gamma, \theta) &= \left[\frac{\partial \tilde{Q}_0^{(-)}}{\partial \tau}(0, \theta, \gamma) \right]^{-1} \int_{\varphi_1(\lambda_0(\gamma), \theta)}^0 f_r(u, \lambda_0(\gamma), \theta, 0) du \\ &\quad + \left[\frac{\partial \tilde{Q}_0^{(+)}}{\partial \tau}(0, \theta, \gamma) \right]^{-1} \int_0^{\varphi_2(\lambda_0(\gamma), \theta)} f_r(u, \lambda_0(\gamma), \theta, 0) du, \end{aligned}$$

$\Phi_1(\gamma, \theta)$ – известная функция.

Заметим, что так как $\frac{\partial J}{\partial r}|_{r=0} = \frac{\partial J}{\partial n_0}|_\Gamma$, то в силу условия (A2)

$$I(0, \theta) = \left[\frac{\partial \tilde{Q}_0^{(-)}}{\partial \tau}(0, \theta, 0) \right]^{-1} \frac{\partial J}{\partial r} \Big|_{r=0} < 0.$$

Возьмем γ_0 столь малым, чтобы выполнялось неравенство

$$I(\gamma, \theta) < 0, \quad \gamma \in [-\gamma_0, \gamma_0]. \quad (4.7)$$

Теперь можно выбрать $\lambda_1(\gamma, \theta)$ так, чтобы равенство (4.4) было выполнено в первом приближении по ε , т.е. чтобы было выполнено равенство (4.6). Для этого нужно положить

$$\lambda_1(\gamma, \theta) = \frac{\Phi_1(\gamma, \theta)}{I(\gamma, \theta)}.$$

Продолжая построение в соответствии с алгоритмом из [3], [4], определим $\tilde{Q}_2^{(\pm)}$, λ_2 и $\tilde{Q}_3^{(\pm)}$, λ_3 , причем $\lambda_i(\gamma, \theta)$, $i = 2, 3$, будут найдены из условия, что равенство (4.4) выполняется в i -ом приближении по ε .

Для $\lambda_i(\gamma, \theta)$, $i = 2, 3$, получаются уравнения типа (4.6), однозначно разрешимые в силу неравенства (4.7).

Итак, функция $U(x, \tau, \gamma, \varepsilon)$ полностью построена, причем функции $\tilde{Q}_i^{(\pm)}$ имеют равномерные по $\gamma \in [-\gamma_0, \gamma_0]$ и $\theta \in [0, \theta_0]$ экспоненциальные оценки сверху по переменной τ типа (3.5), а $\tilde{Q}_0^{(\pm)}$ имеют еще и оценки снизу типа (3.6).

4.2. Модификация асимптотики. Построим функцию $\tilde{\beta}(x, \gamma, \varepsilon)$ в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}(x, \gamma, \varepsilon) = \tilde{\beta}^{(-)}(x, \gamma, \varepsilon) &= U(x, \tau_\beta, \gamma, \varepsilon) + \varepsilon^3(1 + Q^{(-)}(\tau_\beta, \theta, \gamma)) \\ &\quad + P_4^{(-)}(\xi, \ell, \varepsilon), \quad x \in \overline{\Omega}_{\gamma, \beta}^{(-)}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}(x, \gamma, \varepsilon) = \tilde{\beta}^{(+)}(x, \gamma, \varepsilon) &= U(x, \tau_\beta, \gamma, \varepsilon) + \varepsilon^3(1 + Q^{(+)}(\tau_\beta, \theta, \gamma)) \\ &\quad + v_\beta(r, \theta, \varepsilon), \quad x \in \overline{\Omega}_{\gamma, \beta}^{(+)}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

где

$$\tau_\beta = (r - r_\beta)/\varepsilon, \quad r_\beta = r_\gamma - \varepsilon^3\sigma, \quad (4.10)$$

$\sigma > 0$, $\Omega_{\gamma, \beta}^{(-)}$ – внешняя, а $\Omega_{\gamma, \beta}^{(+)}$ – внутренняя подобласти области D по отношению к кривой $\Lambda_{\gamma, \beta}$, имеющей в локальных координатах (r, θ) уравнение $r = r_\beta$, $\gamma \in [0, \gamma_0]$.

Функции $U(x, \tau, \gamma, \varepsilon)$ и r_γ определены в п. 4.1, причем $U = U^{(-)}$ в (4.8) и $U = U^{(+)}$ в (4.9), функция $P_4^{(-)}(\xi, \ell, \varepsilon)$ определена формулой (3.78), функция v_β будет выбрана ниже. Остановимся на построении функций $Q^{(\pm)}$ и выборе $\sigma > 0$.

Считая, что $\gamma \in [-\gamma_0, \gamma_0]$, определим функции $Q^{(\pm)}(\tau, \theta, \gamma)$ как решения следующих задач:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} Q^{(-)} &= f_u^{(-)}(\tau, \theta, \gamma) Q^{(-)} + f_u^{(-)}(\tau, \theta, \gamma) (1 - \sigma \varphi_{1r}(\lambda_0(\gamma), \theta)) \\ &\quad - f_r^{(-)}(\tau, \theta, \gamma) \sigma - f_u^{(-)}(\gamma, \theta), \quad \tau < 0, \\ Q^{(-)}(0, \theta, \gamma) &= \varphi_{1r}(\lambda_0(\gamma), \theta) \sigma, \quad Q^{(-)}(-\infty, \theta, \gamma) = 0, \\ \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} Q^{(+)} &= f_u^{(+)}(\tau, \theta, \gamma) Q^{(+)} + f_u^{(+)}(\tau, \theta, \gamma) (1 - \sigma \varphi_{2r}(\lambda_0(\gamma), \theta)) \\ &\quad - f_r^{(+)}(\tau, \theta, \gamma) \sigma - f_u^{(+)}(\gamma, \theta), \quad \tau > 0, \\ Q^{(+)}(0, \theta, \gamma) &= \varphi_{2r}(\lambda_0(\gamma), \theta) \sigma, \quad Q^{(+)}(+\infty, \theta, \gamma) = 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Здесь $f_u^{(-)}(\gamma, \theta) \equiv f_u(\varphi_1(\lambda_0(\gamma), \theta), \lambda_0(\gamma), \theta, 0)$; остальные обозначения в (4.11) – те же, что в п. 4.1. Аналогично, $f_u^{(+)}(\gamma, \theta) \equiv f_u(\varphi_2(\lambda_0(\gamma), \theta), \lambda_0(\gamma), \theta, 0)$, а

$f_u^{(+)}(\tau, \theta, \gamma)$ и $f_r^{(+)}(\tau, \theta, \gamma)$ обозначают производные функции f , вычисленные в точке $(\varphi_2(\lambda_0(\gamma), \theta) + \tilde{Q}_0^{(+)}(\tau, \theta, \gamma), \lambda_0(\gamma), \theta, 0)$.

Как и при получении уравнения (4.6), можно показать, что

$$\frac{\partial Q^{(-)}}{\partial \tau}(0, \theta, \gamma) - \frac{\partial Q^{(+)}}{\partial \tau}(0, \theta, \gamma) = -I(\gamma, \theta)\sigma + \Phi(\gamma, \theta),$$

где $\Phi(\gamma, \theta)$ – известная функция. Возьмем столь большое $\sigma > 0$, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{\partial Q^{(-)}}{\partial \tau}(0, \theta, \gamma) - \frac{\partial Q^{(+)}}{\partial \tau}(0, \theta, \gamma) > 0, \quad \gamma \in [-\gamma_0, \gamma_0], \quad (4.12)$$

что возможно в силу неравенства (4.7). Теперь функции $Q^{(\pm)}(\tau_\beta, \theta, \gamma)$ полностью определены.

Умножим функции $\tilde{Q}_i^{(\pm)}$, входящие в $U(x, \tau_\beta, \gamma, \varepsilon)$, а также $Q^{(\pm)}$, $P_4^{(-)}$, входящие в (4.8) и (4.9), на соответствующие срезающие функции и определим функцию $v_\beta(r, \theta, \varepsilon)$, исходя из условия $\tilde{\beta}(x, \gamma, \varepsilon) \in C(\bar{D} \times [0, \gamma_0])$, аналогично тому, как мы определили функцию $v_{n\beta}$ при доказательстве теоремы 3.2. Тогда $v_\beta = O(\varepsilon^4)$. Итак, функция $\tilde{\beta}(x, \gamma, \varepsilon)$ полностью определена.

Из (4.5) и (4.12) следует, что при достаточно малых ε

$$\left. \frac{\partial \tilde{\beta}^{(-)}}{\partial r} \right|_{\Lambda_{\gamma, \beta}} - \left. \frac{\partial \tilde{\beta}^{(+)}}{\partial r} \right|_{\Lambda_{\gamma, \beta}} \geq 0, \quad \gamma \in [0, \gamma_0]. \quad (4.13)$$

Обозначим через $\partial/\partial n_\beta$ производную по направлению внутренней нормали к кривой $\Lambda_{\gamma, \beta}$. Нетрудно показать, что

$$\left[\left. \frac{\partial \tilde{\beta}^{(-)}}{\partial n_\beta} \right|_{\Lambda_{\gamma, \beta}} - \left. \frac{\partial \tilde{\beta}^{(+)}}{\partial n_\beta} \right|_{\Lambda_{\gamma, \beta}} \right] = (1 + O(\varepsilon)) \left[\left. \frac{\partial \tilde{\beta}^{(-)}}{\partial r} \right|_{\Lambda_{\gamma, \beta}} - \left. \frac{\partial \tilde{\beta}^{(+)}}{\partial r} \right|_{\Lambda_{\gamma, \beta}} \right].$$

Поэтому при достаточно малых ε

$$\left. \frac{\partial \tilde{\beta}^{(-)}}{\partial n_\beta} \right|_{\Lambda_{\gamma, \beta}} \geq \left. \frac{\partial \tilde{\beta}^{(+)}}{\partial n_\beta} \right|_{\Lambda_{\gamma, \beta}}, \quad \gamma \in [0, \gamma_0]. \quad (4.14)$$

Кроме того, функция $\tilde{\beta}(x, \gamma, \varepsilon)$ построена таким образом, что при достаточно малых ε выполняются неравенства

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \Delta \tilde{\beta} - f(\tilde{\beta}, x, \varepsilon) &= -\varepsilon^3 f_u(\varphi_1(x), x, 0) + O(\varepsilon^4) < -m_\varepsilon < 0, \\ x &\in \bar{\Omega}_{\gamma, \beta}^{(-)}, \quad \gamma \in [0, \gamma_0], \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \Delta \tilde{\beta} - f(\tilde{\beta}, x, \varepsilon) &= -\varepsilon^3 f_u(\varphi_2(x), x, 0) + O(\varepsilon^4) < -m_\varepsilon < 0, \\ x &\in \bar{\Omega}_{\gamma, \beta}^{(+)}, \quad \gamma \in [0, \gamma_0], \end{aligned} \quad (4.16)$$

где

$$m_\varepsilon = \frac{\varepsilon^3}{2} \min \left\{ \min_{x \in \bar{D}} f_u(\varphi_1(x), x, 0), \min_{x \in \bar{D}} f_u(\varphi_2(x), x, 0) \right\} > 0. \quad (4.17)$$

Наконец,

$$\left. \frac{\partial \tilde{\beta}}{\partial n} \right|_{\partial D} = 0, \quad \gamma \in [0, \gamma_0]. \quad (4.18)$$

Аналогично функции $\tilde{\beta}(x, \gamma, \varepsilon)$ определим функцию $\tilde{\alpha}(x, \gamma, \varepsilon)$:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}(x, \gamma, \varepsilon) &= \tilde{\alpha}^{(-)}(x, \gamma, \varepsilon) = U(x, \tau_\alpha, \gamma, \varepsilon) - \varepsilon^3(1 + Q^{(-)}(\tau_\alpha, \theta, \gamma)) \\ &\quad + P_4^{(-)}(\xi, \ell, \varepsilon), \quad x \in \overline{\Omega}_{\gamma, \alpha}^{(-)}, \\ \tilde{\alpha}(x, \gamma, \varepsilon) &= \tilde{\alpha}^{(+)}(x, \gamma, \varepsilon) = U(x, \tau_\alpha, \gamma, \varepsilon) - \varepsilon^3(1 + Q^{(+)}(\tau_\alpha, \theta, \gamma)) \\ &\quad + v_\alpha(r, \theta, \varepsilon), \quad x \in \overline{\Omega}_{\gamma, \alpha}^{(+)}, \end{aligned}$$

где $\tau_\alpha = (r - r_\alpha)/\varepsilon$, $r_\alpha = r_\gamma + \varepsilon^3\sigma$, $\sigma > 0$, $\Omega_{\gamma, \alpha}^{(-)}$ – внешняя, а $\Omega_{\gamma, \alpha}^{(+)}$ – внутренняя подобласти области D по отношению к кривой $\Lambda_{\gamma, \alpha}$, имеющей в локальных координатах (r, θ) уравнение $r = r_\alpha$, $\gamma \in [-\gamma_0, 0]$.

Умножим функции $\tilde{Q}_i^{(\pm)}$, $Q^{(\pm)}$ и $P_4^{(-)}$ на соответствующие срезающие функции и определим функцию v_α аналогично функции v_β .

Нетрудно показать, что функция $\tilde{\alpha}(x, \gamma, \varepsilon)$ при достаточно малых ε удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \Delta \tilde{\alpha} - f(\tilde{\alpha}, x, \varepsilon) &= \varepsilon^3 f_u(\varphi_1(x), x, 0) + O(\varepsilon^4) > m_\varepsilon > 0, \quad x \in \overline{\Omega}_{\gamma, \alpha}^{(-)}, \quad \gamma \in [-\gamma_0, 0], \\ \varepsilon^2 \Delta \tilde{\alpha} - f(\tilde{\alpha}, x, \varepsilon) &= \varepsilon^3 f_u(\varphi_2(x), x, 0) + O(\varepsilon^4) > m_\varepsilon > 0, \quad x \in \overline{\Omega}_{\gamma, \alpha}^{(+)}, \quad \gamma \in [-\gamma_0, 0], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \tilde{\alpha}^{(-)}}{\partial n_\alpha} \right|_{\Lambda_{\gamma, \alpha}} &\leq \left. \frac{\partial \tilde{\alpha}^{(+)}}{\partial n_\alpha} \right|_{\Lambda_{\gamma, \alpha}}, \quad \gamma \in [-\gamma_0, 0], \\ \left. \frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial n} \right|_{\partial D} &= 0, \quad \gamma \in [-\gamma_0, 0], \end{aligned} \quad (4.19)$$

где m_ε определено формулой (4.17), $\partial/\partial n_\alpha$ – производная по направлению внутренней нормали к кривой $\Lambda_{\gamma, \alpha}$.

Для удобства записи введем обозначения:

$$\beta_\varepsilon(x, \gamma) \equiv \tilde{\beta}(x, \gamma, \varepsilon), \quad \alpha_\varepsilon(x, \gamma) \equiv \tilde{\alpha}(x, -\gamma, \varepsilon), \quad \gamma \in [0, \gamma_0].$$

Рассмотрим свойства функций β_ε и α_ε .

Докажем, что для любого фиксированного $C > 0$ при достаточно малых ε

$$\beta_\varepsilon(x, \gamma_0) > u^{(1)}(x, \varepsilon) + C\varepsilon^4, \quad x \in \bar{D}, \quad (4.20)$$

где $u^{(1)}(x, \varepsilon)$ – решение задачи (1.1), (1.2) из леммы 3.5.

Введем область $H_1 = \{M(r, \theta) \in D: -d \leq r \leq r_\beta^0 - h\}$, где $r_\beta^0 = r_{\gamma_0} - \varepsilon^3\sigma$, а $h > 0$ – сколь угодно малое, но фиксированное при $\varepsilon \rightarrow 0$ число, и рассмотрим область $H_1 \cup \overline{(D_0^{(-)} \setminus D^d)}$. В этой области в силу экспоненциальной оценки функции $\tilde{Q}_i^{(-)}$ и $Q^{(-)}$ при достаточно малых ε будут меньше любой степени ε , и поэтому, используя (4.8) и (3.79), получаем

$$\beta_\varepsilon(x, \gamma_0) - u^{(1)}(x, \varepsilon) = \varepsilon^3 + O(\varepsilon^4), \quad x \in H_1 \cup \overline{(D_0^{(-)} \setminus D^d)}, \quad (4.21)$$

откуда следует, что для любого фиксированного числа $C > 0$ при достаточно малых ε неравенство (4.20) выполняется для $x \in H_1 \cup (\overline{D_0^{(-)}} \setminus D^d)$.

Далее рассмотрим область $H_2 = \{M(r, \theta) \in D: \tilde{r} \leq r \leq r_\beta^0\}$, где $\tilde{r} = r_\beta^0 - k\varepsilon|\ln \varepsilon|$, $k > 0$ – число, которое выберем ниже. Так как $\tilde{Q}_0^{(-)}(\tau_\beta, \theta, \gamma_0)$ имеет экспоненциальную оценку снизу:

$$\tilde{Q}_0^{(-)}(\tau_\beta, \theta, \gamma_0) \geq C_1 \exp(m_1 \tau_\beta),$$

то в области H_2 , т.е. при $-k|\ln \varepsilon| \leq \tau_\beta \leq 0$ при достаточно малых ε имеем

$$\tilde{Q}_0^{(-)}(\tau_\beta, \theta, \gamma_0) \geq C_1 \varepsilon^{km_1}.$$

Возьмем $k > 0$ столь малым, что $p = km_1 < 1$. Тогда получим

$$\beta_\varepsilon(x, \gamma_0) - u^{(1)}(x, \varepsilon) \geq C_1 \varepsilon^p + O(\varepsilon), \quad x \in H_2,$$

откуда следует (4.20) для $x \in H_2$.

В области $H_3 = \{M(r, \theta) \in D: r_\beta^0 - h \leq r \leq \tilde{r}\}$ имеем $\beta_\varepsilon(x, \gamma_0) = \varphi_1(x) + O(\varepsilon^s)$, где $s \in (0, 1)$, $u^{(1)}(x, \varepsilon) = \varphi_1(x) + O(\varepsilon)$. Поэтому, вычитая из (4.15) уравнение $\varepsilon^2 \Delta u^{(1)} - f(u^{(1)}, x, \varepsilon) = 0$, нетрудно получить для функции

$$v = \beta_\varepsilon(x, \gamma_0) - u^{(1)}(x, \varepsilon) - C\varepsilon^4$$

с произвольной постоянной $C > 0$ следующее неравенство:

$$\varepsilon^2 \Delta v - [f_u(\varphi_1(x), x, 0) + O(\varepsilon^s)]v < -\varepsilon^3 f_u(\varphi_1(x), x, 0) + O(\varepsilon^4), \quad x \in H_3.$$

При достаточно малых ε из этого неравенства, неравенства $f_u(\varphi_1(x), x, 0) > 0$ (см. (A1)) и граничного неравенства

$$v|_{\partial H_3} > 0,$$

вытекающего из того факта, что (4.20) выполняется в H_1 и H_2 , следует, что $v > 0$ при $x \in H_3$, т.е. (4.20) выполняется в области H_3 .

Таким образом, (4.20) доказано в области $\overline{\Omega_{\gamma_0, \beta}^{(-)}}$. В области $\overline{\Omega_{\gamma_0, \beta}^{(+)}}$ для любой фиксированной постоянной $C > 0$ при достаточно малых ε неравенство (4.20) также имеет место, поскольку в указанной области $\beta_\varepsilon(x, \gamma_0) = \varphi_2(x) + \tilde{Q}_0^{(+)}(\tau_\beta, \theta, \gamma_0) + O(\varepsilon)$, $u^{(1)}(x, \varepsilon) = \varphi_1(x) + O(\varepsilon)$ и $\varphi_2(x) + \tilde{Q}_0^{(+)}(\tau_\beta, \theta, \gamma_0) \geq 0$, а $\varphi_1(x) < 0$.

Итак, (4.20) доказано.

Аналогично (4.21) в области $\overline{D_0^{(+)} \cup D^{\gamma_0/2}}$, где $D^{\gamma_0/2} = \{M(r, \theta) \in D: -\gamma_0/2 < r \leq 0\}$, получаем равенство

$$\beta_\varepsilon(x, \gamma_0) - u^{(2)}(x, \varepsilon) = \varepsilon^3 + O(\varepsilon^4),$$

где $u^{(2)}(x, \varepsilon)$ – решение задачи (1.1), (1.2) из леммы 3.5.

Отсюда следует, что для любого $C > 0$, не зависящего от ε , при достаточно малых ε выполняется неравенство

$$\beta_\varepsilon(x, \gamma_0) > u^{(2)}(x, \varepsilon) + C\varepsilon^4, \quad x \in \overline{D_0^{(+)} \cup D^{\gamma_0/2}}. \quad (4.22)$$

Воспользуемся теперь теоремой 3.2, согласно которой (для $n = 3$ и $d = \gamma_0/2$) при достаточно малых ε существуют числа $T_5 = T_5(3, \gamma_0/2, \varepsilon)$ и $\bar{C}_3 > 0$ такие, что

$$\begin{aligned} u(x, T_5, \varepsilon) &< u^{(1)}(x, \varepsilon) + \bar{C}_3 \varepsilon^4, & x \in \overline{D_0^{(-)} \setminus D^{\gamma_0/2}}, \\ u(x, T_5, \varepsilon) &< u^{(2)}(x, \varepsilon) + \bar{C}_3 \varepsilon^4, & x \in \overline{D_0^{(+)} \cup D^{\gamma_0/2}}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Поскольку число C в (4.20) и (4.22) можно взять равным числу $\bar{C}_3$ из неравенств (4.23), то из (4.20), (4.22) и (4.23), очевидно, следует, что при достаточно малых ε

$$u(x, T_5, \varepsilon) < \beta_\varepsilon(x, \gamma_0), \quad x \in \bar{D}. \quad (4.24)$$

Аналогично можно доказать неравенство

$$u(x, T_5, \varepsilon) > \alpha_\varepsilon(x, \gamma_0), \quad x \in \bar{D}. \quad (4.25)$$

ЛЕММА 4.1. Пусть выполнены условия (A1)–(A5). Тогда при достаточно малых ε имеют место следующие утверждения:

1) существует $T' = T'(\varepsilon) > 0$ такое, что решение $u(x, t, \varepsilon)$ задачи (1.1)–(1.3) удовлетворяет неравенствам

$$\alpha_\varepsilon(x, 0) < u(x, t, \varepsilon) < \beta_\varepsilon(x, 0), \quad (x, t) \in \bar{D} \times [T', +\infty); \quad (4.26)$$

2) существует стационарное решение $u_s(x, \varepsilon) \in C^2(\bar{D})$ задачи (1.1), (1.2), представляющее собой КСТС, т.е. удовлетворяющее предельному равенству (1.5), и такое, что

$$\alpha_\varepsilon(x, 0) < u_s(x, \varepsilon) < \beta_\varepsilon(x, 0), \quad x \in \bar{D}. \quad (4.27)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Положим

$$T_\beta = \frac{2\gamma_0}{m_\varepsilon} \sup_{\bar{D} \times [0, \gamma_0]} \left| \frac{\partial \beta_\varepsilon}{\partial \gamma}(x, \gamma) \right|, \quad (4.28)$$

где число m_ε определено формулой (4.17).

Аналогично, заменив $\frac{\partial \beta_\varepsilon}{\partial \gamma}$ на $\frac{\partial \alpha_\varepsilon}{\partial \gamma}$, введем T_α и положим

$$T = \max\{T_\beta, T_\alpha\}, \quad T' = T + T_5; \quad (4.29)$$

здесь T_5 – то же число, что и в неравенствах (4.24), (4.25).

Введем функции

$$\begin{aligned} \hat{v}(x, t) &= \beta_\varepsilon(x, \gamma(t)), \quad \bar{v}(x, t) = \alpha_\varepsilon(x, \gamma(t)), \quad (x, t) \in \bar{D} \times [T_5, T'], \\ \gamma(t) &= \frac{T' - t}{T} \gamma_0, \quad t \in [T_5, T']. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Докажем, что выполняются неравенства

$$\bar{v}(x, t) < u(x, t) < \hat{v}(x, t), \quad (x, t) \in \bar{D} \times [T_5, T'], \quad (4.31)$$

$$\bar{v}(x, T') < u(x, t) < \hat{v}(x, T'), \quad (x, t) \in \bar{D} \times [T', +\infty). \quad (4.32)$$

Из неравенств (4.32) в силу (4.30) непосредственно следуют неравенства (4.26), т.е. утверждение 1).

Докажем (4.31). Неравенства (4.32) можно доказать аналогичным образом, опираясь на неравенства (4.31), взятые при $t = T'$.

В силу (4.24), (4.25), (4.30) выполнены неравенства

$$\bar{v}(x, T_5) < u(x, T_5, \varepsilon) < \hat{v}(x, T_5), \quad x \in \bar{D}.$$

Поэтому если (4.31) не выполнено, то существует $\tilde{T} \in (T_5, T']$ такое, что

$$\bar{v}(x, t) < u(x, t, \varepsilon) < \hat{v}(x, t), \quad (x, t) \in \bar{D} \times [T_5, \tilde{T}], \quad (4.33)$$

$$\exists M \in \bar{D}: \quad u(M, \tilde{T}, \varepsilon) = \hat{v}(M, \tilde{T}), \quad \text{либо} \quad u(M, \tilde{T}, \varepsilon) = \bar{v}(M, \tilde{T}). \quad (4.34)$$

Для определенности будем считать, что выполнено (4.34).

Введем функцию

$$w(x, t) = (\hat{v}(x, t) - u(x, t, \varepsilon)) \exp(-A(t - T_5)),$$

где A – положительное число, которое будет выбрано ниже.

Простые вычисления с учетом (4.14)–(4.16), (4.18), (4.13), (4.28), (4.30) приводят к следующим соотношениям для функции w :

$$\varepsilon^2 \Delta w + B(x, t)w - \frac{\partial w}{\partial t} \leq -\frac{m_\varepsilon}{2} \exp(-A(t - T_5)), \quad (x, t) \in \bar{D} \times (T_5, \tilde{T}], \quad (4.35)$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^{(-)} \Big|_{\Lambda_{\gamma(t), \beta}} \geq \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^{(+)} \Big|_{\Lambda_{\gamma(t), \beta}}, \quad t \in (T_5, \tilde{T}], \quad (4.36)$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial n_\beta} \right)^{(-)} \Big|_{\Lambda_{\gamma(t), \beta}} \geq \left(\frac{\partial w}{\partial n_\beta} \right)^{(+)} \Big|_{\Lambda_{\gamma(t), \beta}}, \quad t \in (T_5, \tilde{T}], \quad (4.37)$$

$$\frac{\partial w}{\partial n} \Big|_{\partial D} = 0, \quad t \in (T_5, \tilde{T}],$$

где

$$B(x, t) \equiv -A - \int_0^1 f_u(u + (\hat{v} - u)s, x, \varepsilon) ds,$$

обозначения $(\cdot)^{(+)}$ и $(\cdot)^{(-)}$ использованы для предельных значений на $\Lambda_{\gamma(t), \beta}$ из областей $\Omega_{\gamma(t), \beta}^{(+)}$ и $\Omega_{\gamma(t), \beta}^{(-)}$ соответственно, а неравенство (4.35) на поверхности $\Lambda_{\gamma(t), \beta} \times (T_5, \tilde{T}]$ выполняется для предельных значений левой части неравенства.

Выберем $A > 0$ столь большим, что

$$B(x, t) < 0, \quad (x, t) \in \bar{D} \times [T_5, \tilde{T}]. \quad (4.38)$$

Из (4.33), (4.34) следует, что

$$w(x, t) > 0, \quad (x, t) \in \bar{D} \times [T_5, \tilde{T}], \quad (4.39)$$

$$\exists M \in \bar{D}: \quad w(M, \tilde{T}) = 0. \quad (4.40)$$

Пусть $M \in \Lambda_{\gamma(\tilde{T}), \beta}$. Возьмем число $h > 0$ столь малым, что круг E_h радиуса h с центром в точке M целиком принадлежит области D^d (см. формулировку теорем 3.1, 3.2). Введем обозначения $w_M(r, t) \equiv w(x(r, \theta_M), t)$, где θ_M — θ -координата точки M , и

$$W^{(-)}(t) \equiv w_M(r_\beta(t) - 0, t), \quad W^{(+)}(t) \equiv w_M(r_\beta(t) + 0, t),$$

где $r_\beta(t) = r_{\gamma(t)}|_{\theta=\theta_M} - \varepsilon^3 \sigma$. В силу непрерывности функции $w_M(r, t)$

$$W^{(-)}(t) = W^{(+)}(t), \quad t \in [T_5, \tilde{T}], \quad (4.41)$$

а следствием (4.39), (4.40) является неравенство

$$W_t^{(\pm)}(\tilde{T}) \leq 0. \quad (4.42)$$

Докажем, что

$$\begin{aligned} w_t^{(-)} &\equiv \frac{\partial w_M}{\partial t}(r_\beta(\tilde{T}) - 0, \tilde{T}) \leq 0, \\ w_t^{(+)} &\equiv \frac{\partial w_M}{\partial t}(r_\beta(\tilde{T}) + 0, \tilde{T}) \leq 0. \end{aligned} \quad (4.43)$$

При этом будем пользоваться тем, что в силу (4.36)

$$\frac{\partial w_M}{\partial r}(r_\beta(\tilde{T}) - 0, \tilde{T}) \equiv w_r^{(-)} \geq w_r^{(+)} \equiv \frac{\partial w_M}{\partial r}(r_\beta(\tilde{T}) + 0, \tilde{T}), \quad (4.44)$$

а также тем, что в силу (4.2), (4.10), (4.30) при достаточно малых ε

$$\frac{dr_\beta}{dt}(t) = \frac{\partial r_\beta}{\partial \gamma} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial t} \right) = (-1 + O(\varepsilon)) \left(-\frac{\gamma_0}{T} \right) > 0, \quad t \in [T_5, \tilde{T}]. \quad (4.45)$$

В силу (4.39), (4.40) $w_r^{(+)} \geq 0$, а так как

$$W_t^{(\pm)}(\tilde{T}) = w_r^{(\pm)} \frac{dr_\beta}{dt}(\tilde{T}) + w_t^{(\pm)}, \quad (4.46)$$

то отсюда и из соотношений (4.42), (4.45) следует, что

$$w_t^{(+)} \leq 0. \quad (4.47)$$

Из (4.41) и (4.46) имеем

$$w_t^{(-)} = w_t^{(+)} - \frac{dr_\beta}{dt}(\tilde{T})(w_r^{(-)} - w_r^{(+)}).$$

Отсюда в силу соотношений (4.44), (4.45), (4.47) имеем

$$w_t^{(-)} \leq 0,$$

и тем самым (4.43) доказано.

Выберем теперь $h > 0$ столь малым, что

$$\varepsilon^2 \Delta \bar{w} + \bar{B}(x) \bar{w} < -\frac{m_\varepsilon}{4} \exp(-A(\tilde{T} - T_5)) < 0, \quad x \in (E_h \setminus M), \quad (4.48)$$

где $\bar{w}(x) \equiv w(x, \tilde{T})$, $\bar{B}(x) \equiv B(x, \tilde{T}) < 0$. Это можно сделать в силу (4.35), (4.43). Из принципа максимума для слабых решений эллиптических уравнений [11] следует, что соотношение (4.37), взятое при $t = \tilde{T}$, (4.48) и неравенство $\bar{w}(x) \geq 0$, справедливое при $x \in E_h$ в силу (4.39), (4.40), противоречат нашему предположению $\bar{w}(M) = 0$.

Если предположить, что точка M в (4.34) не принадлежит кривой $\Lambda_{\gamma(\tilde{T}), \beta}$, то противоречие можно получить аналогичным образом с помощью классического принципа максимума для решений эллиптических уравнений. Полученное противоречие доказывает справедливость (4.31).

Утверждение 1) доказано.

2. Утверждение 2) следует из того факта, что в силу (4.14)–(4.16), (4.18) и аналогичных неравенств для α_ε функции $\beta_\varepsilon(x, 0)$ и $\alpha_\varepsilon(x, 0)$ являются соответственно (негладкими) верхним и нижним решениями задачи (1.1), (1.2), причем, как показывает (4.26),

$$\alpha_\varepsilon(x, 0) < \beta_\varepsilon(x, 0), \quad x \in \bar{D}$$

(см. также [2], [6]). Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Очевидно, что для справедливости утверждения 2) леммы 4.1 достаточно лишь условий (A1), (A2), т.е. условий (A3)–(A5) не требуется.

4.3. Предельный переход при $t \rightarrow +\infty$.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть выполнены условия (A1)–(A5). Тогда при достаточно малых ε для решения $u(x, t, \varepsilon)$ задачи (1.1)–(1.3) справедливо предельное равенство

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|u(x, t, \varepsilon) - u_s(x, \varepsilon)\|_{C(\bar{D})} = 0, \quad (4.49)$$

где $u_s(x, \varepsilon)$ – стационарное решение задачи (1.1), (1.2) из леммы 4.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем функции

$$\begin{aligned} \hat{v}_\varepsilon(x, t) &\equiv u_s(x, \varepsilon) + \Theta(x, \varepsilon) \exp(-\varepsilon \mu t), \\ \bar{v}_\varepsilon(x, t) &\equiv u_s(x, \varepsilon) - \Theta(x, \varepsilon) \exp(-\varepsilon \mu t), \end{aligned}$$

где $\Theta(x, \varepsilon) \equiv \beta_\varepsilon(x, 0) - \alpha_\varepsilon(x, 0)$, функции β_ε и α_ε – те же, что в лемме 4.1, $\mu > 0$ – не зависящее от ε число, которое будет уточнено ниже.

Из неравенств (4.26) и (4.27) следует, что

$$\bar{v}_\varepsilon(x, 0) < u(x, T', \varepsilon) < \hat{v}_\varepsilon(x, 0), \quad x \in \bar{D}.$$

Далее, используя подход, аналогичный предложенному при доказательстве теоремы 3.2 в отношении функции $\hat{v}$, нетрудно установить, что для любого достаточно малого μ при достаточно малых ε функции $\bar{v}_\varepsilon(x, t - T')$ и $\hat{v}_\varepsilon(x, t - T')$ являются соответственно нижним и верхним барьерами для решения $u(x, t, \varepsilon)$ задачи (1.1)–(1.3) при $t \geq T'$, т.е.

$$\bar{v}_\varepsilon(x, t - T') < u(x, t, \varepsilon) < \hat{v}_\varepsilon(x, t - T'), \quad (x, t) \in \bar{D} \times [T', +\infty) \quad (4.50)$$

(см. также [6]).

Зафиксируем такое $\mu > 0$, чтобы при достаточно малых ε было выполнено (4.50). Из неравенств (4.50), очевидно, следует (4.49). Теорема доказана.

§ 5. Глобальная область влияния (основной результат)

Пусть при $\varepsilon \in (0, \varepsilon']$, где $\varepsilon' > 0$ – некоторое число, задача (1.1), (1.2) имеет стационарное решение $u_\varepsilon(x) \in C^2(\bar{D})$.

Введем множество $G(u_\varepsilon)$ следующим образом: $u_0(x, \varepsilon) \in G(u_\varepsilon)$, если $\exists \varepsilon'' \in (0, \varepsilon']$ такое, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon'']$ существует решение $u_\varepsilon(x, t) \in C^{1,0}(\bar{D} \times [0, +\infty)) \cap C^{2,1}(\bar{D} \times (0, +\infty))$ задачи (1.1)–(1.3) и $\|u_\varepsilon(x, t) - u_\varepsilon(x)\|_{C(\bar{D})} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$.

Заметим, что $u_\varepsilon(x) \in G(u_\varepsilon)$, а потому $G(u_\varepsilon)$ всегда непусто.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множество $G(u_\varepsilon)$ назовем *глобальной областью влияния стационарного решения* $u_\varepsilon(x)$ задачи (1.1), (1.2).

Теперь, используя результаты § 4, можно сформулировать основной результат настоящей работы.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть выполнены условия (A1) и (A2). Тогда при достаточно малых ε существует стационарное решение $u_s(x, \varepsilon)$ из $C^2(\bar{D})$ задачи (1.1), (1.2), представляющее собой КСТС, т.е. удовлетворяющее предельному равенству (1.5). При выполнении условия (A3) в отношении глобальной области влияния $G(u_s)$ этого решения справедливы следующие утверждения:

1) функция $u_0(x, \varepsilon) \equiv u_0(x)$ принадлежит $G(u_s)$, если она удовлетворяет условию (A4) и условию (A5);

2) $u_0(x, \varepsilon) \in G(u_s)$, если существует $\varepsilon_1 > 0$ такое, что $u_0(x, \varepsilon) \in C_B^2(\bar{D})$ при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ (см. (A4)) и существуют функции $\bar{u}_0(x)$ и $\hat{u}_0(x)$, удовлетворяющие условиям (A4), (A5) и такие, что

$$\bar{u}_0(x) < u_0(x, \varepsilon) < \hat{u}_0(x), \quad x \in \bar{D}, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_1].$$

Утверждение 2) является следствием утверждения 1) и результатов работ [8], [9].

СЛЕДСТВИЕ 5.1. Пусть выполнены условия (A1), (A2), (A4) и условия:

(A2)' $J(x) > 0$ при $x \in D_0^{(-)} \cup \partial D$, $J(x) < 0$ при $x \in D_0^{(+)}$;

(A5)' существуют $x^{(-)} \in D_0^{(-)}$ и $x^{(+)} \in D_0^{(+)}$ такие, что $u_0(x^{(-)}) < 0$, $u_0(x^{(+)}) > 0$.

Тогда $u_0(x) \in G(u_s)$.

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть выполнены условия (A1), (A2), (A4) и одно из следующих условий:

(A6) $u_0(x) > 0$, $x \in \bar{D}_0^{(-)}$ ($u_0(x) < 0$, $x \in \bar{D}_0^{(+)}$);

(A6)' существует $x_\ell \in D_0^{(-)}$ такое, что $u_0(x_\ell) > 0$ и $J(x_\ell) < 0$ (существует $x_r \in D_0^{(+)}$ такое, что $u_0(x_r) < 0$ и $J(x_r) > 0$).

Тогда существуют $\eta > 0$, $T \geq 0$ и $\bar{x} \in \bar{D}$ такие, что при достаточно малых ε

$$|u(\bar{x}, t, \varepsilon) - u_s(\bar{x}, \varepsilon)| \geq \eta, \quad t \in [T, +\infty),$$

т.е. $u_0(x) \notin G(u_s)$.

Утверждение теоремы 5.2 непосредственно следует из леммы 3.4.

Список литературы

1. Файф П., Гринли В. Внутренние переходные слои для эллиптических краевых задач с малым параметром // УМН. 1974. Т. 29. № 4. С. 103–131.
2. Нефедов Н. Н. Метод дифференциальных неравенств для некоторых классов нелинейных сингулярно возмущенных задач с внутренними слоями // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 7. С. 1132–1139.
3. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высш. шк., 1990.
4. Бутузов В. Ф., Васильева А. Б., Нефедов Н. Н. Контрастные структуры в сингулярно возмущенных задачах // Автоматика и телемеханика. 1997. Т. 11. № 7. С. 4–32.
5. Бутузов В. Ф., Неделько И. В. Устойчивость контрастных структур типа ступеньки в двумерном случае // Докл. РАН. 1999. Т. 366. № 3. С. 295–298.
6. Бутузов В. Ф., Неделько И. В. Асимптотическая устойчивость решений сингулярно возмущенных краевых задач с пограничными и внутренними слоями // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 2. С. 198–208.
7. Бутузов В. Ф., Неделько И. В. О глобальной области влияния решений с внутренними слоями // Докл. РАН. 2000. Т. 373. № 2. С. 155–156.
8. Amann H. Periodic solutions of semilinear parabolic equations // Nonlinear Analysis: Collection of Papers in Honor of Erich Rothe. N. Y.: Academic Press, 1978. P. 1–29.
9. Amann H. Existence and stability of solutions for semilinear parabolic systems and applications to some diffusion reaction equations // Proc. Roy. Soc. of Edinburgh. 1978. V. 81. № 1. P. 35–47.
10. Нефедов Н. Н. Метод дифференциальных неравенств для некоторых сингулярно возмущенных задач в частных производных // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 4. С. 719–722.
11. Гилбарг Д., Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989.

Поступило в редакцию
20.III.2001