Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Владимиров, Бета-функции локальных полей характеристики нуль. Применения к струнным амплитудам, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2002, том 66, выпуск 1, 43–58

DOI: <https://doi.org/10.4213/im370>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 12:35:13

УДК 517.58+517.53.02

В. С. Владимиров

Бета-функции локальных полей характеристики нуль. Применения к струнным амплитудам

Для локальных полей $\mathbb{K}$ характеристики нуль наряду с бета-функцией $\mathbf{B}_{\mathbb{K}}$ вводится новая последовательность $\mathbf{B}_{\mathbb{K}}^{(n)}$, $n = 1, 2, \dots$, бета-функций n комплексных аргументов, выражающихся через произведение гамма-функций $\Gamma_{\mathbb{K}}$ для произвольных характеров (разветвленных или неразветвленных). Рассмотрены некоторые применения к четырехчастичным древесным струнным и суперструнным амплитудам. Оказалось, что тахионные струнные амплитуды выражаются через известную бета-функцию $\mathbf{B}_{\mathbb{K}} = \mathbf{B}_{\mathbb{K}}^{(2)}$, а суперструнные безмассовые амплитуды – через новую бета-функцию $\mathbf{B}'_{\mathbb{K}} = \mathbf{B}_{\mathbb{K}}^{(3)}$ для нетривиальных характеров. Установлено, что амплитуды всех известных струн и суперструн допускают адекватные формулы.

Дано новое доказательство формулы, связывающей четырехчастичную древесную амплитуду для замкнутых струн (обобщенные амплитуды Вирасоро) с произведением двух амплитуд для открытых струн (классические амплитуды Венициано).

Библиография: 16 наименований.

§ 1. Введение

Все локальные поля характеристики нуль хорошо известны: поле вещественных чисел $\mathbb{R}$, поле комплексных чисел $\mathbb{C}$, поля p -адических чисел $\mathbb{Q}_p$ и все их конечные алгебраические расширения $\mathbb{Q}_p(\varepsilon)$. Пусть $\mathbb{K}$ – общее обозначение для таких полей.

В теории струн [1]–[3] четырехчастичные древесные амплитуды выражаются через бета-функции

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{\mathbb{K}}(\alpha; \theta; \beta; \theta'; \gamma; \theta'') &= C_2 \int_{\mathbb{K}} \theta(X) |X|^{\alpha-1} \theta'(1-X) |1-X|^{\beta-1} dX \\ &= \Gamma_{\mathbb{K}}(\alpha; \theta) \Gamma_{\mathbb{K}}(\beta; \theta') \Gamma_{\mathbb{K}}(\gamma; \theta''), \quad \alpha + \beta + \gamma = 1, \quad \theta \theta' \theta'' = 1, \end{aligned} \quad (1.1)$$

локальных полей $\mathbb{K}$. Здесь $\theta(X)$ и $\theta'(X)$ – мультипликативные характеры поля $\mathbb{K}$, dX – (нормированная) мера Хаара, $|X| = |X|_{\mathbb{K}}$ – нормирование¹ на $\mathbb{K}$, $d(AX) = |A| dX$,

$$\Gamma_{\mathbb{K}}(\alpha; \theta) = a \int_{\mathbb{K}} \theta(X) |X|^{\alpha-1} \chi(X) dX \quad (1.2)$$

– гамма-функция поля $\mathbb{K}$ для характера $\theta(X)$, $a dX$ – самодвойственная мера относительно нетривиального аддитивного характера χ поля $\mathbb{K}$.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Фонда ведущих научных школ (грант № 00-15-96073).

¹В случае поля $\mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$, нормирование $|z|_{\mathbb{C}} = |z|^2$ не является нормой. Для остальных полей нормирование $|X|$ есть норма, причем для полей $\mathbb{Q}_p(\varepsilon)$ она неархимедова.

Например, для амплитуды Венециано $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\theta = \theta' = 1$, для амплитуды Вирасоро $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\theta = \theta' = 1$ (см. §5).

С другой стороны, в теории суперструн [1]–[3] безмассовые четырехчастичные амплитуды выражаются через произведение гамма-функций

$$\Gamma_{\mathbb{K}}(\alpha; \theta) \Gamma_{\mathbb{K}}(\beta; \theta') \Gamma_{\mathbb{K}}(\gamma; \theta''), \quad \alpha + \beta + \gamma = 0, \quad \theta \theta' \theta'' \neq 1. \quad (1.3)$$

Например, для суперструны Рамона–Нёве–Шварца и гетеротической суперструны $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, а характеры $\theta, \theta', \theta''$ будут отличаться от 1 так, чтобы $\theta \theta' \theta'' \neq 1$ (см. §5).

Возникает вопрос: существует ли на многообразии $\alpha + \beta + \gamma = 0$ бета-функция типа (1.1), равная произведению (1.3) гамма-функций? Эта задача решается введением последовательности бета-функций $\mathbf{B}_{\mathbb{K}}^{(n)}$ поля $\mathbb{K}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{\mathbb{K}}^{(n)}(\alpha_1, \theta_1; \alpha_2, \theta_2; \dots; \alpha_n, \theta_n) &= \\ &= C_n \int_{\mathbb{K}^n} \delta\left(1 - \sum_{i=1}^n X_i\right) \prod_{i=1}^n \theta_i(X_i) |X_i|^{\alpha_i-1} dX_i, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь $C_n = C_n(\theta_1, \dots, \theta_n)$ – некоторая нормировочная величина, которая будет определена ниже. Последовательность (1.4) аналогична хорошо известной последовательности

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^{(n)}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) &= \\ &= \int_{(0,1)^n} \delta\left(1 - \sum_{i=1}^n x_i\right) \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i-1} dx_i, \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

определяющей бета-функции $\mathbf{B}^{(n)}$, причем $\mathbf{B}^{(1)} = 1$, $\mathbf{B}^{(2)} = \mathbf{B}$.

В §2 будет установлена формула (2.9) в виде

$$\mathbf{B}_{\mathbb{K}}^{(n)}(\alpha_1, \theta_1; \alpha_2, \theta_2; \dots; \alpha_n, \theta_n) = C_n a^{1-n} \frac{\prod_{i=1}^n \Gamma_{\mathbb{K}}(\alpha_i; \theta_i)}{\Gamma_{\mathbb{K}}(\sum_{i=1}^n \alpha_i; \prod_{i=1}^n \theta_i)}. \quad (1.5)$$

Формула (1.5) полностью аналогична классической формуле

$$\mathbf{B}^{(n)}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \frac{\prod_{i=1}^n \Gamma(\alpha_i)}{\Gamma(\sum_{i=1}^n \alpha_i)}. \quad (1.6)$$

Здесь Γ и $\mathbf{B}$ – гамма- и бета-функции Эйлера.

Нормировочная величина C_n в (1.4) вычисляется в явном виде и выбирается с таким расчетом, чтобы были справедливы следующие формулы (см. §2): при четном $n = 2, 4, \dots$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{\mathbb{K}}^{(n)}(\alpha_1, \theta_1; \alpha_2, \theta_2; \dots; \alpha_{n+1}, \theta_{n+1}) &= \\ &= \Gamma_{\mathbb{K}}(\alpha_1; \theta_1) \Gamma_{\mathbb{K}}(\alpha_2; \theta_2) \dots \Gamma_{\mathbb{K}}(\alpha_{n+1}; \theta_{n+1}), \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n+1} &= 1, \quad \theta_1 \theta_2 \dots \theta_{n+1} = 1, \end{aligned} \quad (1.7)$$

и тогда

$$C_n = C_n \left(\prod_{i=1}^n \theta_i \right) = a^{n-1} \prod_{i=1}^n \bar{\theta}_i(-1); \quad (1.8)$$

при нечетном $n = 1, 3, \dots$

$$\mathbf{B}_{\mathbb{K}}^{(n)}(\alpha_1, \theta_1; \alpha_2, \theta_2; \dots; \alpha_n, \theta_n) = \Gamma_{\mathbb{K}}(\alpha_1; \theta_1) \Gamma_{\mathbb{K}}(\alpha_2; \theta_2) \dots \Gamma_{\mathbb{K}}(\alpha_n; \theta_n), \quad (1.9)$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 0, \quad \theta_1 \theta_2 \dots \theta_n \neq 1,$$

и тогда

$$C_n = C_n \left(\prod_{i=1}^n \theta_i \right) = a^{n-1} \Gamma_{\mathbb{K}} \left(0; \prod_{i=1}^n \theta_i \right). \quad (1.10)$$

В частности,

$$\mathbf{B}_{\mathbb{K}}^{(1)} = C_1 = \Gamma_{\mathbb{K}}(0; \theta_1), \quad \mathbf{B}_{\mathbb{K}}^{(2)} = \mathbf{B}_{\mathbb{K}}.$$

Формулы (1.7) и (1.9) позволяют применить адельные формулы к бета-функциям $\mathbf{B}_{\mathbb{K}}^{(n)}$ [2], [4]–[8].

Вывод формул (1.7)–(1.10) будет дан в § 2. В § 3 будут выписаны явные выражения для гамма-функций в конкретных полях; § 4 посвящен доказательству равенства, выражающего бета-функцию поля $\mathbb{C}$ через произведение двух бета-функций Эйлера для произвольных (разветвленных или неразветвленных) мультипликативных характеров.

В § 5 рассмотрены некоторые физические приложения полученных результатов к четырехчастичным древесным (супер)струнным амплитудам. Оказалось, что тахионные струнные амплитуды выражаются через известную бета-функцию

$$\mathbf{B}_{\mathbb{K}}(\alpha, \theta; \beta, \theta'; \gamma, \theta''), \quad \alpha + \beta + \gamma = 1, \quad \theta \theta' \theta'' = 1,$$

а суперструнные безмассовые амплитуды – через новую бета-функцию

$$\mathbf{B}'_{\mathbb{K}}(\alpha, \theta; \beta, \theta'; \gamma, \theta''), \quad \alpha + \beta + \gamma = 0, \quad \theta \theta' \theta'' \neq 1.$$

Установлено, что амплитуды всех известных струн и суперструн допускают адельные формулы.

Автор благодарит И.В. Воловича за плодотворные обсуждения проблем, затронутых в этой работе.

§ 2. Аналитические свойства бета-функций

Докажем равенства (1.7) и (1.9) и установим формулы (1.8) и (1.10) для величин C_n . Для этого воспользуемся методами аналитического продолжения однородных обобщенных функций и преобразования Фурье [4], [9]–[11].

Пусть θ – мультипликативный характер поля $\mathbb{K}$, $\theta \in \widehat{\mathbb{K}^*}$. Тогда квазихарактер $\theta(X)|X|^{\alpha-1}$ определяет однородную обобщенную функцию на $\mathbb{K}$. Как известно, эта обобщенная функция является мероморфной и имеет простые полюсы (иногда она даже целая), и справедлива формула преобразования Фурье

$$F[\theta(X)|X|^{\alpha-1}](\Xi) = \Gamma_{\mathbb{K}}(\alpha; \theta) \bar{\theta}(\Xi) |\Xi|^{-\alpha}. \quad (2.1)$$

Здесь преобразование Фурье F определяется самодвойственной мерой $a dX$ для выбранного (нетривиального) аддитивного характера χ поля $\mathbb{K}$ (см. § 1). (Имея в виду адельные формулы для гамма- и бета- функций [2], [4]–[8], выберем базовые аддитивные характеры конкретных полей так, как это указано в § 3.)

Гамма-функция $\Gamma_{\mathbb{K}}(\alpha; \theta)$ определяется формулой (1.2) как голоморфная функция по α в области $\operatorname{Re} \alpha > 0$ и, далее, как аналитическое продолжение на всю

плоскость α как мероморфная функция. Она удовлетворяет следующему функциональному соотношению:

$$\Gamma_{\mathbb{K}}(\alpha; \theta) \Gamma_{\mathbb{K}}(1 - \alpha; \bar{\theta}) = \theta(-1). \quad (2.2)$$

Далее, множество однородных обобщенных функций

$$[\theta(X)|X|^\alpha, \alpha \in \mathbb{C}, \theta \in \widehat{\mathbb{K}^*}],$$

мероморфно зависящих от параметра $\alpha \in \mathbb{C}$, образует сверточную группу, коммутативную и ассоциативную. При этом справедлива формула преобразования Фурье свертки

$$\begin{aligned} F[(\theta(X_1)|X_1|^\alpha) * (\theta'(X_2)|X_2|^\beta)](\Xi) \\ = aF[\theta(X_1)|X_1|^\alpha](\Xi)F[\theta'(X_2)|X_2|^\beta](\Xi). \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим интеграл, более общий, чем (1.4), при $X \neq 0$ и $n = 2, 3, \dots$ (обозначив $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$):

$$\begin{aligned} J_n(X; \alpha, \theta) &\equiv J_n(X; \alpha_1, \theta_1; \alpha_2, \theta_2; \dots; \alpha_n, \theta_n) \\ &= \int_{\mathbb{K}^{n-1}} \theta_1(X_1)|X_1|^{\alpha_1-1} \dots \theta_{n-1}(X_{n-1})|X_{n-1}|^{\alpha_{n-1}-1} \\ &\quad \times \theta_n(X - X_1 - \dots - X_{n-1}) \\ &\quad \times |X - X_1 - \dots - X_{n-1}|^{\alpha_n-1} dX_1 \dots dX_{n-1}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Совершая в (2.3) замену переменных интегрирования (в той области переменных α , где этот интеграл сходится)

$$XX_i = U_i, \quad dU_i = |X| dX_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

получим свойство однородности интеграла J_n по X :

$$J_n(X; \alpha, \theta) = J_n(1; \alpha, \theta) \prod_{i=1}^n \theta_i(X) |X|^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n - 1}. \quad (2.4)$$

Для интеграла $J_n(1; \alpha, \theta)$ докажем следующую лемму.

ЛЕММА. Интеграл $J_n(1; \alpha, \theta)$, $n = 2, 3, \dots$, сходится равномерно по α (на каждом компакте) в трубчатой области

$$D_n = \left[\alpha \in \mathbb{C}^n : \operatorname{Re} \alpha_i > 0, i = 1, 2, \dots, n, \sum_{i=1}^n \operatorname{Re} \alpha_i < 1 \right], \quad (2.5)$$

и в D_n справедливо равенство

$$\begin{aligned} J_n(1; \alpha_1, \theta_1; \dots; \alpha_n, \theta_n) &= \\ &= J_2 \left(1; \alpha_1, \theta_1; \sum_{i=2}^n \alpha_i, \prod_{i=2}^n \theta_i \right) J_{n-1}(1; \alpha_2, \theta_2; \dots; \alpha_n, \theta_n). \end{aligned} \quad (2.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что интеграл $J_n(1; \alpha, \theta)$ мажорируется интегралом $J_n(1; \operatorname{Re} \alpha, \mathbf{1})$, где $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$,

$$J_n(1; \alpha, \theta) \leq J_n(1; \operatorname{Re} \alpha, \mathbf{1}).$$

При $n = 2$ лемма легко доказывается. Докажем ее индукцией по $n > 2$. По индуктивному предположению интегралы J_2 и J_{n-1} из равенства (2.6) сходятся равномерно в n -мерных областях

$$D'_n = \left[\alpha \in \mathbb{C}^n : \operatorname{Re} \alpha_1 > 0, \sum_{i=2}^n \operatorname{Re} \alpha_i > 0, \sum_{i=1}^n \operatorname{Re} \alpha_i < 1 \right]$$

и $D''_n = \mathbb{C} \times D_{n-1}$ соответственно, каждая из которых содержит область D_n , причем $D'_n \cap D''_n = D_n$, и, следовательно, произведение этих интегралов, стоящее в правой части равенства (2.6), сходится равномерно в D_n .

Пользуясь равенством (2.4) для J_{n-1} и $X = 1 - X_1 \neq 0$ и теоремой Фубини, получим равенство (2.6):

$$\begin{aligned} J_2 \left(1; \alpha_1, \theta_1; \sum_{i=2}^n \alpha_i, \prod_{i=2}^n \theta_i \right) J_{n-1}(1; \alpha_2, \theta_2; \dots; \alpha_n, \theta_n) \\ = \int_{\mathbb{K}} \theta_1(X_1) |X_1|^{\alpha_1-1} \prod_{i=2}^n \theta_i(1-X_1) |1-X_1|^{\alpha_2+\dots+\alpha_n-1} dX_1 \\ \times J_{n-1}(1; \alpha_2, \theta_2; \dots; \alpha_n, \theta_n) \\ = \int_{\mathbb{K}} \theta_1(X_1) |X_1|^{\alpha_1-1} J_{n-1}(1-X_1; \alpha_2, \theta_2; \dots; \alpha_n, \theta_n) dX_1 \\ = \int_{\mathbb{K}} \theta_1(X_1) |X_1|^{\alpha_1-1} \int_{\mathbb{K}^{n-2}} \theta_2(X_2) |X_2|^{\alpha_2-1} \dots \theta_{n-1}(X_{n-1}) |X_{n-1}|^{\alpha_{n-1}-1} \\ \times \theta_n(1-X_1-\dots-X_{n-1}) |1-X_1-\dots-X_{n-1}|^{\alpha_n-1} dX_2 \dots dX_{n-1} dX_1 \\ = J_n(1; \alpha, \theta). \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем фактом, что мера точки $X_1 = 1$ в $\mathbb{K}$ равна нулю. Равенство (2.6) позволяет заключить, что интеграл $J_n(1; \alpha, \theta)$ сходится равномерно в D_n . Лемма доказана.

По лемме интеграл (2.3) сходится равномерно в трубчатой области D_n комплексных переменных α , определяя там голоморфную функцию. Далее он определяется аналитическим продолжением в $\mathbb{C}^n$ как мероморфная функция. При этом в силу определения (1.4) бета-функции и ее свойства однородности (2.4) в D_n при всех $\alpha \in \mathbb{C}^n$ справедливо равенство

$$J_n(X; \alpha, \theta) = C_n^{-1} \mathbf{B}_{\mathbb{K}}^{(n)} \prod_{i=1}^n \theta_i(X) |X|^{\alpha_1+\dots+\alpha_n-1}. \quad (2.7)$$

С другой стороны, интеграл в (2.7) равен $(n-1)$ -кратной свертке

$$[(\theta_1(X_1) |X_1|^{\alpha_1-1}) * \dots * (\theta_n(X_n) |X_n|^{\alpha_n-1})](X),$$

откуда следует равенство

$$\begin{aligned} & [(\theta_1(X_1)|X_1|^{\alpha_1-1}) * \dots * (\theta_n(X_n)|X_n|^{\alpha_n-1})](X) \\ & = C_n^{-1} \mathbf{B}_{\mathbb{K}}^{(n)} \prod_{i=1}^n \theta_i(x) |X|^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n - 1}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Применяя к равенству (2.8) преобразование Фурье и пользуясь равенством (2.1), получим

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n \Gamma_{\mathbb{K}}(\alpha_i; \theta_i) |\Xi|^{-\alpha_1 - \dots - \alpha_n} & = C_n^{-1} a^{n-1} \mathbf{B}_{\mathbb{K}}^{(n)}(\alpha_1, \theta_1; \dots; \alpha_n, \theta_n) \\ & \times \Gamma_{\mathbb{K}}\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i; \prod_{i=1}^n \theta_i\right) |\Xi|^{-\alpha_1 - \dots - \alpha_n}, \end{aligned}$$

откуда, полагая $\Xi = 1$, получим равенство

$$\prod_{i=1}^n \Gamma_{\mathbb{K}}(\alpha_i; \theta_i) = C_n^{-1} a^{n-1} \mathbf{B}_{\mathbb{K}}^{(n)}(\alpha_1, \theta_1; \dots; \alpha_n, \theta_n) \Gamma_{\mathbb{K}}\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i; \prod_{i=1}^n \theta_i\right). \quad (2.9)$$

Из (2.9) следуют формулы (1.9) и (1.10) при нечетном n , если положить

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0, \quad \prod_{i=1}^n \theta_i = \theta \neq 1$$

и

$$C_n(\theta) = a^{n-1} \Gamma_{\mathbb{K}}(0; \theta), \quad (2.10)$$

а также формулы (1.7) и (1.8) при четном n , если воспользоваться формулой (2.1), ввести новую переменную $\alpha_{n+1} = 1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i$ и новый характер $\theta_{n+1} = \prod_{i=1}^n \bar{\theta}_i$ и положить

$$C_n(\theta) = a^{n-1} \theta_{n+1}(-1). \quad (2.11)$$

Из (2.6), (2.7) и (1.7)–(1.10) для бета-функций при нечетных $n = 3, 5, \dots$ следует рекуррентная формула

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{\mathbb{K}}^{(n)}(\alpha_1, \theta_1; \dots; \alpha_n, \theta_n) & = \frac{C_n(\prod_{i=1}^n \theta_i)}{C_2(\prod_{i=1}^n \theta_i) C_{n-1}(\prod_{i=2}^n \theta_i)} \\ & \times \mathbf{B}_{\mathbb{K}}^{(2)}\left(\alpha_1, \theta_1; \sum_{i=2}^n \alpha_i, \prod_{i=2}^n \theta_i; 1, \prod_{i=1}^n \bar{\theta}_i\right) \\ & \times \mathbf{B}_{\mathbb{K}}^{(n-1)}\left(\alpha_2, \theta_2; \dots; \alpha_n, \theta_n; 1 + \alpha_1, \prod_{i=2}^n \bar{\theta}_i\right), \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 0, \quad \theta_1 \theta_2 \dots \theta_n \neq 1.$$

Сформулируем полученные результаты в виде следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Бета-функция $\mathbf{B}_{\mathbb{K}}^{(n)}$, $n = 2, 3, \dots$, определяемая формулой (1.4), равна произведению гамма-функций (1.7) и (1.9), причем постоянная C_n выражается формулами (1.8) и (1.10) соответственно. Справедлива рекуррентная формула (2.12).

§ 3. Гамма-функции в конкретных полях

Приведем в явном виде гамма-функции для конкретных полей. При этом бета-функции будут выражаться через гамма-функции по формулам (1.5) и (1.7). Бета- и гамма-функции для главных характеров $\theta_1 = \dots = \theta_n = 1$ обозначим кратко:

$$\mathbf{B}_{\mathbb{K}}^{(n)}(\alpha_1, 1; \dots; \alpha_n, 1) = \mathbf{B}_{\mathbb{K}}^{(n)}(\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad \Gamma_{\mathbb{K}}(\alpha; 1) = \Gamma_{\mathbb{K}}(\alpha).$$

Бета- и гамма-функции полей $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ и $\mathbb{Q}_p$ обозначим $\mathbf{B}_{\infty}^{(n)}$, $\Gamma_{\infty}(\alpha; \nu)$, $\mathbf{B}_{\omega}^{(n)}$, $\Gamma_{\omega}(\alpha; \nu)$ и $\mathbf{B}_p^{(n)}$, $\Gamma_p(\alpha; \theta)$ соответственно.

Поле $\mathbb{R}$. Здесь $X = x \in \mathbb{R}$, $|x|$ – абсолютное значение x , dx – мера Лебега, $\chi(x) = \exp(-2\pi i x)$, $a = 1$, $\theta(x) = \text{sgn}^{\nu} x$, $\nu \in \mathbb{F}_2$, – мультипликативные характеры поля $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \Gamma_{\infty}(\alpha; \nu) &= \int_{\mathbb{R}} \text{sgn}^{\nu} x |x|^{\alpha-1} \exp(-2\pi i x) dx \\ &= 2i^{-\nu} (2\pi)^{-\alpha} \Gamma(\alpha) \cos \frac{\pi}{2}(\alpha - \nu), \quad \nu \in \mathbb{F}_2, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $\mathbb{F}_2$ – поле целых рациональных чисел по модулю 2;

$$C_n = \begin{cases} 1, & n = 2, 4, \dots, \\ \pi i, & n = 1, 3, \dots \end{cases}$$

Отметим полезную формулу [2]

$$\mathbf{B}(\alpha, \beta) = 2\mathbf{B}_{\infty}(\alpha, \beta, \gamma) + 2\mathbf{B}_{\infty}(\alpha, 1; \beta, 1; \gamma, 0), \quad \alpha + \beta + \gamma = 1. \quad (3.2)$$

Поле $\mathbb{C}$. Здесь $X = z = x + iy \in \mathbb{C}$, $|z|_{\mathbb{C}} = |z|^2 = x^2 + y^2$ – нормирование на $\mathbb{C}$, $|dz \wedge d\bar{z}| = 2 dx dy$ – самодвойственная мера относительно характера $\chi(z) = \exp[-2\pi i(z + \bar{z})]$, $a = 1$, $\theta_{\nu}(z) = z^{\nu} |z|^{-\nu}$, $\nu \in \mathbb{Z}$, – мультипликативные характеры поля $\mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} \Gamma_{\omega}(\alpha; \nu) &= \int_{\mathbb{C}} \theta_{\nu}(z) |z|^{2(\alpha-1)} \exp[-2\pi i(z + \bar{z})] |dz \wedge d\bar{z}| \\ &= 2i^{-\nu} (2\pi)^{-2\alpha} \Gamma(\alpha + \nu/2) \Gamma(\alpha - \nu/2) \sin \pi(\alpha - \nu/2), \quad \nu \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$C_n = C_n \left(\sum_{i=1}^n \nu_i \right), \quad C_n(\nu) = \begin{cases} (-1)^{\nu}, & n = 2, 4, \dots, \\ 4\pi i^{-\nu}/\nu, & n = 1, 3, \dots \end{cases}$$

Поле $\mathbb{Q}_p(\varepsilon)$. Поле $\mathbb{Q}_p(\varepsilon) = \mathbb{K}$ – конечное расширение поля $\mathbb{Q}_p$ степени n (см. [4], [12]–[14]), и $\varepsilon \in \overline{\mathbb{Q}_p}$ – корень минимального алгебраического многочлена степени n с коэффициентами из $\mathbb{Q}_p$. Здесь $X \in \mathbb{K}$, $|X| = |\det X|_p$ – нормирование на $\mathbb{K}$, dX – (нормированная) мера Хаара на $\mathbb{K}$,

$$\int_{\mathbb{Z}} dX = 1,$$

где $\mathbb{Z}$ – кольцо целых элементов поля $\mathbb{K}$, $\mathbb{Z} = [X \in \mathbb{K}: |X| \leq 1]$.

Обозначим через $\mathbb{I} = [X \in \mathbb{Z} : |X| < 1]$ простой идеал поля $\mathbb{K}$; он – главный, так что существует элемент π такой, что $\mathbb{I} = \pi\mathbb{Z}$, $|\pi| = q^{-1}$, где q – число элементов поля вычетов $\mathbb{Z}/\mathbb{I}$ (q равно степени числа p , $q = p^f$, где f – делитель n , так что $n = ef$, $1 \leq e \leq n$); f называется *степенью* поля вычетов, q – *модулем* поля $\mathbb{K}$, e – *индексом ветвления* поля $\mathbb{K}$.

Каждый элемент X поля $\mathbb{K}$ однозначно представляется в виде

$$X = \sum_{k=m}^{\infty} a_k \pi^k,$$

где $m = e \operatorname{ord}_p X = -\frac{1}{f} \log_p |X| = -\ln_q |X|$, а каждое a_k удовлетворяет уравнению $a_k^q = a_k$ (a_k , $k = m, m+1, \dots$, – представители Тейхмюллера).

Пусть $\chi(X)$ – нетривиальный аддитивный характер поля $\mathbb{K}$ и $r = r(\chi)$ – его ранг (максимальное целое число, для которого $\chi(X) = 1$ при $|X| \leq q^r$). Например, в качестве базового характера можно положить

$$\chi(X) = \exp(2\pi i \{\operatorname{tr} X\}_p),$$

где $\{x\}_p$ – дробная часть p -адического числа x .

Мера $q^{-r/2} dX$ самодвойственна относительно характера χ , так что $a = q^{-r/2}$.

Пусть $\theta(X)$ – нормированный ($\theta(\pi) = 1$) характер поля $\mathbb{K}$ и $\rho = \rho(\theta)$ – его ранг (минимальное целое число, для которого $\theta(X) = 1$ при $X \in 1 + \mathbb{I}^\rho$). Характер θ однозначно определяется заданием его на мультипликативной группе (группе единиц) $\mathbb{Z}^* = [X \in \mathbb{Z} : |X| = 1]$ кольца $\mathbb{Z}$. Тогда имеем

$$\Gamma_{\mathbb{K}}(\alpha; \theta) = q^{-r/2} \int_{\mathbb{K}} \theta(X) |X|^{\alpha-1} \chi(X) dX = \begin{cases} q^{r(\alpha-1/2)} \Gamma_q(\alpha), & \rho = 0, \\ q^{(r+\rho)(\alpha-1/2)} \kappa(\theta), & \rho > 0, \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} \Gamma_q(\alpha) &= \frac{1 - q^{\alpha-1}}{1 - q^{-\alpha}}, \\ \kappa(\theta) &= q^{\rho/2} \int_{|X|=1} \theta(X) \chi(\pi^{-r-\rho} X) dX, \\ |\kappa(\theta)| &= 1, \quad \kappa(\theta) \kappa(\bar{\theta}) = \theta(-1); \\ C_n &= C_n \left(\prod_{i=1}^n \theta_i \right), \end{aligned}$$

где

$$C_n(\theta) = \begin{cases} q^{-(n-1)r/2} \bar{\theta}(-1), & n = 2, 4, \dots, \\ q^{-[rn+\rho(\theta)]/2} \kappa(\theta), & n = 1, 3, \dots \end{cases}$$

Рассмотрим три примера полей $\mathbb{Q}_p$, $\mathbb{Q}_p(\sqrt{d})$, $p \neq 2$, и $\mathbb{Q}_2(\sqrt{d})$.

Поле $\mathbb{Q}_p$. Здесь $X = x \in \mathbb{Q}_p$, $|X| = |x|_p$, $dX = d_p x$, $q = p$, $r = 0$, $a = 1$, $\chi(X) = \chi_p(x) = \exp(2\pi i \{x\}_p)$, $\pi = p$,

$$\begin{aligned}\Gamma_p(\alpha; \theta) &= \int_{\mathbb{Q}_p} \theta(x) |x|_p^{\alpha-1} \chi_p(x) d_p x = \begin{cases} \Gamma_p(\alpha), & \rho = 0, \\ p^{\rho(\alpha-1/2)} \kappa(\theta), & \rho > 0, \end{cases} \\ \Gamma_p(\alpha) &= \frac{1 - p^{\alpha-1}}{1 - p^{-\alpha}}, \\ \kappa(\theta) &= p^{\rho/2} \int_{|x|_p=1} \theta(x) \chi_p(p^{-\rho} x) d_p x,\end{aligned}$$

где $\rho = \rho(\theta)$ и $\chi_p(x) = \exp(2\pi i \{x\}_p)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Все мультипликативные характеры θ поля $\mathbb{Q}_p$ описаны в [15] (см. также [11]). Они полностью определяются своим сужением на группу единиц $\mathbb{Z}_p^*$ поля $\mathbb{Q}_p$. Все характеры θ группы $\mathbb{Z}_p^*$ ранга $\rho = 0, 1, \dots$ – это собственные функции оператора D^α , $\alpha > 0$ (см. [16]), соответствующие собственному значению λ_ρ кратности n_ρ , где

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= \frac{p^\alpha + p - 2}{p^{\alpha+1} - 1} p^\alpha, \quad n_0 = 1, \\ \lambda_1 &= p^\alpha, \quad n_1 = p - 2, \\ \lambda_\rho &= p^{\alpha\rho}, \quad n_\rho = (p-1)^2 p^{\rho-2}, \quad \rho = 2, 3, \dots\end{aligned}$$

Поле $\mathbb{Q}_p(\sqrt{d})$, $p \neq 2$. Здесь $d \neq 0, 1$, $d \in \mathbb{Z}$ свободно от квадратов p -адических чисел. Существуют три неизоморфных квадратичных расширения $\mathbb{Q}_p(\sqrt{d})$ поля $\mathbb{Q}_p$ (см. [5], [8], [10]):

- 1) $d = \varepsilon \notin \mathbb{Q}_p^{*2}$, $|\varepsilon|_p = 1$;
- 2) $d = p$;
- 3) $d = p\varepsilon$.

Здесь $X = x + \sqrt{d}y$, $x, y \in \mathbb{Q}_p$, $|X| = |x^2 - dy^2|_p$, $dX = d_p x d_p y$,

$$\begin{aligned}q &= \pi = p^2, \quad r = 0, \quad a = 1, & \text{если } |d|_p = 1, \\ q &= \pi = p, \quad r = 1, \quad a = p^{-1/2}, & \text{если } |d|_p = 1/p.\end{aligned}$$

Поле $\mathbb{Q}_2(\sqrt{d})$. Существуют семь неизоморфных квадратичных расширений $\mathbb{Q}_2(\sqrt{d})$ поля $\mathbb{Q}_2$ (см. [10], [11]): $d \equiv 3, 5, 7 \pmod{8}$ или $d \equiv 2, 6, 10, 14 \pmod{16}$. Здесь $X = x + \sqrt{d}y$, $x, y \in \mathbb{Q}_2(\sqrt{d})$, $dX = \frac{1}{2}d_2 x d_2 y$, если $d \equiv 5 \pmod{8}$, $dX = d_2 x d_2 y$ в остальных случаях,

$$\begin{aligned}q &= \pi = 4, \quad r = 0, \quad a = 1, & \text{если } d \equiv 5 \pmod{8}, \\ q &= \pi = 2, \quad r = 2, \quad a = 2^{-1}, & \text{если } d \equiv 3, 7 \pmod{8}, \\ q &= \pi = 2, \quad r = 3, \quad a = 2^{-3/2}, & \text{если } |d|_2 = 1/2.\end{aligned}$$

§ 4. Структура бета-функций $\mathbf{B}_\omega$

Докажем равенство

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_\omega(\alpha, \nu; \beta, \mu; \gamma, \eta) &= 2(-1)^\eta \sin \pi(\beta - \mu/2) \mathbf{B}(\alpha + \nu/2, \beta + \mu/2) \\ &\quad \times \mathbf{B}(\beta - \mu/2, \gamma - \eta/2), \\ \alpha + \beta + \gamma &= 1, \quad \nu + \mu + \eta = 0, \quad (\nu, \mu, \eta) \in \mathbb{Z}^3, \end{aligned} \quad (4.1)$$

для бета-функции $\mathbf{B}_\omega$ поля $\mathbb{C}$ и его характеров

$$\theta_\nu(z) = z^\nu |z|^{-\nu}, \quad \theta_\mu(z) = z^\mu |z|^{-\mu}. \quad (4.2)$$

Равенство (4.1) является обобщением известной формулы (см. [1, (7.2.39)])

$$\mathbf{B}_\omega(\alpha, \beta, \gamma) = 2 \sin \beta \mathbf{B}(\alpha, \beta) \mathbf{B}(\beta, \gamma), \quad \alpha + \beta + \gamma = 1, \quad (4.3)$$

на случай неглавных характеров².

Для доказательства равенства (4.1) воспользуемся формулами (3.3) и (1.5), согласно которым

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_\omega(\alpha, \nu; \beta, \mu; \gamma, \eta) &= (-i)^{-\nu-\mu-\eta} 2^3 (2\pi)^{-2(\alpha+\beta+\gamma)} \Gamma\left(\alpha + \frac{\nu}{2}\right) \\ &\quad \times \Gamma\left(\alpha - \frac{\nu}{2}\right) \sin \pi\left(\alpha - \frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\beta + \frac{\mu}{2}\right) \Gamma\left(\beta - \frac{\mu}{2}\right) \sin \pi\left(\beta - \frac{\mu}{2}\right) \Gamma\left(\gamma + \frac{\eta}{2}\right) \\ &\quad \times \Gamma\left(\gamma - \frac{\eta}{2}\right) \sin \pi\left(\gamma - \frac{\eta}{2}\right) = \frac{2}{\pi^2} \sin \pi\left(\alpha - \frac{\nu}{2}\right) \sin \pi\left(\beta - \frac{\mu}{2}\right) \\ &\quad \times \sin \pi\left(\gamma - \frac{\eta}{2}\right) \mathbf{B}\left(\alpha + \frac{\nu}{2}, \beta + \frac{\mu}{2}\right) \mathbf{B}\left(\beta - \frac{\mu}{2}, \gamma - \frac{\eta}{2}\right) \Gamma\left(\alpha + \beta + \frac{\nu + \mu}{2}\right) \\ &\quad \times \Gamma\left(\beta + \gamma - \frac{\mu + \eta}{2}\right) \Gamma\left(\alpha - \frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\gamma + \frac{\eta}{2}\right). \end{aligned}$$

Отсюда и из равенств

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\alpha + \beta + \frac{\nu + \mu}{2}\right) \Gamma\left(\gamma + \frac{\eta}{2}\right) \sin \pi\left(\gamma - \frac{\eta}{2}\right) &= (-1)^\eta \pi, \\ \Gamma\left(\beta + \gamma - \frac{\mu + \eta}{2}\right) \Gamma\left(\alpha - \frac{\nu}{2}\right) \sin \pi\left(\alpha - \frac{\nu}{2}\right) &= \pi \end{aligned}$$

следует равенство (4.1)³.

§ 5. Некоторые применения к древесным струнным и суперструнным амплитудам

В этом параграфе будет показано, что в теории струн важную роль играют две бета-функции $\mathbf{B}_{\mathbb{K}}^{(2)} = \mathbf{B}_{\mathbb{K}}$ и новая бета-функция $\mathbf{B}_{\mathbb{K}}^{(3)}$, которую мы обозначим через $\mathbf{B}'_{\mathbb{K}}$. Струнные амплитуды выражаются через $\mathbf{B}_{\mathbb{K}}$ -функцию, струнные без-

²Множитель 2 в равенстве (4.1) по сравнению с формулой (7.2.39) из [1] появляется за счет самодвойственности принятой в $\mathbb{C}$ меры $|dz \wedge d\bar{z}| = 2 dx dy$, $z = x + iy$.

³По существу, здесь дано новое доказательство равенства (3.29) работы [3].

массовые амплитуды – через $\mathbf{B}'_{\mathbb{K}}$ -функцию. Эти функции имеют вид (см. (1.4) при $n = 2, 3$, а также (1.1), (1.7) и (1.9))

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{\mathbb{K}}(\alpha, \theta; \beta, \theta'; \gamma, \theta'') &= C_2 [(\theta(X)|X|^{\alpha-1}) * (\theta'(X)|X|^{\beta-1})](1) \\ &= \Gamma_{\mathbb{K}}(\alpha; \theta) \Gamma_{\mathbb{K}}(\beta; \theta') \Gamma_{\mathbb{K}}(\gamma; \theta''), \quad \alpha + \beta + \gamma = 1, \quad \theta\theta'\theta'' = 1, \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}'_{\mathbb{K}}(\alpha, \theta; \beta, \theta'; \gamma, \theta'') &= \\ &= C_3 [(\theta(X)|X|^{\alpha-1}) * (\theta'(X)|X|^{\beta-1}) * (\theta''(X)|X|^{\gamma-1})](1) \\ &= \Gamma_{\mathbb{K}}(\alpha; \theta) \Gamma_{\mathbb{K}}(\beta; \theta') \Gamma_{\mathbb{K}}(\gamma; \theta''), \quad \alpha + \beta + \gamma = 0, \quad \theta\theta'\theta'' \neq 1. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Пусть (s, t, u) – переменные Манделштама для четырехчастичного процесса рассеяния с импульсами k_1, k_2, k_3, k_4 , $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 0$, $k_i^2 = m_i^2$, в $\mathbb{R}^d$, где $d = 26$ для струн и $d = 10$ для суперструн, с метрикой Минковского $(1, -1, \dots, -1)$, так что

$$s = (k_1 + k_2)^2, \quad t = (k_2 + k_3)^2, \quad u = (k_1 + k_3)^2, \quad s + t + u = \sum m_i^2. \quad (5.3)$$

Кроссинг-симметричная амплитуда Венециано (открытая бозонная струна) $V(s, t, u)$, $s + t + u = -8$, для четырех тахионов выражается через бета-функцию $\mathbf{B}_{\infty}$ поля $\mathbb{R}$ по формуле

$$V(s, t, u) = \mathbf{B}_{\infty}(-1 - s/2, -1 - t/2, -1 - u/2), \quad s + t + u = -8. \quad (5.4)$$

Напомним, что *классическая* амплитуда Венециано V_0 (не кроссинг-симметричная) определяется формулой

$$V_0(s, t) = \mathbf{B}(-1 - s/2, -1 - t/2). \quad (5.5)$$

Кроссинг-симметричная амплитуда Венециано V выражается через классическую амплитуду Венециано V_0 по формуле

$$V(s, t, u) = V_0(s, t) + V_0(t, u) + V_0(s, u), \quad s + t + u = -8, \quad (5.6)$$

в силу (5.4) и (5.5) и известного равенства

$$\mathbf{B}_{\infty}(\alpha, \beta, \gamma) = \mathbf{B}(\alpha, \beta) + \mathbf{B}(\beta, \gamma) + \mathbf{B}(\alpha, \gamma), \quad \alpha + \beta + \gamma = 1. \quad (5.7)$$

Отметим еще одну связь между амплитудами Венециано V и V_0 :

$$V_0(s, t) = 2V(s, t, u) \left(1 - \operatorname{ctg} \frac{\pi s}{4} \operatorname{ctg} \frac{\pi t}{4} \right), \quad s + t + u = -8, \quad (5.8)$$

в силу равенства

$$\mathbf{B}(\alpha, \beta) = 2\mathbf{B}_{\infty}(\alpha, \beta, \gamma) \left(1 - \operatorname{tg} \frac{\pi \alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi \beta}{2} \right), \quad \alpha + \beta + \gamma = 1, \quad (5.9)$$

вытекающего из (3.1) и из определений бета-функций.

Обобщенная амплитуда Венециано $V_{\nu\mu\eta}$ определяется формулой

$$\begin{aligned} V_{\nu\mu\eta}(s, t, u) &= \mathbf{B}_{\infty}(-1 - s/2, \nu; -1 - t/2, \mu; -1 - u/2, \eta), \\ s + t + u &= -8, \quad \nu + \mu + \eta = 0, \quad (\nu, \mu, \eta) \in \mathbb{F}_2^3. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Их всего четыре: V_{000} , V_{110} , V_{101} , V_{011} , причем $V_{000} = V$.

Струна с фактором Чана–Патона [1], [2]. Соответствующая амплитуда для st -канала сводится к классической амплитуде Венециано $V_0(s, t)$, которая в свою очередь выражается через амплитуду Венециано V и обобщенную амплитуду Венециано V_{110} по формуле

$$V_0(s, t) = 2V(s, t, u) + 2V_{110}(s, t, u), \quad s + t + u = -8, \quad (5.11)$$

в силу равенств (3.2), (5.4), (5.5) и (5.10).

Амплитуда Вирасоро (замкнутая бозонная струна) $W(s, t, u)$, $s + t + u = -32$, для четырех тахионов выражается через бета-функцию $\mathbf{B}_\omega$ поля $\mathbb{C}$ по формуле

$$W(s, t, u) = \mathbf{B}_\omega(-1 - s/8, -1 - t/8, -1 - u/8), \quad s + t + u = -32. \quad (5.12)$$

Обобщенная амплитуда Вирасоро $W_{\nu\mu\eta}$ определяется формулой

$$\begin{aligned} W_{\nu\mu\eta}(s, t, u) &= \mathbf{B}_\omega(-1 - s/8, \nu; -1 - t/8, \mu; -1 - u/8, \eta), \\ s + t + u &= -32, \quad \nu + \mu + \eta = 0, \quad (\nu, \mu, \eta) \in \mathbb{Z}^3. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Их бесконечно много, причем $W_{000} = W$.

Четырехтахионная амплитуда замкнутой струны с произвольным возмущением. Возмущение задается целыми числами $\{n_i\} = (n_1, n_2, n_3, n_4) \in \mathbb{Z}^4$ (см. [1, т. 1, с. 433]; [3]), а сама амплитуда – интегралом

$$\begin{aligned} I(s, t, u; \{n_i\}) &= \int_{\mathbb{C}} z^{-2-s/8+n_1} (1-z)^{-2-t/8+n_2} \bar{z}^{-2-s/8+n_3} \\ &\quad \times (1-\bar{z})^{-2-t/8+n_4} d^2 z \end{aligned} \quad (5.14)$$

(в той области, где он сходится равномерно; см. § 3).

ТЕОРЕМА 2. *Амплитуда I выражается через бета-функцию $\mathbf{B}_\omega$ поля $\mathbb{C}$ по формуле*

$$\begin{aligned} I(s, t, u; \{n_i\}) &= (-1)^{q+q'} \mathbf{B}_\omega\left(-1 - \frac{s}{8} + \frac{p}{2}, q; -1 - \frac{t}{8} + \frac{p'}{2}, q'; -1 - \frac{u}{8} + \frac{p''}{2}, q''\right), \\ s + t + u &= -32, \quad p + p' + p'' = 0, \quad q + q' + q'' = 0, \end{aligned} \quad (5.15)$$

где

$$p = n_1 + n_3, \quad p' = n_2 + n_4, \quad q = n_1 - n_3, \quad q' = n_2 - n_4. \quad (5.16)$$

СЛЕДСТВИЕ. *Амплитуда I выражается через обобщенную амплитуду Вирасоро по формуле*

$$\begin{aligned} I(s, t, u; \{n_i\}) &= (-1)^{q+q'} W_{qq'q''}(s - 4p, t - 4p', u - 4p''), \\ s + t + u &= -32, \quad p + p' + p'' = 0, \quad q + q' + q'' = 0. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Докажем формулу (5.15). Интерпретируя меру $d^2 z$ как $|dz \wedge d\bar{z}|$ и пользуясь обозначением θ_ν для характеров (4.2), перепишем интеграл (5.14) в виде

$$\begin{aligned} I(s, t, u; \{n_i\}) &= \\ &= \int_{\mathbb{C}} |z|^{-2-s/4+n_1+n_3} \theta_{n_1-n_3}(z) |1-z|^{-2-t/4+n_2+n_4} \theta_{n_2-n_4}(1-z) |dz \wedge d\bar{z}| \\ &= (\theta_{n_1-n_3}(z) |z|^{-2-s/4+n_1+n_3}) * (\theta_{n_2-n_4}(z) |z|^{-2-t/4+n_2+n_4})(1). \end{aligned}$$

Отсюда, пользуясь определением (5.1) бета-функции $\mathbf{B}_\omega$ (здесь $C_2 = 1$) и обозначением (5.16), получим формулу (5.15).

Из (5.15), (5.12) и (4.1) следует, что амплитуда I выражается через произведение двух классических амплитуд Венециано V_0 по формуле

$$I(s, t, u; \{n_i\}) = 2 \sin \pi \left(\frac{t}{8} - \frac{p' - q'}{2} \right) V_0 \left(\frac{s}{4} - p - q, \frac{t}{4} - p' - q' \right) \\ \times V_0 \left(\frac{t}{4} - p' + q', \frac{u}{4} - p'' + q'' \right), \quad s + t + u = -32. \quad (5.18)$$

В частности, при $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 0$ амплитуда Вирасоро выражается через классические амплитуды Венециано V_0 [1], [3]:

$$W(s, t, u) = 2 \sin \frac{\pi t}{8} V_0 \left(\frac{s}{4}, \frac{t}{4} \right) V_0 \left(\frac{t}{4}, \frac{u}{4} \right), \quad s + t + u = -32. \quad (5.19)$$

Теперь обратимся к суперструнам [1]–[3].

Безмассовая четырехчастичная амплитуда суперструны Рамона–Нёве–Шварца пропорциональна произведению гамма-функций $\Gamma_\infty(-x/2; 1)$ (см. [2, формула (13.10)]):

$$A_4(s, t, u) = \Gamma_\infty(-s/2; 1) \Gamma_\infty(-t/2; 1) \Gamma_\infty(-u/2; 1), \quad s + t + u = 0, \quad (5.20)$$

т. е. в силу (5.2) выражается через $\mathbf{B}'_\infty$ -функцию поля $\mathbb{R}$:

$$A_4(s, t, u) = \mathbf{B}'_\infty(-s/2, 1; -t/2, 1; -u/2, 1), \quad s + t + u = 0. \quad (5.21)$$

Безмассовая четырехчастичная амплитуда открытой (бозонной) суперструны пропорциональна выражению (см. [1, формула (7.4.59)]):

$$A_4^{\text{bos}}(s, t, u) = \frac{\Gamma(-s/2) \Gamma(-t/2)}{\Gamma(1 + u/2)}, \quad s + t + u = 0.$$

Эта амплитуда представляется через $\mathbf{B}'_\infty$ -функцию:

$$A_4^{\text{bos}}(s, t, u) = \frac{1}{4\pi i} \left(\text{ctg} \frac{\pi s}{4} \text{ctg} \frac{\pi t}{4} - 1 \right) \\ \times \mathbf{B}'_\infty \left(-\frac{s}{2}, 1; -\frac{t}{2}, 1; -\frac{u}{2}, 1 \right), \quad s + t + u = 0. \quad (5.22)$$

Безмассовые амплитуды для четырех заряженных частиц гетеротической суперструны пропорциональны выражениям (см. [1, формула (7.4.71)]):

$$D(k, K) = \pi \frac{\Gamma(-1 - s/8 - S/2) \Gamma(-1 - t/8 - T/2) \Gamma(-1 - u/8 - U/2)}{\Gamma(1 + s/8) \Gamma(1 + t/8) \Gamma(1 + u/8)}, \quad (5.23) \\ s + t + u = 0, \quad S + T + U = -8.$$

Здесь (S, T, U) – аналоги переменных Мандельстама для четырехмерных векторов K .

Докажем равенство

$$D(k, K) = \frac{4}{t} \mathbf{B}_\omega \left(-\frac{1}{2} - \frac{s}{8} - \frac{S}{4}, 1 + \frac{S}{2}; \right. \\ \left. -\frac{t}{8} - \frac{T}{4}, 2 + \frac{T}{2}; -\frac{1}{2} - \frac{u}{8} - \frac{U}{4}, 1 + \frac{U}{2} \right). \quad (5.24)$$

Преобразуя правую часть равенства (5.23) к виду

$$\frac{8\pi}{t} \frac{\Gamma(-1 - s/8 - S/2)}{\Gamma(1 + s/8)} \frac{\Gamma(-1 - t/8 - T/2)}{\Gamma(t/8)} \frac{\Gamma(-1 - u/8 - U/2)}{\Gamma(1 + u/8)} \quad (5.25)$$

и вводя обозначения

$$\alpha = -1/2 - s/8 - S/4, \quad \beta = -t/8 - T/4, \quad \gamma = -1/2 - u/8 - U/4, \\ \alpha + \beta + \gamma = 1, \quad (5.26)$$

$$\nu = 1 + S/2, \quad \mu = 2 + T/2, \quad \eta = 1 + U/2, \quad \nu + \mu + \eta = 0, \quad (5.27)$$

представим выражение (5.25) в форме

$$\frac{8\pi}{t} \frac{\Gamma(\alpha - \nu/2) \Gamma(\beta - \mu/2) \Gamma(\gamma - \eta/2)}{\Gamma(1 - \alpha - \nu/2) \Gamma(1 - \beta - \mu/2) \Gamma(1 - \gamma - \eta/2)}. \quad (5.28)$$

Прямые преобразования выражения (5.28) с использованием формул (4.1) и (5.23) приводят к равенству

$$D(k, K) = \frac{4}{t} \mathbf{B}_\omega(\alpha, \nu; \beta, \mu; \gamma, \eta).$$

Отсюда, возвращаясь к старым переменным (5.26) и (5.27), получим равенство (5.24).

Заметим, что амплитуда $D(k, K)$ симметрична относительно перестановок аргументов (s, S) , (t, T) и (u, U) . Поэтому можно ограничиться следующими допустимыми значениями целочисленных параметров (S, T, U) , $S + T + U = -8$ (см. [1]):

$$1) \quad S = -8, \quad T = 0, \quad U = 0; \quad (5.29_1)$$

$$2) \quad S = -6, \quad T = -2, \quad U = 0; \quad (5.29_2)$$

$$3) \quad S = -4, \quad T = -4, \quad U = 0; \quad (5.29_3)$$

$$4) \quad S = -4, \quad T = -2, \quad U = -2. \quad (5.29_4)$$

Соответствующие значения амплитуды D при $s + t + u = 0$ равны:

$$D_1(s, t, u) = \frac{4}{t} \mathbf{B}_\omega \left(-\frac{s}{8} + \frac{3}{2}, -3; -\frac{t}{8}, 2; -\frac{u}{8} - \frac{1}{2}, 1 \right),$$

$$D_2(s, t, u) = \frac{4}{t} \mathbf{B}_\omega \left(-\frac{s}{8} + 1, -2; -\frac{t}{8} + \frac{1}{2}, 1; -\frac{u}{8} - \frac{1}{2}, 1 \right),$$

$$D_3(s, t, u) = \frac{4}{t} \mathbf{B}_\omega \left(-\frac{s}{8} + \frac{1}{2}, -1; -\frac{t}{8} + 1, 0; -\frac{u}{8} - \frac{1}{2}, 1 \right),$$

$$D_4(s, t, u) = \frac{4}{t} \mathbf{B}_\omega \left(-\frac{s}{8} + \frac{1}{2}, -1; -\frac{t}{8} + \frac{1}{2}, 1; -\frac{u}{8}, 0 \right).$$

В терминах обобщенной амплитуды Вирасоро эти выражения принимают при $s + t + u = 0$ следующий вид:

$$\begin{aligned} D_1(s, t, u) &= \frac{4}{t} W_{-321}(s - 20, t - 8, u - 4), \\ D_2(s, t, u) &= \frac{4}{t} W_{-211}(s - 16, t - 12, u - 4), \\ D_3(s, t, u) &= \frac{4}{t} W_{-101}(s - 12, t - 16, u - 4), \\ D_4(s, t, u) &= \frac{4}{t} W_{-110}(s - 12, t - 12, u - 8). \end{aligned}$$

Безмассовая четырехчастичная амплитуда замкнутой суперструны (см. [1, формула (7.4.56)]) пропорциональна функции

$$C(s, t, u) = -\pi \frac{\Gamma(-s/8)\Gamma(-t/8)\Gamma(-u/8)}{\Gamma(1+s/8)\Gamma(1+t/8)\Gamma(1+u/8)}, \quad s + t + u = 0. \quad (5.30)$$

Преобразовывая правую часть (5.30) к виду

$$C(s, t, u) = \frac{8\pi}{t} \frac{\Gamma(-s/8)\Gamma(1-t/8)\Gamma(-u/8)}{\Gamma(1+s/8)\Gamma(1+t/8)\Gamma(1+u/8)}$$

и пользуясь формулами (5.23) и (5.24) при $S = U = -2$, $T = -4$, получим

$$\begin{aligned} C(s, t, u) &= \frac{8}{t} D(k, \{S = U = -2, T = -4\}) \\ &= \frac{32}{t^2} \mathbf{B}_\omega \left(-\frac{s}{8}, 1 - \frac{t}{8}, -\frac{u}{8} \right), \quad s + t + u = 0, \end{aligned} \quad (5.31)$$

или в терминах амплитуды Вирасоро

$$C(s, t, u) = \frac{32}{t^2} W(s - 8, t - 16, u - 8), \quad s + t + u = 0. \quad (5.32)$$

Такая же формула справедлива и для четырехчастичных состояний, принадлежащих к мультиплету супергравитации (см. [1, формула (7.4.60)]).

Четырехтахионная амплитуда гетеротической суперструны с импульсами k_L (см. [1, формула (7.4.69)]) задается выражением

$$A_4(k, K) = \mathbf{B}(-1 - s/8 - S/2, -1 - t/8 - T/2). \quad (5.33)$$

Для возможных значений (S, T, U) (5.29) в силу (5.9) при $s + t + u = 0$ имеем

$$\begin{aligned}
 A_4^1(s, t, u) &= 2\mathbf{B}_\infty \left(3 - \frac{s}{8}, -1 - \frac{t}{8}, -1 - \frac{u}{8} \right) \left(1 - \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi s}{16} \right) \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi t}{16} \right) \right) \\
 &= 2V \left(-8 + \frac{s}{4}, \frac{t}{4}, \frac{u}{4} \right) \left(1 - \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi s}{16} \right) \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi t}{16} \right) \right), \\
 A_4^2(s, t, u) &= 2\mathbf{B}_\infty \left(2 - \frac{s}{8}, -\frac{t}{8}, -1 - \frac{u}{8} \right) \left(1 - \operatorname{tg} \left(\frac{\pi s}{16} \right) \operatorname{tg} \left(\frac{\pi t}{16} \right) \right) \\
 &= 2V \left(-6 + \frac{s}{4}, -2 + \frac{t}{4}, \frac{u}{4} \right) \left(1 - \operatorname{tg} \left(\frac{\pi s}{16} \right) \operatorname{tg} \left(\frac{\pi t}{16} \right) \right), \\
 A_4^3(s, t, u) &= 2\mathbf{B}_\infty \left(1 - \frac{s}{8}, 1 - \frac{t}{8}, -1 - \frac{u}{8} \right) \left(1 - \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi s}{16} \right) \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi t}{16} \right) \right) \\
 &= 2V \left(-4 + \frac{s}{4}, -4 + \frac{t}{4}, \frac{u}{4} \right) \left(1 - \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi s}{16} \right) \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi t}{16} \right) \right), \\
 A_4^4(s, t, u) &= 2\mathbf{B}_\infty \left(1 - \frac{s}{8}, -\frac{t}{8}, -\frac{u}{8} \right) \left(1 - \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi s}{16} \right) \operatorname{tg} \left(\frac{\pi t}{16} \right) \right) \\
 &= 2V \left(-4 + \frac{s}{4}, -2 + \frac{t}{4}, -2 + \frac{u}{4} \right) \left(1 - \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi s}{16} \right) \operatorname{tg} \left(\frac{\pi t}{16} \right) \right).
 \end{aligned}$$

Список литературы

1. Грин М., Шварц Дж., Виттен Э. Теория суперструн. Т. 1, 2. М.: Мир, 1990.
2. Brekke L., Freund P. G. O. p -Adic Numbers in Physics // Phys. Rep. Sect. Phys. Lett. 1993. V. 233. № 1. P. 1–66.
3. Kawai H., Lewellen D. C., Tye S.-H. A relation between tree amplitudes of closed and open strings // Nucl. Phys. B. 1986. V. 269. P. 1–23.
4. Вейль А. Основы теории чисел. М.: Мир, 1967.
5. Freund P. G. O., Witten E. Adelic String Amplitudes // Phys. Lett. B. 1987. V. 199. P. 191–194.
6. Vladimirov V. S. On the Freund-Witten Adelic Formula for Veneziano Amplitudes // Lett. Math. Phys. 1993. V. 28. P. 123–131.
7. Vladimirov V. S. Adelic formulas for gamma- and beta-functions in algebraic number fields // p -Adic Functional Analysis. Lect. Notes Pure and Appl. Math. V. 192. N. Y.: M. Dekker, 1997. P. 383–395.
8. Владимиров В. С. Адельные формулы для гамма- и бета-функций одноклассных квадратичных полей; применения к 4-частичным струнным амплитудам рассеяния // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. 2000. Т. 248. С. 76–89.
9. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматлит, 1958.
10. Гельфанд И. М., Граев М. М., Пятецкий-Шапиро И. И. Теория представлений и автоморфные функции. М.: Наука, 1966.
11. Владимиров В. С., Волович И. В., Зеленов Е. И. p -адический анализ и математическая физика. М.: Наука, 1994.
12. Борович З. И., Шафаревич И. Р. Теория чисел. М.: Наука, 1985.
13. Schikhof W. H. Ultrametric Calculus: An Introduction to p -Adic Analysis. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1984.
14. Коблиц Н. p -адические числа, p -адический анализ и дзета-функция. М.: Мир, 1982.
15. Vladimirov V. S. Some problems of analysis on the field of p -adic numbers // Integral Transforms and Special Functions. 1998. V. 6. № 1–4. P. 111–121.
16. Владимиров В. С. Обобщенные функции над полем p -адических чисел // УМН. 1988. Т. 43. № 5. С. 17–53.