Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Галатенко, Об орторекурсивном разложении по некоторой системе функций,
Изв. РАН. Сер. матем., 2002, том 66, выпуск 1, 59–70

DOI: <https://doi.org/10.4213/im371>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 14:46:24

УДК 517.518+517.982

В. В. Галатенко

Об орторекурсивном разложении по некоторой системе функций

Обобщение равенства Парсеваля, приведенное в [2], трактуется с точки зрения систем разложения, для чего приведены определение и основные свойства введенных Т. П. Лукашенко орторекурсивных систем разложения и доказана эквивалентность результата Стечкиных сходимости орторекурсивного разложения по некоторой системе (системе сигнумов) любого элемента из $L^2[0, 1]$ к самому этому элементу. Применяемый подход позволяет исследовать вопросы равномерной сходимости, поточечной сходимости и сходимости в метриках L^p разложений по системе сигнумов функций не только из $L^2[0, 1]$, но и из $L^p(X, \Xi, \mu)$, где (X, Ξ, μ) – произвольное измеримое пространство с конечной мерой. Доказано, что для функций из L^p , $1 \leq p \leq \infty$, имеет место сходимость в метрике L^p , для непрерывных функций – равномерная сходимость, для существенно неограниченных – поточечная сходимость орторекурсивного разложения по системе сигнумов к разлагаемому элементу.

Библиография: 6 наименований.

§ 1. Введение

В [2] доказывается следующий результат. Пусть $f(x) \in L^2[0, 1]$ – действительная функция. Определим последовательности $\{\tilde{c}_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\tilde{r}_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ следующим образом:

$$\begin{aligned}\tilde{r}_0(x) &= f(x), \\ \tilde{c}_1 &= \int_0^1 |\tilde{r}_0(x)| dx, \quad \tilde{r}_1(x) = |\tilde{r}_0(x)| - \tilde{c}_1, \\ \tilde{c}_2 &= \int_0^1 |\tilde{r}_1(x)| dx, \quad \tilde{r}_2(x) = |\tilde{r}_1(x)| - \tilde{c}_2\end{aligned}$$

и т. д. Если уже определено $\tilde{r}_n$, то положим

$$\tilde{c}_{n+1} = \int_0^1 |\tilde{r}_n(x)| dx, \quad \tilde{r}_{n+1}(x) = |\tilde{r}_n(x)| - \tilde{c}_{n+1}.$$

Тогда справедливо равенство

$$\int_0^1 f^2(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{c}_k^2. \quad (1)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00420).

Для трактовки приведенного результата с точки зрения систем разложения приведем определение и основные свойства введенных Т. П. Лукашенко орторекурсивных систем разложения, а также некоторые факты из теории Pure Greedy Algorithms – “жадных алгоритмов” (см. [5], [6]).

1. Орторекурсивные системы разложения. Пусть H – гильбертово пространство над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, $f \in H$, $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H \setminus \{0\}$. Определим последовательности $\{r_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} r_0 &= f, \\ c_1 &= \frac{(r_0, e_1)}{(e_1, e_1)}, \quad r_1 = r_0 - c_1 e_1 = f - \sum_{k=1}^1 c_k e_k, \\ c_2 &= \frac{(r_1, e_2)}{(e_2, e_2)}, \quad r_2 = r_1 - c_2 e_2 = f - \sum_{k=1}^2 c_k e_k \end{aligned}$$

и т. д. Если уже определено r_n , то положим

$$c_{n+1} = \frac{(r_n, e_{n+1})}{(e_{n+1}, e_{n+1})}, \quad r_{n+1} = r_n - c_{n+1} e_{n+1} = f - \sum_{k=1}^{n+1} c_k e_k.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Формальный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ будем называть *орторекурсивным разложением f по системе $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$* .

Отметим, что если система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ ортогональна, то орторекурсивное разложение по ней совпадает с разложением в обычный ряд Фурье по этой системе.

ТЕОРЕМА 1 [3]. *Для орторекурсивных систем разложения справедливы следующие утверждения:*

- (i) $\forall n \in \mathbb{N} \quad \|f - \sum_{k=1}^n c_k e_k\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n |c_k|^2 \|e_k\|^2$ (тождество Бесселя);
- (ii) $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \|e_k\|^2 \leq \|f\|^2$ (неравенство Бесселя);
- (iii) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ сходится к f тогда и только тогда, когда $\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \|e_k\|^2$ (эквивалентность сходимости разложения равенству Парсеваля);
- (iv) $c_k e_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ (стремление к нулю членов разложения).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства тождества Бесселя применим индукцию по n . При $n = 1$

$$\|f - c_1 e_1\|^2 = \|f\|^2 - \bar{c}_1(f, e_1) - c_1(e_1, f) + |c_1|^2 \|e_1\|^2 = \|f\|^2 - |c_1|^2 \|e_1\|^2$$

и утверждение справедливо. Предположим теперь, что утверждение доказано для $n = m$. Докажем его для $n = m + 1$:

$$\begin{aligned} \left\| f - \sum_{k=1}^{m+1} c_k e_k \right\|^2 &= \|r_m - c_{m+1} e_{m+1}\|^2 = \|r_m\|^2 - |c_{m+1}|^2 \|e_{m+1}\|^2 \\ &= \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{m+1} |c_k|^2 \|e_k\|^2. \end{aligned}$$

Тождество Бесселя тем самым доказано.

Неравенство Бесселя и эквивалентность равенства Парсеваля сходимости орторекурсивного разложения к разлагаемому элементу являются простыми следствиями тождества Бесселя. Стремление к нулю членов разложения непосредственно следует из неравенства Бесселя.

Таким образом, теорема доказана.

Отметим, что систему $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ можно выбирать как единую для всех $f \in H$ (именно это делается в [3], [4]), так и зависящую от разлагаемого элемента. В последнем случае представляется разумным выбирать следующий элемент e_{n+1} по уже известному остатку r_n . Примером такого орторекурсивного разложения являются Pure Greedy Algorithms (PGA) – “жадные алгоритмы” (см. [5], [6]).

Дадим определение PGA-разложения. Пусть H – гильбертово пространство над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, $f \in H$, $D \subset H \setminus \{0\}$. Определим последовательности $\{r_n\}_{n=0}^\infty$, $\{c_n\}_{n=1}^\infty$ и $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ следующим образом. Положим

$$r_0 = f;$$

найдем $e_1 \in D$ такое, что

$$\left\| r_0 - \frac{(r_0, e_1)}{(e_1, e_1)} e_1 \right\| = \inf_{e \in D} \left\| r_0 - \frac{(r_0, e)}{(e, e)} e \right\|.$$

Положим

$$c_1 = \frac{(r_0, e_1)}{(e_1, e_1)}, \quad r_1 = r_0 - c_1 e_1;$$

найдем $e_2 \in D$ такое, что

$$\left\| r_1 - \frac{(r_1, e_2)}{(e_2, e_2)} e_2 \right\| = \inf_{e \in D} \left\| r_1 - \frac{(r_1, e)}{(e, e)} e \right\|.$$

Положим

$$c_2 = \frac{(r_1, e_2)}{(e_2, e_2)}, \quad r_2 = r_1 - c_2 e_2$$

и т. д. Если уже определено r_n , то найдем $e_{n+1} \in D$ такое, что

$$\left\| r_n - \frac{(r_n, e_{n+1})}{(e_{n+1}, e_{n+1})} e_{n+1} \right\| = \inf_{e \in D} \left\| r_n - \frac{(r_n, e)}{(e, e)} e \right\|.$$

Положим

$$c_{n+1} = \frac{(r_n, e_{n+1})}{(e_{n+1}, e_{n+1})}, \quad r_{n+1} = r_n - c_{n+1} e_{n+1}.$$

(Если $\inf_{e \in D} \left\| r_n - \frac{(r_n, e)}{(e, e)} e \right\|$ реализуется на нескольких элементах, то в качестве e_{n+1} выбираем любой из них; если $\inf_{e \in D} \left\| r_n - \frac{(r_n, e)}{(e, e)} e \right\|$ не достигается, то будем говорить, что PGA-разложение f по системе D неосуществимо.)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Формальный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ (в случае осуществимости PGA-разложения) будем называть *PGA-разложением f по системе D* .

Сформулируем один из основных результатов теории PGA-разложений – теорему Джоунса (доказательство см. в [5]).

ТЕОРЕМА (Джоунса). Пусть линейная оболочка D всюду плотна в H . Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$, являющийся результатом PGA-разложения f по системе D (в случае осуществимости PGA-разложения), сходится к f .

2. Система сигнумов. Пусть далее (X, Ξ, μ) – произвольное измеримое пространство с конечной мерой, $H = L^2(X, \Xi, \mu)$ – пространство действительных или комплекснозначных функций, нигде не обращающихся в бесконечность.

Напомним, что $\text{sgn}(z)$ для $z \in \mathbb{C}$ определяется следующим образом:

$$\text{sgn}(z) = \begin{cases} \frac{z}{|z|}, & z \neq 0, \\ 1, & z = 0 \end{cases}$$

(все дальнейшие результаты останутся верными, если sgn в нуле переопределить произвольным числом, по модулю равным единице).

Зафиксируем некоторый элемент $f(x) \in H$. Определим последовательности $\{r_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{e_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\begin{aligned} r_0(x) &= f(x), \\ e_1(x) &= \text{sgn}(r_0(x)), \quad c_1 = \frac{(r_0, e_1)}{(e_1, e_1)} = \frac{\int_X |r_0(x)| dx}{\mu(X)}, \quad r_1(x) = r_0(x) - c_1 e_1(x), \\ e_2(x) &= \text{sgn}(r_1(x)), \quad c_2 = \frac{(r_1, e_2)}{(e_2, e_2)} = \frac{\int_X |r_1(x)| dx}{\mu(X)}, \quad r_2(x) = r_1(x) - c_2 e_2(x) \end{aligned}$$

и т. д. Если уже определено r_n , то положим

$$\begin{aligned} e_{n+1}(x) &= \text{sgn}(r_n(x)), \quad c_{n+1} = \frac{(r_n, e_{n+1})}{(e_{n+1}, e_{n+1})} = \frac{\int_X |r_n(x)| dx}{\mu(X)}, \\ r_{n+1}(x) &= r_n(x) - c_{n+1} e_{n+1}(x) = \text{sgn}(r_n(x))(|r_n(x)| - c_{n+1}). \end{aligned} \quad (2)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Формальный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k(x)$ будем называть *орторекурсивным разложением f по системе сигнумов*.

Чтобы подчеркнуть, о разложении какой функции идет речь, будем иногда вместо $r_n(x)$ и c_n писать $r_n(x; f)$ и $c_n(f)$ соответственно.

Для упрощения формул далее будем считать $\mu(X) = 1$ (для этого перейдем от меры $\mu(\cdot)$ к нормированной мере $\frac{\mu(\cdot)}{\mu(X)}$).

Заметим, что орторекурсивное разложение по системе сигнумов является примером PGA-разложений. Действительно, рассмотрим систему

$$D = \{e(x) \in L^2(X, \Xi, \mu) : |e(x)| \equiv 1\}.$$

Тогда для любого целого неотрицательного n имеем

$$\begin{aligned} \forall e \in D \quad \left\| r_n - \frac{(r_n, e)}{(e, e)} e \right\|_2^2 &= \|r_n\|_2^2 - \left| \int_X r_n(x) \overline{e(x)} dx \right|^2 \\ &\geq \|r_n\|_2^2 - \left(\int_X |r_n(x)| dx \right)^2 = \|r_n\|_2^2 - \left(\int_X r_n(x) \overline{\operatorname{sgn}(r_n(x))} dx \right)^2, \end{aligned}$$

т. е. $\inf_{e \in D} \left\| r_n - \frac{(r_n, e)}{(e, e)} e \right\|_2$ всегда достигается, и в качестве e_{n+1} в PGA-разложении можно выбирать $e_{n+1}(x) = \operatorname{sgn}(r_n(x))$ (в частности, PGA-разложение по системе D осуществимо для любого $f \in L^2(X, \Xi, \mu)$).

Линейная оболочка D всюду плотна в $L^2(X, \Xi, \mu)$, отсюда по теореме Джоунса имеем, что орторекурсивное разложение любого элемента $f \in L^2(X, \Xi, \mu)$ по системе сигнумов сходится к f в L^2 .

Вернемся к работе [2]. Оказывается, что в ней, в сущности, рассматривается орторекурсивное разложение по системе сигнумов. Действительно, $|r_0(x)| \equiv |\tilde{r}_1(x)|$, $c_1 = \tilde{c}_1$, $|r_1(x)| \equiv |r_0(x)| - c_1 \equiv |\tilde{r}_1(x)|$ и т. д. В результате (формально – по индукции) получаем, что $c_n = \tilde{c}_n$ для всех натуральных n , $|r_n(x)| \equiv |\tilde{r}_n(x)|$ для всех целых неотрицательных n . Таким образом, (1) можно трактовать как равенство Парсеваля для орторекурсивного разложения по системе сигнумов (эквивалентное по теореме 1 уже полученной из теоремы Джоунса сходимости в L^2 разложения к разлагаемому элементу).

Отметим, что так определенное орторекурсивное разложение по системе сигнумов можно рассматривать и для функций $f \in L^1(X, \Xi, \mu)$, что и будет сделано. Именно в этом (более общем) случае будут полностью исследованы вопросы поточечной сходимости, равномерной сходимости и сходимости в метриках L^p данного разложения.

§ 2. Свойства разложений по системе сигнумов

1. Формулировки основных теорем. Далее запись $f \in L^p(X, \Xi, \mu)$, $1 \leq p \leq \infty$, будет обозначать не класс эквивалентности функций из $L^p(X, \Xi, \mu)$, а любую (фиксированную) функцию – представитель данного класса.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f(x) \in L^1(X, \Xi, \mu)$. Тогда коэффициенты c_n орторекурсивного разложения $f(x)$ по системе сигнумов стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$ (а члены разложения $c_n e_n(x)$ при $n \rightarrow \infty$ сходятся к нулю равномерно на X).

ТЕОРЕМА 3. Пусть $f \in L^\infty(X, \Xi, \mu)$ и для любых $x \in X$ и $\varepsilon > 0$ существует $E \subset X$ такое, что E измеримо, $\mu(E) > 0$ и для любого $y \in E$ выполнено неравенство $||f(x)| - |f(y)|| < \varepsilon$. Тогда орторекурсивное разложение f по системе сигнумов сходится к f равномерно на X .

Отметим, что наложенное дополнительное требование существенно. Для проверки этого достаточно взять в качестве измеримого пространства отрезок $[0, 1]$ с обычной мерой Лебега, а в качестве разлагаемой функции – функцию Дирихле. В случае такого измеримого пространства дополнительное требование автоматически выполняется для функций, модуль которых непрерывен, и, значит, для самих непрерывных функций.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $f \in L^1(X, \Xi, \mu) \setminus L^\infty(X, \Xi, \mu)$. Тогда орторекурсивное разложение f по системе сигнумов сходится к f в каждой точке $x \in X$. Более того, для любого положительного числа α сходимость на множестве $E_\alpha = \{x \in X : |f(x)| < \alpha\}$ равномерна.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $f \in L^p(X, \Xi, \mu)$, $1 \leq p \leq \infty$. Тогда орторекурсивное разложение f по системе сигнумов сходится к f в метрике L^p .

2. Основные леммы. В этом пункте формулируются и доказываются леммы, на которых строится доказательство сформулированных выше теорем. В сущности, эти леммы взяты из работы [2] (и лишь немного переформулированы для упрощения их применения в нашей ситуации).

Далее $f(x) \in L^1(X, \Xi, \mu)$, $\sum_{k=1}^\infty c_k e_k(x)$ – орторекурсивное разложение f по системе сигнумов, n – целое неотрицательное число, $x \in X$, $r_n(x) = f(x) - \sum_{k=1}^n c_k e_k(x)$ – n -й остаток разложения. Для натуральных n через $\mathbf{c}(n)$ будем обозначать $\sup_{k \geq n} c_k$ (запись корректна, так как в случае разложения по системе сигнумов коэффициенты c_n являются действительными неотрицательными числами).

ЛЕММА 1. Пусть m – целое неотрицательное число, $m > n$ и $|r_n(x)| \geq \sum_{k=n+1}^m c_k$. Тогда

$$r_m(x) = \operatorname{sgn}(r_n(x)) \left(|r_n(x)| - \sum_{k=n+1}^m c_k \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства этого утверждения достаточно провести индукцию по m , учитывая равенство (2).

ЛЕММА 2. Пусть m – целое неотрицательное число, $m > n$ и $|r_n(x)| < \sum_{k=n+1}^m c_k$. Тогда для любого $l \geq m$ выполнено неравенство $|r_l(x)| \leq \mathbf{c}(n+1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Найдем $\tilde{m}$, $n \leq \tilde{m} < m$, такое, что

$$\sum_{k=n+1}^{\tilde{m}} c_k \leq |r_n(x)| < \sum_{k=n+1}^{\tilde{m}+1} c_k$$

(как обычно, пустую сумму считаем равной нулю). Тогда по лемме 1

$$|r_{\tilde{m}}(x)| = \left| |r_n(x)| - \sum_{k=n+1}^{\tilde{m}} c_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\tilde{m}+1} c_k - \sum_{k=n+1}^{\tilde{m}} c_k \leq c_{\tilde{m}+1} \leq \mathbf{c}(n+1).$$

По индукции докажем, что для любого $l \geq \tilde{m}$ (и, значит, для любого $l \geq m$) $|r_l(x)| \leq \mathbf{c}(n+1)$. При $l = \tilde{m}$ утверждение уже проверено. Предположим, что оно верно для $l = s$ и докажем его для $l = s+1$:

$$|r_{s+1}(x)| = \left| |r_s(x)| - c_{s+1} \right| \leq \max\{|r_s(x)|, c_{s+1}\} \leq \mathbf{c}(n+1).$$

Таким образом, утверждение леммы доказано.

ЛЕММА 3. Пусть для любого y из измеримого множества E , $\mu(E) > 0$, выполнено неравенство $|r_n(y)| \geq M$ (M – некоторое действительное неотрицательное число). Тогда $\sum_{k=n+1}^{\infty} c_k \geq M$ (считается, как обычно, что если ряд $\sum_{k=n+1}^{\infty} c_k$ расходится, то утверждение леммы выполнено).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\sum_{k=n+1}^{\infty} c_k = M - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Тогда по лемме 1 для всех $m > n$ и $y \in E$ имеем

$$|r_m(y)| = |r_n(y)| - \sum_{k=n+1}^m c_k \geq |r_n(y)| - \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k \geq M - (M - \varepsilon) = \varepsilon.$$

Отсюда для любого $k \geq n$ выполнено неравенство

$$c_{k+1} = \int_X |r_k(x)| dx \geq \varepsilon \cdot \mu(E) > 0.$$

В результате ряд $\sum_{k=n+1}^{\infty} c_k$ расходится, что противоречит сделанному предположению.

3. Доказательство теоремы 2. В случае $f \in L^2(X, \Xi, \mu)$ утверждение теоремы 2 непосредственно следует из теоремы 1. В общем случае, однако, доказательство теоремы 2 нетривиально. В процессе его проведения будет попутно доказана оценка сильного типа для остатков разложения по системе сигнумов и получена оценка скорости сходимости.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $f(x) \in L^p(X, \Xi, \mu)$, $1 \leq p \leq \infty$. Тогда для любого целого неотрицательного n выполнено неравенство $\|r_n\|_p \leq 2\|f\|_p$ (т. е. для остатков разложения r_n при всех p , $1 \leq p \leq \infty$, выполнена оценка сильного типа с константой, равной двойке).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим случай $p < \infty$ (случай $p = \infty$ рассмотрен ниже, в замечании 1). Предположим, что $f(x)$ представлена в виде $f(x) = \hat{f}(x) + g(x)$, где $|\hat{f}(x)| \equiv \hat{c} = \text{const}$. Индукцией по n покажем, что $r_n(x)$ представим в виде $r_n(x) = \hat{r}_n(x) + g_n(x)$, где $|\hat{r}_n(x)| \equiv \hat{c}_n = \text{const}$, $\|g_n\|_p \leq \|g\|_p$. Для $n = 0$ утверждение сразу вытекает из предположения. Пусть утверждение доказано для $n = m$, докажем его для $n = m + 1$. Заметим, что

$$\begin{aligned} r_{m+1}(x) &= \text{sgn}(r_{m+1}(x)) |r_{m+1}(x)| \\ &= \text{sgn}(r_{m+1}(x)) |\hat{c}_m - c_{m+1}| + \text{sgn}(r_{m+1}(x)) (|r_{m+1}(x)| - |\hat{c}_m - c_{m+1}|), \end{aligned}$$

т. е. достаточно доказать, что $\| |r_{m+1}(x)| - |\hat{c}_m - c_{m+1}| \|_p \leq \|g\|_p$. Действительно,

$$\begin{aligned} \left| |r_{m+1}(x)| - |\hat{c}_m - c_{m+1}| \right| &= \left| |r_m(x) - c_{m+1}| - |\hat{c}_m - c_{m+1}| \right| \\ &\leq \left| (|r_m(x) - c_{m+1}| - (\hat{c}_m - c_{m+1})) \right| \leq \left| |\hat{r}_m(x) + g_m(x)| - |\hat{r}_m(x)| \right| \\ &\leq \left| (\hat{r}_m(x) + g_m(x)) - \hat{r}_m(x) \right| \leq |g_m(x)|. \end{aligned}$$

Осталось проинтегрировать приведенную оценку и воспользоваться предположением индукции. Таким образом, утверждение о представимости остатков $r_n(x)$ в указанном виде доказано.

Теперь покажем, что если $r_n(x) = \hat{r}_n(x) + g_n(x)$, где $|\hat{r}_n(x)| \equiv \hat{c}_n = \text{const}$, то $\|r_{n+1}\|_p \leq 2\|g_n\|_p$. Действительно, учитывая, что $\mu(X) = 1$, имеем

$$\begin{aligned} |c_{n+1} - \hat{c}_n| &= \left| \int_X |r_n(x)| dx - \int_X \hat{c}_n dx \right| \leq \int_X ||r_n(x)| - \hat{c}_n| dx \\ &= \int_X ||\hat{r}_n(x) + g_n(x)| - |\hat{r}_n(x)|| dx \leq \int_X |g_n(x)| dx = \|g_n\|_1 \leq \|g_n\|_p, \end{aligned}$$

а отсюда

$$\begin{aligned} |r_{n+1}(x)| &= ||r_n(x)| - c_{n+1}| \leq ||\hat{r}_n(x) + g_n(x)| - \hat{c}_n| + |\hat{c}_n - c_{n+1}| \\ &\leq ||\hat{r}_n(x) + g_n(x)| - |\hat{r}_n(x)|| + \|g_n\|_p \leq |g_n(x)| + \|g_n\|_p. \end{aligned}$$

Проинтегрируем эту оценку и воспользуемся неравенством треугольника. В результате получим

$$\|r_{n+1}\|_p \leq \| |g_n| + \|g_n\|_p \|_p \leq 2\|g_n\|_p.$$

Для завершения доказательства теоремы осталось заметить, что $f(x)$ представима в виде $f(x) = 0 + f(x)$.

СЛЕДСТВИЕ 1. При $p = 1$ утверждение теоремы 6 можно переписать в следующем виде: $c_k \leq 2\|f\|_1$ при всех натуральных k .

СЛЕДСТВИЕ 2. В силу следствия 1 и единообразия процесса разложения по системе сигнумов для любого натурального n и любого целого m , $m \geq n$, выполняется неравенство $c_m \leq 2c_n$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если $p = 2$ или $p = \infty$, то в теореме 6 постоянную, равную 2, можно заменить на постоянную, равную 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае $p = 2$ утверждение следует из тождества Бесселя для орторекурсивных систем разложения. В случае $p = \infty$ достаточно воспользоваться тем, что если $|r_n(x)| \leq M$ почти всюду, то $c_{n+1} \leq M$ и

$$|r_{n+1}(x)| = ||r_n(x)| - c_{n+1}| \leq \max\{|r_n(x)|, M\} \leq M$$

для почти всех $x \in X$, и применить индукцию по n . Замечание доказано.

Получим оценку на скорость сходимости орторекурсивного разложения по системе сигнумов для существенно ограниченных функций.

Предположим, что $M = \text{ess sup}_X |f(\cdot)| = 1$. Тогда имеет место тривиальная оценка

$$\int_X |f(x)|^2 dx \leq \int_X |f(x)| dx.$$

Из тождества Бесселя для $n = 1$ имеем

$$\begin{aligned}\|r_1\|_2^2 &= \|f\|_2^2 - c_1^2 = \int_X |f(x)|^2 dx - \left(\int_X |f(x)| dx \right)^2 \\ &\leq \int_X |f(x)|^2 dx \cdot \left(1 - \int_X |f(x)|^2 dx \right) \leq \|f\|_2^2 (1 - \|r_0\|_2^2).\end{aligned}$$

Применяя индукцию по n , докажем, что для каждого целого неотрицательного n

$$\|r_n\|_2^2 \leq \|f\|_2^2 \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \|r_k\|_2^2) \quad (3)$$

(пустое произведение считаем равным 1). Предположим, что утверждение справедливо для $n = m$, тогда, используя единообразие орторекурсивного разложения по системе сигнумов и замечание 1 для $p = \infty$, имеем

$$\|r_{m+1}\|_2^2 \leq \|r_m\|_2^2 (1 - \|r_m\|_2^2) \leq \|f\|_2^2 \left(\prod_{k=0}^{m-1} (1 - \|r_k\|_2^2) \right) (1 - \|r_m\|_2^2).$$

Сформулированное утверждение тем самым доказано.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $M = \text{ess sup}_X |f(\cdot)| < \infty$. Тогда для каждого целого n , $n \geq 3$, справедлива оценка

$$\|r_n\|_2^2 \leq M^2 \frac{\ln n}{n}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала теорему в случае $M = 1$. Зафиксируем натуральное $n \geq 3$. Если существует целое неотрицательное m , $m < n$, такое, что $\|r_m\|_2^2 \leq \frac{\ln n}{n}$, то $\|r_n\|_2^2 \leq \frac{\ln n}{n}$ и утверждение теоремы верно. Предположим, что для всех целых неотрицательных m , $m < n$, $\|r_m\|_2^2 > \frac{\ln n}{n}$. Используя (3) и известное неравенство $(1 - \frac{1}{x})^x \leq e^{-1}$, $x \geq 1$, получаем

$$\begin{aligned}\|r_n\|_2^2 &\leq \|f\|_2^2 \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \|r_k\|_2^2) \leq \|f\|_2^2 \left(1 - \frac{\ln n}{n} \right)^n \\ &\leq \left(\left(1 - \frac{\ln n}{n} \right)^{\frac{n}{\ln n}} \right)^{\ln n} \leq e^{-\ln n} = \frac{1}{n} < \frac{\ln n}{n}.\end{aligned}$$

Рассмотрим общий случай. Можно считать, что $M > 0$ (иначе утверждение тривиально). Пусть c – положительное действительное число. Из равенства (2) индукцией по n легко вывести, что для всех целых неотрицательных n и всех $x \in X$ выполнено $r_n(x; cf) = cr_n(x; f)$. Тогда согласно уже доказанному $\left\| \frac{r_n}{M} \right\|_2^2 \leq \frac{\ln n}{n}$. Отсюда непосредственно следует утверждение теоремы.

Для доказательства теоремы 2 приведем еще одну лемму.

ЛЕММА 4. Пусть $f_1(x), f_2(x) \in L^1(X, \Xi, \mu)$, $\| |f_1| - |f_2| \|_1 \leq \gamma$, где γ – некоторое действительное положительное число. Тогда для всех натуральных n

$$\| |r_n(\cdot; f_1)| - |r_n(\cdot; f_2)| \|_1 \leq 2^n \gamma, \quad |c_n(f_1) - c_n(f_2)| \leq 2^{n-1} \gamma.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $n = 1$

$$\begin{aligned} |c_1(f_1) - c_1(f_2)| &= \left| \int_X |f_1(x)| dx - \int_X |f_2(x)| dx \right| \leq \int_X ||f_1(x)| - |f_2(x)|| dx \leq \gamma, \\ \| |r_1(\cdot; f_1)| - |r_1(\cdot; f_2)| \|_1 &\leq \| ||f_1| - c_1(f_1)| - ||f_2| - c_1(f_2)| \|_1 \\ &\leq \| (|f_1| - |f_2|) + (c_1(f_2) - c_1(f_1)) \|_1 \leq 2\gamma. \end{aligned}$$

Для завершения доказательства леммы осталось, используя единообразие разложения по системе сигнумов, провести индукцию по n .

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 2. Для $f(x) \in L^2(X, \Xi, \mu)$ и, в частности, для $f(x) \in L^\infty(X, \Xi, \mu)$ доказываемое утверждение непосредственно следует из теоремы 1. Будем далее считать $\text{ess sup}_X |f(\cdot)| = \infty$.

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Найдем натуральное $N_1 \geq 3$ такое, что

$$2\|f\|_1 \left(\frac{\ln N_1}{N_1} \right)^{\frac{1}{2}} < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Найдем $M > 2\|f\|_1$ такое, что

$$\int_{E_+} |f(x)| dx < 2^{-N_1-2} \varepsilon,$$

где $E_+ = \{x \in X : |f(x)| > M\}$.

Согласно лемме 3 существует натуральное N_2 такое, что $\sum_{k=1}^{N_2} c_k > M$. Тогда по леммам 1, 2 и следствию 1 на множестве $X \setminus E_+$ выполнено неравенство

$$|r_{N_2}(x)| \leq \mathbf{c}(1) \leq 2\|f\|_1,$$

а на множестве E_+ – неравенство

$$|r_{N_2}(x)| \leq \max\{|f(x)|, \mathbf{c}(1)\} \leq \max\{|f(x)|, 2\|f\|_1\} \leq |f(x)|.$$

Отсюда $\int_{E_+} |r_{N_2}(x)| dx < 2^{-N_1-2} \varepsilon$.

Рассмотрим $g(x) = r_{N_2}(x) \chi_{X \setminus E_+}(x)$, где $\chi_A(\cdot)$ – характеристическая функция множества A . Из построения всюду на X имеет место оценка $|g(x)| \leq 2\|f\|_1$. Тогда по теореме 7 с учетом выбора N_1 имеем

$$\| |r_{N_1}(\cdot; g)| \|_1 \leq \|r_{N_1}(\cdot; g)\|_2 \leq 2\|f\|_1 \left(\frac{\ln N_1}{N_1} \right)^{\frac{1}{2}} < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Кроме того, $\| |r_{N_2}| - |g| \|_1 = \int_{E_+} |r_{N_2}(x)| dx < 2^{-N_1-2}\varepsilon$. Применяя лемму 4, получаем

$$\begin{aligned} \|r_{N_1+N_2}\|_1 &= \| |r_{N_1}(\cdot; r_{N_2})| \|_1 \leq \| |r_{N_1}(\cdot; r_{N_2})| - |r_{N_1}(\cdot; g)| \|_1 + \|r_{N_1}(\cdot; g)\|_1 \\ &\leq 2^{N_1} \| |r_{N_2}| - |g| \|_1 + \|r_{N_1}(\cdot; g)\|_1 < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

откуда $c_{N_1+N_2+1} = \|r_{N_1+N_2}\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}$.

Для завершения доказательства стремления к нулю коэффициентов разложения c_n остается воспользоваться следствием 2, согласно которому для каждого целого $m \geq N_1 + N_2 + 1$ выполняется неравенство $c_m \leq 2c_{N_1+N_2+1} < \varepsilon$.

Равномерная на X сходимост к нулю членов разложения $c_n e_n(x)$ непосредственно следует из стремления к нулю коэффициентов разложения. Таким образом, теорема 2 доказана.

4. Доказательство теоремы 3 и теоремы 5 для случая $p = \infty$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. По теореме 2 c_n , а значит, и $\mathbf{c}(n)$ стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$. Отсюда существует n такое, что $\mathbf{c}(n+1) < \varepsilon$.

Так как $\text{ess sup}_X |f(x)| < \infty$, то $M = \text{ess sup}_X |r_n(x)| < \infty$. Из леммы 3 найдется натуральное $N > n$ такое, что для любого $m \geq N$

$$\sum_{k=n+1}^m c_k > M - \varepsilon.$$

Возьмем произвольное $m \geq N$. Если $|r_n(x)| < \sum_{k=n+1}^m c_k$, то по лемме 2 $|r_m(x)| \leq \mathbf{c}(n+1) < \varepsilon$. Используя лемму 1, получаем, что для почти всех $x \in X$ таких, что $|r_n(x)| \geq \sum_{k=n+1}^m c_k$, выполнено

$$|r_m(x)| = \left| |r_n(x)| - \sum_{k=n+1}^m c_k \right| < M - (M - \varepsilon) = \varepsilon.$$

Таким образом, теорема 5 для $p = \infty$ доказана.

Для доказательства теоремы 3 достаточно проверить, что если функция f удовлетворяет наложенному дополнительному ограничению (которое можно трактовать как непрерывность $|f(x)|$ относительно меры μ), то неравенство $|r_n(x)| \leq \text{ess sup}_X |r_n(\cdot)|$ справедливо при всех целых неотрицательных n и всех $x \in X$.

Индукцией по n легко показать, что $|r_n(x)|$ удовлетворяет наложенному дополнительному ограничению для любого целого неотрицательного n . Для этого достаточно заметить, что

$$\begin{aligned} \left| |r_{n+1}(x)| - |r_{n+1}(y)| \right| &= \left| \left| |r_n(x)| - c_{n+1} \right| - \left| |r_n(y)| - c_{n+1} \right| \right| \\ &\leq \left| (|r_n(x)| - c_{n+1}) - (|r_n(y)| - c_{n+1}) \right| \\ &= \left| |r_n(x)| - |r_n(y)| \right|. \end{aligned}$$

Но если измеримая функция g удовлетворяет наложенному дополнительному ограничению (т.е. $|g(x)|$ непрерывен относительно μ), то из определения ess sup следует, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство $|g(x)| \leq \text{ess sup}_X |g(\cdot)|$. В результате доказана и теорема 3.

5. Доказательство теоремы 4. Зафиксируем произвольное $\alpha > 0$ и возьмем любое $\varepsilon > 0$. По теореме 2 c_n , а значит, и $\mathbf{c}(n)$ стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$. Отсюда существует n такое, что $\mathbf{c}(n+1) < \varepsilon$.

Так как $\operatorname{ess\,sup}_X |f(\cdot)| = \infty$, то модуль остатка $|r_n(x)|$ существенно неограничен и по лемме 3 существует $N > n$ такое, что для каждого $m \geq N$ выполнено неравенство

$$\sum_{k=n+1}^m c_k > \alpha + \sum_{k=1}^n c_k.$$

Из неравенства треугольника для всех $x \in E_\alpha$ имеем

$$|r_n(x)| \leq \alpha + \sum_{k=1}^n c_k,$$

откуда по лемме 2 $|r_m(x)| \leq \mathbf{c}(n+1) < \varepsilon$. Теорема 4 доказана.

6. Доказательство теоремы 5. Для $p = \infty$ теорема уже была доказана, остается рассмотреть случай $1 \leq p < \infty$. Из лемм 1, 2 и следствия 1 имеем, что для всех целых неотрицательных n и всех $x \in X$

$$|r_n(x)| \leq \max\{|f(x)|, \mathbf{c}(1)\} \leq \max\{|f(x)|, 2\|f\|_1\}.$$

Таким образом, для доказательства теоремы 5 достаточно воспользоваться теоремой Лебега о предельном переходе и теоремой 4.

Список литературы

1. *Стечкин С. Б.* Избранные труды: математика. М.: Физматлит, 1998.
2. *Стечкин Б. С., Стечкин С. Б.* Среднее квадратическое и среднее арифметическое // Докл. АН СССР. 1961. Т. 137. № 2. С. 287–290.
3. *Лукашенко Т. П.* О свойствах орторекурсивных разложений по неортогональным системам // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2001. № 1. С. 6–10.
4. *Лукашенко Т. П.* Об орторекурсивных разложениях по системе Фабера–Шаудера // Современные проблемы теории функций и их приложения. Тезисы докладов 10-й Саратовской зимней школы. Саратов: Изд-во Саратовского университета, 2000. С. 83.
5. *Jones L.* A simple lemma on greedy approximation in Hilbert space and convergence rates for projection pursuit regression and neural network training // Ann. Statist. 1992. № 20. P. 608–613.
6. *Temlyakov V. N.* Weak greedy algorithms // Advances in Computational Mathematics. 2000. № 12. P. 213–227.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: galat@niisi.msk.ru.

Поступило в редакцию
26.III.2001