Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Козко, О порядке наилучшего приближения в пространствах с несимметричной нормой и знакочувствительным весом на классах дифференцируемых функций, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2002, том 66, выпуск 1, 103–132

DOI: <https://doi.org/10.4213/im373>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 15:48:24

УДК 517.518

А. И. Козко

О порядке наилучшего приближения в пространствах с несимметричной нормой и знакочувствительным весом на классах дифференцируемых функций

Рассматривается класс несимметричных норм со знакочувствительным весом. Этот класс достаточно широк; в него входят как классические нормы пространств $L_p(\mathbb{T})$, так и метрики, с помощью которых задаются односторонние приближения. Для знакочувствительных весов ϱ , $\tilde{\varrho}$ и несимметричной монотонной нормы на плоскости $\psi(u, v)$ получены оценки сверху для величин

$$E_n(BW_{\psi, \varrho, \mathbf{p}}^r(\mathbb{T}), L_{\psi, \tilde{\varrho}, \mathbf{q}}(\mathbb{T})) = \sup_{f \in BW_{\psi, \varrho, \mathbf{p}}^r(\mathbb{T})} \inf_{t \in T_n} \psi_{\tilde{\varrho}, \mathbf{q}}(f(\cdot) - t(\cdot)).$$

Для некоторых важных случаев несимметричных норм с постоянными знакочувствительными весами $\varrho = (\alpha, \beta)$ решена задача о нахождении скорости убывания величин $E_n(BW_{\psi, \varrho, \mathbf{p}}^r(\mathbb{T}), L_{\psi, \tilde{\varrho}, \mathbf{q}}(\mathbb{T}))$ при $n \rightarrow +\infty$ и фиксированном $r \in \mathbb{N}$.

Библиография: 51 наименование.

Введение

Работа посвящена экстремальной задаче наилучшего приближения 2π -периодических действительнозначных функций в несимметричных пространствах. По-видимому, первым, кто начал рассматривать пространства с несимметричными нормами, был М. Г. Крейн [1, с. 197]. Он указал на целесообразность рассмотрения таких пространств, которые естественно возникли в задаче о чебышевских ужах.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.1. Пусть B – пространство-конус (т.е. если $x, y \in B$, то и $x + y \in B$, и $\alpha x \in B$ для любого $\alpha \in \mathbb{R}_+$). Функционал $\|\cdot\|: B \rightarrow \mathbb{R}_+$ назовем *несимметричной нормой*, если справедливо:

- 1) $\|x\| \geq 0$ для любого $x \in B$;
- 2) $\|\alpha x\| = \alpha \|x\|$, $x \in B$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$;
- 3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $x, y \in B$.

Различные вопросы геометрической теории приближений в пространствах с несимметричными нормами рассматривались в работах [2]–[8].

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ (№ 99-01-00357) и INTAS-99-01080.

Интерес к задачам теории приближения в пространствах с несимметричными нормами был обусловлен развитием теории односторонних приближений. Ее основы были заложены в статьях [9] и [10], затем в работах [11]–[15] и др. (см. также [16]–[18], [19, с. 76]) были получены прямые и обратные теоремы для односторонних приближений с помощью усредненного модуля гладкости, введенного Е. П. Долженко и Е. А. Севастьяновым [20].

Выяснилось, что “мостиком” между наилучшими приближениями и наилучшими односторонними приближениями оказались приближения в пространствах с несимметричными нормами. Этот факт заметил в 1982 г. В. Ф. Бабенко [21].

Пусть $1 \leq p, q \leq +\infty$, $\mathbb{T}$ – одномерный тор, реализованный как отрезок $[-\pi, \pi]$ с отождествленными точками $-\pi$ и π . Через $L_p(\mathbb{T})$, $1 \leq p < +\infty$, обозначим пространство суммируемых в p -й степени на $\mathbb{T}$ действительных функций с нормой

$$\|f\|_p = \|f\|_{L_p(\mathbb{T})} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Для крайнего значения $p = +\infty$ в случае, когда функция f непрерывна на $\mathbb{T}$, полагаем

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{L_\infty(\mathbb{T})} = \|f\|_{C(\mathbb{T})} = \max_{x \in \mathbb{T}} |f(x)|.$$

Как обычно, через f^+ и f^- обозначим соответственно положительную и отрицательную части функции f , т.е. $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$, $f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$. Тогда $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$, а $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$. В. Ф. Бабенко в своей работе исследовал следующие несимметричные нормы:

$$\|f\|_{(\alpha, \beta), p} = \|\alpha f^+ + \beta f^-\|_p, \quad (0.1)$$

где $\alpha, \beta > 0$, $1 \leq p \leq \infty$.

Заметим, что если $\alpha = \beta$, то $\|f\|_{(\alpha, \beta), p} = \alpha \|f\|_p$ и приближение по норме $\|f\|_{(\alpha, \beta), p}$ совпадает с обычным L_p -приближением, а в том случае, когда $\alpha \rightarrow \infty$ либо $\beta \rightarrow \infty$, возникает L_p -одностороннее приближение (см. [21]).

Это замечание породило новый всплеск интереса в 1980–1990-х годах к экстремальным задачам в несимметричных нормах (см. [22]–[28] и др.).

В 1983 г. В. Ф. Бабенко в [22] ввел, по-видимому, впервые следующие классы несимметричных норм:

$$\lambda(f) = \lambda_{p, q; \psi}(f) = \psi(\|f^+\|_p, \|f^-\|_q), \quad (0.2)$$

где $1 \leq p, q \leq \infty$, $\psi(u, v)$ – произвольная несимметричная и монотонная функция, т.е.

$$|u'| \leq |u''|, \quad |v'| \leq |v''| \implies \psi(u', v') \leq \psi(u'', v''), \quad (0.3)$$

где $\psi(u, v)$ – норма на плоскости, и доказал теорему двойственности для элементов пространства $W^r(\lambda)$ (т.е. для 2π -периодических функций f таких, что $f^{(r-1)} \in AC(\mathbb{T})$, $\lambda(f^{(r)}) = \lambda_{p, q; \psi}(f^{(r)}) \leq 1$) в несимметричной норме $\|\cdot\|_{1; \alpha, \beta}$, а также подсчитал поперечник по Колмогорову $d_{2n-1}(W^r(\lambda), L_1)$ и привел некоторые результаты для норм (0.2), которые обобщают неравенства А. Н. Колмогорова [30], Л. Хермандера [31] (см. также [32], [33]). Отметим книгу [34, § 1.4.5, § 3.3.3,

§ 5.4.4, § 7.2.6, § 8.1.6], в которой собраны результаты по различным задачам с (α, β) -несимметричной нормой (0.1).

Вопросы теории приближения в несимметричных пространствах с весами, “знакочувствительная аппроксимация”, были изучены в работах [35], [36], [47], [48] и [37]–[39].

Пусть $\varrho = (\varrho_+, \varrho_-)$, $\varrho_+(x)$ и $\varrho_-(x)$ – неотрицательные функции, которые могут принимать значения $+\infty$. Е. П. Долженко, Е. А. Севастьянов и А.-Р. К. Рамазанов использовали несимметричную норму

$$\psi_{\varrho, +\infty}(f) = \|f\|_{\varrho, C([a, b])} := \max_{x \in [a, b]} \{\varrho_+(x)f^+(x) + \varrho_-(x)f^-(x)\}. \quad (0.4)$$

Ими исследовались задачи существования и единственности элемента наилучшего приближения алгебраическими полиномами на отрезке и чебышевскими подпространствами (L – чебышевское подпространство на $[a, b]$), если каждый элемент (функция) из L , не равный тождественно нулю, имеет на $[a, b]$ не более $n - 1$ нулей, где $n = \dim L$.

ТЕОРЕМА [47]. Пусть L – чебышевское подпространство¹ на $\mathbb{T}$ и $\varrho = (\varrho_+, \varrho_-)$ – ограниченный вес на $\mathbb{T}$. Тогда для наличия у каждой функции $f \in C(\mathbb{T})$ хотя бы одного элемента наилучшего приближения $l^* \in L$ необходимо и достаточно, чтобы

$$W(\varrho, L) := \sup_{l \in L, l \neq 0} \frac{\psi_{1, +\infty}(l)}{\psi_{\varrho, +\infty}(l)} = \sup_{l \in L, l \neq 0} \frac{\|l\|_{C(\mathbb{T})}}{\|l\|_{\varrho, C(\mathbb{T})}} < +\infty. \quad (0.5)$$

Величина (0.5), введенная Е. П. Долженко и Е. А. Севастьяновым, была названа ими *свободой системы* (ϱ, L) . При помощи несимметричной нормы (0.4) в терминах свободы системы (0.5) Е. П. Долженко, Е. А. Севастьянов [48, с. 55] установили необходимые и достаточные условия существования ужей и избыточных ужей² для чебышевской системы $L = \{\phi_k(x)\}_{k=1}^n$ на отрезке $[a, b]$.

Вопросы существования и единственности в линейных пространствах с несимметричной нормой независимо от Е. П. Долженко и Е. А. Севастьянова изучал также и В. М. Тихомиров [49], который с помощью леммы об очистке дал критерий существования и единственности элемента наилучшего приближения.

Стоит отметить, что результаты Е. П. Долженко, Е. А. Севастьянова и В. М. Тихомирова относились к линейным пространствам с несимметричной нормой.

В работе будет рассматриваться следующая несимметричная норма, порождаемая обладающей свойством (0.3) функцией ψ , парой $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ элементов расширенной числовой прямой ($1 \leq p_1, p_2 \leq +\infty$) и знакочувствительным весом

¹В частности, $\mathcal{T}_n$ – множество всех тригонометрических полиномов степени не выше n – является чебышевским.

²*Ужом* для пары функций g, G , $-\infty \leq g(x) < G(x) \leq +\infty$, называется полином $z(x)$ по чебышевской системе $\{\phi_k(x)\}_{k=1}^n$, если $g(x) \leq z(x) \leq G(x)$ и имеется набор из $m = n$ точек $x_1 < x_2 < \dots < x_m$ такой, что с ростом k от 1 до m точки $M_k = (x_k, z(x_k))$ попеременно попадают то на замыкание графика $\Gamma(g)$ функции g , то на замыкание графика $\Gamma(G)$ функции G . Набор $\{x_k\}_{k=1}^m$ называется *альтернансом* ужа z . Непрерывность и конечность функций g и G не предполагается. Если для $z(x)$ существует альтернанс с $m > n$ точками, то $z(x)$ называется *избыточным ужом*.

$\varrho = (\varrho_+(x), \varrho_-(x))$ – парой произвольных неотрицательных измеримых функций ϱ_+ и ϱ_- , которые могут, вообще говоря, принимать и бесконечные значения. Эта “норма” задается формулой

$$\psi_{\varrho, \mathbf{p}}(f) = \psi_{\varrho, \mathbf{p}}(f^+, f^-) = \psi(\|\varrho_+(\cdot)f^+(\cdot)\|_{L_{p_1}(\mathbb{T})}, \|\varrho_-(\cdot)f^-(\cdot)\|_{L_{p_2}(\mathbb{T})}) \quad (0.6)$$

и, как нетрудно убедиться, содержит в себе упомянутые выше “нормы” (0.2) и (0.4).

Класс измеримых по Лебегу на $\mathbb{T}$ функций f , для которых $\psi_{\varrho, \mathbf{p}}(f) < +\infty$, обозначим $L_{\psi_{\varrho, \mathbf{p}}}(\mathbb{T})$. Таким образом, $L_{\psi_{\varrho, \mathbf{p}}}(\mathbb{T})$ – пространство-конус (из включения $f \in L_{\psi_{\varrho, \mathbf{p}}}(\mathbb{T})$, вообще говоря, не следует, что $-f \in L_{\psi_{\varrho, \mathbf{p}}}(\mathbb{T})$). В дальнейшем будем считать, что $0 \cdot (\pm\infty) = 0$, $a \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$ для любого $a > 0$.

ПРИМЕР 0.1. Положим $\varrho_+(x) \equiv \varrho_-(x) \equiv 1$. Тогда получаем несимметричную норму $\psi_{\mathbf{p}} = \psi(\|f_+\|_{p_1}, \|f_-\|_{p_2})$; см. (0.2).

ПРИМЕР 0.2. Положим $\psi(u, v) = u + v$. Тогда

$$\psi_{\varrho, \infty}(f) = \|\varrho_+(\cdot)f^+(\cdot)\|_{\infty} + \|\varrho_-(\cdot)f^-(\cdot)\|_{\infty} = \max_{x \in \mathbb{T}} \{\varrho_+(x)f^+(x) + \varrho_-(x)f^-(x)\}$$

и приходим к метрике (0.4).

ПРИМЕР 0.3. Положим $p_1 = p_2 := p$, $\varrho_+(x) = \varrho_-(x) := \varrho(x)$, $\psi(u, v) = (u^p + v^p)^{1/p}$. Тогда $\psi_{\varrho, \mathbf{p}}(f) = \|\varrho(\cdot)f(\cdot)\|_p$ и получаем обычные весовые классы $L_{\varrho, p}(\mathbb{T})$.

Введенный с помощью несимметричных норм (0.5) класс пространств $L_{\psi_{\varrho, \mathbf{p}}}(\mathbb{T})$ весьма обширен, причем значительная и, вероятно, наиболее важная его часть (см. примеры) порождается симметрическими функциями ψ , т.е. удовлетворяющими условию $\psi(u, v) = \psi(v, u)$. Основным результатом будет получен как раз для таких “норм”.

В работе исследуются количественные вопросы наилучшего приближения на классах функций в пространствах с несимметричной нормой. Через $\mathcal{T}_n$, $n \in \mathbb{N}$, обозначим множество всех тригонометрических полиномов степени не выше n . Положим $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$, $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$, $1 \leq p_1, p_2, q_1, q_2 \leq +\infty$.

Запись $f \in \text{BW}_{\psi_{\varrho, \mathbf{p}}}^r(\mathbb{T})$, $r \in \mathbb{N}$, означает, что функция f имеет $r - 1$ производную и является абсолютно непрерывной на торе $\mathbb{T}$, причем $f^{(r)} \in L_{\psi_{\varrho, \mathbf{p}}}(\mathbb{T})$ и $\|f\|_{W_{\psi_{\varrho, \mathbf{p}}}^r} := \psi_{\varrho, \mathbf{p}}(f^{(r)}) \leq 1$. Положим

$$\begin{aligned} E_n(\text{BW}_{\psi_{\varrho, \mathbf{p}}}^r(\mathbb{T}), L_{\psi_{\tilde{\varrho}, \mathbf{q}}}(\mathbb{T})) &= \sup_{f \in \text{BW}_{\psi_{\varrho, \mathbf{p}}}^r(\mathbb{T})} E_n(f, L_{\psi_{\tilde{\varrho}, \mathbf{q}}}(\mathbb{T})) \\ &= \sup_{f \in \text{BW}_{\psi_{\varrho, \mathbf{p}}}^r(\mathbb{T})} \inf_{t \in \mathcal{T}_n} \psi_{\tilde{\varrho}, \mathbf{q}}(f - t). \end{aligned} \quad (0.7)$$

Основным результатом работы является

ТЕОРЕМА 0.1. Пусть $1 \leq p_1, p_2, q_1, q_2 \leq +\infty$, $r \in \mathbb{N}$, $\psi(u, v)$ – несимметричная и монотонная норма на плоскости, удовлетворяющая условию $\psi(u, v) = \psi(v, u)$, $\varrho = (\varrho_+, \varrho_-)$, $\tilde{\varrho} = (\tilde{\varrho}_+, \tilde{\varrho}_-)$ – знакочувствительные веса,

т.е. $\varrho_+(x) \geq 0$, $\varrho_-(x) \geq 0$, $\tilde{\varrho}_+(x) \geq 0$, $\tilde{\varrho}_-(x) \geq 0$ для всех $x \in \mathbb{T}$. Тогда справедливо неравенство

$$E_n(\text{BW}_{\psi_{\varrho, \mathbf{p}}}^r(\mathbb{T}), L_{\psi_{\tilde{\varrho}, \mathbf{q}}}(\mathbb{T})) \leq 8K_r(n+1)^{-r} C_{\varrho, \tilde{\varrho}, \mathbf{p}, \mathbf{q}}(n), \quad (0.8)$$

где

$$\begin{aligned} C_{\varrho, \tilde{\varrho}, \mathbf{p}, \mathbf{q}}(n) &= \min\{C_{\varrho, \tilde{\varrho}_+, \mathbf{p}, q_1}(n), C_{\varrho, \tilde{\varrho}_-, \mathbf{p}, q_2}(n)\}, \\ C_{\varrho, \tilde{\varrho}_\pm, \mathbf{p}, q_1}(n) &= \max\{\text{JN}_{\varrho_+, \tilde{\varrho}_\pm, p_1, q_1}(n), \text{JN}_{\varrho_-, \tilde{\varrho}_\pm, p_2, q_1}(n)\}, \end{aligned}$$

а $\text{JN}_{\varrho_\pm, \tilde{\varrho}_\pm, p, q}(n) := \sup_{t \in \mathcal{T}_n} \frac{\|\tilde{\varrho}_\pm t\|_q}{\|\varrho_\pm t\|_p}$ – величины, возникающие из неравенств Джексона–Никольского, и K_r – константа Фавара.

ЗАМЕЧАНИЕ 0.1³. Для несимметричной нормы $\psi(u, v) = u + v$ в условиях теоремы 0.1 справедливо неравенство

$$E_n(\text{BW}_{\psi_{\varrho, \mathbf{p}}}^r(\mathbb{T}), L_{\psi_{\tilde{\varrho}, \mathbf{q}}}(\mathbb{T})) \leq 4K_r(n+1)^{-r} C_{\varrho, \tilde{\varrho}, \mathbf{p}, \mathbf{q}}(n),$$

где константы – те же, что и выше.

При отсутствии знакочувствительных весов, в случае $\varrho = \tilde{\varrho}$, $\varrho_+(x) = \varrho_-(x) \equiv 1$, для величин Джексона–Никольского в [46, с. 539] приведены оценки

$$\text{JN}_{1,1,p,q}(n) := \sup_{\substack{t \in \mathcal{T}_n \\ t \neq 0}} \frac{\|t\|_q}{\|t\|_p} \leq 2n^{\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)^+}, \quad p, q \in [1, +\infty]. \quad (0.9)$$

Это неравенство позволяет при отсутствии весов получать оценки сверху на величину $C_{\varrho, \tilde{\varrho}, \mathbf{p}, \mathbf{q}}(n)$.

В случаях, когда несимметричная норма $\psi_{\varrho, \mathbf{p}}$ “порождает” односторонние приближения или приближения в норме пространств $L_p(\mathbb{T})$, $L_q(\mathbb{T})$, оценка (0.8) совпадает по порядку с хорошо известными классическими результатами, которые являются точными в смысле порядка. В работе также исследуется несимметричная норма

$$\tilde{\psi}_{\varrho, \mathbf{q}}(f) := \|f(\cdot)\|_{(\alpha, \beta), \mathbf{q}} = \|\alpha f^+(\cdot)\|_{L_{q_1}(\mathbb{T})} + \|\beta f^-(\cdot)\|_{L_{q_2}(\mathbb{T})}. \quad (0.10)$$

Легко заметить, что несимметричная норма $\|\cdot\|_{(\alpha, \beta), \mathbf{q}}$ удовлетворяет условиям теоремы 0.1. Показано, что оценка наилучшего приближения в несимметричной норме $\|\cdot\|_{(\alpha, \beta), \mathbf{q}}$ точна в смысле порядка по n . Несимметричная норма (0.10) для $\alpha = \beta = 1$ исследовалась в работах [40]–[43]. В них были найдены точные порядки по n неравенств типа Джексона–Никольского для тригонометрических полиномов и целых функций экспоненциального типа в многомерном случае $\mathbb{T}^d$ ($\mathbb{R}^d$). Были найдены также точные порядки норм операторов дробного дифференцирования (случай $\mathbb{T}^d$) для тригонометрических полиномов, т.е. найдены нормы операторов $\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} : L_{(1,1), \mathbf{p}}(\mathbb{T}) \cap \mathcal{T}_n \rightarrow L_{(1,1), \mathbf{q}}(\mathbb{T})$. При изучении несимметричной нормы (0.10) будем для краткости обозначать

$$\text{BW}_{p_1, p_2}^r(\mathbb{T}) := \text{BW}_{(1,1), \mathbf{p}}^r(\mathbb{T}), \quad L_{p_1, p_2}(\mathbb{T}) := L_{(1,1), \mathbf{p}}(\mathbb{T}).$$

Теорема 0.1 позволяет получать точные по порядку оценки для наилучших приближений в пространствах с несимметричной нормой (0.10).

³Это замечание не вытекает напрямую из теоремы 0.1. Доказано замечание будет вместе с теоремой.

ТЕОРЕМА 0.2. Пусть $p_1, p_2, q_1, q_2 \in [1, +\infty]$, $r \in \mathbb{N}$, $\varrho(x) = \tilde{\varrho}(x) = (1, 1)$, $\omega = (\max\{1/p_1, 1/p_2\} - \max\{1/q_1, 1/q_2\})^+$, $\psi(u, v) = u + v$, т.е. $\psi_{\varrho, \mathbf{q}}(f) := \|f\|_{q_1, q_2} = \|f^+\|_{q_1} + \|f^-\|_{q_2}$. Тогда справедливы неравенства

$$C_r n^{-r+\omega} \leq E_{n-1}(\text{BW}_{p_1, p_2}^r(\mathbb{T}), L_{q_1, q_2}(\mathbb{T})) \leq 8K_r n^{-r+\omega},$$

где K_r – константа Фавара и

$$C_r \geq \frac{1}{108r^2}, \quad r, n \in \mathbb{N}. \quad (0.11)$$

Отметим, что $8K_r \leq 4\pi = 12.56 \dots$

Оценки снизу для наилучших приближений получены с использованием двойственности в несимметричных нормах (0.10). Наибольшая трудность состоит в нахождении функций, ортогональных пространству $\mathcal{T}_{n-1}$ и обеспечивающих оценку (0.11). Построены новые экстремальные функции, которые позволяют получать оценки снизу для наилучших приближений более общего вида, чем в теореме 0.2.

ТЕОРЕМА 0.3. Пусть $p_1, p_2, q_1, q_2 \in [1, +\infty]$, $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$, $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$, $r \in \mathbb{N}$, $\omega = (\max\{1/p_1, 1/p_2\} - \max\{1/q_1, 1/q_2\})^+$, $\varrho(x) = (1, 1)$, $\tilde{\varrho}(x) = (\alpha, \beta)$, где $\alpha, \beta \geq 1$, $\psi(u, v) = u + v$, т.е. $\psi_{\tilde{\varrho}, \mathbf{q}}(f) := \|f\|_{(\alpha, \beta), \mathbf{q}} = \|\alpha f^+\|_{q_1} + \|\beta f^-\|_{q_2}$. Тогда справедливы неравенства

$$C_r \min\{\alpha, \beta\} n^{-r+\omega} \leq E_{n-1}(\text{BW}_{(1,1), \mathbf{p}}^r(\mathbb{T}), L_{(\alpha, \beta), \mathbf{q}}(\mathbb{T})),$$

где K_r – константа Фавара. Для C_r выполнено соотношение (0.11).

Из теорем 0.1 и 0.3 выводятся точные по порядку оценки наилучшего приближения в $L_{(\alpha, \beta), \mathbf{q}}(\mathbb{T})$ на симметричном классе BW_p^r .

ТЕОРЕМА 0.4. В случае, когда $1 \leq p, q \leq +\infty$, $\varrho(x) = (1, 1)$, $\tilde{\varrho}(x) = (\alpha, \beta)$, где $\alpha, \beta \geq 1$, $\psi_{\tilde{\varrho}, \mathbf{q}}(f) = \|f\|_{(\alpha, \beta), \mathbf{q}} = \|\alpha f^+ + \beta f^-\|_q$, $\psi_{\varrho, \mathbf{p}}(f) = \|f^+ + f^-\|_p = \|f\|_p$, выполнено

$$C_r \min\{\alpha, \beta\} n^{-r+\omega_1} \leq E_{n-1}(\text{BW}_p^r(\mathbb{T}), L_{(\alpha, \beta), \mathbf{q}}(\mathbb{T})) \leq 8K_r \min\{\alpha, \beta\} n^{-r+\omega_1},$$

где $\omega_1 = (1/p - 1/q)^+$, K_r, C_r – те же, что и выше.

Приведем наиболее важные следствия из теоремы 0.4.

СЛЕДСТВИЕ 0.1. Пусть $p, q \in [1, +\infty]$, $r \in \mathbb{N}$. Тогда справедливы неравенства⁴

$$\begin{aligned} C_r n^{-r+(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})^+} &\leq E_{n-1}(\text{BW}_p^r(\mathbb{T}), L_q(\mathbb{T})) \leq 8K_r n^{-r+(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})^+}, \\ C_r n^{-r+(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})^+} &\leq E_{n-1}^\pm(\text{BW}_p^r(\mathbb{T}), L_q(\mathbb{T})) \leq 8K_r n^{-r+(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})^+}, \end{aligned} \quad (0.12)$$

⁴Из следствия 0.1 вытекает оценка $E_n(\text{BW}_1^1(\mathbb{T}), L_\infty(\mathbb{T})) \geq 1/108 > 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Она не противоречит теореме Вейерштрасса о приближении непрерывных функций $(\text{BW}_1^1(\mathbb{T}) \subset C(\mathbb{T}))$, так как утверждается лишь существование последовательности $f_n(x) \in \text{BW}_1^1(\mathbb{T})$ такой, что $E_n(f_n, L_\infty(\mathbb{T})) \geq 1/108 > 0$.

где $E_{n-1}^{\pm}$ – наилучшее одностороннее приближение функции соответственно снизу и сверху, т.е.

$$E_{n-1}^{+}(f)_q := \inf_{t \in \mathcal{T}_{n-1}, t(x) \geq f(x)} \|f - t\|_q, \quad E_{n-1}^{-}(f)_q := \inf_{t \in \mathcal{T}_{n-1}, t(x) \leq f(x)} \|f - t\|_q,$$

C_r – константа, определенная в теореме 0.2.

В. М. Тихомировым (см. [44, с. 171]) в 1976 г. было получено соотношение

$$E_n(\text{BW}_p^r(\mathbb{T}), L_q(\mathbb{T})) \asymp n^{-r + (\frac{1}{p} - \frac{1}{q})^+}, \quad (0.13)$$

где $r \in \mathbb{N}$, $1 \leq p, q \leq +\infty$. Отличие оценки (0.12) от (0.13) состоит в нахождении констант, не зависящих от p, q . Оценки сверху для величины $E_{n-1}(\text{BW}_p^r(\mathbb{T}), L_q(\mathbb{T}))$ давно изучались, и, например, из работы [51] вытекает⁵

$$E_{n-1}(\text{BW}_p^r(\mathbb{T}), L_q(\mathbb{T})) \leq 3K_r n^{-r + \omega_1}, \quad n \geq 3, \quad n, r \in \mathbb{N}, \quad (0.14)$$

где $\omega_1 = (1/p - 1/q)^+$, т.е. константа $3K_r$ здесь является лучшей константой, полученной в оценке (0.12) наилучшего приближения сверху при $n \geq 3$.

Для приближения функций в несимметричных пространствах, не обладающих определенной гладкостью, возникают неожиданные эффекты. Так, например, теорема Вейерштрасса о том, что функция f из $L_p(\mathbb{T})$, $1 \leq p \leq +\infty$, может быть приближена с наперед заданной точностью тригонометрическими полиномами, вообще говоря, может не иметь аналога в несимметричных пространствах. Приведем пример функции f из несимметричного пространства такой, что $E_n(f, L_{\psi_{\mathbf{e}, \mathbf{p}}}(\mathbb{T})) \geq C_0 > 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Пусть r_k – все рациональные точки интервала $(-\pi, \pi]$, занумерованные произвольным образом. Рассмотрим функцию⁶

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } x \text{ таких, что } |x - r_k| < \pi 2^{-k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, \\ 1 & \text{иначе.} \end{cases}$$

⁵ Докажем оценку (0.14). Поскольку $E_{n-1}(f, L_q(\mathbb{T})) \leq (3\pi/4)n^{-1+\omega_1} E_{n-1}(f', L_p(\mathbb{T}))$ для $n \geq 3$ (см. [51]) и $E_{n-1}(f, L_p(\mathbb{T})) \leq \|f - 0\|_p = \|f\|_p$, то для $f \in \text{BW}_p^1(\mathbb{T})$ в случае $r = 1$ имеем $E_{n-1}(f, L_q(\mathbb{T})) \leq (3\pi/4)n^{-1+\omega_1} = (3/2)K_1 n^{-1+\omega_1}$. Для констант Фавара справедливо $1 = K_0 < K_2 < \dots < (4/\pi) < \dots < K_3 < K_1 = (\pi/2)$ (см. [34]), в частности, для $r \geq 2$ имеем $K_{r-1}/K_r \leq K_1/K_2 = 4/\pi$, откуда для $f \in \text{BW}_p^r(\mathbb{T})$, $r \geq 2$, из $E_{n-1}(f, L_p(\mathbb{T})) \leq K_r n^{-r}$ (см. [34]) получаем $E_{n-1}(f, L_q(\mathbb{T})) \leq (3\pi/4)n^{-1+\omega_1} E_{n-1}(f', L_p(\mathbb{T})) \leq 3K_r n^{-r+\omega_1}$. Оценка (0.14) доказана.

⁶ Покажем, что функция $\tilde{f}$ не является интегрируемой по Риману. Данный факт интересен и тем, что для функций, не интегрируемых по Риману, величина $\lim_{n \rightarrow +\infty} E_n^{\pm}(\tilde{f}, L_p(\mathbb{T}))$ отлична от нуля, т.е. приблизить их в норме $L_p(\mathbb{T})$, $p \in [1, +\infty]$, односторонним образом с любой наперед заданной точностью также нельзя. Так как множество $A := \{x \in \mathbb{T} : \tilde{f}(x) = 0\}$ всюду плотно на $\mathbb{T}$ и $\mu(A) \leq \pi/2 + \pi/2^2 + \dots + \pi/2^l + \dots = \pi$, то для $B := \mathbb{T} \setminus A = \{x \in \mathbb{T} : \tilde{f}(x) = 1\}$ имеем $\mu(B) \geq \pi$. Пусть $x_0 \in B$; тогда в любой окрестности точки x_0 существует рациональная точка r_l , т.е. $\tilde{f}(x_0) = 1$ и $\tilde{f}(r_l) = 0$. Отсюда видно, что каждая точка B является точкой разрыва функции $\tilde{f}$ и $\mu(B) \geq \pi$. Следовательно, по критерию Лебега функция $\tilde{f}$ не является интегрируемой по Риману.

Очевидно, $\tilde{f} \in L_{p,\infty}(\mathbb{T})$, $1 \leq p < +\infty$. Покажем, что ее нельзя приблизить в норме $L_{p,\infty}(\mathbb{T})$ с точностью выше $\frac{1}{4}$. Предположим, что это неверно, т.е. для некоторого $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$E_n(\tilde{f})_{p,\infty} < \frac{1}{4}.$$

Тогда существует тригонометрический полином t_n^* такой, что $\|(\tilde{f} - t_n^*)^-\|_\infty \leq 1/4$. Для любой рациональной точки r_k имеем либо $\tilde{f}(r_k) - t_n^*(r_k) \geq 0$, и тогда $t_n^*(r_k) \leq 0$, либо $\tilde{f}(r_k) - t_n^*(r_k) < 0$, и тогда $-(\tilde{f}(r_k) - t_n^*(r_k)) = t_n^*(r_k) \leq 1/4$. Но в обоих случаях выполнено $t_n^*(r_k) \leq 1/4$. Следовательно, так как множество рациональных точек всюду плотно на торе, то $t_n^*(x) \leq 1/4$, $x \in \mathbb{T}$. Из того, что множество, на котором $\tilde{f}(x) = 1$, имеет меру, большую либо равную π , вытекает

$$\|\tilde{f} - t_n^*\|_{p,\infty} \geq \|(\tilde{f} - t_n^*)^+\|_p \geq \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{2\pi} \cdot \pi\right)^{\frac{1}{p}} \geq \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} > \frac{1}{4}, \quad p \geq 1.$$

Полученное противоречие доказывает требуемое⁷.

Приведенный пример показывает, что даже для несимметричной нормы $\|\cdot\|_{p,\infty}$ возможны случаи, когда нельзя приблизить функцию из данного пространства тригонометрическими полиномами и даже непрерывными функциями. Но из теоремы 0.4 вытекает, что при наличии определенной гладкости функции f в несимметричных пространствах $\|\cdot\|_{q_1,q_2}$ справедлив аналог теоремы Вейерштрасса, т.е. $\lim_{n \rightarrow +\infty} E_n(f, L_{q_1,q_2}(\mathbb{T})) = 0$ для $f \in \text{BW}_{p_1,p_2}^r$, в случае $r = 1$, $q_1 = q_2 = +\infty$ считаем $\min\{p_1, p_2\} > 1$.

Следующая теорема показывает, что условие гладкости в случае несимметричной нормы $\|f\|_{(\alpha,\beta),\mathbf{q}} = \|\alpha f^+\|_{q_1} + \|\beta f^-\|_{q_2}$ можно ослабить.

ТЕОРЕМА 0.5. Пусть $f \in L_{(\alpha,\beta),\mathbf{q}}$. Тогда $\lim_{n \rightarrow +\infty} E_n(f, L_{(\alpha,\beta),\mathbf{q}}) = 0$ для всех $\alpha, \beta, q_1, q_2 \in [1, +\infty)$, т.е. в несимметричном пространстве $L_{(\alpha,\beta),\mathbf{q}}(\mathbb{T})$ для конечных α, β и $\mathbf{q}$ справедлив аналог теоремы Вейерштрасса.

Если α либо β не является конечным числом, то класс функций, допускающих приближение в несимметричной норме $L_{(\alpha,\beta),\mathbf{q}}$ с любой наперед заданной точностью, можно охарактеризовать следующим образом.

ЗАМЕЧАНИЕ 0.2⁸. 1) Если $\alpha = +\infty$, $\beta \in [1, +\infty)$, то для $f \in L_{(+\infty,\beta),\mathbf{q}}$ имеем⁹

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E_n(f, L_{(+\infty,\beta),\mathbf{q}}) = 0 \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \tau(f, 1/n)_{q_2} = 0,$$

⁷На самом деле доказано, что $1/4 \leq \inf_{g \in C(\mathbb{T})} \|\tilde{f} - g\|_{p,\infty} \leq 1$, так как для оценки снизу использовано лишь свойство непрерывности у тригонометрических полиномов, а оценка сверху тривиальна, так как $\inf_{g \in C(\mathbb{T})} \|\tilde{f} - g\|_{p,\infty} \leq \|\tilde{f} - 0\|_{p,\infty} \leq 1$.

⁸Это замечание несложно вытекает из уже известных результатов, например из работы [17], так как в случае $\alpha = +\infty$, $\beta \in [1, +\infty)$ либо $\beta = +\infty$, $\alpha \in [1, +\infty)$ возникает одностороннее приближение снизу либо соответственно сверху.

⁹Вопрос о приближении функции f из $L_{(\alpha,\beta),\mathbf{q}}$ с любой наперед заданной точностью в случаях $\alpha = +\infty$, $q_2 = 1$ и $\beta = +\infty$, $q_1 = 1$ охарактеризован в терминах известного класса, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E_n(f, L_{(\alpha,\beta),\mathbf{q}}) = 0 \iff f \in \mathcal{R}(\mathbb{T}),$$

где $\mathcal{R}(\mathbb{T})$ – класс интегрируемых по Риману функций. Это следует из результата Е. П. Долженко и Е. А. Севастьянова [20], которые доказали, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tau(f, 1/n)_1 = 0$ тогда и только тогда, когда f интегрируема по Риману.

где $\tau(f, 1/n)_{q_2} = \sup_{0 \leq \delta \leq 1/n} \|\omega(f, \cdot, \delta)\|_{q_2}$ – усредненный модуль гладкости, а

$$\omega(f, x, \delta) = \sup_{\substack{x', x'' \in \mathbb{T}: |x' - x| \leq \delta/2 \\ |x'' - x| \leq \delta/2}} |f(x') - f(x'')|$$

– локальный модуль гладкости.

2) Если $\beta = +\infty$, $\alpha \in [1, +\infty)$, то для $f \in L_{(\alpha, +\infty), \mathbf{q}}$ имеем

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E_n(f, L_{(\alpha, +\infty), \mathbf{q}}) = 0 \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \tau(f, 1/n)_{q_1} = 0.$$

В § 1 будут даны оценки сверху по схеме Фавара с использованием одностороннего приближения для сплайнов Бернулли, т.е. будет доказана теорема 0.1. В § 2 доказывается теорема двойственности. В § 3 выводятся оценки снизу, которые вместе с теоремой 0.1 позволяют установить теоремы 0.2–0.4. В § 4 будет доказана теорема 0.5.

§ 1. Оценки сверху наилучшего приближения.

Доказательство теоремы 0.1

Для получения оценок сверху наилучшего приближения нам понадобятся периодические сплайны Бернулли $\mathcal{B}_m(x)$. Напомним их определение. Для $0 \leq x < 2\pi$ положим $\mathcal{B}_1 = \frac{\pi - x}{2}$, далее продолжим $\mathcal{B}_1(x)$ как 2π -периодическую функцию. Для $m > 1$ на интервале $0 \leq x < 2\pi$ $\mathcal{B}_m(x)$ определяется индуктивно как интеграл от $\mathcal{B}_{m-1}(x)$ с нулевым средним значением на $[0, 2\pi]$, а затем продолжается с периодом 2π . Иначе сплайны Бернулли определяются в виде ряда Фурье:

$$\mathcal{B}_m(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^{-m} \cos(kx - (\pi m/2)).$$

Для функции f , заданной на $\mathbb{T}$ с абсолютно непрерывной $(r-1)$ -й производной и нулевым средним, т.е. $\int_{\mathbb{T}} f(x) dx = 0$, справедливо представление (см. [45, с. 150])

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f^{(r)}(t) \mathcal{B}_r(x - t) dt.$$

Доказательство теоремы 0.1 проведем по схеме Фавара, которая состоит в сведении задачи о приближении полиномами функций из $\mathring{\text{BW}}_{\psi_{\mathbf{q}, \mathbf{p}}}^r(\mathbb{T})$ к нахождению наилучшего приближения сплайна Бернулли $\mathcal{B}_r(x)$ тригонометрическими полиномами. Нам потребуется следующий результат.

ЛЕММА 1.1 [10, с. 247–248]. *Для $m, n \in \mathbb{N}$ существуют полиномы $T_{m, n-1}^-$ и $T_{m, n-1}^+$ из пространства $\mathcal{T}_{n-1}$, для которых справедливы следующие соотношения:*

- а) $T_{m, n-1}^-(x) \leq \mathcal{B}_m(x) \leq T_{m, n-1}^+(x)$;
- б) $\|T_{m, n-1}^+ - \mathcal{B}_m\|_1 = \frac{\max \mathcal{B}_m(x)}{n^m} = \inf_{\substack{t^+ \in \mathcal{T}_{n-1} \\ t^+(x) \geq \mathcal{B}_m(x)}} \|t^+ - \mathcal{B}_m\|_1$;

Рис. 1

$$c) \|T_{m,n-1}^- - \mathcal{B}_m\|_1 = -\frac{\min \mathcal{B}_m(x)}{n^m} = \inf_{\substack{t^- \in \mathcal{T}_{n-1} \\ t^-(x) \geq \mathcal{B}_m(x)}} \|t^- - \mathcal{B}_m\|_1.$$

Например, для $m = 1$ полиномы $T_{1,n-1}^-, T_{1,n-1}^+ \in \mathcal{T}_{n-1}$ определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} T_{1,n-1}^-\left(\frac{2\pi k}{n}\right) &= \mathcal{B}_1\left(\frac{2\pi k}{n}\right), \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \\ T_{1,n-1}^-(2\pi) &= \lim_{x \rightarrow 2\pi-} \mathcal{B}_1(x) = -\frac{\pi}{2}, \\ (T_{1,n-1}^-)' \left(\frac{2\pi k}{n}\right) &= \mathcal{B}_1' \left(\frac{2\pi k}{n}\right), \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \\ T_{1,n-1}^-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0+} \mathcal{B}_1(x) = \frac{\pi}{2}, \\ T_{1,n-1}^+\left(\frac{2\pi k}{n}\right) &= \mathcal{B}_1\left(\frac{2\pi k}{n}\right), \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \\ (T_{1,n-1}^+)' \left(\frac{2\pi k}{n}\right) &= \mathcal{B}_1' \left(\frac{2\pi k}{n}\right), \quad k = 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Для $m \geq 2$ полиномы $T_{m,n-1}^-$ и $T_{m,n-1}^+$ определяются из похожих соотношений, но на другой сетке узлов $A_{m,n} + \frac{2\pi k}{n}$, где числа $A_{m,n}$ подбираются специальным образом. Полиномы $T_{m,n-1}^\pm(x)$ можно задать и явным образом. Покажем явный вид на примере $T_{1,n-1}^\pm(x)$ (см. также рис. 1). Положим $y_0 = \pi/2$, $y_k = \mathcal{B}_1(2\pi k/n)$, $k = 1, \dots, n-1$, $y_n = -\pi/2$, $y'_0 = (n-1)/2$, $y'_k = \mathcal{B}_1'(2\pi k/n) = -1/2$, $k = 1, \dots, n-1$, $y'_n = (n-1)/2$. Обозначим

$$\begin{aligned} \tilde{D}_n^*(x) &= \frac{2}{n^2} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \sin kx + \frac{1}{2} \sin nx \right) = \frac{2}{n^2} \sin^2 \frac{nx}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2}, \\ \tilde{F}_{n-1}(x) &= \frac{\sin^2(nx/2)}{n^2 \sin^2(x/2)}. \end{aligned}$$

Тогда

$$T_{1,n-1}^+(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \{y'_k \tilde{D}_n^*(x - 2\pi k/n) + y_k \tilde{F}_{n-1}(x - 2\pi k/n)\},$$

$$T_{1,n-1}^-(x) = \sum_{k=1}^n \{y'_k \tilde{D}_n^*(x - 2\pi k/n) + y_k \tilde{F}_{n-1}(x - 2\pi k/n)\}.$$

Из выписанных выше формул, действительно, вытекает принадлежность полиномов $T_{n,n-1}^-(x)$ пространству $\mathcal{T}_{n-1}$, так как коэффициенты при $\sin nx$ будут равны $n^{-2} \sum_{k=0}^{n-1} y'_k$ и $n^{-2} \sum_{k=1}^n y'_k$ соответственно для $T_{1,n-1}^+(x)$ и $T_{1,n-1}^-(x)$, но эти суммы равны нулю по определению.

Для оценки наилучшего приближения в несимметричной норме потребуется следующая простая лемма.

ЛЕММА 1.2. Пусть $\psi(u, v)$ – несимметричная и монотонная норма на плоскости, удовлетворяющая условию $\psi(u, v) = \psi(v, u)$. Тогда для любых $u, v \geq 0$ имеем

$$\psi(u + v, 0) = \psi(0, u + v) \leq 2\psi(u, v).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $v \geq u \geq 0$. Тогда $\psi(0, u + v) \leq 2\psi(0, v) \leq 2\psi(u, v)$. Но при $u \geq v \geq 0$ справедливо соотношение $\psi(0, u + v) = \psi(u + v, 0) \leq 2\psi(u, 0) \leq \psi(u, v)$. Лемма доказана.

Приступим к доказательству теоремы 0.1. Рассмотрим произвольную функцию f из пространства $\text{BW}_{\psi_{\mathbf{e}, \mathbf{P}}}^r(\mathbb{T})$ с нулевым средним. Фавар предложил представить разность между функцией и полиномом $U_{n-1}(f, x) \in \mathcal{T}_{n-1}$ следующим образом:

$$f(x) - U_{n-1}(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f^{(r)}(t) \{ \mathcal{R}_r(x - t) - \mathcal{R}_{n-1}(x - t) \} dt,$$

где $\mathcal{R}_{n-1} \in \mathcal{T}_{n-1}$ – тригонометрический полином степени не выше $n - 1$. Тогда и

$$U_{n-1}(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f^{(r)}(t) \mathcal{R}_{n-1}(x - t) dt$$

– тоже тригонометрический полином степени не выше $n - 1$. Положим¹⁰

$$U_{n-1}^{\pm}(g, x) := \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} g(t) T_{r,n-1}^{\pm}(x - t) dt.$$

В случае несимметричных норм функцию из $\text{BW}_{\psi_{\mathbf{e}, \mathbf{P}}}^r(\mathbb{T})$ будем приближать тригонометрическими полиномами, отдельно положительную и отрицательную части, по схеме Фавара. Выберем в качестве полинома приближения разность

¹⁰Здесь определены полиномы $U_{n-1}^{\pm}$, а чуть ранее полиномы $T_{r,n-1}^{\pm}$, где знак $\pm$ не обозначает их положительности или отрицательности. Данные обозначения не приведут к путанице.

$U_{n-1}^-((f^{(r)})^+, x) - U_{n-1}^+((f^{(r)})^-, x)$ и рассмотрим отклонение функции f от этого полинома:

$$\begin{aligned} f(x) - U_{n-1}^-((f^{(r)})^+, x) + U_{n-1}^+((f^{(r)})^-, x) &= \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} (f^{(r)})^+(t) \{ \mathcal{B}_r(x-t) - T_{r,n-1}^-(x-t) \} dt \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} (f^{(r)})^-(t) \{ \mathcal{B}_r(x-t) - T_{r,n-1}^+(x-t) \} dt. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Введем обозначение

$$g^\pm(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} (f^{(r)})^\pm(t) \{ T_{r,n-1}^+(x-t) - T_{r,n-1}^-(x-t) \} dt, \quad g(x) = g^+(x) - g^-(x).$$

Согласно выбору полиномов $T_{r,n-1}^\pm$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} 0 &\leq f(x) - U_{n-1}^-((f^{(r)})^+, x) + U_{n-1}^+((f^{(r)})^-, x) \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \{ (f^{(r)})^+(t) + (f^{(r)})^-(t) \} \{ T_{r,n-1}^+(x-t) - T_{r,n-1}^-(x-t) \} dt \\ &= g^+(x) + g^-(x). \end{aligned}$$

Оценим отклонение $f(x)$ от $U_{n-1}^-((f^{(r)})^+, x) - U_{n-1}^+((f^{(r)})^-, x)$ в несимметричной норме $L_{\psi_{\tilde{\mathbf{e}}, \mathbf{q}}}(\mathbb{T})$, $1 \leq q_1, q_2 \leq \infty$. Используя соотношение леммы 1.2 и неравенство Минковского, в пространстве $L_{q_1}(\mathbb{T})$ получаем

$$\begin{aligned} \psi_{\tilde{\mathbf{e}}, \mathbf{q}}(f(\cdot) - U_{n-1}^-((f^{(r)})^+, \cdot) + U_{n-1}^+((f^{(r)})^-, \cdot)) &\leq \psi(\|\tilde{\mathbf{e}}_+(g^+ + g^-)\|_{q_1}, 0) \\ &\leq 2\psi(\|\tilde{\mathbf{e}}_+g^+\|_{q_1}, \|\tilde{\mathbf{e}}_+g^-\|_{q_1}). \end{aligned}$$

Воспользуемся тем, что g^+ и g^- – тригонометрические полиномы степени не выше $n-1$. В этом случае, полагая

$$\mathbf{JN}_{\varrho_\pm, \tilde{\mathbf{e}}_\pm, p, q}(n) := \sup_{t \in \mathcal{T}_{n-1}} \frac{\|\tilde{\mathbf{e}}_\pm t\|_q}{\|\varrho_\pm t\|_p},$$

где $\mathbf{JN}_{\varrho_\pm, \tilde{\mathbf{e}}_\pm, p, q}(n)$ – константы Джексона–Никольского, получаем

$$\begin{aligned} \psi_{\tilde{\mathbf{e}}, \mathbf{q}}(f(\cdot) - U_{n-1}^-((f^{(r)})^+, \cdot) + U_{n-1}^+((f^{(r)})^-, \cdot)) &\leq 2\psi(\|\tilde{\mathbf{e}}_+g^+\|_{q_1}, \|\tilde{\mathbf{e}}_+g^-\|_{q_2}) \\ &\leq 2\psi(\mathbf{JN}_{\varrho_+, \tilde{\mathbf{e}}_+, p_1, q_1}(n) \|\varrho_+g^+\|_{p_1}, \mathbf{JN}_{\varrho_-, \tilde{\mathbf{e}}_-, p_2, q_1}(n) \|\varrho_-g^-\|_{p_2}) \\ &\leq 2C_{\tilde{\mathbf{e}}, \tilde{\mathbf{e}}_+, \mathbf{p}, q_1}(n) \psi_{\tilde{\mathbf{e}}, \mathbf{p}}(g), \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $C_{\tilde{\mathbf{e}}, \tilde{\mathbf{e}}_+, \mathbf{p}, q_1}(n) = \max\{\mathbf{JN}_{\varrho_+, \tilde{\mathbf{e}}_+, p_1, q_1}(n), \mathbf{JN}_{\varrho_-, \tilde{\mathbf{e}}_-, p_2, q_1}(n)\}$. Но приближать тригонометрическими полиномами функцию $f(x)$ можно не только методом (1.1), но и следующим образом:

$$\begin{aligned} f(x) - U_{n-1}^+((f^{(r)})^+, x) + U_{n-1}^-((f^{(r)})^-, x) &= \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} (f^{(r)})^+(t) \{ \mathcal{B}_r(x-t) - T_{r,n-1}^+(x-t) \} dt \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} (f^{(r)})^-(t) \{ \mathcal{B}_r(x-t) - T_{r,n-1}^-(x-t) \} dt. \end{aligned}$$

Тогда будут выполнены неравенства

$$-(g^+(x) + g^-(x)) \leq f(x) - U_{n-1}^+((f^{(r)})^+, x) + U_{n-1}^-((f^{(r)})^-, x) \leq 0.$$

Аналогично оценивая отклонение f от $U_{n-1}^+((f^{(r)})^+, x) - U_{n-1}^-((f^{(r)})^-, x)$ в несимметричной норме $L_{\psi_{\tilde{\mathbf{e}}, \mathbf{q}}}(\mathbb{T})$, находим

$$\begin{aligned} & \psi_{\tilde{\mathbf{e}}, \mathbf{q}}(f(\cdot) - U_{n-1}^+((f^{(r)})^+, \cdot) + U_{n-1}^-((f^{(r)})^-, \cdot)) \\ & \leq \psi(0, \|\tilde{\varrho}_-(g^+ + g^-)\|_{q_2}) \leq 2\psi(\|\tilde{\varrho}_-g^+\|_{q_2}, \|\tilde{\varrho}_-g^-\|_{q_2}). \end{aligned}$$

Отсюда, как и в (1.2), получаем

$$\psi_{\tilde{\mathbf{e}}, \mathbf{q}}(f(\cdot) - U_{n-1}^+((f^{(r)})^+, \cdot) + U_{n-1}^-((f^{(r)})^-, \cdot)) \leq 2C_{\mathbf{e}, \tilde{\mathbf{e}}, \mathbf{p}, q_2}(n) \psi_{\mathbf{e}, \mathbf{p}}(g),$$

где $C_{\mathbf{e}, \tilde{\mathbf{e}}, \mathbf{p}, q_2}(n) = \max\{\text{JN}_{\varrho_+, \tilde{\varrho}_-, p_1, q_2}(n), \text{JN}_{\varrho_-, \tilde{\varrho}_-, p_2, q_2}(n)\}$. Таким образом, доказано неравенство

$$\inf_{t \in \mathcal{T}_{n-1}} \psi_{\tilde{\mathbf{e}}, \mathbf{q}}(f - t) \leq 2C_{\mathbf{e}, \tilde{\mathbf{e}}, \mathbf{p}, \mathbf{q}}(n) \psi_{\mathbf{e}, \mathbf{p}}(g), \quad (1.3)$$

где $C_{\mathbf{e}, \tilde{\mathbf{e}}, \mathbf{p}, \mathbf{q}}(n) = \min\{C_{\mathbf{e}, \tilde{\varrho}_+, \mathbf{p}, q_1}(n), C_{\mathbf{e}, \tilde{\varrho}_-, \mathbf{p}, q_2}(n)\}$. Теперь оценим $\varrho_+g^+(x)$ в норме пространства $L_{p_1}(\mathbb{T})$:

$$\begin{aligned} g^+(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} (f^{(r)})^+(t) \{T_{r, n-1}^+(x - t) - T_{r, n-1}^-(x - t)\} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} (f^{(r)})^+(x - t) \{T_{r, n-1}^+(t) - T_{r, n-1}^-(t)\} dt. \end{aligned}$$

Согласно неравенству Минковского имеем

$$\|\varrho_+g^+\|_{p_1} \leq \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \|\varrho_+(f^{(r)})^+\|_{p_1} \{T_{r, n-1}^+(t) - T_{r, n-1}^-(t)\} dt.$$

Аналогично оценивая ϱ_-g^- , получим

$$\|\varrho_-g^-\|_{p_2} \leq \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \|\varrho_-(f^{(r)})^-\|_{p_2} \{T_{r, n-1}^+(t) - T_{r, n-1}^-(t)\} dt.$$

Теперь с учетом последних неравенств мы можем продолжить (1.3):

$$\begin{aligned} \inf_{t \in \mathcal{T}_{n-1}} \psi_{\tilde{\mathbf{e}}, \mathbf{q}}(f(\cdot) - t(\cdot)) &\leq 2C_{\mathbf{e}, \tilde{\mathbf{e}}, \mathbf{p}, \mathbf{q}}(n) \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \{T_{r, n-1}^+(t) - T_{r, n-1}^-(t)\} dt \\ &\quad \times \psi(\|\varrho_+(f^{(r)})^+\|_{p_1}, \|\varrho_-(f^{(r)})^-\|_{p_1}) \\ &= \frac{2}{\pi} C_{\mathbf{e}, \tilde{\mathbf{e}}, \mathbf{p}, \mathbf{q}}(n) \psi_{\mathbf{e}, \mathbf{p}}(f^{(r)}) \int_{\mathbb{T}} \{T_{r, n-1}^+(t) - T_{r, n-1}^-(t)\} dt \\ &\leq \frac{2}{\pi} C_{\mathbf{e}, \tilde{\mathbf{e}}, \mathbf{p}, \mathbf{q}}(n) \int_{\mathbb{T}} \{T_{r, n-1}^+(t) - T_{r, n-1}^-(t)\} dt. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Оценим последний интеграл с помощью леммы Ганелиуса, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \{T_{r,n-1}^+(t) - T_{r,n-1}^-(t)\} dt &= \|T_{r,n-1}^+ - \mathcal{B}_r\|_1 + \|\mathcal{B}_r - T_{r,n-1}^-\|_1 \\ &= \frac{\max \mathcal{B}_r - \min \mathcal{B}_r}{n^r}. \end{aligned}$$

Покажем, что $\max \mathcal{B}_r - \min \mathcal{B}_r \leq 2K_r$, где K_r – константа Фавара, т.е. $K_r = \frac{4}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^j}{(2j+1)} \right]^{r+1}$. Для четных $r = 2m$, $m \in \mathbb{N}$, хорошо известно [34, с. 107] соотношение

$$\max \mathcal{B}_{2m} - \min \mathcal{B}_{2m} = |\mathcal{B}_{2m}(0) - \mathcal{B}_{2m}(\pi)| = \pi K_{2m-1}/2.$$

Но для констант Фавара справедливо $K_{2m-1} \leq 4K_{2m}/\pi$, $m \in \mathbb{N}$, откуда получаем $\max \mathcal{B}_{2m} - \min \mathcal{B}_{2m} \leq 2K_{2m}$. Для $r = 1$ известно

$$\max \mathcal{B}_1 - \min \mathcal{B}_1 = \pi = 2K_1.$$

В случае нечетного $r = 2m + 1$, $m \in \mathbb{N}$, сплайны Бернулли

$$\mathcal{B}_{2m+1} = (-1)^m \sum_{k=1}^{+\infty} k^{-2m-1} \sin kx$$

– функции нечетные, причем функции, выпуклые на отрезке $[0, \pi]$ для $m = 2l + 1$, $l \in \mathbb{N}$, вниз и для $m = 2l$, $l \in \mathbb{N}$, вверх [34, с. 107]. Зададим треугольник точками $A(0; 0)$, $B(\pi; 0)$, $C(t_{2m+1}^*; (-1)^m \|B_{2m+1}\|_{+\infty})$, где t_{2m+1}^* – точка экстремума т.е. $\mathcal{B}_{2m+1}(t_{2m+1}^*) = (-1)^m \|B_{2m+1}\|_{+\infty}$. Из выпуклости функции $\mathcal{B}_{2m+1}(x)$ вытекает, что отрезки AC и CB лежат под графиком сплайна. Поэтому площадь под графиком функции $\mathcal{B}_{2m+1}$ будет больше площади $\triangle ABC$, т.е.

$$\int_0^\pi |\mathcal{B}_{2m+1}(t)| dt \geq S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \pi \|\mathcal{B}_{2m+1}\|_{+\infty}.$$

Но согласно [34, с. 107] имеем

$$\int_0^{2\pi} |\mathcal{B}_{2m+1}(t)| dt = \pi K_{2m+1},$$

откуда с использованием нечетности функции $\mathcal{B}_{2m+1}$ получаем

$$\pi K_{2m+1} = 2 \int_0^\pi |\mathcal{B}_{2m+1}(t)| dt \geq \pi \|\mathcal{B}_{2m+1}\|_{+\infty},$$

а также $\max \mathcal{B}_{2m+1} - \min \mathcal{B}_{2m+1} = 2\|\mathcal{B}_{2m+1}\|_{+\infty} \leq 2K_{2m+1}$. Таким образом, доказано, что оценка $\max \mathcal{B}_r - \min \mathcal{B}_r \leq 2K_r$ справедлива и в случае нечетных r .

Теперь из (1.4) находим

$$\begin{aligned} \inf_{t \in \mathcal{T}_{n-1}} \psi_{\mathbf{q}, \mathbf{q}}(f - t) &\leq 4C_{\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{p}, \mathbf{q}}(n) \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \{T_{r,n-1}^+(t) - T_{r,n-1}^-(t)\} dt \\ &= 4C_{\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{p}, \mathbf{q}}(n) \frac{\max \mathcal{B}_r - \min \mathcal{B}_r}{n^r} \leq 8K_r n^{-r} C_{\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{p}, \mathbf{q}}(n). \end{aligned}$$

Таким образом, для произвольной функции $f \in \overset{\circ}{\text{BW}}_{\psi_{\mathbf{e}, \mathbf{p}}}^r(\mathbb{T})$ мы доказали неравенство

$$\inf_{t \in \mathcal{T}_{n-1}} \psi_{\tilde{\mathbf{e}}, \mathbf{q}}(f - t) \leq 8K_r n^{-r} C_{\mathbf{e}, \tilde{\mathbf{e}}, \mathbf{p}, \mathbf{q}}(n). \quad (1.5)$$

Пусть теперь $f \in \text{BW}_{\psi_{\mathbf{e}, \mathbf{p}}}^r(\mathbb{T})$ и c – константа такая, что $\int_{\mathbb{T}} \{f(t) - c\} dt = 0$. Тогда

$$\inf_{t \in \mathcal{T}_{n-1}} \psi_{\tilde{\mathbf{e}}, \mathbf{q}}(f - t) = \inf_{t \in \mathcal{T}_{n-1}} \psi_{\tilde{\mathbf{e}}, \mathbf{q}}((f - c) - (t - c)) = \inf_{\tilde{t} \in \mathcal{T}_{n-1}} \psi_{\tilde{\mathbf{e}}, \mathbf{q}}(\tilde{f} - \tilde{t}),$$

где $\tilde{f} := f - c \in \overset{\circ}{\text{BW}}_{\psi_{\mathbf{e}, \mathbf{p}}}^r(\mathbb{T})$, т.е. с нулевым средним. Тем самым показано, что

$$E_n(\text{BW}_{\psi_{\mathbf{e}, \mathbf{p}}}^r(\mathbb{T}), L_{\psi_{\tilde{\mathbf{e}}, \mathbf{q}}}(\mathbb{T})) = E_n(\overset{\circ}{\text{BW}}_{\psi_{\mathbf{e}, \mathbf{p}}}^r(\mathbb{T}), L_{\psi_{\tilde{\mathbf{e}}, \mathbf{q}}}(\mathbb{T})).$$

Отсюда с учетом (1.5) и вытекает нужная оценка. Теорема 0.1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЗАМЕЧАНИЯ 0.1. Так как в случае несимметричной нормы $\psi(u, v) = u + v$ имеем $\psi(u + v, 0) = \psi(u + v, 0) = \psi(u, v)$, то оценка леммы 1.2 “улучшена” в два раза. Далее остается провести доказательство, как и выше, опираясь на “улучшенную” оценку леммы 1.2. В результате придем к неравенству типа (1.5), но с константой $4K_r$ вместо $8K_r$. Замечание доказано.

§ 2. Теорема двойственности

Для получения необходимых оценок снизу нам потребуется теорема двойственности в несимметричных пространствах $L_{(\alpha, \beta), \mathbf{q}}(\mathbb{T})$, которая и является основным результатом этого параграфа.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $1 \leq q_1, q_2 \leq +\infty$ и q'_1, q'_2 сопряженные с q_1, q_2 соответственно, т.е. $\frac{1}{q'_1} + \frac{1}{q_1} = 1$, $\frac{1}{q'_2} + \frac{1}{q_2} = 1$, $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$, $\mathbf{q}' = (q'_1, q'_2)$, $\alpha, \beta > 0$, $f \in L_{(\alpha, \beta), \mathbf{q}}(\mathbb{T})$. Тогда справедливо равенство

$$\|f\|_{(\alpha, \beta), \mathbf{q}} = \sup_{\substack{g \in L_{(\alpha^{-1}, \beta^{-1}), \mathbf{q}'}(\mathbb{T}) \\ \max\{\alpha^{-1}\|g^+\|_{q'_1}, \beta^{-1}\|g^-\|_{q'_2}\} \leq 1}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx. \quad (2.1)$$

Перед доказательством теоремы нам потребуется лемма, которая является аналогом неравенства Гёльдера для несимметричных пространств $L_{(\alpha, \beta), \mathbf{q}}(\mathbb{T})$.

ЛЕММА 2.1. Пусть $1 \leq q_1, q_2 \leq +\infty$ и $q'_1, q'_2 \in [1, +\infty]$ такие, что $\frac{1}{q'_1} + \frac{1}{q_1} = 1$, $\frac{1}{q'_2} + \frac{1}{q_2} = 1$, $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$, $\mathbf{q}' = (q'_1, q'_2)$, $\alpha, \beta > 0$, $f \in L_{(\alpha, \beta), \mathbf{q}}(\mathbb{T})$, $g \in L_{(\alpha^{-1}, \beta^{-1}), \mathbf{q}'}(\mathbb{T})$. Тогда справедливо неравенство

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x)g(x) dx \leq \|f\|_{(\alpha, \beta), \mathbf{q}} \max\{\alpha^{-1}\|g^+\|_{q'_1}, \beta^{-1}\|g^-\|_{q'_2}\}. \quad (2.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \{f^+(x) - f^-(x)\} \{g^+(x) - g^-(x)\} dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \{f^+(x)g^+(x) + f^-(x)g^-(x) - f^-(x)g^+(x) - f^+(x)g^-(x)\} dx \\ &\leq \int_{-\pi}^{\pi} \{f^+(x)g^+(x) + f^-(x)g^-(x)\} dx. \end{aligned}$$

Теперь, применяя неравенство Гёльдера к функциям f^+ и g^+ , а затем к функциям f^- и g^- , получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx &\leq \alpha \|f^+\|_{q_1} \alpha^{-1} \|g^+\|_{q'_1} + \beta \|f^-\|_{q_2} \beta^{-1} \|g^-\|_{q'_2} \\ &\leq \|f\|_{(\alpha, \beta), \mathbf{q}} \max\{\alpha^{-1} \|g^+\|_{q'_1}, \beta^{-1} \|g^-\|_{q'_2}\}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1. Оценка снизу в (2.1) сразу следует из неравенства (2.2). Для доказательства (2.1) рассмотрим функцию

$$g(x) = \frac{\alpha |f^+(x)|^{q_1-1}}{\|f^+\|_{q_1}^{q_1-1}} - \frac{\beta |f^-(x)|^{q_2-1}}{\|f^-\|_{q_2}^{q_2-1}}.$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$\alpha^{-1} \|g^+\|_{q'_1} = \frac{(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f^+(x)|^{q_1} dx)^{1/q'_1}}{\|f^+\|_{q_1}^{q_1-1}} = 1;$$

аналогично, $\beta^{-1} \|g^-\|_{q'_2} = 1$, т.е. выполнено $\max\{\alpha^{-1} \|g^+\|_{q'_1}, \beta^{-1} \|g^-\|_{q'_2}\} = 1$ и

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx &= \frac{\alpha \int_{\mathbb{T}} |f^+(x)|^{q_1} dx}{\|f^+\|_{q_1}^{q_1-1}} + \frac{\beta \int_{\mathbb{T}} |f^-(x)|^{q_2} dx}{\|f^-\|_{q_2}^{q_2-1}} \\ &= \alpha \|f^+\|_{q_1} + \beta \|f^-\|_{q_2} = \|f\|_{(\alpha, \beta), \mathbf{q}}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть $1 \leq q_1, q_2 \leq +\infty$, q'_1, q'_2 сопряженные с q_1, q_2 соответственно, т.е. $\frac{1}{q'_1} + \frac{1}{q_1} = 1$, $\frac{1}{q'_2} + \frac{1}{q_2} = 1$, $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$, $\alpha, \beta > 0$, $f \in L_{(\alpha, \beta), \mathbf{q}}(\mathbb{T})$. Тогда справедливо неравенство

$$\begin{aligned} E_n(f)_{(\alpha, \beta), \mathbf{q}} &:= \inf_{t_n \in \mathcal{T}_n} \|f - t_n\|_{(\alpha, \beta), \mathbf{q}} \\ &\geq \sup_{g \perp \mathcal{T}_n} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx. \\ &\quad \max\{\alpha^{-1} \|g^+\|_{q'_1}, \beta^{-1} \|g^-\|_{q'_2}\} \leq 1 \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем справедливость данного неравенства с учетом равенства (2.1):

$$\begin{aligned}
& \sup_{g \perp \mathcal{T}_n} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx \\
& \max\{\alpha^{-1}\|g^+\|_{q'_1}, \beta^{-1}\|g^-\|_{q'_2}\} \leq 1 \\
& = \inf_{t_n \in \mathcal{T}_n} \sup_{\substack{g \perp \mathcal{T}_n \\ \max\{\alpha^{-1}\|g^+\|_{q'_1}, \beta^{-1}\|g^-\|_{q'_2}\} \leq 1}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - t_n(x))g(x) dx \\
& \leq \inf_{t_n \in \mathcal{T}_n} \sup_{\substack{g \in L_{(\alpha^{-1}, \beta^{-1}), \mathbf{q}'}(\mathbb{T}) \\ \max\{\alpha^{-1}\|g^+\|_{q'_1}, \beta^{-1}\|g^-\|_{q'_2}\} \leq 1}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - t_n(x))g(x) dx \\
& = E_n(f)_{(\alpha, \beta), \mathbf{q}}.
\end{aligned}$$

Следствие доказано.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Пусть $1 \leq q_1, q_2 \leq +\infty$, q'_1, q'_2 сопряженные с q_1, q_2 соответственно; $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$, $q := \min\{q_1, q_2\}$, $q' := \max\{q'_1, q'_2\}$, $\alpha, \beta \geq 1$, $f \in L_{(\alpha, \beta), \mathbf{q}}(\mathbb{T})$. Тогда справедливы неравенства

$$\begin{aligned}
E_n(f)_{(\alpha, \beta), \mathbf{q}} & \geq \sup_{g \perp \mathcal{T}_n, \|g\|_{q'} \leq 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx = E_n(f)_q, \\
E_n(f)_{(\alpha, \beta), \mathbf{q}} & \geq \min\{\alpha, \beta\} E_n(f)_q.
\end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливость первого неравенства вытекает из следствия 2.1 и оценки $\max\{\alpha^{-1}\|g^+\|_{q'_1}, \beta^{-1}\|g^-\|_{q'_2}\} \leq \max\{\|g^+\|_{q'}, \|g^-\|_{q'}\} \leq \|g\|_{q'}$. Полученное неравенство означает вложения классов

$$\begin{aligned}
& \{g \in L_{q'}(\mathbb{T}) : g \perp \mathcal{T}_n, \|g\|_{q'} \leq 1\} \hookrightarrow \\
& \hookrightarrow \{g \in L_{(\alpha, \beta), \mathbf{q}'}(\mathbb{T}) : g \perp \mathcal{T}_n, \max\{\alpha^{-1}\|g^+\|_{q'_1}, \beta^{-1}\|g^-\|_{q'_2}\} \leq 1\}.
\end{aligned}$$

Равенство в первом соотношении следствия является хорошо известным результатом.

Для доказательства второго неравенства достаточно воспользоваться тривиальной оценкой $E_n(f)_{(\alpha, \beta), \mathbf{q}} \geq \min\{\alpha, \beta\} E_n(f)_{(1, 1), \mathbf{q}}$ и доказанным уже первым неравенством. Следствие доказано.

§ 3. Функции, экстремальные в смысле порядка.

Доказательство теорем 0.2–0.4

Докажем теорему 0.3. Для этого понадобятся несколько вспомогательных лемм.

ЛЕММА 3.1. Для $l, m \in \mathbb{N}$, $m \geq l$, и $a_k \in \mathbb{R}$, $k = l-1, \dots, m+1$, $x \in (0, \pi)$ справедливы тождества

$$\begin{aligned}
\sum_{k=l}^m a_k \sin kx & = \frac{\sum_{k=l}^m (a_{k-1} - 2a_k + a_{k+1}) \sin kx}{-4 \sin^2 \frac{x}{2}} \\
& + \frac{-a_{l-1} \sin lx + a_m \sin(m+1)x + a_l \sin(l-1)x - a_{m+1} \sin mx}{-4 \sin^2 \frac{x}{2}}, \quad (3.1)
\end{aligned}$$

$$\sum_{k=l}^m a_k \cos kx = \frac{\sum_{k=l}^m (a_{k-1} - 2a_k + a_{k+1}) \cos kx}{-4 \sin^2 \frac{x}{2}} + \frac{-a_{l-1} \cos lx + a_m \cos(m+1)x + a_l \cos(l-1)x - a_{m+1} \cos mx}{-4 \sin^2 \frac{x}{2}}. \quad (3.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $-4 \sin^2 \frac{x}{2} = 2(\cos x - 1)$, то, домножая левую часть (3.1) на $2(\cos x - 1)$ и учитывая, что $2 \sin kx \cos x = \sin(k+1)x + \sin(k-1)x$, получаем

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=l}^m a_k \sin kx \right) 2(\cos x - 1) &= \\ &= \sum_{k=l}^m (-2)a_k \sin kx + \sum_{k=l+1}^{m+1} a_{k-1} \sin kx + \sum_{k=l-1}^{m-1} a_{k+1} \sin kx \\ &= \sum_{k=l}^m (a_{k+1} - 2a_k + a_{k-1}) \sin kx - a_{l-1} \sin lx \\ &\quad + a_m \sin(m+1)x + a_l \sin(l-1)x - a_{m+1} \sin mx. \end{aligned}$$

Таким образом, тождество (3.1) доказано.

Для доказательства тождества (3.2) надо так же домножить его левую часть на $2(\cos x - 1)$, а потом, воспользовавшись тем, что $2 \cos kx \cos x = \cos(k+1)x + \cos(k-1)x$, провести те же выкладки, что и выше, заменив $\sin$ на $\cos$. Лемма доказана.

Рассмотрим полиномы¹¹

$$\begin{aligned} S_{3n}(x) &= \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{3} \left(\frac{k+1}{n} - 1 \right) \sin kx + \sum_{k=2n}^{3n-1} \left(1 - \frac{k+1}{3n} \right) \sin kx, \\ C_{3n}(x) &= \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{3} \left(\frac{k+1}{n} - 1 \right) \cos kx + \sum_{k=2n}^{3n-1} \left(1 - \frac{k+1}{3n} \right) \cos kx. \end{aligned}$$

ЛЕММА 3.2. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Тогда для $x \in (0, 2\pi)$ справедливы тождества

$$S_{3n}(x) = \frac{\sin(3n-1)x + \sin(n-1)x - 2 \sin(2n-1)x}{-12n \sin^2 \frac{x}{2}}, \quad (3.3)$$

$$C_{3n}(x) = \frac{\cos(3n-1)x + \cos(n-1)x - 2 \cos(2n-1)x}{-12n \sin^2 \frac{x}{2}}. \quad (3.4)$$

¹¹Добавок в виде второй суммы $\sum_{2n}^{3n}$ требуется, чтобы при оценке нормы полинома в $L_1(\mathbb{T})$ не появился “лишний” множитель в виде логарифма.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем (3.3). Положим в тождестве (3.1) сначала $l = n$, $m = 2n - 1$, $a_k = \frac{1}{3}(\frac{k+1}{n} - 1)$. Тогда, поскольку $a_{k+1} - 2a_k + a_{k-1} = 0$ и $a_{n-1} = 0$, имеем

$$\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{3} \left(\frac{k+1}{n} - 1 \right) \sin kx = \frac{\frac{1}{3} \left(\frac{1}{n} \sin(n-1)x + \sin 2nx - \left(1 + \frac{1}{n}\right) \sin(2n-1)x \right)}{-4 \sin^2 \frac{x}{2}}.$$

Для $l = 2n$, $m = 3n - 1$, $a_k = \left(1 - \frac{k+1}{3n}\right)$ выполнено равенство $a_{k+1} - 2a_k + a_{k-1} = 0$, следовательно, получим

$$\sum_{k=2n}^{3n-1} \left(1 - \frac{k+1}{3n}\right) \sin kx = \frac{-\frac{1}{3} \sin 2nx + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3n}\right) \sin(2n-1)x + \frac{1}{3n} \sin(3n-1)x}{-4 \sin^2 \frac{x}{2}}.$$

Складывая последние два равенства, приходим к (3.3). Равенство (3.4) получается аналогичным методом на основании представления (3.2). Лемма доказана.

Рис. 2

ЛЕММА 3.3. При любых $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$ для норм полиномов S_{3n} и C_{3n} выполняются следующие оценки:

$$\|S_{3n}\|_p \leq \frac{2^{1/p}}{3} n^{1-1/p}, \quad \|C_{3n}\|_p \leq \frac{2^{1/p}}{3} n^{1-1/p}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем справедливость первого неравенства для $p = +\infty$. Имеем

$$\begin{aligned} \max_{x \in \mathbb{T}} |S_{3n}(x)| &\leq \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{3} \left(\frac{k+1}{n} - 1 \right) + \sum_{k=2n}^{3n-1} \left(1 - \frac{k+1}{3n} \right) \\ &= \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{3} \left(\frac{k}{n} - 1 \right) + \sum_{k=2n}^{3n-1} \left(1 - \frac{k}{3n} \right) \\ &= \frac{1}{3n} \sum_{k=n}^{2n-1} k - \frac{n}{3} + n - \frac{1}{3n} \sum_{k=2n}^{3n-1} k = \frac{n}{3}. \end{aligned}$$

Так как

$$\max_{x \in \mathbb{T}} |C_{3n}(x)| \leq \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{3} \left(\frac{k+1}{n} - 1 \right) + \sum_{k=2n}^{3n-1} \left(1 - \frac{k+1}{3n} \right),$$

то для $C_{3n}(x)$ справедлива та же оценка. Таким образом, утверждение в случае $p = +\infty$ доказано.

Пусть теперь $1 \leq p < +\infty$. Воспользуемся уже доказанной оценкой для $p = +\infty$ и неравенством $|S_{3n}(x)| \leq \frac{1}{3n \sin^2(x/2)} \leq \frac{1}{3n} \left(\frac{\pi}{x} \right)^2$ для $x \in (0, \pi]$, которое легко вытекает из (3.3) и простой оценки $\sin \frac{x}{2} \geq \frac{2}{\pi} \left(\frac{x}{2} \right) = \frac{x}{\pi}$ для $x \in [0, \pi]$,

$$\begin{aligned} \|S_{3n}\|_p^p &= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi/n} |S_{3n}|^p dx + \int_{\pi/n}^{\pi} |S_{3n}|^p dx \right) \\ &\leq \frac{1}{\pi} \left(\left(\frac{n}{3} \right)^p \frac{\pi}{n} + \int_{\pi/n}^{\pi} \left(\frac{1}{3n} \left(\frac{\pi}{x} \right)^2 \right)^p dx \right) \\ &\leq \frac{1}{\pi} \left(\left(\frac{n}{3} \right)^p \frac{\pi}{n} + \frac{\pi^{2p}}{(3n)^p} \left(\frac{\pi}{n} \right)^{1-2p} \frac{1}{2p-1} \right) \\ &= \left(\frac{1}{3} \right)^p n^{p-1} \left(1 + \frac{1}{2p-1} \right) \leq \left(\frac{1}{3} \right)^p n^{p-1} \cdot 2. \end{aligned}$$

Таким образом, для полинома S_{3n} утверждение леммы доказано. Из (3.4) для $x \in (0, \pi)$ вытекает оценка $|C_{3n}(x)| \leq 1/(3n \sin^2(x/2))$. Поэтому рассуждая, как и выше, получаем $\|C_{3n}\|_p \leq \frac{2^{1/p}}{3} n^{1-1/p}$. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 0.3. Для доказательства теоремы 0.3 рассмотрим сначала пример функций $h_{n,r}(x)$ (определим их ниже), для наилучших приближений которых в норме $L_{(\alpha,\beta),\mathbf{q}}(\mathbb{T})$ выполняются следующие оценки:

$$E_{n-1}(h_{n,r})_{(\alpha,\beta),\mathbf{q}} \geq \frac{\pi}{8} \min\{\alpha, \beta\} n^{-r}, \quad h_{n,r} \in \text{BW}_{p_1, p_2}^r(\mathbb{T}), \quad r \in \mathbb{N}.$$

Тем самым будет доказано, что для $r, n \in \mathbb{N}$, $1 \leq p_1, p_2, q_1, q_2 \leq +\infty$ справедливо неравенство

$$E_n(\text{BW}_{p_1, p_2}^r(\mathbb{T}), L_{(\alpha,\beta),\mathbf{q}}(\mathbb{T})) \geq \frac{\pi}{8} \min\{\alpha, \beta\} n^{-r}. \quad (3.5)$$

Рассмотрим периодические идеальные сплайны Эйлера

$$\varphi_{\lambda,m}(x) = \frac{4}{\pi\lambda^m} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin((2k+1)\lambda x - \pi m/2)}{(2k+1)^{m+1}}, \quad m = 0, 1, \dots$$

Идеальный сплайн Эйлера $\varphi_{\lambda,m}(x)$ обладает следующими важными свойствами (см. [34, с. 104–106]):

- 1) $\varphi_{\lambda,m}^{(m)}(x) = \varphi_{\lambda,0}(x) = \text{sign} \sin \lambda x$;
- 2) $\|\varphi_{\lambda,m}\|_1 = \frac{2}{\pi} K_{m+1} n^{-m}$;
- 3) $\varphi_{\lambda,m}(x)$ имеет период, равный $2\pi/\lambda$.

ПРИМЕР 3.1. Покажем, что оценка (3.5) достигается на функциях вида $h(x) := h_{n,r}(x) = (1/2)\varphi_{n,r}(x)$. Из свойства 1) для $\varphi_{\lambda,m}(x)$ вытекает оценка

$$\|h^{(r)}\|_{p_1,p_2} = \frac{1}{2} \|\varphi_{n,0}(\cdot)\|_{p_1,p_2} \leq \frac{1}{2} \|\varphi_{n,0}(\cdot)\|_{\infty,\infty} = 1,$$

т.е. $h \in \text{BW}_{p_1,p_2}^r(\mathbb{T})$. Из свойства 3) для идеальных сплайнов Эйлера вытекает, что функция $\tilde{g}(x) = \text{sign} h(x)$ имеет период, равный $2\pi/n$. Следовательно, для функции $\tilde{g}(x)$ выполнено $\tilde{g} \perp \mathcal{T}_{n-1}$, $\|\tilde{g}\|_{+\infty} = 1$. Согласно лемме 2.2 имеем

$$\begin{aligned} E_{n-1}(h)_{(\alpha,\beta),\mathbf{q}} &:= \inf_{t \in \mathcal{T}_{n-1}} \|h - t\|_{(\alpha,\beta),\mathbf{q}} \\ &\geq \min\{\alpha, \beta\} E_{n-1}(h)_q \geq \min\{\alpha, \beta\} E_{n-1}(h)_1 \\ &= \min\{\alpha, \beta\} \sup_{g \perp \mathcal{T}_{n-1}, \|g\|_{+\infty} \leq 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(x)g(x) dx \\ &\geq \min\{\alpha, \beta\} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(x)\tilde{g}(x) dx = \min\{\alpha, \beta\} \|h\|_1 \\ &= \frac{\min\{\alpha, \beta\}}{2} \|\varphi_{n,r}\|_1 = \min\{\alpha, \beta\} \frac{K_{r+1}}{\pi} \cdot n^{-r} \\ &\geq \frac{K_2}{\pi} \min\{\alpha, \beta\} n^{-r} = \frac{\pi}{8} \min\{\alpha, \beta\} n^{-r}. \end{aligned}$$

Таким образом, оценка (3.5) доказана.

Покажем, что в случае $1 \leq q_1, q_2 \leq +\infty$, $1 \leq p_1, p_2 \leq +\infty$, $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$\begin{aligned} E_n(\text{BW}_{p_1,p_2}^r(\mathbb{T}), L_{(\alpha,\beta),\mathbf{q}}(\mathbb{T})) \\ \geq \min\{\alpha, \beta\} C_r(n+1)^{-r + (\max\{\frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_2}\} - \max\{\frac{1}{q_1}, \frac{1}{q_2}\})_+}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где константа C_r определена в формулировке теоремы 0.3. Пусть, для определенности сначала $p_1 \leq p_2$.

ПРИМЕР 3.2. Положим

$$t_{2n}(x) = \frac{1}{\gamma_n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^r} \left(1 - \frac{k}{2n}\right) \cos\left(kx - \frac{\pi r}{2}\right),$$

где $\gamma_n = \|F_{2n-1} - \frac{1}{2}\|_{p_1, p_2}$, $F_{2n-1}(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{2n} \left(1 - \frac{k}{2n}\right) \cos kx = \frac{\sin^2(nx)}{4n \sin^2 \frac{x}{2}} -$ ядро Фейера. Тогда

$$t_{2n}^{(r)}(x) = \frac{1}{\gamma_n} \sum_{k=1}^{2n} \left(1 - \frac{k}{2n}\right) \cos kx = \frac{1}{\gamma_n} \left(F_{2n-1}(x) - \frac{1}{2}\right),$$

поэтому очевидно включение $t_{2n}(x) \in \text{BW}_{p_1, p_2}^r(\mathbb{T})$. Известно [41, с. 182], что $\|F_{2n-1}\|_{p_1} \asymp n^{1-\frac{1}{p_1}}$, а так как $\|F_{2n-1}\|_{p_1, p_2} = \|F_{2n-1}\|_{p_1}$ и $\|f + g\|_{p_1, p_2} \leq \|f\|_{p_1, p_2} + \|g\|_{p_1, p_2}$, $1 \leq p_1, p_2 \leq +\infty$ (см. [40, с. 688]), то $\gamma_n = \|F_{2n-1} - 1/2\|_{p_1, p_2} \leq \|F_{2n-1}\|_{p_1} + 1/2$ для $1 \leq p_1 \leq +\infty$.

Покажем, что

$$\|F_{2n-1}\|_p \leq n^{1-1/p}, \quad 1 \leq p \leq +\infty. \quad (3.7)$$

Это неравенство легко вытекает из оценки

$$\|F_n\|_p \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^{1-1/p}, \quad 1 \leq p \leq +\infty, \quad (3.8)$$

которую докажем. Эта оценка является точной в случае $p = +\infty$. Действительно, $\|F_n\|_{+\infty} = (n+1)/2$, поэтому будем доказывать (3.8) для $1 \leq p < +\infty$. Полагая $w = (n+1)/2$, имеем

$$\|F_n\|_p^p = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\sin^2 wx}{4w \sin^2 \frac{x}{2}}\right)^p dx = I_1 + I_2,$$

где

$$I_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/(2w)} \left(\frac{\sin^2 wx}{4w \sin^2 \frac{x}{2}}\right)^p dx, \quad I_2 = \frac{1}{\pi} \int_{\pi/(2w)}^\pi \left(\frac{\sin^2 wx}{4w \sin^2 \frac{x}{2}}\right)^p dx.$$

Проведем цепочку неравенств для I_1 и I_2 . Из простой оценки $|\sin nx| \leq n|\sin x|$, $n \in \mathbb{N}$, которая доказывается индукцией, имеем

$$I_1 \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/(2w)} w^p dx = \frac{1}{2} w^{p-1};$$

здесь воспользовались условием $2w \in \mathbb{N}$. Теперь исследуем величину I_2 :

$$I_2 \leq \frac{1}{\pi} \int_{\pi/(2w)}^\pi \left(\frac{1}{4w \sin^2 \frac{x}{2}}\right)^p dx.$$

Из соотношения $\sin(x/2) \leq x/\pi$, $x \in [0, \pi]$, выводим

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi^2}{4w} \right)^p \int_{\pi/(2w)}^{\pi} \frac{dx}{x^{2p}} < \frac{\pi^{2p-1}}{(4w)^p} \int_{\pi/(2w)}^{+\infty} \frac{dx}{x^{2p}} \\ &= \frac{1}{2p-1} \cdot \frac{1}{2} w^{p-1} \leq \frac{1}{2} w^{p-1}, \quad 1 \leq p < +\infty. \end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$\|F_n\|_p = (I_1 + I_2)^{1/p} \leq w^{1-1/p} = \left(\frac{n+1}{2} \right)^{1-1/p},$$

и тем самым оценка (3.8) доказана.

Теперь из (3.7) легко вытекают неравенства $\gamma_n \leq n^{1-1/p_1} + 1/2 \leq (3/2)n^{1-1/p_1}$. Оценим наилучшее приближение t_{2n} в $L_{(\alpha, \beta), \mathbf{q}}(\mathbb{T})$, для этого положим $q' := \max\{q'_1, q'_2\}$ и воспользуемся следствием 2.2¹²:

$$\begin{aligned} E_{n-1}(t_{2n})_{(\alpha, \beta), \mathbf{q}} &:= \inf_{t \in \mathcal{T}_{n-1}} \|t_{2n} - t\|_{(\alpha, \beta), \mathbf{q}} \\ &\geq \min\{\alpha, \beta\} \sup_{g \perp \mathcal{T}_{n-1}, \|g\|_{q'} \leq 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t_{2n}(x)g(x) dx. \end{aligned}$$

Для q' сопряженным числом является $q = \min\{q_1, q_2\}$, так как $1/q' + 1/q = 1$. Заметим, что в зависимости от r функция $\cos(kx - \pi r/2)$ равна либо $\pm \cos kx$, либо $\pm \sin kx$. Пусть для определенности r – нечетное число; тогда $\cos(kx - \pi r/2) = \varepsilon \sin kx$, где $\varepsilon = \pm 1$. Положим $\tilde{g}(x) = \varepsilon S_{3n}(x)\beta_n^{-1}$, где $\beta_n = \|S_{3n}\|_{q'}$. В силу леммы 3.3 получаем соотношение $\beta_n \leq (2/3)n^{1-1/q'} = (2/3)n^{1/q}$. Функция $\tilde{g}(x)$ по построению удовлетворяет условиям $\|\tilde{g}\|_{q'} \leq 1$ и $\tilde{g} \perp \mathcal{T}_{n-1}$, поэтому выберем ее для оценки наилучшего приближения полинома t_{2n} :

$$\begin{aligned} E_{n-1}(t_{2n})_{(\alpha, \beta), \mathbf{q}} &\geq \frac{\min\{\alpha, \beta\}}{2\pi\beta_n} \int_{-\pi}^{\pi} t_{2n}(x)\varepsilon S_{3n}(x) dx \\ &= \frac{\min\{\alpha, \beta\}}{2\pi\gamma_n\beta_n} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k^r} \left(1 - \frac{k}{2n}\right) \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{k+1}{n} - 1\right) \int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon^2 \sin^2 kx dx \\ &= \frac{\min\{\alpha, \beta\}}{6\gamma_n\beta_n} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k^r} \left(1 - \frac{k}{2n}\right) \left(\frac{k+1}{n} - 1\right) \\ &\geq \frac{1}{6} \min\{\alpha, \beta\} \sigma_r(n) n^{-1+1/p_1-1/q}, \end{aligned} \tag{3.9}$$

¹²Заметим, что для оценок снизу наилучшего приближения заданной функции удобно пользоваться оценками (см. [50, с. 132]) следующего вида: $4E_n(f)_p \geq \|f - V_n(f)\|_p$, где $V_n(f) = (1/n) \sum_{k=n}^{2n-1} S_k(f, x)$ – средние Валле Пуссена. Но на этом пути получаются более грубые константы в оценках наилучшего приближения снизу.

где $\sigma_r(n) = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k^r} \left(1 - \frac{k}{2n}\right) \left(\frac{k+1}{n} - 1\right)$. Для доказательства теоремы 0.3 достаточно рассмотреть случай $n \geq 43$, так как иначе требуемая оценка вытекает из (3.5). Действительно, для $n \leq 42$ имеем

$$\begin{aligned} E_{n-1}(\text{BW}_{p_1, p_2}^r(\mathbb{T}), L_{(\alpha, \beta), \mathbf{q}}(\mathbb{T})) &\geq \frac{\pi \min\{\alpha, \beta\} 42}{8 \cdot 42 n^r} \\ &\geq \frac{\min\{\alpha, \beta\} n^{-r+1}}{8 \cdot 42 / \pi} \geq \frac{\min\{\alpha, \beta\}}{108} n^{-r+\omega} \end{aligned}$$

(постоянная ω определена в формулировке теоремы 0.3).

Оценим сначала сумму $\sigma_1(n)$:

$$\begin{aligned} \sigma_1(n) &= \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} \left(1 - \frac{k}{2n}\right) \left(\frac{k+1}{n} - 1\right) \\ &= \frac{3}{2n} \sum_{k=n}^{2n-1} 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k} - \frac{1}{2n^2} \sum_{k=n}^{2n-1} (k+1). \end{aligned}$$

Но $1/k \leq \int_{k-1}^k x^{-1} dx$, поэтому

$$\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} - \frac{1}{2n} \leq \ln 2 + \frac{1}{2n}.$$

Следовательно, получим

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} \left(1 - \frac{k}{2n}\right) \left(\frac{k+1}{n} - 1\right) &\geq \frac{3}{2} - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(\ln 2 + \frac{1}{2n}\right) - \frac{1}{2n^2} \left(\frac{3n^2 + n}{2}\right) \\ &= \left(\frac{3}{4} - \ln 2\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2n^2}. \end{aligned}$$

Функция $s(x) = (3/4 - \ln 2)(1 - 1/x) + 1/(2x^2)$ является возрастающей для $n \geq 18$. Действительно, $s'(x) = \frac{x(3/4 - \ln 2) - 1}{x^3} \geq 0$ для $x \geq \frac{1}{3/4 - \ln 2} = 17.58 \dots$. Следовательно, для $n \geq 43$ получаем

$$\sigma_1(n) \geq s(n) \geq s(43) = \left(\frac{3}{4} - \ln 2\right) \left(1 - \frac{1}{43}\right) + \frac{1}{2 \cdot 43^2} > \frac{1}{18}.$$

Хотя мы предполагали, что r нечетно, оценим данную сумму для всех $r \in \mathbb{N}$, так как далее потребуются оценки и для четных r . Докажем, что для $r \geq 2$ выполнена следующая оценка:

$$\begin{aligned} \sigma_r(n) &= \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k^r} \left(1 - \frac{k}{2n}\right) \left(\frac{k+1}{n} - 1\right) \\ &\geq \frac{3}{2n} \Phi_{r-1}(n) - \Phi_r(n) - \frac{1}{2n^2} \Phi_{r-2}(n) =: \Delta_r(n), \end{aligned} \quad (3.10)$$

где

$$\Phi_r(n) = \int_n^{2n} \frac{dx}{x^r} = \begin{cases} \frac{1-2^{-r+1}}{r-1} n^{-r+1}, & r \neq 1, \\ \ln 2, & r = 1. \end{cases}$$

Обозначим $f(x) := \frac{1}{x^r} \left(1 - \frac{x}{2n}\right) \left(\frac{x}{n} - 1\right)$ и $a_k := \frac{1}{k^r} \left(1 - \frac{k}{2n}\right) \left(\frac{k+1}{n} - 1\right)$. Пусть $k = 0, 1, \dots, n$, $x \in [n+k, n+k+1]$. Тогда

$$\begin{aligned} a_{n+k} &= \frac{1}{(n+k)^r} \left(1 - \frac{n+k}{2n}\right) \left(\frac{n+k+1}{n} - 1\right) \\ &\geq \frac{1}{x^r} \left(1 - \frac{x}{2n}\right) \left(\frac{n+k+1}{n} - 1\right) \geq f(x). \end{aligned}$$

Интегрируя это неравенство на отрезке $[n+k, n+k+1]$, получаем $a_{n+k} \geq \int_{n+k}^{n+k+1} f(x) dx$. Отсюда $\sum_{k=n}^{2n} a_k \geq \int_n^{2n} f(x) dx$. Таким образом (3.10) доказано.

Оценим $\Delta_r(n)$. Для $r \geq 2$ находим

$$\begin{aligned} \Delta_2(n) &= \frac{3}{2n} \ln 2 - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n^2} n = \frac{1}{n} \left(\frac{3 \ln 2 - 2}{2} \right) \geq \frac{1}{26n}, \\ \Delta_3(n) &= \frac{3}{2n} \cdot \frac{1}{2n} - \frac{3}{8n^2} - \frac{1}{2n^2} \ln 2 = \frac{1}{n^2} \left(\frac{3}{8} - \frac{\ln 2}{2} \right) \geq \frac{1}{36n^2}. \end{aligned}$$

И, наконец, для $r \geq 4$ получаем

$$\Delta_r(n) = \frac{3}{2n} \cdot \frac{1-2^{-r+2}}{r-2} n^{-r+2} - \frac{1-2^{-r+1}}{r-1} n^{-r+1} - \frac{1}{2n^2} \cdot \frac{1-2^{-r+3}}{r-3} n^{-r+3}.$$

Но так как справедливы равенства

$$\begin{aligned} -\frac{3 \cdot 2^{-r+1}}{r-2} + \frac{2^{-r+1}}{r-1} + \frac{2 \cdot 2^{-r+1}}{r-3} &= 2^{-r+1} \left(\frac{r+1}{(r-1)(r-2)(r-3)} \right), \\ \frac{3}{2(r-2)} - \frac{1}{r-1} - \frac{1}{2(r-3)} &= \frac{r-5}{2(r-1)(r-2)(r-3)}, \end{aligned}$$

то получаем

$$\Delta_r(n) = \frac{n^{-r+1}}{2(r-1)(r-2)(r-3)} (r-5 + 2^{-r+2}(r+1)), \quad r \geq 4.$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} \Delta_4(n) &= \frac{n^{-3}}{12} \cdot \frac{1}{4} = \frac{n^{-3}}{48}, \\ \Delta_5(n) &= \frac{n^{-4}}{48} \cdot \frac{6}{8} = \frac{n^{-4}}{64}, \\ \Delta_r(n) &\geq \frac{n^{-r+1} \cdot (r-5)}{2(r-1)(r-2)(r-3)}, \quad r \geq 6. \end{aligned}$$

Теперь если r четно, то $\cos(kx - \pi r/2) = \varepsilon \cos kx$, где $\varepsilon = \pm 1$. Положим $g(x) = \varepsilon C_{3n}(x)\beta_n^{-1}$, где $\beta_n = \|C_{3n}\|_{q'}$. Повторяя шаг за шагом предыдущие оценки, получаем такие же оценки и для четных r . Учитывая неравенства (3.5), (3.9), (3.10) и оценки для $\Delta_r(n)$, в случае $p_1 \leq p_2$ получаем

$$E_{n-1}(\text{BW}_{p_1, p_2}^r(\mathbb{T}), L_{(\alpha, \beta), \mathbf{q}}(\mathbb{T})) \geq \frac{1}{6} \min\{\alpha, \beta\} \tilde{C}_r n^{-r+(1/p_1 - \max\{1/q_1, 1/q_2\})_+},$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{C}_1 &> \frac{1}{18}, \quad \tilde{C}_2 > \frac{1}{26}, \quad \tilde{C}_3 > \frac{1}{36}, \quad \tilde{C}_4 > \frac{1}{48}, \quad \tilde{C}_5 > \frac{1}{64}, \\ \tilde{C}_r &> \frac{(r-5)}{2(r-1)(r-2)(r-3)}, \quad r \geq 6. \end{aligned} \quad (3.11)$$

В случае $p_1 \geq p_2$ положим

$$t_{2n}(x) = -\frac{1}{\gamma_n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^r} \left(1 - \frac{k}{2n}\right) \cos\left(kx - \frac{\pi r}{2}\right). \quad (3.12)$$

Рассуждая, как и выше, из (3.12) получим оценку

$$E_{n-1}(\text{BW}_{p_1, p_2}^r(\mathbb{T}), L_{(\alpha, \beta), \mathbf{q}}(\mathbb{T})) \geq \frac{1}{6} \min\{\alpha, \beta\} \tilde{C}_r n^{-r+(1/p_2 - \max\{1/q_1, 1/q_2\})_+},$$

где $\tilde{C}_r$ – та же константа, что и в (3.11). Легко видеть, что для $\tilde{C}_r$ из (3.11) вытекает

$$\tilde{C}_r \geq \frac{1}{18r^2}, \quad r = 1, 2, \dots, 5, \quad \tilde{C}_r > \frac{1}{2(r-1)(r-2)} \left(1 - \frac{2}{r-3}\right) > \frac{1}{6r^2}, \quad r \geq 6.$$

В обоих случаях имеем $\tilde{C}_r \geq (18r^2)^{-1}$. Теорема 0.3 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 0.2. Нужная оценка снизу легко вытекает из теоремы 0.3. Для этого достаточно положить $\alpha = \beta = 1$. Чтобы получить другую оценку на величину наилучшего приближения, необходимо лишь заметить, что несимметричная норма $\tilde{\psi}_{\varrho, \mathbf{q}} = \|f^+\|_{L_{q_1}(\mathbb{T})} + \|f^+\|_{L_{q_2}(\mathbb{T})}$ удовлетворяет условию следствия 0.1. Теорема 0.2 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 0.4. Оценки снизу сразу вытекают из теоремы 0.3 и результатов предыдущего параграфа. Оценка сверху в первом утверждении вытекает из следствия 0.1. Для доказательства теоремы осталось доказать неравенство

$$E_{n-1}(\text{BW}_p^r(\mathbb{T}), L_{(\alpha, \beta), q}(\mathbb{T})) \leq 8K_r \min\{\alpha, \beta\} n^{-r+(1/p-1/q)^+}.$$

Если сразу воспользоваться теоремой 0.1, то получим константу $16K_r$ вместо константы $8K_r$ при оценке наилучшего приближения сверху, поэтому докажем отдельно это неравенство. Проводя рассуждения, как и при доказательстве теоремы 0.1, для нормы $L_{(\alpha, \beta), q}$ с учетом оценки (0.8) для констант Джексона–Никольского имеем

$$\begin{aligned} \|f(\cdot) - U_{n-1}^-((f^{(r)})^+, \cdot) + U_{n-1}^+((f^{(r)})^-, \cdot)\|_{(\alpha, \beta), q} &\leq \|\alpha(g^+ + g^-)\|_q =: \alpha\|g(\cdot)\|_q \\ &\leq \alpha \text{JN}_{1,1,p,q}(n) \|g(\cdot)\|_p \leq 2\alpha \cdot n^{(1/p-1/q)^+} \|g(\cdot)\|_p. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\|f(\cdot) - U_{n-1}^+((f^{(r)})^+, \cdot) + U_{n-1}^-((f^{(r)})^-, \cdot)\|_{(\alpha, \beta), q} \leq 2\beta n^{(1/p-1/q)+} \|g(\cdot)\|_p.$$

Далее, как и при доказательстве теоремы 0.1, применяя неравенство Минковского, а затем квадратурную формулу, получаем

$$E_{n-1}(\text{BW}_p^r(\mathbb{T}), L_{(\alpha, \beta), q}(\mathbb{T})) \leq 8K_r \min\{\alpha, \beta\} n^{-r+(1/p-1/q)^+}.$$

Теорема 0.4 доказана.

§ 4. Доказательство теоремы 0.5

Пусть $f \in L_{(\alpha, \beta), \mathbf{q}}(\mathbb{T})$, где $\alpha, \beta, q_1, q_2 \in [1, +\infty)$. Предположим для определенности, что $q_1 \leq q_2$, $\alpha = \max\{\alpha, \beta\}$. Тогда $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$, где $f^+ \in L_{q_1}$, $f^- \in L_{q_2}$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и покажем, что существует тригонометрический полином t , для которого справедливо неравенство $\|f - t\|_{L_{(\alpha, \beta), \mathbf{q}}} \leq 5\varepsilon$. Для этого введем функцию срезки

$$f_N^+(x) := \begin{cases} f(x) & \text{для } x \in \mathbb{T}: f^+(x) \leq N, \\ N & \text{для } x \in \mathbb{T}: f^+(x) > N, \end{cases}$$

где $N \in \mathbb{N}$. Покажем, что константу N можно выбрать так, чтобы

$$\alpha \|f^+ - f_N^+\|_{q_1} < \varepsilon. \quad (4.1)$$

Для суммируемой функции $g(x) := (f^+(x))^{q_1}$ положим

$$A_n := \{x: x \in \mathbb{T}, n \leq g(x) < n+1\}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Из свойств интеграла Лебега и неотрицательности $g(x)$ вытекает равенство

$$\int_{\mathbb{T}} g(x) dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{A_k} g(x) dx.$$

В силу сходимости ряда и конечности α и q_1 выберем $N \in \mathbb{N}$ так, что

$$\alpha \left(\sum_{k=N}^{+\infty} \int_{A_k} g(x) dx \right)^{1/q_1} < \varepsilon.$$

Для выбранного N имеем

$$\begin{aligned} \alpha \|f^+ - f_N^+\|_{q_1} &= \alpha \left(\sum_{k=N}^{+\infty} \int_{A_k} (f^+(x) - N)^{q_1} dx \right)^{1/q_1} \\ &\leq \alpha \left(\sum_{k=N}^{+\infty} \int_{A_k} (f^+(x))^{q_1} dx \right)^{1/q_1} = \alpha \left(\sum_{k=N}^{+\infty} \int_{A_k} g(x) dx \right)^{1/q_1} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом оценка (4.1) доказана. Выберем тригонометрические полиномы t_1 и t_2 из условий¹³

$$\alpha \|f_N^+ - t_1\|_{q_2} \leq \varepsilon, \quad (4.2)$$

$$\alpha \|f^- - t_2\|_{q_2} \leq \varepsilon. \quad (4.3)$$

Положив $t = t_1 - t_2$, оценим разность между функцией f и полиномом t при помощи неравенств (4.1)–(4.3)¹⁴

$$\begin{aligned} \|f - t\|_{L_{(\alpha, \beta), \mathbf{q}}(\mathbb{T})} &\leq \alpha \|f - t\|_{q_1, q_2} = \alpha \|f^+ - f_N^+ + f_N^+ - t_1 + t_2 - f^-\|_{q_1, q_2} \\ &\leq \alpha (\|f^+ - f_N^+\|_{q_1, q_2} + \|f_N^+ - t_1\|_{q_1, q_2} + \|t_2 - f^-\|_{q_1, q_2}) \\ &\leq \varepsilon + \alpha (\|f_N^+ - t_1\|_{q_1, q_2} + \|t_2 - f^-\|_{q_1, q_2}) \\ &\leq \varepsilon + 2\alpha (\|f_N^+ - t_1\|_{q_2} + \|t_2 - f^-\|_{q_2}) \leq 5\varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом теорема доказана.

Список литературы

1. Крейн М. Г. L -проблема моментов в абстрактном линейном нормированном пространстве // Н. И. Ахиезер, М. Г. Крейн. О некоторых вопросах теории моментов. Харьков: ГОНТИ, 1938.
2. Bronsted A. Convex sets and Chebyshev sets // Math. Scand. 1965. V. 17. P. 5–16.
3. Bronsted A. Convex sets and Chebyshev sets. 2 // Math. Scand. 1966. V. 18. P. 5–15.
4. Alimov A. R. A number of connected components of sun's complement // East J. Appr. 1995. V. 1. № 4. P. 419–429.
5. Alimov A. R. Chebyshev sets' components // East J. Appr. 1996. V. 2. № 2. P. 215–232.
6. Алимов А. Р. Чебышевские компакты на плоскости // Тр. МИАН. 1997. Т. 219. С. 3–22.
7. Алимов А. Р. Чебышевские множества в линейных пространствах с несимметричной сферой // Тр. Саратовской зимней школы 30 января – 4 февраля 1994 г. (памяти профессора А. А. Привалова). Межвузовский сб. науч. трудов. Ч. 2. Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 1995. С. 91–93.
8. Алимов А. Р. Аппроксимативные свойства множеств в линейных пространствах с несимметричной сферой: Дис. . . . канд. физ.-мат. наук. М.: Изд-во МГУ, 1997.
9. Freud G. Über einseitige Approximation durch Polynome. I // Acta Sci. Math. 1955. V. 16. P. 12–18.
10. Ganelius T. On one-sided Approximation by Trigonometrical polynomials // Math. Scand. 1956. V. 4. P. 247–258.
11. Bojanic R., DeVore R. On polynomials of best one-sided approximation // Enseign. Math. 1966. V. 12. P. 139–164.
12. Бабенко В. Ф., Лигун А. А. Порядок наилучших односторонних приближений полиномами и сплайнами в метрике L_p // Матем. заметки. 1976. Т. 19. С. 323–329.
13. Андреев А. С., Попов В. А., Сендов Б. Теоремы типа Джексона для наилучших односторонних приближений тригонометрическими многочленами и сплайнами // Матем. заметки. 1979. Т. 26. С. 791–804.

¹³Такой выбор возможен в силу теоремы Вейерштрасса в пространстве $L_{q_2}(\mathbb{T})$. Действительно, теперь f_N^+ – ограниченная функция, а следовательно, $f_N^+, f^- \in L_{q_2}(\mathbb{T})$.

¹⁴Использованы неравенства $\|g(\cdot)\|_{q_1, q_2} \leq \|g(\cdot)\|_{q_2, q_2}$ для $q_1 \leq q_2$ и $\|g(\cdot)\|_{q_1, q_2} \leq 2\|g(\cdot)\|_{q_2}$. Первое вытекает из неравенства Гёльдера, второе – из тривиальной оценки $\|g^\pm(\cdot)\|_{q_2} \leq \|g(\cdot)\|_{q_2}$.

14. Андреев А. С., Попов В. А., Сендов Б. Jackson's type theorems for oneseide polynomial and spline approximation // Acad. Sulg. Sci. 1977. V. 30. P. 1533–1536.
15. Шадрин А. Ю. Односторонние и монотонные приближения: Дис. . . . канд. физ.-мат. наук. М.: Изд-во МГУ, 1986.
16. Корнейчук Н. П., Лизун А. А., Доронин В. Г. Аппроксимация с ограничениями. Киев: Наук. думка, 1982.
17. Сендов Б., Попов В. А. Усредненные модули гладкости. София: Болг. акад. наук, 1983.
18. Pinkus A. On L^1 -approximation. Cambridge: Cambridge University Press, 1989.
19. Lorentz G., Golitsihek M. V., Makovoz Y. Constructive approximation: Advanced Problems // Comprehensive Studies in Mathematics. 1996. V. 304.
20. Долженко Е. П., Севастьянов Е. А. О приближениях функций в хаусдорфовой метрике посредством кусочно монотонных (в частности, рациональных) функций // Матем. сб. 1976. Т. 101. С. 508–541.
21. Бабенко В. Ф. Несимметричные приближения в пространствах суммируемых функций // Укр. матем. журн. 1982. Т. 34. №4. С. 409–416.
22. Бабенко В. Ф. Несимметричные экстремальные задачи теории приближения // ДАН СССР. 1983. Т. 269. №3. С. 521–524.
23. Бабенко В. Ф. Неравенства для перестановок дифференцируемых функций, задачи приближения и приближенного интегрирования // ДАН СССР. 1983. Т. 272. №5. С. 1038–1041.
24. Бабенко В. Ф. Несимметричные приближения и неравенства для перестановок в экстремальных задачах теории приближения // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1987. Т. 180. С. 33–35.
25. Бабенко В. Ф., Кофанов В. А. Несимметричные приближения классов дифференцируемых функций алгебраическими многочленами в среднем // Analysis Math. 1988. Т. 14. №3. С. 149–217.
26. Поляков О. В. Несимметричные приближения класса классом, задаваемым при помощи линейного дифференциального оператора // Укр. матем. журн. 1990. Т. 42. №8. С. 1083–1088.
27. Поляков О. В. О приближении обобщенными сплайнами некоторых классов дифференцируемых функций // Укр. матем. журн. 1997. Т. 49. №7. С. 951–957.
28. Поляков О. В., Литвин Е. Г. Несимметричные приближения в пространстве $L_p(T)$ // Укр. матем. журн. 1999. Т. 51. №7. С. 1069–1078.
29. Шумейко А. А. Несимметричные приближения сплайнами // Межд. конф. “Функциональные пространства, теория приближений и нелинейный анализ”, посвященная 90-летию академика С. М. Никольского. М., 1995. С. 309.
30. Колмогоров А. Н. О неравенствах между верхними гранями последовательных производных функций на бесконечном интервале // Учен. зап. Моск. ун-та 1939. Вып. 30. Математика. №3. С. 3–13.
31. Hormander L. New proof and generalization of inequality of Bohr // Math. Scand. 1954. V. 2. P. 33–45.
32. Бабенко В. Ф., Вакарчук М. Б. О неравенствах типа Колмогорова–Хермандера для функций, ограниченных на дискретной сетке // Укр. матем. журн. 1997. Т. 49. №7. С. 988–992.
33. Габущин В. Н. Новые неравенства для производных и их применение // Межд. конф. “Функциональные пространства, теория приближений и нелинейный анализ”, посвященная 90-летию академика С. М. Никольского. М., 1995. С. 90–91.
34. Корнейчук Н. П. Точные константы в теории приближения. М.: Наука, 1987.
35. Долженко Е. П., Севастьянов Е. А. Знакочувствительные аппроксимации. Пространство знакочувствительных весов. Жесткость и свобода системы // Докл. РАН. 1993. Т. 332. №6. С. 686–689.
36. Долженко Е. П., Севастьянов Е. А. Знакочувствительные аппроксимации. Вопросы единственности и устойчивости // Докл. РАН. 1993. Т. 333. №1. С. 5–7.

37. Рамазанов А.-Р. К. О прямых и обратных теоремах аппроксимации в метрике знакочувствительного веса // *Analysis Math.* 1995. Т. 21. № 3. С. 191–212.
38. Рамазанов А.-Р. К. Полиномы, ортогональные со знакочувствительным весом // *Матем. заметки.* 1996. Т. 59. № 5. С. 737–752.
39. Рамазанов А.-Р. К. Рациональная аппроксимация со знакочувствительным весом // *Матем. заметки.* 1996. Т. 60. № 5. С. 737–752.
40. Козко А. И. Аналогии неравенств Джексона–Никольского для тригонометрических полиномов в пространствах с несимметричной нормой // *Матем. заметки.* 1997. Т. 61. № 5. С. 687–699.
41. Kozko A. I. On Jackson–Nikolskii inequalities for trigonometric polynomials in spaces with asymmetrical norms // *East J. Appr.* 1996. V. 2. № 2. P. 177–186.
42. Козко А. И. Многомерные неравенства разных метрик в пространствах с несимметричной нормой // *Матем. сб.* 1998. Т. 189. № 9. С. 85–106.
43. Козко А. И. Неравенства с дробными производными для тригонометрических полиномов в пространствах с несимметричной нормой // *Изв. РАН. Сер. матем.* 1998. Т. 62. № 6. С. 125–142.
44. Тихомиров В. М. Теория приближений // *Итоги науки и техники. Современные проблемы математики.* Т. 14. М.: ВИНТИ, 1987.
45. DeVore R., Lorentz G. Constructive approximation // *A Series of Comprehensive Studies in Mathematics.* 1993. V. 303.
46. Арестов В. В. О неравенстве разных метрик для тригонометрических полиномов // *Матем. заметки.* 1980. Т. 27. № 4. С. 539–546.
47. Долженко Е. П., Севастьянов Е. А. Аппроксимация со знакочувствительным весом // *Изв. РАН. Сер. матем.* 1998. Т. 62. № 6. С. 59–102.
48. Долженко Е. П., Севастьянов Е. А. Об определении чебышевских ужей // *Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика.* 1994. № 3. С. 49–59.
49. Тихомиров В. М. Теория экстремума и экстремальные задачи классического анализа // *Итоги науки и техники. Современные проблемы математики.* Т. 65. М.: ВИНТИ, 1999. С. 188–258.
50. Кашин Б. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды. М.: Наука, 1984.
51. Жук В. В. Аппроксимация периодических функций. Л.: Изд-во ЛГУ, 1982.

Поступило в редакцию
14.II.2001