Общероссийский математический портал

С. Ю. Немировский, Пучки Лефшеца, функции Морса и лагранжевы вложения бутылки Клейна, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2002, том 66, выпуск 1, 153–166

DOI: <https://doi.org/10.4213/im375>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 16:10:22

УДК 513.8+515.1

С. Ю. Немировский

Пучки Лефшеца, функции Морса и лагранжевы вложения бутылки Клейна

Показано, что лагранжева бутылка Клейна в комплексной алгебраической поверхности представляет ненулевой класс гомологий с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$. В частности, не существует лагранжевых вложений бутылки Клейна в стандартное симплектическое четырехмерное пространство.

Библиография: 18 наименований.

Введение

n -мерное подмногообразие $M \subset X$ симплектического многообразия (X^{2n}, ω) называется *лагранжевым*, если ограничение симплектической формы $\omega|_M$ тождественно равно нулю. Рассмотрим, например, лагранжевы вложения двумерных поверхностей в стандартное симплектическое четырехмерное пространство $(\mathbb{R}^4, \omega_0)$. По формуле Оден [2] эйлерова характеристика замкнутой лагранжевой поверхности $\Sigma \subset \mathbb{R}^4$ удовлетворяет соотношению

$$\chi(\Sigma) = \begin{cases} 0, & \text{если } \Sigma \text{ ориентируема,} \\ 0 \bmod 4, & \text{если } \Sigma \text{ неориентируема.} \end{cases}$$

Следовательно, единственная ориентируемая поверхность, допускающая лагранжево вложение в $\mathbb{R}^4$, – это двумерный тор. Нетрудно привести примеры вложенных лагранжевых торов (см. п. 2.9).

Аналогично, неориентируемая лагранжева поверхность в $\mathbb{R}^4$ диффеоморфна связной сумме нечетного числа бутылки Клейна $K = \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$. В важной работе Гивенталья [10] построены лагранжевы вложения

$$\underbrace{K \# \dots \# K}_{2m+1 \text{ раз}} \hookrightarrow \mathbb{R}^4$$

для всех $2m + 1 \geq 3$.

Вопрос о существовании лагранжевых вложений самой бутылки Клейна в $\mathbb{R}^4$ оставался открытым (см. [13], [15], [9]). Известны были только вполне вещественные вложения $K \hookrightarrow \mathbb{C}^2$ (явные примеры см. в [16]). Оказывается, что ответ на этот вопрос отрицательный.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 99-01-00969).

0.1. Теорема. *Бутылка Клейна не допускает лагранжевых вложений в $\mathbb{R}^4$.*

Это утверждение будет получено как следствие более общего результата. Напомним, что на каждом проективном алгебраическом комплексном многообразии найдется кэлерова форма, представляющая целочисленный класс когомологий. Определенная этой формой симплектическая структура зависит только от соответствующего обильного линейного расслоения, иначе говоря, от поляризации данного многообразия. Таким образом, можно говорить о лагранжевых подмногообразиях (поляризованных) комплексных алгебраических многообразий.

0.2. Теорема. *Пусть $K \hookrightarrow (Y, \omega)$ – лагранжево вложение бутылки Клейна в комплексную алгебраическую поверхность. Тогда представленный этим вложением гомологический класс $[K] \in H_2(Y; \mathbb{Z}_2)$ отличен от нуля.*

Теперь нетрудно вывести теорему 0.1. По теореме Дарбу каждое симплектическое четырехмерное многообразие локально изоморфно шару в $(\mathbb{R}^4, \omega_0)$. Поэтому если бы существовало лагранжево вложение $K \hookrightarrow (\mathbb{R}^4, \omega_0)$, то мы могли бы построить гомологически тривиальное лагранжево вложение бутылки Клейна в любое многообразие (Y, ω) , что противоречило бы теореме 0.2.

Другие следствия теоремы 0.2 касаются лагранжевых вложений неориентируемых поверхностей в комплексную проективную плоскость $\mathbb{CP}^2$ со стандартной симплектической структурой.

0.3. Следствие. *Бутылка Клейна не имеет лагранжевых вложений в $\mathbb{CP}^2$.*

Действительно, предположим, что такое вложение $K \hookrightarrow \mathbb{CP}^2$ существует. Тогда гомологический класс $[K] \in H_2(\mathbb{CP}^2; \mathbb{Z}_2)$ нетривиален по теореме 0.2. Форма пересечения на $H_2(\mathbb{CP}^2; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ невырождена, и, следовательно, гомологический индекс самопересечения $[K] \cdot [K] = 1 \in \mathbb{Z}_2$. С другой стороны, индекс самопересечения лагранжевой бутылки Клейна в четырехмерном симплектическом многообразии всегда равен нулю (поскольку нормальное расслоение к лагранжевому вложению изоморфно касательному расслоению и, значит, имеет нулевой второй класс Штифеля–Уитни).

0.4. Следствие. *Если $\ell_1, \ell_2: \mathbb{RP}^2 \hookrightarrow \mathbb{CP}^2$ – два трансверсальных лагранжевых вложения, то пересечение $\ell_1(\mathbb{RP}^2) \cap \ell_2(\mathbb{RP}^2)$ состоит как минимум из трех точек¹.*

Второй класс Штифеля–Уитни касательного расслоения вещественной проективной плоскости $\mathbb{RP}^2$ отличен от нуля, поэтому представленный лагранжевым вложением $\mathbb{RP}^2$ гомологический класс заведомо нетривиален. Отсюда мы заключаем, что индекс пересечения $[\ell_1(\mathbb{RP}^2)] \cdot [\ell_2(\mathbb{RP}^2)]$ равен единице и трансверсальное пересечение $\ell_1(\mathbb{RP}^2) \cap \ell_2(\mathbb{RP}^2)$ состоит из нечетного числа точек. Если бы имелась только одна точка пересечения, то, выполнив в этой точке лагранжеву хирургию, мы получили бы лагранжево вложение бутылки Клейна в $\mathbb{CP}^2$, что невозможно по предыдущему следствию.

Эта оценка на число точек пересечения точна: две трансверсальные линейно вложенные проективные плоскости $\mathbb{RP}^2 \subset \mathbb{CP}^2$ (полученные из лагранжевых плоскостей $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{C}^3$) имеют ровно три точки пересечения. Результаты Гивенталья, О и

¹Это следствие подсказано сноской на с. 489 работы [9], где исправляется одно утверждение из [2].

Чанга–Жанга о гипотезе Арнольда дают ту же оценку для числа точек пересечения любого лагранжева вложения $\mathbb{R}P^2 \subset \mathbb{C}P^2$ с его образом при общей лагранжевой изотопии. Неизвестно, однако, изотопны ли любые два лагранжева вложения $\mathbb{R}P^2 \hookrightarrow \mathbb{C}P^2$ (хотя бы в классе гладких вложений).

0.5. Пример. Существует лагранжево вложение бутылки Клейна в раздутую в одной точке проективную плоскость $\mathbb{C}P^2$.

Естественный способ понять этот пример состоит в следующем. С точки зрения вещественной алгебраической геометрии, бутылка Клейна – это раздутая в одной точке вещественная проективная плоскость $\mathbb{R}P^2$. Следовательно, это вещественная часть комплексной проективной плоскости $\mathbb{C}P^2$, раздутой в одной вещественной точке. Полученное вложение бутылки Клейна лагранжево относительно “вещественной” симплектической формы (имеется в виду симплектическая форма, антиинвариантная относительно комплексного сопряжения). Класс гомологий с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$, представленный этой бутылкой Клейна, равен $(1, 1) \in \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \cong H_2(\mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P^2}; \mathbb{Z}_2)$.

0.6. набросок доказательства теоремы 0.2. Доказательство состоит из двух независимых частей. Первый шаг представляет собой достаточно общую конструкцию пучков Лефшеца, приспособленных для изучения лагранжевых подмногообразий. Второй шаг – существенно более специализированный “штопор” для бутылки Клейна, подходящим образом вложенной в пучок Лефшеца.

1°. *Морс и Лефшец.* Отправной точкой для нас послужит свойство *рациональной выпуклости* лагранжевых подмногообразий проективных алгебраических многообразий, обнаруженное Ж. Дювалем [6] (см. также [7], [11] и теорему 2.4 ниже). Грубо говоря, оно означает, что любую непрерывную функцию $f: M \rightarrow \mathbb{C}$ на лагранжевом подмногообразии $M \subset X$ можно сколь угодно точно приблизить рациональной функцией на X . Применяя это к функциям Морса (вообще говоря, со значениями в окружности), мы получим, что лагранжево подмногообразие можно пошевелить так, что заданная функция Морса на нем будет индуцирована пучком Лефшеца (точное утверждение см. в теореме 2.7). В частности, если подмногообразие M расслоено над окружностью, то это расслоение может быть “вморожено” в семейство Лефшеца на некотором раздутии объемлющего многообразия X .

2°. *Обнаружение бутылки Клейна.* Как известно, бутылка Клейна представляет собой неориентируемое расслоение над окружностью, слоями которого являются окружности. Поэтому можно считать, что лагранжева бутылка Клейна $K \subset Y$ в проективной алгебраической поверхности послойно вложена в пучок Лефшеца. Точнее говоря, имеется такое семейство Лефшеца $F: \tilde{Y} \rightarrow \mathbb{C}P^1$ на подходящем раздутии поверхности Y , что ограничение $F|_K: K \rightarrow \Gamma$ есть неориентируемое расслоение на окружности над замкнутой кривой $\Gamma \subset \mathbb{C}P^1$, не проходящей через критические значения F .

В этой ситуации рассмотрим трубчатую окрестность $U_\Gamma \supset K$ в расслоенном трехмерном многообразии $F^{-1}(\Gamma) \subset \tilde{Y}$. Эта окрестность диффеоморфна нетривиальному расслоению над окружностью, слоем которого является кольцо. Когомологический класс в U_Γ , принимающий ненулевое значение на классе $[K]$, можно интерпретировать как второй класс Штифеля–Уитни “послойного спинорного расслоения”. Ключевое наблюдение состоит в том, что это расслоение можно естественным образом продолжить на все многообразие $\tilde{Y}$, используя структуру семейства Лефшеца $F: \tilde{Y} \rightarrow \mathbb{C}P^1$.

0.7. Симплектические многообразия. Согласно недавним глубоким результатам Дональдсона топологические аналоги пучков Лефшеца имеются и в симплектической геометрии. Нет особых сомнений в том, что техника работы [4] позволит обобщить теорему 2.7 на лагранжевы подмногообразия компактных симплектических многообразий². Утверждение такого типа упоминается в [5, с. 61].

Вторая часть описанного выше доказательства (см. § 3) практически не использует комплексную структуру. Результат справедлив для любого ориентируемого топологического семейства Лефшеца. Поэтому обобщение теоремы 2.7 на симплектические многообразия позволяет получить доказательство теоремы 0.2 для любого компактного симплектического четырехмерного многообразия (Y, ω) .

0.8. Содержание работы. В § 1 собраны необходимые сведения о функциях Морса и семействах Лефшеца, в § 2 дана конструкция пучков Лефшеца, согласованных с функциями Морса на лагранжевых подмногообразиях, и приведено краткое обсуждение примеров и возможных обобщений. Топологическая часть доказательства теоремы 0.2 изложена в § 3.

0.9. Благодарности. Автор искренне признателен Севе Шевчишину за многочисленные плодотворные обсуждения. Жюльен Дюваль, Пауль Зайдель, Йон-Гын О, Дени Ору, Айвен Смит и Юрий Чеканов сделали ряд ценных замечаний, способствовавших улучшению изложения.

§ 1. Функции Морса и пучки Лефшеца

1.1. Вещественные функции Морса. Гладкая функция $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ на гладком многообразии называется *функцией Морса*, если все ее критические точки невырождены, т. е. в каждой точке $x \in M$, в которой $df(x) = 0$, гессиан $H_x(f) = D^2df(x)$ является невырожденной симметрической формой на касательном пространстве T_xM . Более общим образом можно рассматривать функции Морса $f: M \rightarrow S^1 = \mathbb{RP}^1$ со значениями в окружности.

Две морсовские функции $f_1, f_2: M \rightarrow S^1$ *эквивалентны*, если существуют диффеоморфизмы $\varphi_M \in \text{Diff}(M)$ и $\varphi_{S^1} \in \text{Diff}(S^1)$, для которых $f_1 = \varphi_{S^1} \circ f_2 \circ \varphi_M$.

Функция Морса $f: M \rightarrow S^1$ называется *простой*, если все ее критические значения различны, т. е. если на каждом множестве уровня $f^{-1}(c)$, $c \in S^1$, лежит не более одной критической точки.

Простые функции Морса обладают следующим важным свойством стабильности. Любая гладкая функция, достаточно близкая (в C^2 -топологии) к простой функции Морса, эквивалентна ей на компактных подмножествах многообразия M . В этом случае диффеоморфизмы φ_M и φ_{S^1} можно выбрать изотопными тождественным диффеоморфизмам. Отметим, в частности, что любая простая функция Морса на замкнутом вещественно-аналитическом многообразии эквивалентна вещественно-аналитической функции Морса.

1.2. Голоморфные функции Морса. Аналогично, голоморфное отображение $h: X \rightarrow \mathbb{CP}^1$ комплексного многообразия в комплексную проективную прямую называется *голоморфной функцией Морса*, если все его критические точки невырождены. Простая голоморфная функция Морса имеет не более одной критической точки на каждом множестве уровня.

²Дамьен Гаёе любезно сообщил автору, что необходимые результаты получены в работе [18].

Простые голоморфные функции Морса гладко стабильны. Это означает, что голоморфная функция, достаточно близкая к простой морсовской функции h , может быть представлена в виде $\varphi_{\mathbb{CP}^1} \circ h \circ \varphi_X$, но диффеоморфизмы φ_X и $\varphi_{\mathbb{CP}^1}$ не могут быть, вообще говоря, выбраны голоморфными. Заметим, правда, что в этом случае достаточно потребовать, чтобы функции были близки в C^0 -топологии.

1.3. Комплексификация функций Морса. Пусть M – вещественно-аналитическое многообразие. Рассмотрим его комплексификацию $M^{\mathbb{C}} \supset M$, т.е. комплексное многообразие, полученное комплексификацией функций перехода какого-либо вещественно-аналитического координатного атласа на M . Каждая вещественно-аналитическая функция $f: M \rightarrow \mathbb{RP}^1$ продолжается до голоморфной функции $f^{\mathbb{C}}: U \rightarrow \mathbb{CP}^1$ в некоторой окрестности подмногообразия $M \subset M^{\mathbb{C}}$. Очевидно, что вещественные функции Морса продолжают до голоморфных функций Морса. Кроме того, если функция f простая, то ее комплексификация $f^{\mathbb{C}}$ также простая в (возможно, меньшей) окрестности M .

По свойству стабильности картинка остается практически неизменной, если мы приблизим функцию $f^{\mathbb{C}}$ другой голоморфной функцией $h: U \rightarrow \mathbb{CP}^1$. Точнее говоря, найдутся изотопное шевеление $M' \subset M^{\mathbb{C}}$ подмногообразия M и вложенная окружность $\Gamma \subset \mathbb{CP}^1$, для которых $h(M') \subset \Gamma$ и функция

$$h|_{M'}: M' \rightarrow \Gamma$$

эквивалентна исходной функции $f: M \rightarrow S^1 = \mathbb{RP}^1$.

1.4. Семейства Лефшеца и пучки Лефшеца. Простая голоморфная функция Морса $h: X \rightarrow \mathbb{CP}^1$ на компактном комплексном многообразии X называется *семейством Лефшеца*. Этот же термин зачастую используется для самого семейства множеств уровня $X_c = h^{-1}(c)$, $c \in \mathbb{CP}^1$. (Приводимые ниже общие сведения о семействах Лефшеца можно найти, например, в работе [14].)

Во-первых, далеко не каждое компактное (и даже проективное) комплексное многообразие X допускает семейство Лефшеца $h: X \rightarrow \mathbb{CP}^1$. Например, вообще не существует непостоянных голоморфных отображений комплексной проективной плоскости $\mathbb{CP}^2$ на $\mathbb{CP}^1$. Однако семейства Лефшеца можно получать из *пучков Лефшеца* гиперплоских сечений с помощью раздутий многообразия X .

Предположим, что на X задано обильное линейное расслоение $\mathcal{L}$. Тогда имеется вложение $X \hookrightarrow \mathbb{CP}^N$, определенное сечениями расслоения $\mathcal{L}^{\otimes m}$ для некоторого $m \geq 1$. Стандартные результаты о трансверсальности показывают, что для двух общих сечений $s_1, s_2 \in \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes m})$ их отношение $h = s_1/s_2$ является рациональной функцией на X со следующими свойствами:

- 1) множество неопределенности $S = \{s_1 = s_2 = 0\}$ представляет собой неособое подмногообразие в X комплексной коразмерности два;
- 2) раздутие с центром в S определяет такую модификацию $\tilde{X} \rightarrow X$, что подъем $\tilde{h}: \tilde{X} \rightarrow \mathbb{CP}^1$ является семейством Лефшеца на $\tilde{X}$.

Другими словами, мы рассматриваем общую проекцию $\mathbb{CP}^N \rightarrow \mathbb{CP}^1$ и раздуваем пересечение ее центра с подмногообразием $X \subset \mathbb{CP}^N$. Например, если $X = \mathbb{CP}^2$ и вложение $X \hookrightarrow \mathbb{CP}^N$ задано однородными полиномами степени $d \geq 1$, то получается семейство Лефшеца на проективной плоскости $\mathbb{CP}^2$, раздутой в d^2 точках пересечения двух общих кривых этой степени.

§ 2. Функции Морса на лагранжевых подмногообразиях

2.1. Рациональная выпуклость. Компактное подмножество $E \subseteq \mathbb{C}^n$ называется *рационально выпуклым*, если для любой точки $p \in \mathbb{C}^n \setminus E$ найдется такая комплексная алгебраическая гиперповерхность $H \subset \mathbb{C}^n$, что $p \in H$ и $E \cap H = \emptyset$.

По классической теореме Ока рационально выпуклое множество E обладает фундаментальной системой таких окрестностей $U \supset E$, что всякую голоморфную функцию на U можно приблизить (равномерно на компактах) рациональными функциями с полюсами вне U . Идея доказательства состоит в следующем. Нетрудно видеть, что существует собственное голоморфное вложение окрестности множества E в полидиск в $\mathbb{C}^N$, $N \gg n$, причем компоненты этого вложения суть рациональные функции. Теперь равномерное приближение полиномами от этих функций получается по классической теории Ока–Картана–Серра (см., например, [12]).

Понятие рациональной выпуклости и теорему Ока можно естественным образом сформулировать для подмножеств проективных алгебраических многообразий. Компактное подмножество $E \subseteq X$ компактного комплексного многообразия называется *рационально выпуклым относительно обильного линейного расслоения $\mathcal{L}$ на многообразии X* , если для всякой точки $p \in X \setminus E$ найдется такое голоморфное сечение $s \in \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes m})$ при некотором $m \geq 1$, что $s(p) = 0$ и $s \neq 0$ на E . Классическая ситуация соответствует $X = \mathbb{CP}^n$ и стандартному обильному расслоению $\mathcal{L} = \mathcal{O}(1)$. Используя данное определение рациональной выпуклости, можно следующим образом обобщить теорему Ока.

2.2. Теорема Ока на проективных многообразиях. Пусть компактное подмножество $E \subseteq X$ рационально выпукло относительно линейного расслоения $\mathcal{L}$. Тогда существует фундаментальная система штейновых окрестностей $U \supset E$ со следующим свойством: любую голоморфную функцию $h: U \rightarrow \mathbb{C}$ можно равномерно приблизить на компактных подмножествах в U рациональными функциями вида s_1/s_2 , где $s_1, s_2 \in \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes m})$ и $s_2 \neq 0$ на U .

Доказательство совершенно аналогично классическому случаю. Следует отметить, впрочем, что в этой формулировке необходимо ограничиться голоморфными функциями со значениями в $\mathbb{C}$. Утверждение теоремы может быть неверным для рациональных функций или общих голоморфных отображений в $\mathbb{CP}^1$.

2.3. Лагранжевы подмногообразия. Пусть X – компактное комплексное многообразие с обильным линейным расслоением $\mathcal{L}$. Первый класс Черна расслоения $\mathcal{L}$ можно представить кэлеровой формой ω . Другими словами, ω является замкнутой положительной $(1, 1)$ -формой, т. е. симплектической формой на X , согласованной с комплексной структурой. Заметим, что такая симплектическая форма существует, если многообразие X штейново, а расслоение $\mathcal{L} = \mathcal{O}$ тривиально.

Следующий замечательный результат был получен Дювалем [6] для $X = \mathbb{C}^2$, Дювалем и Сибони [7] для $X = \mathbb{C}^n$ и Геджем [11, теорема 2.8] в общем случае.

2.4. Теорема Дюваля–Сибони–Геджа. Предположим, что компактное вещественное подмногообразие $M \subset X$ лагранжево относительно симплектической формы ω . Тогда подмногообразие M рационально выпукло относительно линейного расслоения $\mathcal{L}$.

На самом деле эта теорема обеспечивает полную характеристику лагранжевых подмногообразий в классе всех вполне вещественных подмногообразий. Напомним, что вещественное n -мерное подмногообразие n -мерного комплексного многообразия называется *вполне вещественным*, если его касательное пространство в каждой точке порождает касательное пространство объемлющего многообразия. Ясно, что любое подмногообразие, являющееся лагранжевым относительно кэлеровой формы, вполне вещественно. В работе [11] показано, что если вполне вещественное подмногообразие рационально выпукло относительно линейного расслоения $\mathcal{L}$, то оно лагранжево относительно *какой-то* положительной замкнутой $(1, 1)$ -формы, представляющей первый класс Черна расслоения $\mathcal{L}$.

2.5. Аппроксимация пучками Лефшеца. Теперь мы можем вывести основной технический результат настоящей работы. Рассмотрим лагранжево подмногообразие $M \subset X$ в проективном алгебраическом многообразии. Иначе говоря, M предполагается лагранжевым относительно кэлеровой формы, представляющей первый класс Черна некоторого обильного линейного расслоения $\mathcal{L}$ на многообразии X . С помощью малого шевеления можно перейти к случаю, когда подмногообразие M является вещественно-аналитическим. Более точно, воспользуемся следующим вспомогательным утверждением.

2.6. Лемма. Пусть замкнутое подмногообразие $L \subset X$ лагранжево относительно кэлеровой формы, представляющей первый класс Черна $c_1(\mathcal{L})$ обильного линейного расслоения $\mathcal{L}$ на X . Существует C^∞ -малая диффеотопия $\varphi_{0 \leq t \leq 1}: X \rightarrow X$, для которой подмногообразие $\varphi_1(L) \subset X$ вещественно-аналитично и лагранжево относительно вещественно-аналитической кэлеровой формы, представляющей класс когомологий $c_1(\mathcal{L})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО основано на классической теореме Мозера. Пусть симплектические формы Ω_1, Ω_2 на многообразии V достаточно близки (скажем, в C^k -топологии, $1 \leq k \leq \infty$) и представляют один и тот же класс когомологий в $H^2(V; \mathbb{R})$. Тогда для любого относительно компактного подмножества $W \Subset V$ существует C^k -малая диффеотопия $\zeta_{0 \leq t \leq 1}: W \rightarrow V$, переводящая форму Ω_1 в форму Ω_2 . Если, кроме того, многообразие V и формы Ω_1 и Ω_2 вещественно-аналитичны, то и диффеотопию можно выбрать вещественно-аналитической.

Сначала построим вещественно-аналитическую кэлерову форму. Поскольку расслоение $\mathcal{L}$ обильно, в классе когомологий $c_1(\mathcal{L})$ найдется вещественно-аналитическая кэлерова форма ω_0 (например, подходящее кратное прообраза формы Фубини–Штуди при вложении $X \hookrightarrow \mathbb{CP}^N$, заданном сечениями расслоения $\mathcal{L}^{\otimes m}$ при некотором $m \geq 1$). По dd^c -лемме выполнено равенство $\omega = \omega_0 + dd^c h$ для гладкой функции $h: X \rightarrow \mathbb{R}$. Приближая функцию h вещественно-аналитической функцией h' , получаем кэлерову форму $\omega' = \omega_0 + dd^c h'$, диффеотопную форме ω по теореме Мозера.

По теореме Дарбу–Вейнштейна найдется окрестность $V \supset L$ и симплектоморфизм $\psi: (V, \omega'|_V) \rightarrow (T^*L, \omega_{\text{st}})$ на кокасательное расслоение многообразия L со стандартной симплектической структурой. Достаточно найти вещественно-аналитический симплектоморфизм $W \rightarrow T^*L$ меньшей окрестности $W \supset L$, который является C^∞ -малым возмущением симплектоморфизма ψ . Заметим, что существует вещественно-аналитический диффеоморфизм $\psi_0: V \rightarrow T^*L$ с такими свойствами, и применим вещественно-аналитический вариант теоремы Мозера к симплектическим формам $\psi_0^* \omega_{\text{st}}$ и $\omega'|_V$. Таким образом, существует вещественно-аналитическая диффеотопия $\zeta_{0 \leq t \leq 1}: W \rightarrow V$, для которой $\zeta_1^*((\psi_0)^* \omega_{\text{st}}) = \omega'|_W$.

Композиция отображений $\psi_0 \circ \zeta_1$ дает требуемое возмущение симплектоморфизма ψ .

Каждое вещественно-аналитическое вполне вещественное подмногообразие $M \subset X$ обладает окрестностью, биголоморфно эквивалентной комплексификации $M^{\mathbb{C}}$. Следовательно, комплексификация любой вещественно-аналитической функции Морса $f: M \rightarrow \mathbb{R}P^1$ определяет голоморфную функцию Морса на окрестности подмногообразия M в X , принимающую значения в окрестности $\mathbb{R}P^1 \subset \mathbb{C}P^1$. Заметим, что множество значений такой функции можно отобразить в $\mathbb{C}$ при помощи дробно-линейного преобразования $\mathbb{C}P^1$. Если подмногообразие M лагранжево, то, применяя теоремы 2.2 и 2.4, каждую $\mathbb{C}$ -значную голоморфную функцию в окрестности M можно приблизить отношением сечений линейного расслоения $\mathcal{L}^{\otimes m}$, $m \geq 1$. Выбирая эту рациональную функцию достаточно общей и применяя рассуждения из пп. 1.3 и 1.4, получаем следующий результат.

2.7. Теорема. Пусть $M \subset X$ – замкнутое лагранжево подмногообразие проективного алгебраического многообразия, и пусть на M задана простая функция Морса $f: M \rightarrow S^1$ со значениями в окружности. Тогда существуют:

- а) модификация $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$, полученная раздутием неособого подмногообразия $S \subset X$,
- б) семейство Лефшеца $F: \tilde{X} \rightarrow \mathbb{C}P^1$,
- в) вполне вещественное подмногообразие $M' \subset X \setminus S = \tilde{X} \setminus \pi^{-1}(S)$, изотопное подмногообразию $M \subset X$,
- г) вложенная окружность $\Gamma \subset \mathbb{C}P^1$,

для которых $F(M') \subset \Gamma$ и ограничение функции $F|_{M'}: M' \rightarrow \Gamma$ эквивалентно заданной морсовской функции $f: M \rightarrow S^1$.

Кроме того, M' и Γ можно выбрать таким образом, чтобы точка $c \in \Gamma \subset \mathbb{C}P^1$ была критическим значением отображения F тогда и только тогда, когда она является критическим значением функции $F|_{M'}$.

2.8. Замечания. 1°. Семейство Лефшеца в окрестности M' . Из доказательства теоремы следует, что в малой окрестности подмногообразия M' голоморфная функция Морса F гладко эквивалентна комплексификации вещественно-аналитической функции $M \rightarrow \mathbb{R}P^1$, эквивалентной заданной морсовской функции f .

2°. Симплектическая структура. Полученное в теореме 2.7 подмногообразие M' лагранжево относительно симплектической формы ω' на X , изотопной заданной кэлеровой форме. Рассматривая пучки Лефшеца, соответствующие достаточно высоким степеням расслоения $\mathcal{L}$, эту изотопию можно сделать сколь угодно малой. Таким образом, можно считать форму ω' положительной относительно комплексной структуры на X . Имеется стандартный способ продолжить ω' до положительной симплектической формы $\tilde{\omega}$ на многообразии $\tilde{X}$. В этом случае ограничение формы $\tilde{\omega}$ на каждый слой $\tilde{X}_c = F^{-1}(c)$ семейства Лефшеца $F: \tilde{X} \rightarrow \mathbb{C}P^1$ также является симплектической формой и пересечение $M' \cap \tilde{X}_c$ есть лагранжево подмногообразие в $(\tilde{X}_c, \tilde{\omega}|_{\tilde{X}_c})$.

3°. Погруженные подмногообразия. Гайе [8] доказал, что теорема Дюваля–Сибони–Геджа справедлива и для погруженных лагранжевых подмногообразий с трансверсальными двойными точками. Можно обобщить теорему 2.7 на этот случай. Следует поместить двойные точки подмногообразия M в особые точки

семейства Лефшеца. Модельным примером является сфера Уитни в $\mathbb{C}^n$, вложенная в семейство квадратичных гиперповерхностей (см. п. 2.9).

2.9. Примеры. Интересно было бы найти утверждение, “обратное” к теореме 2.7, что позволило бы строить лагранжевы подмногообразия с заданными свойствами в пучках Лефшеца. В общем случае этот вопрос должен быть связан с “симплектической монодромией” семейств Лефшеца (ср. [1] и [17]). Здесь мы ограничимся рассмотрением некоторых известных примеров лагранжевых вложений с этой точки зрения.

1°. *Стандартный тор* $T = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1| = |z_2| = 1\}$ вложен в пучок вертикальных (или горизонтальных) прямых, причем проекция пучка задает стандартную функцию Морса $f_{(1)}: T \rightarrow S^1$ без критических точек.

Тор T также вложен в пучок прямых, проходящих через начало координат. Соответствующая окружность Γ – это единичная окружность в $\mathbb{CP}^1$. Индуцированная этим пучком морсовская функция $T \rightarrow S^1$ эквивалентна $f_{(1)}$ посредством не тривиального диффеоморфизма тора T .

2°. *Другой тор.* Можно сравнить стандартный тор с лагранжевым тором

$$T_\lambda = \{(\lambda(\theta_1) \cos \theta_2, \lambda(\theta_1) \sin \theta_2) \in \mathbb{C}^2 \mid (\theta_1, \theta_2) \in S^1 \times S^1\},$$

где $\lambda: S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ – произвольное вложение окружности в правую полуплоскость, т.е. $\operatorname{Re} \lambda(\theta_1) > 0$ при всех $\theta_1 \in S^1$. По построению тор T_λ вложен в пучок прямых, проходящих через начало координат. Соответствующая окружность $\Gamma = \mathbb{RP}^1$ состоит из “вещественных” прямых. Однако индуцированная функция Морса $f_{(2)}: T_\lambda \rightarrow S^1$ эквивалентна композиции $\mathbf{2} \circ f_{(1)}$, где $\mathbf{2}$ обозначает двулистное накрытие окружности. (Это так, поскольку пересечение тора T_λ с каждой “вещественной” комплексной прямой состоит из двух компонент $\pm \lambda(S^1)$.)

Чеканов [3] доказал, что при $\lambda(\theta) = e^{\cos \theta}(1 + i \sin \theta)$ тор T_λ нельзя перевести в стандартный тор глобальным симплектоморфизмом, хотя эти торы изотопны в классе лагранжевых торов в $\mathbb{C}^2$ и имеют одинаковые классические инварианты. Возникает искушение объяснить это различие тем, что простейший возможный пучок Лефшеца на $\mathbb{C}^2$ индуцирует неэквивалентные функции Морса на T_λ и T .

3°. *Нечетномерные бутылки Клейна.* Напомним, что n -мерная бутылка Клейна K^n получается, если склеить концы цилиндра $S^{n-1} \times [0, 1]$ по отражению

$$\mathbb{R}^n \supset S^{n-1} \ni (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (-x_1, x_2, \dots, x_n) \in S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n.$$

Лалонд [13] показал, что $(2k+1)$ -мерная бутылка Клейна допускает лагранжево вложение в $\mathbb{R}^{4k+2}$. Мы выпишем явную формулу для такого вложения. Заметим, что на четномерной сфере S^{2k} отражение, использованное в определении бутылки Клейна, изотопно антиподальному отображению

$$\mathbb{R}^{2k+1} \supset S^{2k} \ni (x_1, x_2, \dots, x_{2k+1}) \mapsto (-x_1, -x_2, \dots, -x_{2k+1}) \in S^{2k} \subset \mathbb{R}^{2k+1}.$$

Следовательно, формула

$$\mathbb{R}^{2k+1} \times [0, 1] \supset S^{2k} \times [0, 1] \ni (x_1, \dots, x_{2k+1}, t) \mapsto (e^{\pi i t} x_1, \dots, e^{\pi i t} x_{2k+1}) \in \mathbb{C}^{2k+1}$$

задает вложение нечетномерной бутылки Клейна K^{2k+1} в $\mathbb{C}^{2k+1}$. Нетрудно убедиться в том, что это вложение лагранжево относительно стандартной симплектической формы на $\mathbb{C}^{2k+1}$.

Полученная лагранжева бутылка Клейна вложена в пучок Лефшеца квадратичных гиперповерхностей

$$Q_a = \left\{ z \in \mathbb{C}^{2k+1} \mid \sum_{j=1}^{2k+1} z_j^2 = a \right\}, \quad a \in \mathbb{C}.$$

Это вложение геометрически реализует монодромию исчезающего цикла в неособом слое Q_1 вокруг особого слоя Q_0 . Бутылка Клейна появляется именно в нечетных размерностях в силу формулы Пикара–Лефшеца, согласно которой монодромия обращает (соответственно, сохраняет) знак исчезающего цикла, если размерность пространства нечетна (соответственно, четна). Поэтому, если комплексная размерность объемлющего пространства четна, та же конструкция задает лагранжево вложение $S^{2k-1} \times S^1 \hookrightarrow \mathbb{C}^{2k}$.

4°. *Сфера Уитни*. Рассмотрим погружение $S^n \hookrightarrow \mathbb{C}^n$, заданное следующей формулой:

$$\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1} \supset S^n \ni (x_1, \dots, x_n, y) \longmapsto ((1+iy)x_1, \dots, (1+iy)x_n) \in \mathbb{C}^n.$$

Эта сфера погружена в квадратичный пучок Лефшеца таким образом, что ее единственная двойная точка находится в особой точке $0 \in \mathbb{C}^n$ пучка. Сфера Уитни проектируется вдоль пучка на вложенную окружность

$$\Gamma = \{ \sin^2 \theta (1 + i \cos \theta)^2 \mid \theta \in [0, \pi] \} \subset \mathbb{C}^1.$$

Индуктированная этой проекцией функция Морса получается следующим образом. Во-первых, возьмем функцию Морса $y: S^n \rightarrow [-1, 1]$ с двумя критическими точками, достигающую своего максимума $y = 1$ и минимума $y = -1$ в двух прообразах двойной точки погружения Уитни. Затем превратим y в функцию со значениями в окружности, отождествив концы отрезка $[-1, 1]$.

Оставляем читателю проверку того, что все рассмотренные нами примеры можно получить из сферы Уитни с помощью лагранжевой хирургии в квадратичном пучке Лефшеца. Иначе говоря, необходимо сдвинуть окружность $\Gamma \subset \mathbb{C}^1$ с критического значения $0 \in \mathbb{C}^1$ одним из двух топологически возможных способов.

§ 3. Бутылки Клейна в семействах Лефшеца

3.1. Ситуация. Двумерная бутылка Клейна K может быть получена из цилиндра $S^1 \times [0, 1]$ склеиванием его концов $S^1 \times \{1\}$ и $S^1 \times \{0\}$ по обращаемому ориентацию диффеоморфизму окружности. Иными словами, бутылка Клейна – это единственное неориентируемое S^1 -расслоение над S^1 . Очевидно, проекция этого расслоения на базу является функцией Морса $p: K \rightarrow S^1$ без критических точек.

Рассмотрим теперь семейство Лефшеца $F: X \rightarrow \mathbb{CP}^1$ на компактной комплексной поверхности. Прообраз любой точки в $\mathbb{CP}^1 \setminus \text{Crit}(F)$ есть неособая неприводимая комплексная кривая и, в частности, связная ориентируемая вещественная поверхность. Отметим, что эта ориентация непрерывно зависит от слоя (“семейство Лефшеца является киральным”). Таким образом, прообраз вложенной окружности $\Gamma \subset \mathbb{CP}^1 \setminus \text{Crit}(F)$ есть ориентируемое трехмерное многообразие $X_\Gamma = F^{-1}(\Gamma)$, расслоенное над окружностью $S^1 \cong \Gamma$.

3.2. Предложение. *Предположим, что бутылка Клейна K вложена в многообразие X_Γ таким образом, что ограничение $F|_K: K \rightarrow \Gamma$ эквивалентно канонической функции Морса без критических точек. Тогда гомологический класс $[K] \in H_2(X; \mathbb{Z}_2)$ отличен от нуля.*

3.3. Доказательство теоремы 0.2. Если задано лагранжево вложение бутылки Клейна K в проективную поверхность Y , то естественно применить теорему 2.7 к функции Морса $p: K \rightarrow S^1$. А именно, существует такое семейство Лефшеца на раздутии $X = \hat{Y}$ комплексной поверхности Y , что заданное вложение бутылки Клейна изотопно послойному вложению, рассматриваемому в предложении 3.2. Следовательно, отличен от нуля класс гомологий с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$, представленный бутылкой Клейна K в поверхности X . Остается заметить, что этот класс гомологий является образом класса $[K] \in H_2(Y; \mathbb{Z}_2)$ при естественном вложении $H_2(Y; \mathbb{Z}_2) \subset H_2(X; \mathbb{Z}_2)$, откуда следует утверждение теоремы 0.2.

3.4. Доказательство предложения 3.2. Рассмотрим сначала трехмерную трубчатую окрестность $U_\Gamma \supset K$ в многообразии X_Γ . Нетрудно видеть, что отображение $F|_{U_\Gamma}: U_\Gamma \rightarrow \Gamma$ является расслоением на кольца, эквивалентным следующей модели. Возьмем стандартное кольцо

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{2} < |z| < 2 \right\}$$

и сохраняющий ориентацию диффеоморфизм

$$\psi: A \rightarrow A, \quad z \mapsto \psi(z) = \frac{1}{z}.$$

Окрестность U_Γ получается склеиванием концов цилиндра $A \times [0, 1]$ по диффеоморфизму $\psi: A \times \{1\} \rightarrow A \times \{0\}$. Бутылка Клейна $K \subset U_\Gamma$ соответствует подцилиндру $\{|z| = 1\} \times [0, 1]$. (Заметим, что ограничение диффеоморфизма ψ на единичную окружность обращает ориентацию.)

Диффеоморфизм ψ имеет две неподвижные точки $z = \pm 1 \in A$. Рассмотрим замкнутую кривую $\gamma \subset U_\Gamma$, соответствующую неподвижной точке $z = 1$. Оказывается, что индекс пересечения гомологических классов $[\gamma] \in H_1(U_\Gamma; \mathbb{Z}_2)$ и $[K] \in H_2(U_\Gamma; \mathbb{Z}_2)$ равен

$$[\gamma] \cdot [K] = 1 \in \mathbb{Z}_2.$$

Действительно, кривая $\gamma \subset K$ обращает ориентацию, и, следовательно, значение первого класса Штифеля–Уитни $w_1(K) \in H^1(K; \mathbb{Z}_2)$ на гомологическом классе $[\gamma] \in H_1(K; \mathbb{Z}_2)$ равно $1 \in \mathbb{Z}_2$. Окрестность $U_\Gamma \supset K$ ориентируема, поэтому первый класс Штифеля–Уитни нормального расслоения к K совпадает с $w_1(K)$. Остается воспользоваться тем, что

$$[\gamma] \cdot [K] = \langle w_1(\text{нормальное расслоение к } K \text{ в } U_\Gamma), [\gamma] \rangle_K.$$

Вторая группа когомологий $H^2(U_\Gamma; \mathbb{Z}_2)$ изоморфна группе $H^2(K; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$. Обозначим через $\mathfrak{s}$ образующую этой группы, т. е. единственный класс когомологий в U_Γ , принимающий ненулевое значение на $[K]$. Из предыдущего вычисления следует, что $\mathfrak{s} = \text{PD}[\gamma]$, где отображение

$$\text{PD}: H_1(U_\Gamma; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^2(U_\Gamma; \mathbb{Z}_2)$$

есть композиция отображения двойственности Пуанкаре и естественного отображения из гомологий с компактным носителем в гомологии с произвольным носителем.

В следующей лемме 3.5 будет показано, что кохомологический класс $\mathfrak{s} \in H^2(U_\Gamma; \mathbb{Z}_2)$ допускает удобную геометрическую интерпретацию и может быть продолжен на все многообразие X . Однако если существует класс кохомологий $\tilde{\mathfrak{s}} \in H^2(X; \mathbb{Z}_2)$, для которого $\tilde{\mathfrak{s}}|_{U_\Gamma} = \mathfrak{s}$, то обязательно

$$\langle \tilde{\mathfrak{s}}, [K] \rangle_X = \langle \mathfrak{s}, [K] \rangle_{U_\Gamma} = [\gamma] \cdot [K] = 1,$$

откуда следует нетривиальность класса $[K] \in H_2(X; \mathbb{Z}_2)$.

3.5. Лемма. *Существует такое комплексное линейное расслоение $\mathcal{S}$ на многообразии X (послойное спинорное расслоение), что ограничение второго класса Штифеля–Уитни $w_2(\mathcal{S}) \in H^2(X; \mathbb{Z}_2)$ на окрестность $U_\Gamma \subset X_\Gamma$ совпадает с классом кохомологий $\mathfrak{s} \in H^2(U_\Gamma; \mathbb{Z}_2)$.*

Сначала имеет смысл объяснить появление спиноров в формулировке этой леммы. Рассмотрим тривиальное комплексное линейное расслоение

$$A \times [0, 1] \times \mathbb{C} \longrightarrow A \times [0, 1]$$

и склеим линейное расслоение S над U_Γ , отождествляя слои над точками $(z, 1)$ и $(\psi(z), 0) = (1/z, 0)$ посредством комплексного умножения на i/z . Комплекснозначная функция

$$s(z, t) = e^{\frac{\pi i}{2} t} (z - 1)$$

на цилиндре $A \times [0, 1]$ определяет сечение расслоения S , множество нулей которого есть в точности кривая $\gamma \subset U_\Gamma$. Действительно, функция $s = s(z, t)$ удовлетворяет заданному условию склейки:

$$\frac{i}{z} s(z, 1) = \frac{1}{z} - 1 = s(\psi(z), 0).$$

Поскольку второй класс Штифеля–Уитни комплексного линейного расслоения (рассматриваемого как ориентируемое $\mathbb{R}^2$ -расслоение) двойствен к множеству нулей общего сечения, мы получаем

$$w_2(S) = \text{PD}[\gamma] = \mathfrak{s} \in H^2(U_\Gamma; \mathbb{Z}_2).$$

Заметим теперь, что расслоение $S \rightarrow U_\Gamma$ получено склеиванием по “квадратному корню” из дифференциала $d\psi(z) = -\frac{dz}{z^2}$ диффеоморфизма $\psi: A \rightarrow A$. С точки зрения дифференциальной геометрии, объекты, преобразующиеся таким образом, суть спиноры на кольце A . Таким образом, S – это “послойное (или относительное) спинорное расслоение” на семействе колец $U_\Gamma \rightarrow \Gamma$.

Для того чтобы завершить доказательство леммы 3.5 и предложения 3.2, напомним свойства спинорного расслоения ориентируемой поверхности, а затем построим послойное спинорное расслоение на семействе Лефшеца.

3.6. Доказательство леммы 3.5. Рассмотрим связную ориентированную вещественную поверхность Σ . Расслоение единичных окружностей $ST\Sigma$ в ее касательном расслоении $T\Sigma$ имеет естественную структуру главного $U(1)$ -расслоения. Первый класс Черна $c_1(ST\Sigma) \in H^2(\Sigma; \mathbb{Z})$ этого расслоения четен (делится на два). Поскольку группа $H^2(\Sigma; \mathbb{Z})$ не имеет кручения, существует единственный корень квадратный из расслоения $ST\Sigma$, т. е. $U(1)$ -расслоение $\text{Spin}\Sigma$ с первым классом Черна $c_1(\text{Spin}\Sigma) = \frac{1}{2}c_1(ST\Sigma)$. Комплексное линейное расслоение над Σ , ассоциированное с главным $U(1)$ -расслоением $\text{Spin}\Sigma$, называется (положительным) *спинорным расслоением* поверхности Σ .

Дифференциал сохраняющего ориентацию диффеоморфизма $\varphi \in \text{Diff}_+(\Sigma)$ действует естественным образом на расслоении $ST\Sigma$. Поскольку расслоение $\text{Spin}\Sigma$ является квадратным корнем из $ST\Sigma$, это действие поднимается на спинорное расслоение двумя способами, которые получаются друг из друга послойным умножением на -1 . Следовательно, два поднятия диффеоморфизма φ на спиноры изотопны в классе послойных диффеоморфизмов расслоения $\text{Spin}\Sigma$.

Вернемся теперь к семейству Лефшеца $F: X \rightarrow \mathbb{CP}^1$. Каждой замкнутой петле в $\mathbb{CP}^1 \setminus \text{Crit}(F)$, проходящей через отмеченную точку $b \in \mathbb{CP}^1 \setminus \text{Crit}(F)$, соответствует изотопический класс сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов неособого слоя $X_b = F^{-1}(b)$. Указанное соответствие определяет *представление монодромии* фундаментальной группы $\pi_1(\mathbb{CP}^1 \setminus \text{Crit}(F), b)$ в группе изотопических классов диффеоморфизмов $\text{Mar}(X_b)$.

Представление монодромии семейства Лефшеца $F: X \rightarrow \mathbb{CP}^1$ поднимается на спинорное расслоение слоя X_b в следующем смысле. Каждой петле в $\mathbb{CP}^1 \setminus \text{Crit}(F)$, проходящей через отмеченную точку $b \in \mathbb{CP}^1 \setminus \text{Crit}(F)$, сопоставляется изотопический класс послойных диффеоморфизмов расслоения $\text{Spin}X_b$, содержащий спинорные поднятия отображений монодромии для этой петли.

Поднятие представления монодромии на $\text{Spin}X_b$ определяет (вообще говоря, не единственное) комплексное линейное расслоение $\mathcal{S} \rightarrow X$. Над прообразом $F^{-1}(\mathbb{CP}^1 \setminus \text{Crit}(F))$ расслоение $\mathcal{S}$ строится явным склеиванием по спинорным поднятиям диффеоморфизмов монодромии. Остается установить продолжимость этого расслоения на особые слои семейства Лефшеца.

Пусть $B \subset \mathbb{CP}^1$ – малый замкнутый диск с центром в критическом значении $c \in \text{Crit}(F)$, и пусть $X_B = F^{-1}(B)$ и $X_{\partial B} = F^{-1}(\partial B)$. Легко видеть, что образ гомоморфизма ограничения

$$H^2(X_B; \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(X_{\partial B}; \mathbb{Z})$$

содержит класс $\text{PD}[\sigma(\partial B)]$, где $\sigma: B \rightarrow X_B$ – произвольное сечение семейства $F|_B: X_B \rightarrow B$. Монодромия, соответствующая обходу вокруг критического значения, задается скручиванием Дена относительно исчезающего цикла, поэтому

$$c_1(\mathcal{S}|_{X_{\partial B}}) = \frac{\chi(X_b)}{2} \text{PD}[\sigma(\partial B)].$$

Таким образом, построенное на $F^{-1}(\mathbb{CP}^1 \setminus \text{Crit}(F))$ расслоение $\mathcal{S}$ продолжается на все многообразие X .

Вспомним теперь, что линейное расслоение S на трехмерной окрестности $U_\Gamma \supset K$ было получено склеиванием по спинорному поднятию диффеоморфизма $\psi \in \text{Diff}_+(A)$. Этот диффеоморфизм продолжается до диффеоморфизма монодромии $\Psi \in \text{Diff}_+(X_b)$, ассоциированного с кривой Γ . Таким образом, ограничение послойного спинорного расслоения $\mathcal{S}$ на U_Γ действительно изоморфно расслоению S .

Как упоминалось в приведенном выше доказательстве, послойное спинорное расслоение $\mathcal{S}$ определено неоднозначно. Его можно “подкрутить” на линейное расслоение на X , первый класс Черна которого двойствен по Пуанкаре какому-либо классу гомологий с носителем в слоях семейства Лефшеца. Можно, например, взять кратное класса слоя или одной из компонент приводимого особого слоя (если таковые имеются, т. е. если есть разбивающие исчезающие циклы). Однако если задано глобальное сечение $\sigma: \mathbb{CP}^1 \rightarrow X$ семейства Лефшеца $F: X \rightarrow \mathbb{CP}^1$, то ему можно сопоставить некоторое однозначно определенное послойное спинорное расслоение $\mathcal{S} = \mathcal{S}(X, F, \sigma)$. В этой связи стоит отметить, что семейство Лефшеца, полученное раздутием базисного множества пучка Лефшеца, заведомо имеет глобальное сечение.

Список литературы

1. *Arnol'd V. I.* Some remarks on symplectic monodromy of Milnor fibrations // The Floer memorial volume. Progr. Math. V. 133. Basel: Birkhäuser, 1995. P. 99–103.
2. *Audin M.* Quelques remarques sur les surface lagrangiennes de Givental' // J. Geom. Phys. 1990. V. 7. P. 583–598.
3. *Chekanov Yu.* Lagrangian tori in a symplectic vector space and global symplectomorphisms // Math. Z. 1996. V. 223. P. 547–559.
4. *Donaldson S. K.* Lefschetz pencils on symplectic manifolds // J. Diff. Geom. 1999. V. 53. P. 205–236.
5. *Donaldson S. K.* Polynomials, vanishing cycles and Floer homology // Mathematics: frontiers and perspectives. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2000. P. 55–64.
6. *Duval J.* Convexité rationelle des surfaces lagrangiennes // Invent. Math. 1991. V. 104. P. 581–599.
7. *Duval J., Sibony N.* Polynomial convexity, rational convexity, and currents // Duke Math. J. 1995. V. 79. P. 487–513.
8. *Gayet D.* Convexité rationelle des sous-variétés immergées lagrangiennes // Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 2000. V. 33. P. 291–300.
9. *Gatien D., Lalonde F.* Holomorphic cylinders with Lagrangian boundaries and Hamiltonian dynamics // Duke Math. J. 2000. V. 102. P. 485–511.
10. *Гивенталь А. Б.* Лагранжевы вложения поверхностей и раскрытый зонтик Уитни // Функцион. анализ и его прилож. 1986. Т. 20. С. 35–41.
11. *Guedj V.* Approximation of currents on complex manifolds // Math. Ann. 1999. V. 313. P. 437–474.
12. *Gunning R. C., Rossi H.* Analytic functions of several complex variables. N.Y.: Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1965.
13. *Lalonde F.* Suppression lagrangienne de points doubles et rigidité symplectique // J. Diff. Geom. 1992. V. 36. P. 747–764.
14. *Lamotke K.* The topology of complex projective varieties after S. Lefschetz // Topology. 1981. V. 20. P. 15–51.
15. *Mohnke K.* Lagrangian embeddings and holomorphic discs in the complement of complex hypersurfaces // Israel J. Math. 2001. V. 122. P. 117–123.
16. *Rudin W.* Totally real Klein bottles in $\mathbb{C}^2$ // Proc. Amer. Math. Soc. 1981. V. 82. P. 653–654.
17. *Seidel P.* A long exact sequence for symplectic Floer cohomology. Preprint math.SG/01-05186.
18. *Auroux D., Gayet D., Mohsen J.-P.* Symplectic hypersurfaces in the complement of an isotropic submanifold // Math. Ann. 2001. V. 321. P. 739–754.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
 E-mail: stefan@mccme.ru
 Ruhr-Universität Bochum
 E-mail: nemirov@cplx.ruhr-uni-bochum.de

Поступило в редакцию
 5.IX.2001