Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. С. Платонов, Инвариантные подпространства в некоторых функциональных пространствах на симметрических пространствах. III, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2002, том 66, выпуск 1, 167–202

DOI: <https://doi.org/10.4213/im376>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 15:10:32

УДК 517.954

С. С. Платонов

Инвариантные подпространства в некоторых функциональных пространствах на симметрических пространствах. III

Описывается строение замкнутых линейных подпространств в некоторых топологических векторных пространствах, состоящих из функций на некомпактном особом симметрическом пространстве $M = F_4/\text{Spin}(9)$ (пространстве Кэли) и инвариантных относительно естественного квазирегулярного представления группы F_4 . Среди рассматриваемых функциональных пространств содержатся, в частности, пространства $C^d(M)$ d раз непрерывно дифференцируемых функций ($d = 0, 1, \dots, \infty$) и пространства функций экспоненциального роста на M .

Библиография: 14 наименований.

§ 1. Введение и формулировка основных результатов

Пусть группа G транзитивно действует на гладком многообразии M . Для $g \in G$ и любой функции $f(x)$ на M положим

$$(\pi(g)f)(x) = f(g^{-1}x). \quad (1.1)$$

Локально выпуклое пространство (ЛВП) $\mathcal{F}$, состоящее из комплекснозначных функций на M (обычных или обобщенных), будем называть π -инвариантным, если из $f(x) \in \mathcal{F}$ и $g \in G$ следует, что $\pi(g)f \in \mathcal{F}$ и отображение $g \rightarrow \pi(g)f$ из G в $\mathcal{F}$ непрерывно. В этом случае операторы $\pi(g)|_{\mathcal{F}}$ (будем обозначать их просто через $\pi(g)$) определяют квазирегулярное представление группы G в топологическом векторном пространстве $\mathcal{F}$. Линейное подпространство $H \subseteq \mathcal{F}$ будем называть *инвариантным подпространством* (сокращенно ИПП), если оно замкнуто и π -инвариантно. Одной из основных задач гармонического анализа на группах Ли является задача об описании всех ИПП для конкретных групп Ли и конкретных функциональных пространств, выделяемых различными условиями гладкости и роста функций.

Далее будем рассматривать случай, когда $M = G/K$ – риманово симметрическое пространство некомпактного типа, G – полупростая связная группа Ли с конечным центром, K – максимальная компактная подгруппа в группе G . Группа G транзитивно действует на M левыми сдвигами. В качестве функциональных пространств $\mathcal{F}$ будем рассматривать пространства двух классов. Пространства

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 99-01-00782).

одного класса состоят из “всех” функций на M , без ограничений на рост, но удовлетворяющих некоторым условиям гладкости. Более точно: пусть $\mathcal{E}$ – пространство бесконечно дифференцируемых функций на M , $\mathcal{D}$ – пространство бесконечно дифференцируемых функций на M с компактным носителем, $\mathcal{D}'$ – пространство обобщенных функций на M (все классические функциональные пространства берутся с обычными топологиями), тогда в качестве $\mathcal{F}$ можно взять любое полное π -инвариантное ЛВП такое, что

$$\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{D}',$$

причем вложения непрерывны. Будем называть такие пространства $\mathcal{F}$ *пространствами типа 1*. Примерами пространств типа 1 служат пространства $C^d(M)$, $d = 0, 1, 2, \dots, \infty$, d раз непрерывно дифференцируемых функций, в частности пространства $C^0(M) = C(M)$ непрерывных функций и $\mathcal{E} = C^\infty(M)$ бесконечно дифференцируемых функций, а также пространство $\mathcal{D}'$.

Функциональные пространства другого класса состоят из функций экспоненциального роста в некотором смысле, который нуждается в уточнении. Пусть o – фиксированная точка пространства M , для $x \in M$ пусть $|x|$ – расстояние от точки x до точки o . Для любого $k \in \mathbb{R}$ обозначим через C_k множество всех непрерывных функций $f(x)$ на M , для которых $|f(x)|e^{-k|x|} \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$. Очевидно, что C_k не зависит от выбора точки o . Множество C_k является банаховым пространством (БП) относительно нормы

$$N_k(f) = \sup_{x \in M} |f(x)|e^{-k|x|}.$$

Пространство

$$C_* = \bigcup_{k > 0} C_k$$

снабдим топологией индуктивного предела БП C_k .

Пусть $\mathfrak{g}_0$ – алгебра Ли группы G . Для $X \in \mathfrak{g}_0$ и функции $f(x)$ пусть

$$(Xf)(x) = \left. \frac{d}{dt} f(\exp(-tX)x) \right|_{t=0}, \quad (1.2)$$

т.е. действие Xf индуцировано действием (1.1) группы G . Выберем какой-нибудь базис $X_1, \dots, X_m$ в $\mathfrak{g}_0$. Через $\mathcal{E}_k$ обозначим множество функций $f(x) \in C^\infty(M)$, которые принадлежат пространству C_k вместе со всеми производными, т.е.

$$X_{i_1} \dots X_{i_r} f \in C_k$$

для любых векторов (возможно, повторяющихся) $X_{i_1}, \dots, X_{i_r}$ из базиса. Пространство $\mathcal{E}_k$ является локально выпуклым пространством с топологией, порожденной семейством полунорм $N_{k,d}$, $d \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$, где

$$N_{k,d}(f) = \sum N_k(X_{i_1} \dots X_{i_r} f),$$

суммирование происходит по всевозможным наборам $(i_1, \dots, i_r)$, $0 \leq r \leq d$, каждый индекс в наборе пробегает значения от 1 до m .

Пространство

$$\mathcal{E}_* = \bigcup_{k>0} \mathcal{E}_k$$

снабдим топологией индуктивного предела ЛВП $\mathcal{E}_k$.

Пусть

$$\mathcal{K} = \bigcap_{k>0} \mathcal{E}_{-k}.$$

Пространство $\mathcal{K}$ состоит из функций, которые стремятся к нулю со всеми производными быстрее, чем $e^{-k|x|}$ для любого $k > 0$, и является локально выпуклым пространством с топологией, порожденной системой полунорм $N_{-k,d}$ для всех $k > 0$, $d \in \mathbb{Z}_+$. Пусть $\mathcal{K}'$ – сопряженное к $\mathcal{K}$ пространство, снабженное слабой топологией. Назовем $\mathcal{K}'$ *пространством обобщенных функций экспоненциального роста*.

Будем называть полное π -инвариантное пространство $\mathcal{F}$ *функциональным пространством экспоненциального роста* или *пространством типа 2*, если

$$\mathcal{E}_* \subseteq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{K}',$$

причем вложения непрерывны.

Примерами пространств типа 2 являются пространства C_* и $\mathcal{E}_*$. Другие примеры пространств типа 2 приведены в [1, § 2].

Настоящая работа является завершением серии статей [1]–[3], в которых получено полное описание ИПП в функциональных пространствах типов 1 и 2 на симметрических пространствах ранга 1 некомпактного типа. Из классификации симметрических пространств (см. [4]) известно, что все римановы симметрические пространства G/K ранга 1 некомпактного типа исчерпываются тремя бесконечными сериями (всюду $n \geq 2$): $SO_0(n, 1)/SO(n)$, $SU(1, n)/U(n)$, $Sp(1, n)/Sp(1) \times Sp(n)$ (будем называть эти пространства *классическими*) и одним особым симметрическим пространством $F_4/Spin(9)$ (*пространством Кэли*). Для классических пространств описание ИПП получено в [1]–[3]. В настоящей работе получено описание ИПП в функциональных пространствах типов 1 и 2 на особом симметрическом пространстве ранга 1. Приведем схему и основные результаты этого описания.

Пусть $\mathcal{F}$ – произвольное ЛВП, топология в котором задается семейством полунорм p_α , E – конечномерное векторное пространство (если не оговаривается противное, то все векторные пространства рассматриваются над полем $\mathbb{C}$). Тензорное произведение векторных пространств $\mathcal{F} \otimes E$ естественным образом снабжается структурой ЛВП. Топологию в этом пространстве можно задать, например, следующим образом. Пусть $e_1, \dots, e_n$ – базис в E ; тогда любой элемент $F \in \mathcal{F} \otimes E$ единственным образом представим в виде $F = f_1 \otimes e_1 + \dots + f_n \otimes e_n$, где $f_j \in \mathcal{F}$. Полагаем

$$\tilde{p}_\alpha(F) := p_\alpha(f_1) + \dots + p_\alpha(f_n).$$

Топология в $\mathcal{F} \otimes E$ задается семейством полунорм $\tilde{p}_\alpha$. Очевидно, что эта топология не зависит от выбора базиса в E . Если ЛВП $\mathcal{F}$ состоит из $\mathbb{C}$ -значных функций на M , то элементы из $\mathcal{F} \otimes E$ мы будем обычным образом отождествлять с функциями на M со значениями в векторном пространстве E , полагая

$$F(x) := f_1(x) e_1 + \dots + f_n(x) e_n,$$

где $F = f_1 \otimes e_1 + \dots + f_n \otimes e_n \in \mathcal{F} \otimes E$.

Пусть Λ – множество классов эквивалентности неприводимых конечномерных представлений группы K . Для $\lambda \in \Lambda$ пусть $T^\lambda(u)$ – соответствующее неприводимое представление группы K , E^λ – пространство представления, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – некоторая K -инвариантная эрмитова форма в E^λ .

Для любого π -инвариантного ЛВП $\mathcal{F}$ обозначим через $\mathcal{F}^{(\lambda)}$ множество функций $F \in \mathcal{F} \otimes E^\lambda$, удовлетворяющих условию

$$F(ux) = T^\lambda(u)F(x) \quad \forall u \in K. \quad (1.3)$$

Очевидно, что $\mathcal{F}^{(\lambda)}$ является замкнутым линейным подпространством в $\mathcal{F} \otimes E^\lambda$. Пространство $\mathcal{F}^{(\lambda)}$ снабжается структурой ЛВП, индуцированной из $\mathcal{F} \otimes E^\lambda$. В частности, возникают пространства $C^{d(\lambda)}$ и $\mathcal{E}^{(\lambda)} = C^\infty(\lambda)$. Пусть Λ_0 – множество $\lambda \in \Lambda$, для которых $\mathcal{F}^{(\lambda)} \neq \{0\}$.

Для любого ИПП $H \subset \mathcal{F}$ (везде будем считать, что $H \neq \mathcal{F}$) через $H^{(\lambda)}$ обозначим множество всех функций $F(x) \in \mathcal{F}^{(\lambda)}$ таких, что для всякого $\xi \in E^\lambda$ функция $f_\xi(x) = \langle F(x), \xi \rangle$ принадлежит H . Если $\mathcal{F}$ – полное ЛВП, то подпространство H однозначно восстанавливается по набору подпространств $H^{(\lambda)}$, а именно H совпадает с замыканием в $\mathcal{F}$ линейной оболочки функций $\langle F(x), \xi \rangle$ при $F \in H^{(\lambda)}$, $\xi \in E^\lambda$, $\lambda \in \Lambda$ (см. [1, § 3]). Будем называть подпространства $H^{(\lambda)}$ *ячейками* ИПП H , или просто ячейками. Ненулевые ячейки могут быть только при $\lambda \in \Lambda_0$.

Общая схема описания ИПП следующая: описывается строение всевозможных ячеек и затем определяются условия, при которых набор ячеек соответствует одному ИПП. Для классических симметрических пространств такое описание ИПП получено в [1]–[3]. В настоящей работе рассматривается случай, когда M – особое симметрическое пространство ранга 1.

Напомним некоторые стандартные обозначения из теории симметрических пространств (см. [5], [6]). Пусть $M = G/K$ – произвольное риманово симметрическое пространство некомпактного типа, G – связная полупростая группа Ли с конечным центром, K – ее максимальная компактная подгруппа. Пусть $\mathfrak{g}_0$ и $\mathfrak{k}_0$ – алгебры Ли групп G и K соответственно, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0$ – разложение Картана алгебры Ли $\mathfrak{g}_0$. Выберем в пространстве $\mathfrak{p}_0$ максимальное абелево подпространство $\mathfrak{a}_0$ и дополним его до максимальной абелевой подалгебры $\mathfrak{h}_0$ в $\mathfrak{g}_0$. Пусть $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{h}$ – комплексификации пространств $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{k}_0$, $\mathfrak{p}_0$, $\mathfrak{a}_0$ и $\mathfrak{h}_0$ соответственно. Тогда $\mathfrak{h}$ является подалгеброй Картана в $\mathfrak{g}$. Относительно этой подалгебры Картана рассматриваются корни, ограниченные корни (т.е. ограничения корней на $\mathfrak{a}$). Обозначим через Σ множество ограниченных корней ($\Sigma \subset \mathfrak{a}^*$, $\mathfrak{a}^*$ – сопряженное к $\mathfrak{a}$ пространство), а через Σ^+ – подмножество положительных ограниченных корней. Пусть $B_{\mathfrak{g}}(X, Y)$ – форма Киллинга алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Для любого функционала $\alpha \in \mathfrak{a}^*$ существует единственный элемент $H_\alpha \in \mathfrak{a}$, определяемый условием: $B_{\mathfrak{g}}(H_\alpha, H) = \alpha(H)$ для всех $H \in \mathfrak{a}$. Определим на $\mathfrak{a}^*$ билинейную форму $\langle \cdot, \cdot \rangle$, полагая $\langle \alpha, \beta \rangle := B_{\mathfrak{g}}(H_\alpha, H_\beta)$. Пусть $\rho \in \mathfrak{a}^*$ – полусумма положительных ограниченных корней, Δ – оператор Лапласа–Бельтрами на M (риманова метрика на M порождается формой Киллинга).

Далее будем считать, что M – симметрическое пространство ранга 1; тогда $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{a}_0 = 1$. Для любого функционала $\mu \in \mathfrak{a}^*$ и натурального r обозначим через

$V_{\mu,r}^{(\lambda)}$ подпространство в $\mathcal{E}^{(\lambda)}$, состоящее из всех функций $F(x)$, удовлетворяющих дифференциальному уравнению

$$(\Delta + \langle \mu, \mu \rangle + \langle \rho, \rho \rangle)^r F = 0.$$

Можно показать, что $\dim V_{\mu,r}^{(\lambda)} = r$ при $\lambda \in \Lambda_0$ и в пространстве $V_{\mu,r}^{(\lambda)}$ можно выбрать жорданов базис, т.е. такой базис $F_1, \dots, F_r$, что $\Delta F_1 = -(\langle \mu, \mu \rangle + \langle \rho, \rho \rangle) F_1$ и $\Delta F_k = -(\langle \mu, \mu \rangle + \langle \rho, \rho \rangle) F_k + F_{k-1}$ для $k \geq 2$. Отметим, что $V_{\mu,r}^{(\lambda)} = V_{-\mu,r}^{(\lambda)}$.

Для всех рассматриваемых пространств $\mathcal{F}$ подпространства $V_{\mu,r}^{(\lambda)}$ содержатся в $\mathcal{F}^{(\lambda)}$ и являются простейшими ячейками. В общем случае строение ячеек в $\mathcal{F}^{(\lambda)}$ описывается следующей теоремой.

ТЕОРЕМА I. *Для любой ячейки $H^{(\lambda)}$ в $\mathcal{F}^{(\lambda)}$, $\lambda \in \Lambda_0$, существует единственное конечное или счетное множество функционалов $\sigma \subset \mathfrak{a}^*$, причем каждый элемент $\mu \in \sigma$ может входить в σ с конечной кратностью, такое, что $H^{(\lambda)}$ является замыканием в $\mathcal{F}^{(\lambda)}$ линейной оболочки подпространств $V_{\mu,r}^{(\lambda)}$, где μ пробегает набор σ , а r – кратность функционала μ в этом множестве.*

Естественно назвать множество σ спектром ячейки $H^{(\lambda)}$. Можно дать более полное описание спектров всевозможных ячеек. Так как $\dim \mathfrak{a}^* = 1$, то, выбрав в $\mathfrak{a}^*$ базис, можно отождествить множество $\mathfrak{a}^*$ с множеством $\mathbb{C}$. Известно, что для симметрического пространства ранга 1 множество положительных ограниченных корней Σ^+ состоит из корней $\{\beta, 2\beta\}$ с некоторыми кратностями $m_\beta, m_{2\beta}$, зависящими от пространства M (возможно, что $m_{2\beta} = 0$). В качестве базиса в $\mathfrak{a}^*$ возьмем вектор β . Тогда можно считать, что $\mu \in \mathbb{C}$. Чтобы из каждой пары чисел μ и $(-\mu)$ выбрать одно число, будем считать, что $\mu \in \mathbb{C}_+$, где $\mathbb{C}_+$ – множество комплексных чисел z , удовлетворяющих условию $\operatorname{Re} z \geq 0$, а при $\operatorname{Re} z = 0$, кроме того, $\operatorname{Im} z \geq 0$. Таким образом, можно считать, что спектр σ является подмножеством в $\mathbb{C}_+$. Для пространства $\mathcal{F}$ типа 1 (типа 2) возможные спектры совпадают с конечными или счетными наборами $\sigma \subset \mathbb{C}_+$, удовлетворяющими следующему условию (A_1) (условию (A_2)).

(A_1) Существует целая ненулевая функция $\Phi(z)$, для которой каждое число μ , входящее в набор σ с кратностью r , является корнем функции $\Phi(z)$ кратности r , причем

$$|\Phi(z)| \leq A e^{B |\operatorname{Im} z|} (1 + |z|)^C$$

для некоторых $A, B, C > 0$ (такие функции $\Phi(z)$ являются преобразованиями Фурье обобщенных функций с компактными носителями).

(A_2) При каждом $t > 0$ набор $\sigma_t = \{\mu \in \sigma: |\operatorname{Im} \mu| \leq t\}$ должен быть конечным или, после упорядочения чисел из σ_t в порядке возрастания $\operatorname{Re} \mu$ ($0 \leq \operatorname{Re} \mu_1 \leq \operatorname{Re} \mu_2 \leq \dots$), должно выполняться условие $\operatorname{Re} \mu_j / j \rightarrow \infty$.

Теорема I справедлива для всех симметрических пространств ранга 1. Для классических пространств доказательства этой теоремы (с несколько измененной формулировкой) получены в [1]–[3], для особого симметрического пространства доказательство проводится в § 4.

Пусть в каждом пространстве $\mathcal{F}^{(\lambda)}$, $\lambda \in \Lambda_0$, зафиксирована ячейка $H^{(\lambda)}$ некоторого ИПП, вообще говоря, зависящего от λ , и пусть $\sigma(\lambda)$ – спектр ячейки $H^{(\lambda)}$. Далее будут получены необходимые и достаточные условия на спектры $\sigma(\lambda)$, при

которых ячейки $H^{(\lambda)}$ являются ячейками одного ИПП. Предварительно дадим более явное описание множества Λ_0 для особого пространства $M = F_4/\text{Spin}(9)$. В этом случае группа $K = \text{Spin}(9)$ является полупростой и односвязной, поэтому неприводимые представления группы K отождествляются с неприводимыми конечномерными представлениями соответствующей ей полупростой алгебры Ли $\mathfrak{k}$. Так как каждое неприводимое конечномерное представление алгебры Ли $\mathfrak{k}$ однозначно определяется своим старшим весом, то множество Λ отождествляется с множеством старших весов алгебры Ли $\mathfrak{k}$.

Пусть $\mathfrak{k}$ – произвольная полупростая алгебра Ли над $\mathbb{C}$, $\mathfrak{h}$ – ее подалгебра Картана. Если α – корень алгебры $\mathfrak{k}$ и $\mathfrak{k}(\alpha)$ – соответствующее ему корневое подпространство, то $[\mathfrak{k}(\alpha), \mathfrak{k}(-\alpha)]$ – одномерное подпространство в $\mathfrak{h}$. В этом подпространстве существует единственный вектор H_α такой, что $\alpha(H_\alpha) = 2$ (необходимые сведения из теории полупростых алгебр Ли см. в [7] или [8]). Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ – система простых корней алгебры $\mathfrak{k}$. Любое неприводимое конечномерное представление алгебры Ли $\mathfrak{k}$ задается старшим весом $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ ($\mathfrak{h}^*$ – множество линейных функционалов на $\mathfrak{h}$). При этом линейный функционал $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ является старшим весом некоторого неприводимого конечномерного представления алгебры Ли $\mathfrak{k}$ тогда и только тогда, когда все числа $\lambda_j = \lambda(H_{\alpha_j}) \in \mathbb{Z}_+$. Такие линейные функционалы называются *доминантными*. Поэтому будем отождествлять старший вес λ с набором неотрицательных целых чисел $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$, где $\lambda_j = \lambda(H_{\alpha_j})$.

Для особого симметрического пространства алгебра Ли $\mathfrak{k}$ изоморфна алгебре Ли $\mathfrak{so}(9) = B_4$. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ – простые корни алгебры Ли B_4 , взятые в порядке, определяемом диаграммой Дынкина

$$\begin{array}{ccccccc} \circ & - & \circ & - & \circ & \implies & \circ \\ \alpha_1 & & \alpha_2 & & \alpha_3 & & \alpha_4 \end{array}$$

В этом случае множество Λ_0 состоит из старших весов $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ алгебры Ли B_4 , имеющих вид $\lambda = (k, 0, 0, l)$, где $k, l \in \mathbb{Z}_+$ (т.е. $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, а λ_1 и λ_4 – произвольные числа из $\mathbb{Z}_+$).

Пусть в каждом пространстве $\mathcal{F}^{(\lambda)}$, $\lambda = (k, 0, 0, l) \in \Lambda_0$, зафиксирована ячейка $H^{(\lambda)}$ некоторого ИПП, вообще говоря, зависящего от λ , и пусть $\sigma(k, l) \subset \mathbb{C}_+$ – спектр ячейки $H^{(\lambda)}$.

ТЕОРЕМА II. *Ячейки $H^{(\lambda)}$, $\lambda = (k, 0, 0, l) \in \Lambda_0$, соответствуют одному ИПП тогда и только тогда, когда выполняются условия:*

- 1) для любых $k, l \in \mathbb{Z}_+$ спектры $\sigma(k, l)$ и $\sigma(k+1, l)$ совпадают или спектр $\sigma(k+1, l)$ получается из спектра $\sigma(k, l)$ уменьшением кратности числа $i(2k+2l+11)$ на 1 (здесь и далее $i = \sqrt{-1}$);
- 2) при $k \geq 1$ спектры $\sigma(k, l)$ и $\sigma(k-1, l+1)$ совпадают или спектр $\sigma(k-1, l+1)$ получается из спектра $\sigma(k, l)$ уменьшением кратности числа $i(2l+5)$ на 1.

В совокупности теоремы I и II дают полное описание инвариантных подпространств, и их доказательство является основной целью настоящей работы.

Из теорем I и II легко получить описание неприводимых и неразложимых ИПП в $\mathcal{F}$, где ИПП H называется *неприводимым*, если в H не существует ИПП $H_1 \subset H$,

отличного от H и нулевого подпространства, и H называется *неразложимым*, если $H \neq H_1 + H_2$ для ненулевых ИПП H_1 и H_2 таких, что $H_1 \cap H_2 = \{0\}$ (здесь $H_1 + H_2$ – замыкание алгебраической суммы подпространств). Каждое неприводимое ИПП задается комплексным числом $\mu \in \mathbb{C}_+$. Спектр $\sigma(0, 0)$ должен состоять из числа μ с кратностью 1, а остальные спектры $\sigma(k, l)$ определены так, чтобы получилось наименьшее ИПП, спектры которого удовлетворяют условиям 1) и 2) теоремы II. При $\mu \neq i(2d + 5)$, $d \in \mathbb{Z}_+$, все спектры $\sigma(k, l)$ должны состоять из одного числа μ с кратностью 1. Соответствующее ИПП (обозначим его через $\mathcal{F}(\mu)$) состоит из всех функций $f \in \mathcal{F} \cap C^\infty$, удовлетворяющих дифференциальному уравнению

$$(\Delta + \langle \mu, \mu \rangle + \langle \rho, \rho \rangle) f = 0, \quad (1.4)$$

т.е. это ИПП является собственным подпространством оператора Лапласа–Бельтрами (при этом используется введенное выше отождествление $\mathfrak{a}^*$ и $\mathbb{C}$). Из того что Δ – эллиптический оператор, легко получить, что это подпространство замкнуто в $\mathcal{F}$. Отметим, что неприводимость в $\mathcal{E}$ подпространства, состоящего из всех решений уравнения (1.4) при $\mu \neq i(2d + 5)$, и аналогичные результаты для других симметрических пространств ранга 1 установлены ранее С. Хелгасоном в [9].

При $\mu = i(2d + 5)$, $d \geq 3$, спектры $\sigma(k, l)$ должны состоять из числа μ с кратностью 1 при $2k + 2l + 11 \leq 2d + 5$ и $2l + 5 \leq 2d + 5$ и должны быть пустыми при остальных (k, l) . Так как второе неравенство вытекает из первого, то остается условие $k + l \leq d - 3$. Число пар (k, l) , удовлетворяющих условию $k + l \leq d - 3$, конечно, поэтому соответствующее неприводимое ИПП конечномерно.

При $\mu = i(2d + 5)$ и $d = 0, 1, 2$ возникают три бесконечномерные неприводимые ИПП, не совпадающие с $\mathcal{F}(\mu)$. В этом случае спектры $\sigma(k, l)$ состоят из числа μ с кратностью 1 при $l \leq d$ и спектры $\sigma(k, l)$, пустые при $l > d$. Отметим, что для классических симметрических пространств M бесконечномерные неприводимые ИПП, не являющиеся собственными подпространствами оператора Лапласа–Бельтрами, есть только при $M = \mathrm{Sp}(1, n)/\mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(n)$, причем там такое ИПП только одно [2].

ИПП H неразложимо тогда и только тогда, когда все его спектры $\sigma(k, l)$ состоят из одного числа μ (не зависящего от (k, l)) с некоторой кратностью. При $\mu \neq i(2d + 5)$, $d \in \mathbb{Z}_+$, эта кратность должна быть одинаковой для всех спектров $\sigma(k, l)$, а при $\mu = i(2d + 5)$ кратность может меняться в зависимости от (k, l) так, чтобы выполнялись условия 1) и 2) теоремы II. Если все спектры $\sigma(k, l)$ одинаковые и состоят из числа μ с кратностью r , то соответствующее неразложимое ИПП состоит из всех функций $f \in \mathcal{F} \cap C^\infty$, удовлетворяющих дифференциальному уравнению

$$(\Delta + \langle \mu, \mu \rangle + \langle \rho, \rho \rangle)^r f = 0.$$

В общем случае произвольное ИПП является замыканием конечной или счетной прямой суммы неразложимых ИПП.

Используя определение Беренштейна [10], будем говорить, что ИПП $H \subseteq \mathcal{F}$ допускает спектральный синтез, если H совпадает с наименьшим ИПП, содержащим ячейку $H^{(0)}$, где $0 = (0, 0, 0, 0)$ – старший вес тривиального одномерного представления группы K (в этом случае H совпадает также с наименьшим ИПП, содержащим сферические функции $\Phi_\mu(x)$ и их производные $\partial_\mu^k \Phi_\mu(x)$, $k = 0, 1, \dots, r - 1$, где μ пробегает спектр $\sigma(0)$, r – кратность числа μ). Из теоремы II сразу следует,

что ИПП H допускает спектральный синтез тогда и только тогда, когда спектры $\sigma(k, l)$ удовлетворяют условиям:

1) если спектр $\sigma(k, l)$ содержит число $\mu_1 = i(2k + 2l + 1)$, то спектр $\sigma(k + 1, l)$ получается из $\sigma(k, l)$ уменьшением кратности числа μ_1 на 1, в противном случае $\sigma(k + 1, l) = \sigma(k, l)$;

2) если спектр $\sigma(k, l)$ содержит число $\mu_2 = i(2l + 5)$, то спектр $\sigma(k - 1, l + 1)$ получается из $\sigma(k, l)$ уменьшением кратности числа μ_2 на 1, в противном случае $\sigma(k - 1, l + 1) = \sigma(k, l)$.

В частности, получаем теорему Ваврынчика [11]: если спектр $\sigma(0)$ не содержит чисел $\mu = i(2d + 5)$, $d \in \mathbb{Z}_+$, то подпространство H допускает спектральный синтез (в [11] рассматривалось пространство $\mathcal{F} = \mathcal{E}$).

Результаты настоящей работы частично анонсированы в [12].

§ 2. Переход к пространствам $\mathcal{F}^{(\lambda)}$

Пусть $M = G/K$ – произвольное риманово симметрическое пространство некомпактного типа, G – связная полупростая группа Ли с конечным центром, K – максимальная компактная подгруппа в G . Пусть $\mathfrak{g}_0$ и $\mathfrak{k}_0$ – алгебры Ли групп G и K соответственно. Если π – произвольное представление группы G в полном ЛВП $\mathcal{F}$, то вектор $\xi \in \mathcal{F}$ называется *гладким (аналитическим)*, если отображение $g \mapsto \pi(g)\xi$ бесконечно дифференцируемо (аналитическое). Вектор ξ называется *K -финитным*, если линейная оболочка векторов $\pi(u)\xi$ при $u \in K$ конечномерна. Пусть $\mathcal{F}_\sigma$ – множество всех гладких K -финитных векторов, а $\mathcal{F}_\#$ – множество аналитических K -финитных векторов пространства $\mathcal{F}$. Линейные подпространства $\mathcal{F}_\sigma$ и $\mathcal{F}_\#$ инвариантны относительно индуцированного представления алгебры Ли $\mathfrak{g}_0$.

Вернемся к случаю, когда $\mathcal{F}$ – функциональное пространство типа 1 или типа 2, π – квазирегулярное представление группы G . Для любого ИПП $H \subset \mathcal{F}$ пусть $H_\sigma = H \cap \mathcal{F}_\sigma$, $H_\# = H \cap \mathcal{F}_\#$. Обозначим через Λ множество старших весов неприводимых конечномерных представлений группы K . Пусть E^λ – пространство неприводимого представления со старшим весом $\lambda \in \Lambda$, $\langle, \rangle$ – инвариантная эрмитова форма в E^λ . Пространства $\mathcal{F}^{(\lambda)}$ определены в § 1. Через $\mathcal{F}_\sigma^{(\lambda)}$ (или $\mathcal{F}_\#^{(\lambda)}$) обозначим множество всех функций $F(x) \in \mathcal{F}^{(\lambda)}$, удовлетворяющих условию

$$f_\xi(x) = \langle F(x), \xi \rangle \in \mathcal{F}_\sigma \quad (\text{или} \quad f_\xi(x) \in \mathcal{F}_\#) \quad \forall \xi \in E^\lambda. \quad (2.1)$$

Если H – ИПП в $\mathcal{F}$, то ячейки $H^{(\lambda)}$ определены в § 1. Пусть $H_\sigma^{(\lambda)} = H^{(\lambda)} \cap \mathcal{F}_\sigma^{(\lambda)}$, $H_\#^{(\lambda)} = H^{(\lambda)} \cap \mathcal{F}_\#^{(\lambda)}$. Пусть $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0$ – разложение Картана алгебры Ли $\mathfrak{g}_0$; $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$ и $\mathfrak{p}$ – комплексификации пространств $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{k}_0$ и $\mathfrak{p}_0$ соответственно. Так как $[\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{p}$, то $\mathfrak{p}$ является $\mathfrak{k}$ -модулем. Пусть $p_1, \dots, p_m$ – базис в $\mathfrak{p}$, причем пусть все p_j принадлежат $\mathfrak{p}_0$; пусть $\mathfrak{p}^*$ – двойственный $\mathfrak{p}$ -модуль, а $p_1^*, \dots, p_m^*$ – двойственный базис в $\mathfrak{p}^*$.

Для $\lambda, \mu \in \Lambda$ обозначим через $\text{Hom}(E^\mu, E^\lambda)$ множество линейных операторов из E^μ в E^λ . Пространство $\text{Hom}(E^\mu, E^\mu)$ обычным образом является $\mathfrak{k}$ -модулем (т.е. $(kA)\xi = k(A\xi) - A(k\xi)$ для любых $\xi \in E^\mu$, $k \in \mathfrak{k}$). Пусть

$$\varphi: \mathfrak{p}^* \rightarrow \text{Hom}(E^\mu, E^\lambda) \quad (2.2)$$

– произвольный гомоморфизм $\mathfrak{k}$ -модулей. Положим $\alpha_j = \varphi(p_j^*) \in \text{Hom}(E^\mu, E^\lambda)$, и пусть $\alpha_j^* \in \text{Hom}(E^\lambda, E^\mu)$ – сопряженный оператор (т.е. $\langle \alpha_j \xi, \eta \rangle = \langle \xi, \alpha_j^* \eta \rangle \quad \forall \xi \in E^\mu, \forall \eta \in E^\lambda$).

Для функции $F(x) \in \mathcal{F}_\sigma^{(\lambda)}$ определим действие оператора $L(\varphi)$ формулой

$$(L(\varphi)F)(x) = - \sum_{j=1}^m \alpha_j^* ((p_j F)(x)), \quad (2.3)$$

где $p_j F$ – действие элемента из алгебры Ли на функцию, определенное формулой (1.2).

Известно (см. [1, § 3]), что оператор $L(\varphi)$ переводит пространство $\mathcal{F}_\sigma^{(\lambda)}$ в $\mathcal{F}_\sigma^{(\mu)}$ и пространство $\mathcal{F}_\#^{(\lambda)}$ в $\mathcal{F}_\#^{(\mu)}$. Более того, если $H^{(\lambda)}$ и $H^{(\mu)}$ – ячейки одного ИПП, то $L(\varphi)(H_\sigma^{(\lambda)}) \subseteq H_\sigma^{(\mu)}$ и $L(\varphi)(H_\#^{(\lambda)}) \subseteq H_\#^{(\mu)}$. Операторы $L(\varphi)$ служат основными инструментами для доказательств теорем I и II. Обозначим множество операторов $L(\varphi)$, построенных по всевозможным гомоморфизмам (2.2), через $P_0(\lambda, \mu)$.

При доказательствах будет часто использоваться следующая лемма.

ЛЕММА 2.1. Пусть $\mathfrak{k}$ – произвольная алгебра Ли, векторы $X_\omega, X_{-\omega}, H_\omega$ принадлежат $\mathfrak{k}$, причем

$$[H_\omega, X_\omega] = 2X_\omega, \quad [H_\omega, X_{-\omega}] = -2X_{-\omega}, \quad [X_\omega, X_{-\omega}] = -H_\omega.$$

Пусть E – конечномерный $\mathfrak{k}$ -модуль, v – ненулевой вектор из E такой, что $X_\omega v = 0$.

Тогда:

- 1) $H_\omega v = dv$, где $d \in \mathbb{Z}_+$;
- 2) $X_{-\omega}^r v \neq 0$ при $r = 0, 1, \dots, d$ и $X_{-\omega}^{d+1} v = 0$;
- 3) $X_\omega(X_{-\omega}^r v) = -r(d-r+1)X_{-\omega}^{r-1} v, \quad r = 0, 1, \dots, d+1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО сразу следует из теории представлений алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ (см. [8, гл. VIII, § 1]).

Далее пусть M – особое симметрическое пространство ранга 1. Тогда алгебра Ли $\mathfrak{g}$ изоморфна особой алгебре Ли F_4 . Приведем описание алгебры F_4 (используются обозначения, близкие к обозначениям Э. Картана в [13]).

Базис в алгебре Ли F_4 образуют векторы H_r ($r = 1, 2, 3, 4$), X_j ($j, r = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$), $X_{jr} = -X_{rj}$ ($|j| \neq |r|$; $j = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$) и $X_{\alpha\beta\gamma\delta}$ ($\alpha = \pm 1, \beta = \pm 2, \gamma = \pm 3, \delta = \pm 4$). Размерность алгебры Ли F_4 равна 52. Удобно также определить $H_{-r} := -H_r$ ($r = 1, 2, 3, 4$). В дальнейших формулах будем обозначать $(-j)$ через j' (т.е. $j' = -j$, $\alpha' = -\alpha$ и т.д.). Пусть $\sigma_j = +1$ при $j > 0$ и $\sigma_j = -1$ при $j < 0$.

Коммутаторы базисных векторов задаются следующими формулами:

$$\begin{aligned} [H_j, X_j] &= X_j, & [H_j, X_{j'}] &= -X_{j'}, \\ [H_j, X_{jr}] &= X_{jr}, & [H_j, X_{j'r}] &= -X_{j'r}, \\ [H_j, X_{\alpha\beta\gamma\delta}] &= \begin{cases} \frac{1}{2} X_{\alpha\beta\gamma\delta} & \text{при } j \in \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}, \\ -\frac{1}{2} X_{\alpha\beta\gamma\delta} & \text{при } j \in \{\alpha', \beta', \gamma', \delta'\}, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[X_j, X_{j'}] &= -2H_j, & [X_{jr}, X_{j'r'}] &= -H_j - H_r, \\
[X_{\alpha\beta\gamma\delta}, X_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}] &= -(H_\alpha + H_\beta + H_\gamma + H_\delta), \\
[X_j, X_r] &= 2X_{jr}, & [X_j, X_{j'r}] &= -X_r, & [X_{jr}, X_{sr'}] &= X_{js}, \\
[X_\alpha, X_{\alpha'\beta\gamma\delta}] &= \sigma_\alpha \sigma_\beta \sigma_\gamma \sigma_\delta X_{\alpha\beta\gamma\delta}, \\
[X_\beta, X_{\alpha\beta'\gamma\delta}] &= \sigma_\beta \sigma_\delta X_{\alpha\beta\gamma\delta}, & [X_\gamma, X_{\alpha\beta\gamma'\delta}] &= \sigma_\beta \sigma_\gamma X_{\alpha\beta\gamma\delta}, \\
[X_\delta, X_{\alpha\beta\gamma\delta'}] &= \sigma_\gamma \sigma_\delta X_{\alpha\beta\gamma\delta}, \\
[X_{\alpha\beta}, X_{\alpha'\beta'\gamma\delta}] &= \sigma_\alpha \sigma_\gamma X_{\alpha\beta\gamma\delta}, & [X_{\alpha\gamma}, X_{\alpha'\beta\gamma'\delta}] &= \sigma_\alpha \sigma_\delta X_{\alpha\beta\gamma\delta}, \\
[X_{\alpha\delta}, X_{\alpha'\beta\gamma\delta'}] &= \sigma_\alpha \sigma_\beta X_{\alpha\beta\gamma\delta}, & [X_{\gamma\beta}, X_{\alpha\beta'\gamma'\delta}] &= \sigma_\gamma \sigma_\delta X_{\alpha\beta\gamma\delta}, \\
[X_{\beta\delta}, X_{\alpha\beta'\gamma\delta'}] &= \sigma_\beta \sigma_\gamma X_{\alpha\beta\gamma\delta}, & [X_{\delta\gamma}, X_{\alpha\beta\gamma'\delta'}] &= \sigma_\beta \sigma_\delta X_{\alpha\beta\gamma\delta}, \\
[X_{\alpha\beta\gamma\delta}, X_{\alpha\beta'\gamma'\delta'}] &= -\sigma_\alpha \sigma_\beta \sigma_\gamma \sigma_\delta X_\alpha, \\
[X_{\alpha\beta\gamma\delta}, X_{\alpha'\beta\gamma'\delta'}] &= -\sigma_\beta \sigma_\delta X_\beta, \\
[X_{\alpha\beta\gamma\delta}, X_{\alpha'\beta'\gamma\delta'}] &= -\sigma_\beta \sigma_\delta X_\gamma, \\
[X_{\alpha\beta\gamma\delta}, X_{\alpha'\beta'\gamma'\delta}] &= -\sigma_\gamma \sigma_\delta X_\delta, \\
[X_{\alpha\beta\gamma\delta}, X_{\alpha\beta\gamma'\delta'}] &= -2\sigma_\alpha \sigma_\gamma X_{\alpha\beta}, \\
[X_{\alpha\beta\gamma\delta}, X_{\alpha\beta'\gamma\delta'}] &= -2\sigma_\alpha \sigma_\delta X_{\alpha\gamma}, \\
[X_{\alpha\beta\gamma\delta}, X_{\alpha\beta'\gamma'\delta}] &= -2\sigma_\alpha \sigma_\beta X_{\alpha\delta}, \\
[X_{\alpha\beta\gamma\delta}, X_{\alpha'\beta\gamma\delta'}] &= -2\sigma_\gamma \sigma_\delta X_{\gamma\beta}, \\
[X_{\alpha\beta\gamma\delta}, X_{\alpha'\beta\gamma'\delta}] &= -2\sigma_\beta \sigma_\gamma X_{\beta\delta}, \\
[X_{\alpha\beta\gamma\delta}, X_{\alpha'\beta'\gamma\delta}] &= -2\sigma_\beta \sigma_\delta X_{\delta\gamma},
\end{aligned}$$

где j, r, s – попарно различные числа; $j, r, s = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$; $\alpha = \pm 1$, $\beta = \pm 2$, $\gamma = \pm 3$, $\delta = \pm 4$. Остальные коммутаторы базисных векторов равны нулю.

Подалгебра Ли $\mathfrak{k}$ порождается (как векторное пространство) векторами H_j, X_j, X_{jr} ($|j| \neq |r|$; $j, r = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$). Очевидно, что алгебра Ли $\mathfrak{k}$ изоморфна алгебре Ли $B_4 = \mathfrak{so}(9)$. Подпространство $\mathfrak{h}$ натягивается на векторы $X_{\alpha\beta\gamma\delta}$. Отметим также, что $\mathfrak{k}_0$ порождается (как векторное пространство над $\mathbb{R}$) векторами $iH_j, X_j + X_{j'}, i(X_j - X_{j'}), X_{jr} + X_{j'r'}, i(X_{jr} - X_{j'r'})$, а подпространство $\mathfrak{h}_0$ порождается векторами $X_{\alpha\beta\gamma\delta} - X_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}$ и $i(X_{\alpha\beta\gamma\delta} + X_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'})$.

Подалгебра Картана $\mathfrak{h}$ в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ (а также в алгебре Ли $\mathfrak{k}$) натягивается на векторы H_1, H_2, H_3, H_4 . Пусть $h = t^1 H_1 + t^2 H_2 + t^3 H_3 + t^4 H_4$, $t^k \in \mathbb{C}$. Линейные функционалы $\varepsilon_k, \varepsilon_{-k} \in \mathfrak{h}^*$ ($k = 1, 2, 3, 4$) определим условиями $\varepsilon_k(h) := t^k$ и $\varepsilon_{-k}(h) := -t^k$. Тогда корни алгебры Ли $\mathfrak{g} = F_4$ имеют вид

$$\begin{aligned}
\omega_j &= \varepsilon_j, & \omega_{jr} &= \varepsilon_j + \varepsilon_r, & |j| &\neq |r|, & j, r &= \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \\
\omega_{\alpha\beta\gamma\delta} &= \frac{1}{2}(\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta + \varepsilon_\gamma + \varepsilon_\delta), & \alpha &= \pm 1, & \beta &= \pm 2, & \gamma &= \pm 3, & \delta &= \pm 4.
\end{aligned}$$

Корневыми векторами для этих корней являются соответственно векторы X_j, X_{jr} и $X_{\alpha\beta\gamma\delta}$. Корнями алгебры Ли $\mathfrak{k}$ являются функционалы ω_j и ω_{jr} . Из них положительными будут корни ω_j при $j > 0$ и ω_{jr} при $j > 0$, $j < |r|$. Простые корни:

$$\alpha_1 = \omega_{12'}, \quad \alpha_2 = \omega_{23'}, \quad \alpha_3 = \omega_{34'}, \quad \alpha_4 = \omega_4. \quad (2.4)$$

Соответствующие им векторы подалгебры Картана:

$$H_{\alpha_1} = H_1 - H_2, \quad H_{\alpha_2} = H_2 - H_3, \quad H_{\alpha_3} = H_3 - H_4, \quad H_{\alpha_4} = 2H_4.$$

Множество всех корней алгебры $\mathfrak{k}$ обозначим через R . Будем также иногда использовать обозначение X_ω для определенного выше корневого вектора, соответствующего корню ω . В частности, $X_{\alpha_1} = X_{12'}$, $X_{\alpha_2} = X_{23'}$, $X_{\alpha_3} = X_{34'}$, $X_{\alpha_4} = X_4$. Легко видеть, что $[X_\omega, X_{-\omega}] = -H_\omega$, $[H_\omega, X_\omega] = 2X_\omega$ и $\omega(H_\omega) = 2$ для любого $\omega \in R$.

На универсальной обертывающей алгебре $U(\mathfrak{k})$ вводится эрмитова инволюция $a \mapsto a^*$, которая однозначно определяется условиями $X_\omega^* = -X_{-\omega}$, $H_\omega^* = H_\omega$ для $\omega \in R$ и $(ab)^* = b^*a^*$ для любых $a, b \in U(\mathfrak{k})$. Если E^λ – произвольный $\mathfrak{k}$ -модуль и $\langle, \rangle$ – инвариантная эрмитова форма на E^λ , то

$$\forall a \in U(\mathfrak{k}), \quad \forall \xi, \eta \in E^\lambda \quad \langle a\xi, \eta \rangle = \langle \xi, a^*\eta \rangle. \quad (2.5)$$

Пусть $B(X, Y)$ – форма Киллинга на алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Из инвариантности формы Киллинга следует, что

$$B(X_\omega, X_{-\omega}) = \frac{1}{2}B([H_\omega, X_\omega], X_{-\omega}) = \frac{1}{2}B(H_\omega, [X_\omega, X_{-\omega}]) = -\frac{1}{2}B(H_\omega, H_\omega). \quad (2.6)$$

Легко видеть, что $B(H_j, H_j) = 18$; тогда из (2.6) получаем

$$B(X_j, X_{j'}) = -36; \quad B(X_{jr}, X_{j'r'}) = -18; \quad B(X_{\alpha\beta\gamma\delta}, X_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}) = -36. \quad (2.7)$$

Остальные скалярные произведения (относительно формы B) базисных векторов в F_4 равны нулю.

Линейный функционал $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ будем часто отождествлять с набором чисел $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$, где $\lambda_j = \lambda(H_{\alpha_j})$. При этом λ является старшим весом неприводимого $\mathfrak{k}$ -модуля тогда и только тогда, когда все λ_j принадлежат $\mathbb{Z}_+$, т.е. вес λ доминантный.

Так как $[\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$, то $\mathfrak{p}$ является $\mathfrak{k}$ -модулем относительно представления $X \mapsto \text{ad } X|_{\mathfrak{p}}$, $X \in \mathfrak{k}$. Всевозможными весами этого $\mathfrak{k}$ -модуля являются $\omega_{\alpha\beta\gamma\delta}$, $\alpha = \pm 1$, $\beta = \pm 2$, $\gamma = \pm 3$, $\delta = \pm 4$. Модуль $\mathfrak{p}$ неприводим, и его старший вес равен $\omega_{1234} = (0, 0, 0, 1)$.

Пусть E^λ и E^μ – неприводимые $\mathfrak{k}$ -модули со старшими весами λ и μ . Обозначим через $s(\mathfrak{p}^*, \text{Hom}(E^\mu, E^\lambda))$ множество гомоморфизмов $\mathfrak{k}$ -модулей (сплетающих операторов) из двойственного модуля $\mathfrak{p}^*$ в $\text{Hom}(E^\mu, E^\lambda)$. Заметим, что следующие множества сплетающих операторов изоморфны как векторные пространства:

$$s(\mathfrak{p}^*, \text{Hom}(E^\mu, E^\lambda)) \simeq s(E^\mu, E^\lambda \otimes \mathfrak{p}). \quad (2.8)$$

Из результатов работы [14] сразу следует, что

$$E^\lambda \otimes \mathfrak{p} = \bigoplus_{\omega} E^{\lambda+\omega}, \quad (2.9)$$

где ω пробегает все веса $\omega_{\alpha\beta\gamma\delta}$ модуля $\mathfrak{p}$. Если $\lambda + \omega$ не является доминантным весом, то соответствующее слагаемое в (2.9) заменяется нулем. Из соотношений (2.8) и (2.9) следует, что векторное пространство $s(\mathfrak{p}^*, \text{Hom}(E^\mu, E^\lambda))$ ненулевое тогда и только тогда, когда $\mu = \lambda + \omega_{\alpha\beta\gamma\delta}$ и при этом размерность этого пространства равна 1. Так как по каждому гомоморфизму $\varphi \in s(\mathfrak{p}^*, \text{Hom}(E^\mu, E^\lambda))$ строится оператор $L(\varphi) \in P_0(\lambda, \mu)$, то в результате доказано следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Для любых $\lambda, \mu \in \Lambda$ размерность пространства $P_0(\lambda, \mu)$ не превосходит 1, при этом необходимым условием того, что $P_0(\lambda, \mu) \neq \{0\}$, является $\mu = \lambda + \omega_{\alpha\beta\gamma\delta}$, $\alpha = \pm 1$, $\beta = \pm 2$, $\gamma = \pm 3$, $\delta = \pm 4$.

Пусть

$$I_0 = X_{1234} - X_{1'2'3'4'}, \quad \alpha(t) = \exp(tI_0).$$

Тогда $I_0 \in \mathfrak{p}_0$, а $\alpha(t)$ – однопараметрическая подгруппа в группе G . Подалгебру Ли $\mathfrak{k}_1$ в $\mathfrak{k}$ определим условием

$$\mathfrak{k}_1 = \{k \in \mathfrak{k}: [k, I_0] = 0\}.$$

Как векторное пространство над $\mathbb{C}$ подалгебра $\mathfrak{k}_1$ порождается следующими векторами: $t^1 H_1 + t^2 H_2 + t^3 H_3 + t^4 H_4$ при $t_1, t_2, t_3, t_4 \in \mathbb{C}$ и $t^1 + t^2 + t^3 + t^4 = 0$, $X_{jr'}$ и $X_{j'r}$ при $j, r > 0$, $X_{23} - X_{1'4'}$, $X_{1'2'} - X_{34}$, $X_{1'3'} + X_{24}$, $X_{13} + X_{2'4'}$, $X_{2'3'} - X_{14}$, $X_{12} - X_{3'4'}$. Пусть K_1 – связная подгруппа Ли в группе K , соответствующая подалгебре Ли $\mathfrak{k}_1$. Тогда $u\alpha(t) = \alpha(t)u$ для $u \in K_1$.

Через Λ_0 обозначим множество старших весов алгебры $\mathfrak{k}$ вида $\lambda = (k, 0, 0, l)$, $k, l \in \mathbb{Z}_+$ (т.е. $\lambda_1 = k$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = l$).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Пусть $F(x)$ – ненулевая функция на M , принимающая значения в E^λ , $\lambda \in \Lambda$, и удовлетворяющая условию

$$F(ux) = T^\lambda(u) F(x) \quad \forall u \in K. \quad (2.10)$$

Тогда $\lambda \in \Lambda_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $o = eK$ – фиксированная точка пространства $M = G/K$, e – единичный элемент группы G . Любая точка пространства M имеет вид $x = go$, где $g \in G$. Известно (см., например, [4]), что любой элемент из группы G можно представить в виде $g = u_1 \alpha(t) u_2$, где $t \in \mathbb{R}$, $u_1, u_2 \in K$. Тогда

$$F(x) = F(u_1 \alpha(t) u_2 o) = T^\lambda(u_1) F(\alpha(t) o). \quad (2.11)$$

Следовательно, функция $F(\alpha(t))$ не равна тождественно нулю. Если вектор $\xi = F(\alpha(t) o) \neq 0$ и $u \in K_1$, то

$$T^\lambda(u) \xi = F(u \alpha(t) o) = F(\alpha(t) u o) = F(\alpha(t) o) = \xi.$$

Следовательно, $k\xi = 0$ для любого $k \in \mathfrak{k}_1$. В результате доказано, что в пространстве E^λ должен существовать ненулевой вектор ξ такой, что $\mathfrak{k}_1 \xi = 0$. Разложим вектор ξ в сумму весовых векторов:

$$\xi = w_0 + w_1 + \dots + w_N,$$

где w_s – весовой вектор веса $\lambda^{(s)}$, причем $w_s \neq 0$ и все веса $\lambda^{(s)}$ различные. Если $h = t^1 H_1 + t^2 H_2 + t^3 H_3 + t^4 H_4$ и $t^1 + t^2 + t^3 + t^4 = 0$, то $h \in \mathfrak{k}_1$ и $0 = h\xi = \sum h w_s = \sum \lambda^{(s)}(h) w_s$. Так как векторы w_s линейно независимы, то $\lambda^{(s)}(h) = 0$, следовательно, вес $\lambda^{(s)}$ должен иметь вид $\lambda^{(s)} = a_s(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)$, $a_s \in \mathbb{R}$. Без ограничения общности можно считать, что a_0 – наибольшее среди чисел a_s ,

$s = 0, 1, \dots, N$. Так как $X_{jr'} \in \mathfrak{k}_1$ ($j \neq r; j, r > 0$), то $0 = X_{jr'}\xi = \sum X_{jr'}w_s$, а так как слагаемые $X_{jr'}w_s$ имеют различные веса, то все слагаемые равны нулю, следовательно, $X_{jr'}w_s = 0$.

Так как $X_{12} - X_{3'4'} \in \mathfrak{k}_1$, то

$$0 = (X_{12} - X_{3'4'})\xi = \sum_s (X_{12}w_s - X_{3'4'}w_s). \quad (2.12)$$

В сумме (2.12) все слагаемые являются весовыми векторами, но $X_{12}w_0$ — единственный среди них, имеющий вес $a_0(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4) + \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, следовательно, $X_{12}w_0 = 0$. Аналогично получаем, что $X_{jr}w_0 = 0$ для любых $j > 0, r > 0$ ($j \neq r$).

Из того, что $X_{12}w_0 = 0$, следует, что число $\lambda^{(0)}(H_1 + H_2) = 2a_0$ должно быть неотрицательным целым (см. лемму 2.1). Пусть $l = 2a_0$; тогда $l \in \mathbb{Z}_+$ и вектор w_0 имеет вес $\frac{l}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4) = (0, 0, 0, l)$. Выберем наибольшее число $k \in \mathbb{Z}_+$ такое, что $v = X_1^k w_0 \neq 0$. Докажем, что v будет старшим вектором пространства E^λ . Для этого заметим, что $X_{\alpha_1}v = X_{12'}v = X_1^k X_{12'}w_0 = 0$. Аналогично проверяется, что $X_{\alpha_2}v = X_{\alpha_3}v = 0$. Далее заметим, что $X_{\alpha_4} = X_4 = -[X_1, X_{1'4}]$. Тогда с учетом равенств $X_{1'4}w_0 = 0$ и $X_{14}w_0 = 0$ получаем

$$X_4v = -X_1X_{1'4}X_1^k w_0 = -kX_4X_1^k w_0 = -kX_4v.$$

Следовательно, $(k+1)X_4v = 0$ и $X_4v = X_{\alpha_4}v = 0$.

Остается заметить, что вес вектора v равен $\frac{l}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4) + k\varepsilon_1 = (k, 0, 0, l)$. Следовательно, $\lambda = (k, 0, 0, l) \in \Lambda_0$.

Для любого $\mathfrak{k}$ -модуля E^λ пусть

$$E_0^\lambda := \{\xi \in E^\lambda : \mathfrak{k}_1\xi = 0\}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Пусть E^λ — неприводимый $\mathfrak{k}$ -модуль со старшим весом λ . Подпространство E_0^λ ненулевое тогда и только тогда, когда $\lambda \in \Lambda_0$. Если $\lambda \in \Lambda_0$, то $\dim E_0^\lambda = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. А) В доказательстве предложения 2.2 уже было показано, что из $E_0^\lambda \neq \{0\}$ следует, что $\lambda = (k, 0, 0, l) \in \Lambda_0$. Кроме того, в процессе доказательства было установлено, что отображение $\xi \mapsto X_4^k \xi$ из подпространства E_0^λ в одномерное подпространство векторов веса λ инъективно, следовательно, $\dim E_0^\lambda \leq 1$. Остается предъявить какой-нибудь ненулевой вектор из пространства E_0^λ при $\lambda = (k, 0, 0, l)$.

Введем следующие элементы из универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{k})$:

$$\mathcal{D} := X_{1'}(H_1 - H_2) + X_{2'}X_{1'2} + X_{3'}X_{1'3} + X_{4'}X_{1'4}, \quad (2.13)$$

$$Y := X_{1'2'}X_{3'4'} - X_{1'3'}X_{2'4'} + X_{1'4'}X_{2'3'}. \quad (2.14)$$

Пусть v_0 — старший вектор $\mathfrak{k}$ -модуля E^λ ,

$$w_0 := \mathcal{D}^k v_0, \quad w_r := Y^r w_0, \quad (2.15)$$

$$\xi_0 := \sum_{0 \leq r \leq l} t_r w_r \quad \text{при} \quad t_r = (-1)^r \frac{(l-r+2)!}{(l+2)! r!}. \quad (2.16)$$

Далее будет показано, что $\xi_0 \in E_0^\lambda$ и $\xi_0 \neq 0$, что и завершит доказательство.

Пусть $\mu \in \mathfrak{h}^*$, $a \in U(\mathfrak{k})$. Будем говорить, что a – элемент веса μ , если

$$[h, a] = \mu(h)a \quad \forall h \in \mathfrak{h}, \quad (2.17)$$

где $[h, a] = ha - ah$. Как и раньше, функционал μ отождествляется со строкой $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$, где $\mu_j = \mu(H_{\alpha_j})$. Тогда $\mathcal{D}$ – элемент веса $\omega_{1'} = (-1, 0, 0, 0)$.

Б) Пусть $v_r = \mathcal{D}^r v_0$, $r = 0, 1, \dots, l$. Индукцией по r проверим, что

$$X_{\alpha_j} v_r = 0 \quad \text{при } j = 1, 2, 3, \quad (2.18)$$

или, что эквивалентно,

$$X_{js'} v_r = 0 \quad \text{при } 1 \leq j < s \leq 4. \quad (2.19)$$

При $r = 0$ это верно, так как v_0 – старший вектор. Пусть (2.18) верно для $r - 1$. Легко видеть, что

$$[X_{\alpha_1}, \mathcal{D}] = -2X_{1'}X_{\alpha_1} + X_{3'}X_{2'3} + X_{4'}X_{2'4}, \quad (2.20)$$

$$[X_{\alpha_2}, \mathcal{D}] = X_{1'}X_{\alpha_2}, \quad [X_{\alpha_3}, \mathcal{D}] = 0. \quad (2.21)$$

Из (2.21) следует, что

$$\begin{aligned} X_{\alpha_3} v_r &= X_{\alpha_3} \mathcal{D} v_{r-1} = \mathcal{D} X_{\alpha_3} v_{r-1} = 0, \\ X_{\alpha_2} v_r &= X_{\alpha_2} \mathcal{D} v_{r-1} = \mathcal{D} X_{\alpha_2} v_{r-1} + X_{1'} X_{\alpha_2} v_{r-1} = 0. \end{aligned}$$

По предположению индукции $X_{23'} v_{r-1} = 0$ и $X_{24'} v_{r-1} = 0$. Вектор v_{r-1} – весовой веса $\lambda + (r-1)\omega_{1'} = \frac{l}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4) + (k-r+1)\varepsilon_1$, поэтому $(H_2 - H_3)v_{r-1} = 0$ и $(H_2 - H_4)v_{r-1} = 0$. Применяя лемму 2.1 (если взять $\omega = \omega_{23'}$ или $\omega = \omega_{24'}$ и $d = 0$), получим, что $X_{2'3} v_{r-1} = 0$ и $X_{2'4} v_{r-1} = 0$. Используя (2.20), получаем

$$X_{\alpha_1} v_r = X_{\alpha_1} \mathcal{D} v_{r-1} = \mathcal{D} X_{\alpha_1} v_{r-1} + [X_{\alpha_1}, \mathcal{D}] v_{r-1} = 0.$$

В) Так как $w_0 = \mathcal{D}^k v_0$, то из (2.18), в частности, следует, что $X_{\alpha_j} w_0 = 0$ при $j = 1, 2, 3$, а так как вектор w_0 имеет вес $(0, 0, 0, l)$, то и $X_{-\alpha_j} w_0 = 0$ при $j = 1, 2, 3$. Эквивалентно, можно написать, что

$$X_{jr'} w_0 = 0 \quad \forall j \neq r, \quad j > 0, \quad r > 0. \quad (2.22)$$

Легко видеть, что

$$[X_{jr'}, Y] = 0 \quad \forall j \neq r, \quad j > 0, \quad r > 0. \quad (2.23)$$

Из (2.22) и (2.23) следует, что

$$X_{jr'} \xi_0 = 0 \quad \forall j \neq r, \quad j > 0, \quad r > 0. \quad (2.24)$$

Г) Докажем, что

$$X_{jr} w_0 = 0 \quad \forall j \neq r, \quad j > 0, \quad r > 0. \quad (2.25)$$

Если $w_0 = 0$, то (2.25) верно. Будем считать, что $w_0 \neq 0$. Возьмем наибольшее число $d_2 \in \mathbb{Z}_+$ такое, что $X_{12}^{d_2} w_0 \neq 0$, затем возьмем наибольшее число $d_3 \in \mathbb{Z}_+$ такое, что $X_{13}^{d_3} X_{12}^{d_2} w_0 \neq 0$, и так далее последовательно выбираем наибольшие числа $d_4, m_1, m_2, m_3, m_4 \in \mathbb{Z}_+$ такие, чтобы

$$v = X_4^{m_4} X_3^{m_3} X_2^{m_2} X_1^{m_1} X_{14}^{d_4} X_{13}^{d_3} X_{12}^{d_2} w_0 \neq 0.$$

Легко видеть, что $X_4 v = X_{12}' v = X_{23}' v = X_{34}' v = 0$, т.е. v является старшим вектором в E^λ и его вес должен быть равен λ . Так как вес вектора w_0 равен $\lambda - k\varepsilon_1$, то должно выполняться равенство

$$k\varepsilon_1 = m_4\varepsilon_4 + m_3\varepsilon_3 + m_2\varepsilon_2 + m_1\varepsilon_1 + d_4(\varepsilon_1 + \varepsilon_4) + d_3(\varepsilon_1 + \varepsilon_3) + d_2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2).$$

Так как все коэффициенты неотрицательные, то получаем, что $d_2 = d_3 = d_4 = 0$. Следовательно, $X_{1r} w_0 = 0$ при $r = 2, 3, 4$.

Заметим, что $X_{jr} = [X_{1j}, X_{1'r}]$ при $j \neq 1$. Тогда, используя (2.22), получаем

$$X_{jr} w_0 = X_{1j} X_{1'r} w_0 - X_{1'r} X_{1j} w_0 = 0.$$

Д) Заметим, что

$$[X_{12}, Y] = -(H_1 + H_2 + 2)X_{3'4'} - X_{2'4'}X_{23'} + X_{1'3'}X_{14'} + X_{2'3'}X_{24'} - X_{1'4'}X_{13'}.$$

Тогда, используя (2.23) и (2.25), получаем

$$\begin{aligned} X_{12} w_r &= X_{12} Y^r w_0 = -X_{3'4'} \sum_{0 \leq s \leq r-1} Y^{r-s-1} (H_1 + H_2 + 2) Y^s w_0 \\ &= -r(l - r + 3) X_{3'4'} w_{r-1}. \end{aligned}$$

Аналогично проверяется, что

$$X_{js} w_r = (-1)^{j+s} r(l - r + 3) X_{(5-s)', (5-j)'} w_{r-1} \quad (2.26)$$

для всех $j \neq s$, $j > 0$, $s > 0$. Используя (2.26), легко получить, что

$$Y^* w_r = r(r + 2)(l - r + 1)(l - r + 3) w_{r-1}, \quad (2.27)$$

где

$$Y^* = X_{12} X_{34} - X_{13} X_{24} + X_{14} X_{23}.$$

Е) Докажем, что $w_{l+1} = 0$.

По определению $w_{l+1} = Y^{l+1} w_0$. Из (2.27) следует, что $Y^* w_{l+1} = 0$. Если $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – инвариантная эрмитова форма в E^λ , то

$$\langle w_{l+1}, w_{l+1} \rangle = \langle w_{l+1}, Y w_l \rangle = \langle Y^* w_{l+1}, w_l \rangle = 0.$$

Следовательно, $w_{l+1} = 0$.

Ж) Из п. Е) и соотношения (2.26) следует, что

$$0 = X_{34} w_{l+1} = -2(l + 1) X_{1'2'} w_l,$$

откуда $X_{1'2'}w_l = 0$. Аналогично проверяется, что

$$X_{j'r'}w_l = 0 \quad \forall j \neq r, \quad j > 0, \quad r > 0. \quad (2.28)$$

3) Проверим, что $\xi_0 \in E_0^\lambda$.

Подалгебра $\mathfrak{f}_1$ порождается (как алгебра Ли) векторами $X_{\alpha_j}, X_{-\alpha_j}, j = 1, 2, 3$, и $X_{12} - X_{3'4'}, X_{1'2'} - X_{34}$. Из (2.24) следует, что $X_{\alpha_j}\xi_0 = X_{-\alpha_j}\xi_0 = 0$. Из (2.16), (2.26) и (2.28) получаем

$$\begin{aligned} (X_{12} - X_{3'4'})\xi_0 &= - \sum_{r=1}^l r(l-r+3)t_r X_{3'4'}w_{r-1} - \sum_{r=0}^{l-1} t_r X_{3'4'}w_r \\ &= - \sum_{r=0}^{l-1} (t_r + (r+1)(l-r+2)t_{r+1}) X_{3'4'}w_r = 0. \end{aligned}$$

Аналогично проверяется, что $(X_{1'2'} - X_{34})\xi_0 = 0$. Следовательно, $\mathfrak{f}_1\xi_0 = 0$ и $\xi_0 \in E_0^\lambda$.

И) Остается проверить, что $\xi_0 \neq 0$. Для этого определим числа

$$A_r := \langle \mathcal{D}^r v_0, X_{1'}^r v_0 \rangle, \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

Заметим, что $A_0 = \langle v_0, v_0 \rangle \neq 0$. Далее будет доказано соотношение

$$A_r = r(k-r+1)(2k+l-r+4)A_{r-1}, \quad (2.29)$$

а из него следует, что $A_r \neq 0$ при $r \leq k$ и, в частности, $A_k \neq 0$. Тогда $w_0 = \mathcal{D}^k v_0 \neq 0$, а так как векторы $w_r = Y^r w_0$ имеют различные веса, то и $\xi_0 \neq 0$.

Проверим соотношение (2.29). Пользуясь (2.5), получим

$$A_r = \langle \mathcal{D}^r v_0, X_{1'}^r v_0 \rangle = \langle \mathcal{D}^{r-1} v_0, \mathcal{D}^* X_{1'}^r v_0 \rangle, \quad (2.30)$$

где

$$\mathcal{D}^* = -(H_1 - H_2)X_1 + X_{12'}X_2 + X_{13'}X_3 + X_{14'}X_4. \quad (2.31)$$

Напомним, что v_0 — старший вектор веса $\lambda = \frac{l}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4) + k\varepsilon_1$. Воспользуемся леммой 2.1 для векторов $X_\omega = X_1$, $X_{-\omega} = X_{1'}$, $H_\omega = -[X_1, X_{1'}] = 2H_1$. Так как $X_1 v_0 = 0$ и $2H_1 v_0 = (l+2k)v_0$, то по лемме 2.1

$$X_1 X_{1'}^r v_0 = -r(l+2k-r+1)X_{1'}^{r-1} v_0,$$

а так как $X_{1'}^{r-1} v_0$ — вектор веса $\frac{l}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4) + (k-r+1)\varepsilon_1$, то

$$(H_1 - H_2)X_{1'}^{r-1} v_0 = (k-r+1)X_{1'}^{r-1} v_0.$$

Тогда

$$-(H_1 - H_2)X_1 X_{1'}^r v_0 = r(k-r+1)(l+2k-r+1)X_{1'}^{r-1} v_0. \quad (2.32)$$

Далее заметим, что

$$\begin{aligned} X_{12'} X_2 X_{1'}^r v_0 &= X_{12'} [X_2, X_{1'}^r] v_0 = r X_{12'} X_{21'} X_{1'}^{r-1} v_0 \\ &= r X_{21'} X_{12'} X_{1'}^{r-1} v_0 + r(H_1 - H_2) X_{1'}^{r-1} v_0 \\ &= -r X_{1'2} X_{12'} X_{1'}^{r-1} v_0 + r(k - r + 1) X_{1'}^{r-1} v_0. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Используя формулы (2.5) и (2.19), получим

$$\langle \mathcal{D}^{r-1} v_0, X_{1'2} X_{12'} X_{1'}^{r-1} v_0 \rangle = \langle X_{12'} \mathcal{D}^{r-1} v_0, X_{12'} X_{1'}^{r-1} v_0 \rangle = 0.$$

Тогда из (2.33) следует, что

$$\langle \mathcal{D}^{r-1} v_0, X_{12'} X_2 X_{1'}^r v_0 \rangle = r(k - r + 1) \langle \mathcal{D}^{r-1} v_0, X_{1'}^{r-1} v_0 \rangle. \quad (2.34)$$

Аналогично проверяется, что

$$\langle \mathcal{D}^{r-1} v_0, X_{13'} X_3 X_{1'}^r v_0 \rangle = r(k - r + 1) \langle \mathcal{D}^{r-1} v_0, X_{1'}^{r-1} v_0 \rangle \quad (2.35)$$

и

$$\langle \mathcal{D}^{r-1} v_0, X_{14'} X_4 X_{1'}^r v_0 \rangle = r(k - r + 1) \langle \mathcal{D}^{r-1} v_0, X_{1'}^{r-1} v_0 \rangle. \quad (2.36)$$

Из соотношений (2.30)–(2.32) и (2.34)–(2.36) вытекает (2.29).

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть ξ_0 – ненулевой вектор из пространства E_0^λ , $F(x)$ – функция на M , принимающая значения в E^λ и удовлетворяющая условию (2.10). Тогда существует комплекснозначная функция $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, для которой $F(\alpha(t)o) = f(t)\xi_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В ходе доказательства предложения 2.2 показано, что для любого $t \in \mathbb{R}$ вектор $F(\alpha(t))$ принадлежит подпространству E_0^λ , а так как $\dim E_0^\lambda = 1$, то $F(\alpha(t)o) = f(t)\xi_0$, где $f(t) \in \mathbb{C}$.

Напомним, что по каждому гомоморфизму $\varphi \in s(\mathfrak{p}^*, \text{Hom}(E^\mu, E^\lambda))$ строится оператор $L(\varphi)$, действующий из пространства $\mathcal{F}_\sigma^{(\lambda)}$ в $\mathcal{F}_\sigma^{(\mu)}$, и множество всех таких операторов обозначается $P_0(\lambda, \mu)$. Так как функции из $\mathcal{F}^{(\lambda)}$ удовлетворяют условию (2.10), то можно считать, что $\lambda, \mu \in \Lambda_0$ (в противном случае $P_0(\lambda, \mu) = \{0\}$). Кроме того, необходимым условием существования ненулевого гомоморфизма φ является $\mu = \lambda + \omega$, где ω – один из весов $\omega_{\alpha\beta\gamma\delta}$. Если $\lambda \in \Lambda_0$, то $\lambda + \omega$ может принадлежать Λ_0 только при $\omega = \pm\omega_{1234}$ или $\omega = \pm\omega_{1'234}$. Пусть $\lambda = (k, 0, 0, l)$, $\delta_1 = \omega_{1234} = (0, 0, 0, 1)$, $\delta_2 = \omega_{1'234} = (-1, 0, 0, 1)$. В пространстве $P_0(\lambda, \mu)$ могут быть ненулевые операторы только при $\mu = \lambda \pm \delta_1$ или $\mu = \lambda \pm \delta_2$ (и если соответствующий вес является доминантным) и, кроме того, $\dim P_0(\lambda, \mu) \leq 1$. Выберем какие-нибудь операторы (ненулевые, если соответствующее пространство $P_0(\lambda, \mu)$ ненулевое):

$$\begin{aligned} X_+^{(\lambda)} &\in P_0(\lambda, \lambda + \delta_1), & X_-^{(\lambda)} &\in P_0(\lambda, \lambda - \delta_1), \\ Y_+^{(\lambda)} &\in P_0(\lambda, \lambda + \delta_2), & Y_-^{(\lambda)} &\in P_0(\lambda, \lambda - \delta_2). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} X_\pm^{(\lambda)}(\mathcal{F}_\sigma^{(\lambda)}) &\subseteq \mathcal{F}_\sigma^{(\lambda \pm \delta_1)}, & Y_\pm^{(\lambda)}(\mathcal{F}_\sigma^{(\lambda)}) &\subseteq \mathcal{F}_\sigma^{(\lambda \pm \delta_2)}, \\ X_\pm^{(\lambda)}(\mathcal{F}_\#^{(\lambda)}) &\subseteq \mathcal{F}_\#^{(\lambda \pm \delta_1)}, & Y_\pm^{(\lambda)}(\mathcal{F}_\#^{(\lambda)}) &\subseteq \mathcal{F}_\#^{(\lambda \pm \delta_2)} \end{aligned}$$

и из [1, предложение 2.4] сразу получаем следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. Пусть в каждом пространстве $\mathcal{F}_{\#}^{(\lambda)}$, $\lambda \in \Lambda_0$, выделено линейное подпространство $H_{\#}^{(\lambda)}$ так, что выполняются условия:

$$X_{\pm}^{(\lambda)}(H_{\#}^{(\lambda)}) \subset H_{\#}^{(\lambda \pm \delta_1)}, \quad Y_{\pm}^{(\lambda)}(H_{\#}^{(\lambda)}) \subset H_{\#}^{(\lambda \pm \delta_2)}.$$

Пусть H – замыкание в $\mathcal{F}$ линейной оболочки всех функций $\langle F(x), \xi \rangle$ для $F \in H_{\#}^{(\lambda)}$, $\xi \in E^{\lambda}$, $\lambda \in \Lambda_0$.

Тогда H будет инвариантным подпространством и соответствующие ему ячейки $H^{(\lambda)}$ совпадают с замыканием $H_{\#}^{(\lambda)}$ в $\mathcal{F}^{(\lambda)}$.

§ 3. Вид оператора Лапласа–Бельтрами в пространстве $\mathcal{F}^{(\lambda)}$

Пусть $F(x)$ – гладкая функция, принимающая значения в пространстве E^{λ} , $\lambda = (k, 0, 0, l) \in \Lambda_0$, и удовлетворяющая условию (2.10). По следствию 2.1 $F(\alpha(t)o) = f(t)\xi_0$, где $f(t)$ – комплекснозначная функция, ξ_0 – базисный вектор в E_0^{λ} . Вектор ξ_0 можно выбрать так, чтобы $\|\xi_0\| = 1$.

Введем отображение

$$D = D^{\lambda}: F(x) \mapsto f(t). \quad (3.1)$$

Из (2.11) следует, что $F(x)$ однозначно восстанавливается по $f(t)$. Если Δ – оператор Лапласа–Бельтрами на M , то функция $(\Delta F)(x)$ также удовлетворяет условию (2.10). Поэтому действие оператора Δ можно выразить через функцию $f(t)$, т.е. найти оператор $D\Delta D^{-1}$ (для краткости будем его обозначать просто Δ). Явный вид оператора Δf будет найден в этом параграфе.

Очевидно, что

$$\Delta f(t) = \langle \Delta F(\alpha(t)o), \xi_0 \rangle. \quad (3.2)$$

Временно пусть $M = G/K$ – произвольное симметрическое пространство ранга 1 некомпактного типа. Пусть $\mathfrak{g}_0$ и $\mathfrak{k}_0$ – алгебры Ли групп G и K соответственно, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0$ – разложение Картана, $\mathfrak{a}_0$ – максимальное абелево подпространство в $\mathfrak{p}_0$ ($\dim \mathfrak{a}_0 = 1$). Через $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{a}$ обозначим комплексификации пространств $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{k}_0$, $\mathfrak{p}_0$ и $\mathfrak{a}_0$ соответственно. Пусть $\mathfrak{k}_1$ – централизатор подалгебры $\mathfrak{a}$ в $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{l}$ – ортогональное дополнение к $\mathfrak{k}_1$ в $\mathfrak{k}$ относительно формы Киллинга B (B – форма Киллинга на алгебре $\mathfrak{g}$).

Множество Π^+ ограниченных на $\mathfrak{a}$ положительных корней для симметрического пространства ранга 1 состоит из элементов β и 2β ($\beta \in \mathfrak{a}^*$) с некоторыми кратностями m_{β} и $m_{2\beta}$. Для $\gamma \in \Pi^+$ пусть

$$\mathfrak{k}_{\gamma} = \{T \in \mathfrak{k}: (\operatorname{ad} H)^2 T = \gamma^2(H)T \quad \forall H \in \mathfrak{a}\}.$$

Известно [6, гл. II, § 5], что $\dim \mathfrak{k}_{\gamma} = m_{\gamma}$, где m_{γ} – кратность корня γ , и что $\mathfrak{l} = \mathfrak{k}_{\beta} + \mathfrak{k}_{2\beta}$. Пусть $T_1^{\gamma}, \dots, T_{m_{\gamma}}^{\gamma}$ – базис в $\mathfrak{k}_{\gamma}$, ортонормированный относительно формы $(-B)$. Положим

$$\omega_{\gamma} = \sum_{j=1}^{m_{\gamma}} (T_j^{\gamma})^2 \in U(\mathfrak{k}).$$

Выберем базисный вектор $I_0 \in \mathfrak{a}$ так, чтобы $\beta(I_0) = 1$. Тогда

$$\mathfrak{k}_{\beta} = \{T \in \mathfrak{k}: (\operatorname{ad} I_0)^2 T = T\}, \quad \mathfrak{k}_{2\beta} = \{T \in \mathfrak{k}: (\operatorname{ad} I_0)^2 T = 4T\}.$$

Положим $\alpha(t) = \exp(tI_0) \in G$. Пусть A_γ – корневой вектор, т.е. $A_\gamma \in \mathfrak{a}$, и $B(A_\gamma, H) = \gamma(H)$ при $H \in \mathfrak{a}$. В нашем случае $A_\beta = B(I_0, I_0)^{-1}I_0$, $A_{2\beta} = 2A_\beta$.

Пусть T^λ – произвольное конечномерное представление группы K в пространстве E^λ . Соответствующие представления алгебры Ли $\mathfrak{k}$ и универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{k})$ также будем обозначать T^λ . Пусть $F(x)$ – гладкая функция на M , принимающая значения в E^λ и удовлетворяющая условию (2.10). Из вида оператора Бельтрами–Лапласа в полярных координатах на симметрическом пространстве M (см. [6, гл. II, теорема 5.24]) следует, что

$$\begin{aligned} \Delta F(\alpha(t)o) &= \frac{1}{B(I_0, I_0)} \left[\frac{d^2 F}{dt^2}(\alpha(t)o) + m_\beta(\operatorname{cth} t) \frac{dF}{dt}(\alpha(t)o) \right. \\ &\quad \left. + 2m_{2\beta}(\operatorname{cth} 2t) \frac{dF}{dt}(\alpha(t)o) \right] \\ &\quad + [(\operatorname{sh} t)^{-2} T^\lambda(\omega_\beta) + (\operatorname{sh} 2t)^{-2} T^\lambda(\omega_{2\beta})] F(\alpha(t)o). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Вернемся к случаю, когда M – особое симметрическое пространство; тогда $m_\beta = 8$, $m_{2\beta} = 7$, $I_0 = X_{1234} - X_{1'2'3'4'}$, $B(I_0, I_0) = 72$ (см. (2.7)). Положим $\tilde{\Delta} := B(I_0, I_0)\Delta = 72\Delta$. Определим векторы

$$\begin{aligned} Y_j &:= X_j + X_{j'}, & Z_j &:= i(X_j - X_{j'}), \\ Y_{jr} &:= X_{jr} + X_{j'r'}, & Z_{jr} &:= i(X_{jr} - X_{j'r'}), \end{aligned} \quad (3.4)$$

где $j > 0$, $|r| \neq j$. Векторы Y_j, Z_j , $j = 1, 2, 3, 4$, образуют базис в пространстве $\mathfrak{k}_\beta$. Этот базис ортогональный относительно формы Киллинга B , и $B(Y_j, Y_j) = B(Z_j, Z_j) = -72$. Тогда

$$\omega_\beta = \frac{1}{72} \left(\sum_{1 \leq j \leq 4} (Y_j^2 + Z_j^2) \right). \quad (3.5)$$

В пространстве $\mathfrak{k}_{2\beta}$ ортогональный базис образуют векторы

$$\begin{aligned} k_1 &= Y_{12} + Y_{34}, & k_2 &= Y_{13} - Y_{24}, & k_3 &= Y_{23} + Y_{14}, & k_4 &= Z_{12} - Z_{34}, \\ k_5 &= Z_{13} + Z_{24}, & k_6 &= Z_{23} - Z_{14}, & k_7 &= i(H_1 + H_2 + H_3 + H_4). \end{aligned}$$

Заметим, что $B(k_j, k_j) = -72$, $1 \leq j \leq 7$. Следовательно,

$$\omega_{2\beta} = \frac{1}{72} \sum_{1 \leq j \leq 7} k_j^2. \quad (3.6)$$

Чтобы воспользоваться формулой (3.3), нужно найти $\omega_\beta \xi_0$ и $\omega_{2\beta} \xi_0$. Напомним некоторые факты из теории полупростых алгебр Ли (см. [8]). Пусть $\mathfrak{g}$ – полупростая алгебра Ли над $\mathbb{C}$, B – ее форма Киллинга, $X_1, \dots, X_N$ – базис в $\mathfrak{g}$ и $X^1, \dots, X^N$ – двойственный базис в $\mathfrak{g}$, т.е. $B(X_j, X^r) = \delta_j^r$, где δ_j^r – символ Кронекера. Элемент $c = X_1 X^1 + \dots + X_N X^N \in U(\mathfrak{g})$ называется *элементом Казимира*. Пусть $\mathfrak{h}$ – подалгебра Картана в $\mathfrak{g}$, R – система корней алгебры $\mathfrak{g}$ относительно $\mathfrak{h}$ и

R_+ – множество положительных корней. Через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначим форму на $\mathfrak{h}^*$, являющуюся обратной формой для ограничения формы B на $\mathfrak{h}$. Пусть V – неприводимый конечномерный $\mathfrak{g}$ -модуль со старшим весом λ . Тогда для любого $\xi \in V$

$$c\xi = \langle \lambda, \lambda + 2\rho \rangle \xi, \quad (3.7)$$

где ρ – полусумма всех положительных корней.

Пусть c_1 – элемент Казимира алгебры Ли $\mathfrak{k} \simeq \mathfrak{so}(9)$. В явном виде

$$c_1 = -\frac{1}{28} \left(\sum_j (Y_j^2 + Z_j^2 - 2H_j^2) + \sum_{j \neq |r|} (Y_{jr}^2 + Z_{jr}^2) \right), \quad (3.8)$$

где $j = 1, 2, 3, 4$, $r = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$. Из (3.7) следует, что $c_1 \xi_0 = \langle \lambda, \lambda + 2\rho \rangle \xi_0$, где λ – старший вес. В нашем случае $\lambda = k\varepsilon_1 + \frac{l}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)$ и нетрудно видеть, что

$$\langle \lambda, \lambda + 2\rho \rangle = 14^{-1}(l^2 + k(k+7) + l(k+8)). \quad (3.9)$$

Линейная оболочка векторов H_j и X_{jr} , $j, r = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$, является подалгеброй Ли в алгебре $\mathfrak{k}$. Обозначим эту подалгебру $\mathfrak{k}_2$. Очевидно, что $\mathfrak{k}_2$ изоморфна алгебре Ли $\mathfrak{so}(8)$. Пусть c_2 – элемент Казимира алгебры Ли $\mathfrak{k}_2$. Тогда

$$c_2 = -\frac{1}{24} \left(\sum_{0 < j \neq |r|} (Y_{jr}^2 + Z_{jr}^2) - 2 \sum_{j > 0} H_j^2 \right). \quad (3.10)$$

Вектор w_0 (w_0 определяется формулой (2.15)) является старшим вектором для алгебры Ли $\mathfrak{k}_2$ (см. (2.22)) веса $\mu = \frac{l}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)$. Пусть E_2^μ – неприводимый $\mathfrak{k}_2$ -подмодуль в E^λ , порожденный вектором w_0 . Из построения вектора ξ_0 (см. (2.13)–(2.16)) следует, что $\xi_0 \in E_2^\mu$. Следовательно, $c_2 \xi_0 = \langle \mu, \mu + 2\rho_2 \rangle \xi_0$, где ρ_2 – полусумма положительных корней алгебры Ли $\mathfrak{k}_2$. Нетрудно подсчитать, что

$$\langle \mu, \mu + 2\rho_2 \rangle = 12^{-1}l(l+6). \quad (3.11)$$

Так как $\mathfrak{k}_1 \xi_0 = 0$, то $X \xi_0 = (X + k) \xi_0$ для любого $k \in \mathfrak{k}_1$. Пользуясь такими преобразованиями, получаем

$$c_2 \xi_0 = -\frac{3}{2} \omega_{2\beta} \xi_0, \quad (3.12)$$

$$c_1 \xi_0 = -\frac{18}{7} \omega_\beta \xi_0 - \frac{9}{7} \omega_{2\beta} \xi_0. \quad (3.13)$$

Пользуясь (3.9) и (3.11), находим

$$\begin{aligned} \omega_{2\beta} \xi_0 &= -18^{-1}l(l+6) \xi_0, \\ \omega_\beta \xi_0 &= -36^{-1}(k^2 + kl + 7k + 2l) \xi_0. \end{aligned}$$

Из (3.3) и (3.2) с учетом того, что $F(\alpha(t)o) = f(t)\xi_0$ и $\tilde{\Delta} = 72\Delta$, получаем окончательный вид оператора $\tilde{\Delta}$:

$$\begin{aligned} (\tilde{\Delta}f)(t) &= \frac{d^2 f}{dt^2}(t) + 8(\operatorname{cth} t) \frac{df}{dt}(t) + 14(\operatorname{cth} 2t) \frac{df}{dt}(t) \\ &\quad - 4l(l+6)(\operatorname{sh} 2t)^{-2} f(t) - 2(k^2 + kl + 7k + 2l)(\operatorname{sh} t)^{-2} f(t). \end{aligned} \quad (3.14)$$

§ 4. Вычисление операторов $X_{\pm}^{(\lambda)}, Y_{\pm}^{(\lambda)}$ и доказательства теорем I, II

Пусть $F(x) \in \mathcal{F}_{\sigma}^{(\lambda)}$, $\lambda \in \Lambda_0$. Как в § 3, определим отображение

$$D = D^{\lambda}: F(x) \mapsto f(t),$$

где $F(\alpha(t)o) = f(t)\xi_0$.

Если оператор X принадлежит $P_0(\lambda, \mu)$, $\mu \in \Lambda_0$, то X переводит пространство $\mathcal{F}_{\sigma}^{(\lambda)}$ в $\mathcal{F}_{\sigma}^{(\mu)}$, поэтому его действие можно выразить через функцию $f(t)$, т.е. найти $D^{\mu}X(D^{\lambda})^{-1}$. Для краткости этот оператор будем обозначать просто через X . В этом параграфе будет найден явный вид таких операторов.

В качестве базиса пространства $\mathfrak{p}$ возьмем векторы

$$X_{1\beta\gamma\delta} - X_{1'\beta'\gamma'\delta'} \quad \text{и} \quad i(X_{1\beta\gamma\delta} + X_{1'\beta'\gamma'\delta'}), \quad (4.1)$$

где $\beta = \pm 2$, $\gamma = \pm 3$, $\delta = \pm 4$. Пусть $p_1, p_2, \dots, p_8$ – векторы (4.1), у которых произведение $\beta\gamma\delta > 0$, и, кроме того, будем считать, что

$$p_1 = I_0 = X_{1234} - X_{1'2'3'4'}, \quad p_2 = i(X_{1234} + X_{1'2'3'4'}). \quad (4.2)$$

Пусть $p_9, p_{10}, \dots, p_{16}$ – векторы вида (4.1), у которых произведение $\beta\gamma\delta < 0$, причем пусть

$$p_9 = X_{12'3'4'} - X_{1'234}. \quad (4.3)$$

Все векторы p_j , $j = 1, 2, \dots, 16$, принадлежат $\mathfrak{p}_0$, ортогональны относительно формы Киллинга B и $B(p_j, p_j) = 72$. Пусть Ad и ad – присоединенные представления соответственно группы Ли G и алгебры Ли $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{g}$. Рассуждая, как в [1, § 5], получаем, что $\mathfrak{k}$ -модуль $\mathfrak{p}$ изоморфен своему двойственному $\mathfrak{k}$ -модулю $\mathfrak{p}^*$ и базис $p_1, \dots, p_{16}$ совпадает со своим двойственным базисом.

Пусть E^{λ} и E^{μ} – неприводимые $\mathfrak{k}$ -модули со старшими весами λ и μ соответственно, T^{λ} и T^{μ} – возникающие в пространствах E^{λ} и E^{μ} представления группы K . Пусть $\varphi: \mathfrak{p} \mapsto \text{Hom}(E^{\mu}, E^{\lambda})$ – гомоморфизм $\mathfrak{k}$ -модулей, $\alpha_j = \varphi(p_j)$, α_j^* – сопряженный оператор; тогда $\alpha_j^* \in \text{Hom}(E^{\lambda}, E^{\mu})$. Оператор $X = L(\varphi)$ задается формулой (2.3) и действует из пространства $\mathcal{F}_{\sigma}^{(\lambda)}$ в $\mathcal{F}_{\sigma}^{(\mu)}$. Повторяя рассуждения из [1, лемма 5.2], получаем, что при $F \in \mathcal{F}_{\sigma}^{(\lambda)}$

$$(XF)(x) = 16 \frac{d}{ds} \int (T^{\mu}(u) \alpha_1^* T^{\lambda}(u^{-1}) F(u \alpha(s) u^{-1} x) du) \Big|_{s=0}. \quad (4.4)$$

Здесь и в дальнейших формулах du – элемент меры Хаара на группе K и интегралы по du берутся по группе K .

Векторы $q_2, q_3, \dots, q_{16} \in \mathfrak{k}$ определим следующим образом: $q_j = \frac{1}{2}[I_0, p_j]$ при $2 \leq j \leq 8$ и $q_j = [I_0, p_j]$ при $9 \leq j \leq 16$. В частности,

$$q_2 = -i(H_1 + H_2 + H_3 + H_4), \quad q_9 = -(X_1 + X_{1'}). \quad (4.5)$$

Тогда легко видеть, что

$$\begin{aligned} \text{Ad}(\alpha(t))q_j &= (\text{cth } 2t)q_j + (\text{sh } 2t)p_j \quad \text{при } 2 \leq j \leq 8, \\ \text{Ad}(\alpha(t))q_j &= (\text{cth } t)q_j + (\text{sh } t)p_j \quad \text{при } 9 \leq j \leq 16. \end{aligned}$$

Напомним, что $\xi_0 \in E_0^\lambda$ и $\|\xi_0\| = 1$. Пусть $\tilde{\xi}_0$ – аналогичный вектор из E^μ , т.е. $\tilde{\xi}_0 \in E_0^\mu$ и $\|\tilde{\xi}_0\| = 1$. Тогда по определению

$$F(\alpha(t)o) = f(t)\xi_0, \quad (XF)(\alpha(t)o) = (Xf)(t)\tilde{\xi}_0,$$

откуда следует, что

$$f(t) = \langle F(\alpha(t)o), \xi_0 \rangle, \quad (Xf)(t) = \langle XF(\alpha(t)o), \tilde{\xi}_0 \rangle. \quad (4.6)$$

ЛЕММА 4.1. *Оператор X имеет вид*

$$(Xf)(t) = A \frac{df}{dt}(t) - 7B(\operatorname{cth} 2t)f(t) - 8C(\operatorname{cth} t)f(t), \quad (4.7)$$

где

$$A = \langle \alpha_1^* \xi_0, \tilde{\xi}_0 \rangle, \quad B = \langle \alpha_2^* q_2 \xi_0, \tilde{\xi}_0 \rangle, \quad C = \langle \alpha_9^* q_9 \xi_0, \tilde{\xi}_0 \rangle.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится аналогично доказательству леммы 4.1 из [2].

Более удобные формулы для коэффициентов A, B, C получаются в следующей лемме.

ЛЕММА 4.2. *Коэффициенты A, B, C из предыдущей леммы равны*

$$\begin{aligned} A &= -2\langle \xi_0, \varphi(X_{1'2'3'4'})\tilde{\xi}_0 \rangle, \\ B &= -8\langle H_1 \xi_0, \varphi(X_{1'2'3'4'})\tilde{\xi}_0 \rangle, \\ C &= -2\langle X_2 \xi_0, \varphi(X_{1'23'4'})\tilde{\xi}_0 \rangle. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению гомоморфизма φ

$$\varphi([k, p])\xi = k(\varphi(p)\xi) - \varphi(p)(k\xi) \quad (4.8)$$

для любых $k \in \mathfrak{k}$, $p \in \mathfrak{p}$, $\xi \in E^\mu$. Для краткости формулу (4.8) будем также записывать в виде

$$\varphi([k, p]) = [k, \varphi(p)].$$

Из (4.8) следует тождество

$$k(\varphi(p)\xi) = \varphi([k, p])\xi + \varphi(p)(k\xi), \quad (4.9)$$

которое является основным элементом проводимых далее преобразований.

А) Из определения коэффициента A вытекает, что

$$\begin{aligned} A &= \langle \alpha_1^* \xi_0, \tilde{\xi}_0 \rangle = \langle \xi_0, \alpha_1 \tilde{\xi}_0 \rangle = \langle \xi_0, \varphi(p_1)\tilde{\xi}_0 \rangle \\ &= \langle \xi_0, \varphi(X_{1234})\tilde{\xi}_0 \rangle - \langle \xi_0, \varphi(X_{1'2'3'4'})\tilde{\xi}_0 \rangle. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$X_{12} - X_{3'4'} \in \mathfrak{k}_1, \quad X_{1'2'} - X_{34} \in \mathfrak{k}_1, \quad (4.10)$$

следовательно, $X_{12}\xi_0 = X_{3'4'}\xi_0$ и $X_{1'2'}\xi_0 = X_{34}\xi_0$. Пользуясь этими равенствами и равенством (4.8), получим

$$\begin{aligned}\langle \xi_0, \varphi(X_{1234})\tilde{\xi}_0 \rangle &= \langle \xi_0, (X_{12}\varphi(X_{1'2'34}) - \varphi(X_{1'2'34})X_{12})\tilde{\xi}_0 \rangle \\ &= -\langle X_{1'2'}\xi_0, \varphi(X_{1'2'34})\tilde{\xi}_0 \rangle - \langle \xi_0, \varphi(X_{1'2'34})X_{12}\tilde{\xi}_0 \rangle \\ &= -\langle X_{34}\xi_0, \varphi(X_{1'2'34})\tilde{\xi}_0 \rangle - \langle \xi_0, \varphi(X_{1'2'34})X_{3'4'}\tilde{\xi}_0 \rangle \\ &= \langle \xi_0, (X_{3'4'}\varphi(X_{1'2'34}) - \varphi(X_{1'2'34})X_{3'4'})\tilde{\xi}_0 \rangle \\ &= -\langle \xi_0, \varphi(X_{1'2'3'4'})\tilde{\xi}_0 \rangle.\end{aligned}$$

Следовательно, $A = -2\langle \xi_0, \varphi(X_{1'2'3'4'})\tilde{\xi}_0 \rangle$.

Б) Так как $H_j - H_1 \in \mathfrak{k}_1$, $j = 2, 3, 4$, то $q_2\xi_0 = -i(H_1 + H_2 + H_3 + H_4)\xi_0 = -4iH_1\xi_0$. Тогда

$$B = \langle q_2\xi_0, \alpha_2\tilde{\xi}_0 \rangle = -4\langle H_1\xi_0, \varphi(X_{1234})\tilde{\xi}_0 \rangle - 4\langle H_1\xi_0, \varphi(X_{1'2'3'4'})\tilde{\xi}_0 \rangle.$$

Далее заметим, что

$$[X_{12} + X_{3'4'}, X_{1'2'} - X_{34}] = -(H_1 + H_2 + H_3 + H_4).$$

Тогда с учетом (4.10) имеем

$$\begin{aligned}-4\langle H_1\xi_0, \varphi(X_{1234})\tilde{\xi}_0 \rangle &= -\langle (H_1 + H_2 + H_3 + H_4)\xi_0, \varphi(X_{1234})\tilde{\xi}_0 \rangle \\ &= -\langle (X_{1'2'} - X_{34})(X_{12} + X_{3'4'})\xi_0, \varphi(X_{1234})\tilde{\xi}_0 \rangle \\ &= 2\langle X_{12}\xi_0, (X_{12} - X_{3'4'})\varphi(X_{1234})\tilde{\xi}_0 \rangle \\ &= -2\langle X_{12}\xi_0, \varphi(X_{123'4'})\tilde{\xi}_0 \rangle.\end{aligned}$$

Аналогично проверяется, что

$$-4\langle H_1\xi_0, \varphi(X_{1'2'3'4'})\tilde{\xi}_0 \rangle = -2\langle X_{12}\xi_0, \varphi(X_{123'4'})\tilde{\xi}_0 \rangle.$$

Следовательно,

$$B = -8\langle H_1\xi_0, \varphi(X_{1'2'3'4'})\tilde{\xi}_0 \rangle.$$

В) Из определения коэффициента C вытекает, что

$$\begin{aligned}C = \langle q_9\xi_0, \alpha_9\tilde{\xi}_0 \rangle &= \langle q_9\xi_0, \varphi(p_9)\tilde{\xi}_0 \rangle \\ &= -\langle X_1\xi_0, \varphi(X_{12'3'4'})\tilde{\xi}_0 \rangle + \langle X_1\xi_0, \varphi(X_{1'234})\tilde{\xi}_0 \rangle \\ &\quad - \langle X_{1'}\xi_0, \varphi(X_{12'3'4'})\tilde{\xi}_0 \rangle + \langle X_{1'}\xi_0, \varphi(X_{1'234})\tilde{\xi}_0 \rangle.\end{aligned}$$

Напомним, что $X_{jr'} \in \mathfrak{k}_1$ при $j, r' > 0$. Тогда

$$\begin{aligned}\langle X_1\xi_0, \varphi(X_{12'3'4'})\tilde{\xi}_0 \rangle &= -\langle X_1\xi_0, [X_{12'}, \varphi(X_{1'23'4'})]\tilde{\xi}_0 \rangle \\ &= -\langle X_1\xi_0, X_{12'}\varphi(X_{1'23'4'})\tilde{\xi}_0 \rangle = \langle X_{1'2}X_1\xi_0, \varphi(X_{1'23'4'})\tilde{\xi}_0 \rangle \\ &= \langle [X_{1'2}, X_1]\xi_0, \varphi(X_{1'23'4'})\tilde{\xi}_0 \rangle = \langle X_2\xi_0, \varphi(X_{1'23'4'})\tilde{\xi}_0 \rangle.\end{aligned}$$

Далее, с учетом (4.10)

$$\begin{aligned}
\langle X_1 \xi_0, \varphi(X_{1'234}) \tilde{\xi}_0 \rangle &= -\langle [X_{1'2'}, X_2] \xi_0, \varphi(X_{1'234}) \tilde{\xi}_0 \rangle \\
&= \langle X_2 \xi_0, \varphi(X_{1'234}) X_{12} \tilde{\xi}_0 \rangle + \langle X_2 X_{1'2'} \xi_0, \varphi(X_{1'234}) \tilde{\xi}_0 \rangle \\
&= \langle X_2 \xi_0, \varphi(X_{1'234}) X_{3'4'} \tilde{\xi}_0 \rangle + \langle X_2 X_{34} \xi_0, \varphi(X_{1'234}) \tilde{\xi}_0 \rangle \\
&= -\langle X_2 \xi_0, [X_{3'4'}, \varphi(X_{1'234})] \tilde{\xi}_0 \rangle = -\langle X_2 \xi_0, \varphi(X_{1'23'4'}) \tilde{\xi}_0 \rangle.
\end{aligned}$$

Заметим еще, что

$$\begin{aligned}
\langle X_1 \xi_0, \varphi(X_{1'234}) \tilde{\xi}_0 \rangle &= -\langle X_1 \xi_0, [X_{1'2'}, \varphi(X_{12'34})] \tilde{\xi}_0 \rangle \\
&= -\langle X_1 \xi_0, X_{1'2'} \varphi(X_{12'34}) \tilde{\xi}_0 \rangle = \langle X_{12'} X_1 \xi_0, \varphi(X_{12'34}) \tilde{\xi}_0 \rangle = 0,
\end{aligned}$$

так как $X_{12'} X_1 \xi_0 = X_1 X_{12'} \xi_0 = 0$. Аналогично проверяется равенство

$$\langle X_{1'} \xi_0, \varphi(X_{12'3'4'}) \tilde{\xi}_0 \rangle = 0,$$

следовательно,

$$C = -2\langle X_2 \xi_0, \varphi(X_{1'23'4'}) \tilde{\xi}_0 \rangle.$$

Пусть $\lambda = (k, 0, 0, l) \in \Lambda_0$, $\delta_1 = (0, 0, 0, 1)$, $\delta_2 = (-1, 0, 0, 1)$. Ненулевые операторы $X \in P_0(\lambda, \mu)$ могут существовать только при $\mu = \lambda \pm \delta_1$ или $\mu = \lambda \pm \delta_2$, причем эти операторы определены с точностью до умножения на ненулевое число. Далее мы найдем явный вид этих операторов. Пусть v_0 и $\tilde{v}_0$ – старшие векторы в $\mathfrak{k}$ -модулях E^λ и E^μ соответственно, $\varphi: \mathfrak{p} \mapsto \text{Hom}(E^\mu, E^\lambda)$ – ненулевой гомоморфизм $\mathfrak{k}$ -модулей. Для любого $\mathfrak{k}$ -модуля V и произвольного линейного функционала $\delta \in \mathfrak{h}^*$ обозначим через $V(\delta)$ весовое подпространство веса δ , т.е.

$$V(\delta) = \{\xi \in V : h\xi = \delta(h)\xi \quad \forall h \in \mathfrak{h}\}.$$

Будем также говорить, что векторы из $V(\delta)$ имеют вес δ .

Пусть ω – произвольный вес $\mathfrak{k}$ -модуля $\mathfrak{p}$, $p \in \mathfrak{p}(\omega)$. Тогда

$$\varphi(p)(E^\mu(\delta)) \subseteq E^\lambda(\delta + \omega).$$

Действительно, для $\xi \in E^\mu(\delta)$ и $h \in \mathfrak{h}$ из (4.9) следует, что

$$h(\varphi(p)\xi) = \varphi([h, p])\xi + \varphi(p)(h\xi) = (\omega(h) + \delta(h))(\varphi(p)\xi),$$

т.е. $\varphi(p)\xi \in E^\mu(\delta + \omega)$.

Вектор $X_{1'2'3'4'}$ является вектором младшего веса $\omega_{1'2'3'4'} = -\delta_1$ в $\mathfrak{p}$. Тогда $[X_\omega, X_{1'2'3'4'}] = 0$ для любого $\omega \in R_-$ (R_- – множество отрицательных корней алгебры $\mathfrak{k}$) и, соответственно,

$$\varphi(X_{1'2'3'4'})(X_\omega \xi) = X_\omega(\varphi(X_{1'2'3'4'})\xi) \quad \forall \xi \in E^\mu, \quad \forall \omega \in R_-. \quad (4.11)$$

Отметим также, что $\varphi(X_{1'2'3'4'})\tilde{v}_0 \neq 0$, если φ – ненулевой гомоморфизм. В противном случае из (4.11) следовало бы, что $\varphi(X_{1'2'3'4'})\xi = 0$ для любого $\xi \in E^\mu$, т.е. $X_{1'2'3'4'} \in \text{Ker } \varphi$. Так как $\mathfrak{p}$ – неприводимый $\mathfrak{k}$ -модуль и $\text{Ker } \varphi$ – подмодуль в $\mathfrak{p}$, то $\text{Ker } \varphi = \mathfrak{p}$ и, следовательно, гомоморфизм φ нулевой. Всюду в дальнейшем предполагается, что φ – ненулевой гомоморфизм. Для сокращения дальнейших вычислений введем обозначения

$$X_- := X_{1'2'3'4'}, \quad X_1^- := X_{12'3'4'}, \quad X_2^- := X_{1'23'4'}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. *Существует оператор $X_+^{(\lambda)} \in P_0(\lambda, \lambda + \delta_1)$, имеющий вид*

$$(X_+^{(\lambda)} f)(t) = \frac{df}{dt}(t) - 2l(\operatorname{cth} 2t)f(t) - 2k(\operatorname{cth} t)f(t). \quad (4.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. А) Напомним, как строятся векторы ξ_0 и $\tilde{\xi}_0$ из пространства E^λ при $\lambda = (k, 0, 0, l)$ (см. § 2). Элементы $\mathcal{D}, Y \in U(\mathfrak{k})$ определяются формулами (2.13) и (2.14), $w_0 := \mathcal{D}^k v_0$, $w_r := Y^r w_0$,

$$\xi_0 := \sum_{0 \leq r \leq l} t_r w_r,$$

где

$$t_r = t_r(l) := (-1)^r (l - r + 2)! ((l + 2)! r!)^{-1}. \quad (4.13)$$

Аналогично, так как $\mu = (k, 0, 0, l + 1)$, определяются векторы $\tilde{w}_0$, $\tilde{w}_r$ и $\tilde{\xi}_0$ из пространства E^μ :

$$\tilde{w}_0 := \mathcal{D}^k \tilde{v}_0, \quad \tilde{w}_r := Y^r \tilde{w}_0, \quad \tilde{\xi}_0 = \sum_{0 \leq r \leq l+1} \tilde{t}_r \tilde{w}_r,$$

где $\tilde{t}_r := t_r(l + 1)$. Можно считать, что $\langle \xi_0, \xi_0 \rangle = \langle \tilde{\xi}_0, \tilde{\xi}_0 \rangle = 1$.

Так как вектор $\varphi(X_-) \tilde{v}_0$ содержится в подпространстве $E^\lambda(\mu - \delta_1) = E^\lambda(\lambda)$ и не равен нулю, то можно считать (умножив φ на подходящее число), что

$$\varphi(X_-) \tilde{v}_0 = v_0. \quad (4.14)$$

Из (4.11) и равенства $[H_1 - H_2, X_-] = 0$ следует, что

$$\varphi(X_-)(\mathcal{D}\xi) = \mathcal{D}(\varphi(X_-)\xi) \quad (4.15)$$

для любого $\xi \in E^\mu$, откуда вытекает, что

$$\varphi(X_-) \tilde{w}_r = w_r, \quad r = 0, 1, 2, \dots. \quad (4.16)$$

Так как $w_{l+1} = 0$ (см. предложение 2.3, п. Е) доказательства), то

$$\varphi(X_-) \tilde{\xi}_0 = \sum_{0 \leq r \leq l} \tilde{t}_r w_r. \quad (4.17)$$

Б) Из (2.27) следует, что

$$\langle w_r, w_r \rangle = \langle w_r, Y^r w_0 \rangle = \langle (Y^*)^r w_r, w_0 \rangle = c_r \langle w_0, w_0 \rangle, \quad (4.18)$$

где

$$c_r = \frac{1}{2} \frac{r! (r + 2)! l! (l + 2)!}{(l - r)! (l - r + 2)!}. \quad (4.19)$$

Тогда

$$\begin{aligned}
1 &= \langle \xi_0, \xi_0 \rangle = \sum_{0 \leq r \leq l} t_r^2 \langle w_r, w_r \rangle \\
&= \frac{\langle w_0, w_0 \rangle}{2(l+1)(l+2)} \sum_{0 \leq r \leq l} (l-r+1)(l-r+2)(r+1)(r+2) \\
&= 60^{-1} \langle w_0, w_0 \rangle (l+3)(l+4)(l+5).
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\langle w_0, w_0 \rangle = 60((l+3)(l+4)(l+5))^{-1}. \quad (4.20)$$

Пользуясь (4.17)–(4.20) и леммой 4.2, находим коэффициент A :

$$\begin{aligned}
A &= -2 \langle \xi_0, \varphi(X_-) \tilde{\xi}_0 \rangle = -2 \sum_{0 \leq r \leq l} t_r \tilde{t}_r \langle w_r, w_r \rangle \\
&= -\frac{\langle w_0, w_0 \rangle}{(l+1)(l+2)(l+3)} \sum_{0 \leq r \leq l} (r+1)(r+2)(l-r+1)(l-r+2)(l-r+3) \\
&= -\langle w_0, w_0 \rangle 60^{-1} (l+4)(l+5)(l+6) = -(l+6)(l+3)^{-1}.
\end{aligned}$$

В) Вычисляем коэффициент $B = -8 \langle H_1 \xi_0, \varphi(X_-) \tilde{\xi}_0 \rangle$. Заметим, что $H_1 w_r = (\frac{l}{2} - r) w_r$. Тогда

$$\begin{aligned}
B &= -4 \sum_{0 \leq r \leq l} (l-2r) t_r \tilde{t}_r \langle w_r, w_r \rangle \\
&= -\frac{2 \langle w_0, w_0 \rangle}{(l+1)(l+2)(l+3)} \\
&\quad \times \sum_{0 \leq r \leq l} (l-2r)(r+1)(r+2)(l-r+1)(l-r+2)(l-r+3) \\
&= -\langle w_0, w_0 \rangle \frac{l(l+4)(l+5)(l+6)}{210} = -\frac{2}{7} l(l+6)(l+3)^{-1}.
\end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$B = -\frac{2}{7} l A.$$

Г) Осталось вычислить коэффициент C . Из леммы 4.2 следует, что

$$C = -2 \langle X_2 \xi_0, \varphi(X_2^-) \tilde{\xi} \rangle = 2 \langle \xi_0, X_{2'} \varphi(X_2^-) \tilde{\xi}_0 \rangle.$$

Так как элемент Y коммутирует с X_2^- и с $X_{2'}$, то

$$\begin{aligned}
\langle w_r, X_{2'} \varphi(X_2^-) \tilde{w}_r \rangle &= \langle w_r, X_{2'} \varphi(X_2^-) Y^r \tilde{w}_0 \rangle = \langle (Y^*)^r w_r, X_{2'} \varphi(X_2^-) \tilde{w}_0 \rangle \\
&= c_r \langle w_0, X_{2'} \varphi(X_2^-) \tilde{w}_0 \rangle,
\end{aligned}$$

где коэффициент c_r вычисляется по формуле (4.19). Тогда

$$\begin{aligned}
 C &= 2\langle \xi_0, X_{2'}\varphi(X_2^-)\tilde{\xi}_0 \rangle = 2 \sum_{0 \leq r \leq l} t_r \tilde{t}_r \langle w_r, X_{2'}\varphi(X_2^-)\tilde{w}_r \rangle \\
 &= 2\langle w_0, X_{2'}\varphi(X_2^-)\tilde{w}_0 \rangle \sum_{0 \leq r \leq l} t_r \tilde{t}_r c_r \\
 &= 60^{-1}(l+4)(l+5)(l+6)\langle w_0, X_{2'}\varphi(X_2^-)\tilde{w}_0 \rangle.
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

Д) Так как $[X_2, X_-] = -X_2^-$, то

$$\begin{aligned}
 \langle w_0, X_{2'}\varphi(X_2^-)\tilde{w}_0 \rangle &= -\langle w_0, X_{2'}(X_2\varphi(X_-) - \varphi(X_-)X_2)\tilde{w}_0 \rangle \\
 &= -\langle w_0, X_{2'}X_2w_0 \rangle + \langle w_0, X_{2'}\varphi(X_-)X_2\tilde{w}_0 \rangle.
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

Непосредственно проверяются соотношения

$$X_2\mathcal{D} = (\mathcal{D} + X_{1'})X_2 - 2(H_1 + 4)X_{1'2}, \tag{4.23}$$

$$(\mathcal{D} + X_{1'})X_{1'2} = X_{1'2}\mathcal{D}. \tag{4.24}$$

Отметим еще, что

$$H_1(X_{1'2}\mathcal{D}^t v_0) = \left(k - t - 1 + \frac{l}{2}\right)X_{1'2}\mathcal{D}^t v_0$$

для $t = 0, 1, 2, \dots$. Тогда

$$\begin{aligned}
 X_2w_0 &= X_2\mathcal{D}^k v_0 = -2 \sum_{0 \leq t \leq k-1} (\mathcal{D} + X_{1'})^{k-t-1}(H_1 + 4)X_{1'2}\mathcal{D}^t v_0 \\
 &= -X_{1'2}\mathcal{D}^{k-1}v_0 \sum_{0 \leq t \leq k-1} (2k + l + 6 - 2t) \\
 &= -k(k + l + 7)X_{1'2}\mathcal{D}^{k-1}v_0.
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

Аналогично проверяется, что

$$\begin{aligned}
 X_2\tilde{w}_0 &= X_2\mathcal{D}^k\tilde{v}_0 = -k(k + l + 8)X_{1'2}\mathcal{D}^{k-1}\tilde{v}_0, \\
 \varphi(X_-)X_2\tilde{w}_0 &= -k(k + l + 8)X_{1'2}\mathcal{D}^{k-1}v_0.
 \end{aligned}$$

Тогда, применяя (4.22) и учитывая, что $X_{12'}w_0 = 0$, получаем

$$\begin{aligned}
 \langle w_0, X_{2'}\varphi(X_2^-)\tilde{w}_0 \rangle &= -k\langle w_0, X_{2'}X_{1'2}\mathcal{D}^{k-1}v_0 \rangle \\
 &= -k\langle w_0, X_{1'}\mathcal{D}^{k-1}v_0 \rangle - k\langle w_0, X_{1'2}X_{2'}\mathcal{D}^{k-1}v_0 \rangle \\
 &= -k\langle w_0, X_{1'}\mathcal{D}^{k-1}v_0 \rangle + k\langle X_{12'}w_0, X_{2'}\mathcal{D}^{k-1}v_0 \rangle \\
 &= -k\langle w_0, X_{1'}\mathcal{D}^{k-1}v_0 \rangle.
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

Е) Докажем, что

$$\langle w_0, X_1 \mathcal{D}^{k-1} v_0 \rangle = \frac{1}{4} \langle w_0, w_0 \rangle. \quad (4.27)$$

Для этого заметим, что $\mathcal{D}$ (см. (2.13)) можно преобразовать к виду

$$\mathcal{D} = (H_1 - H_2 + 4)X_{1'} + X_{1'2}X_{2'} + X_{1'3}X_{3'} + X_{1'4}X_{4'}.$$

Тогда

$$\mathcal{D}^* = -X_1(H_1 - H_2 + 4) + X_2X_{12'} + X_3X_{13'} + X_4X_{14'}$$

и

$$\mathcal{D}^* w_0 = -X_1(H_1 - H_2 + 4)w_0 = -4X_1w_0.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \langle w_0, w_0 \rangle &= \langle w_0, \mathcal{D}^k v_0 \rangle = \langle \mathcal{D}^* w_0, \mathcal{D}^{k-1} v_0 \rangle \\ &= -4 \langle X_1 w_0, \mathcal{D}^{k-1} v_0 \rangle = 4 \langle w_0, X_1 \mathcal{D}^{k-1} v_0 \rangle. \end{aligned}$$

Из (4.21), (4.26) и (4.27) окончательно находим, что $C = \frac{1}{4}kA$.

По гомоморфизму φ строится оператор $X \in P_0(\lambda, \mu)$, явный вид которого находится из леммы 4.1 по найденным коэффициентам A, B, C . Тогда оператор $X_+^{(\lambda)} := \frac{1}{A}X$ имеет вид (4.12).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. Пусть $\lambda = (k, 0, 0, l)$, $l \geq 1$. Существует оператор $X_-^{(\lambda)} \in P_0(\lambda, \lambda - \delta_1)$, имеющий вид

$$(X_-^{(\lambda)} f)(t) = \frac{df}{dt}(t) + 2(l+6)(\operatorname{cth} 2t)f(t) - 2(k+4)(\operatorname{cth} t)f(t). \quad (4.28)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. А) В нашем случае $\lambda = (k, 0, 0, l) = k\varepsilon_1 + \frac{l}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)$, $\mu = \lambda - \delta_1 = (k, 0, 0, l-1)$. Пусть $v = \varphi(X_-)\tilde{v}_0$; тогда вектор v имеет вес $\mu - \omega_{1234} = \lambda - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)$. Напомним, что $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ — простые корни алгебры Ли $\mathfrak{k}$ и $X_{\alpha_1} = X_{12'}$, $X_{\alpha_2} = X_{23'}$, $X_{\alpha_3} = X_{34'}$, $X_{\alpha_4} = X_4$. Заметим, что X_- коммутирует с $X_{\alpha_1}, X_{\alpha_2}, X_{\alpha_3}, X_{2'}$, а также, что $X_{\alpha_j}\tilde{v}_0 = 0$ при $j = 1, 2, 3$ и $X_{2'}^l\tilde{v}_0 = 0$. Из этого следует, что

$$X_{\alpha_j}v = 0 \text{ при } j = 1, 2, 3 \text{ и } X_{2'}^l v = 0. \quad (4.29)$$

Покажем, что этими условиями вектор v определяется с точностью до коллинеарности. Точнее говоря, пусть подпространство L состоит из всех векторов $v \in E^\lambda(\lambda - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4)$, удовлетворяющих условиям (4.29). Докажем, что $\dim L = 1$. Так как $v \in L$ и $v \neq 0$, то достаточно доказать, что $\dim L \leq 1$.

Пусть $L_1 = X_1(L)$; тогда $L_1 \subset E^\lambda(\lambda - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4)$. Если $w = X_1v \in L_1$, то $X_{\alpha_2}w = X_{\alpha_3}w = 0$. Весовое подпространство $E^\lambda(\lambda - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4)$ натягивается на векторы $w_1 = X_{2'}X_{3'}X_{4'}v_0$, $w_2 = X_{2'}X_{3'4'}v_0$, $w_3 = X_{2'3'}X_{4'}v_0$ и $w_4 = X_{2'4'}X_{3'}v_0$. Условия $X_{\alpha_1}w = X_{\alpha_2}w = 0$ выделяют в $E^\lambda(\lambda - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4)$ подпространство, порожденное вектором $w_2 + w_3 - w_4$, и, следовательно, $\dim L_1 \leq 1$.

Предположим, что $\dim L \geq 2$; тогда найдется ненулевой вектор $v \in L$ такой, что $X_1 v = 0$. Пусть $\tilde{v} = X_{12} v$. Предположим, что $\tilde{v} \neq 0$. Заметим, что $X_{2'} \tilde{v} = X_{2'} X_{12} v = (X_{12} X_{2'} + X_1) v = X_{12} X_{2'} v$. Аналогично получим, что

$$X_{2'}^l \tilde{v} = X_{12} X_{2'}^l v = 0. \quad (4.30)$$

С другой стороны, вектор $\tilde{v}$ имеет вес $(\lambda - \varepsilon_3 - \varepsilon_4)$, следовательно, $X_2 \tilde{v} = 0$ и $(2H_2) \tilde{v} = l \tilde{v}$. Тогда по лемме 2.1 $X_{2'}^l \tilde{v} \neq 0$, что противоречит (4.30). Следовательно, $\tilde{v} = X_{12} v = 0$.

Последовательно выбираем наибольшие числа $d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 \in \mathbb{Z}_+$ так, чтобы выполнялись условия:

$$X_2^{d_1} \neq 0, \quad X_{23}^{d_2} X_2^{d_1} v \neq 0, \quad \dots, \quad X_4^{d_5} X_{34}^{d_4} X_3^{d_3} X_{23}^{d_2} X_2^{d_1} v \neq 0.$$

Пусть $\xi = X_4^{d_5} X_{34}^{d_4} X_3^{d_3} X_{23}^{d_2} X_2^{d_1} v$. Легко видеть, что вектор ξ удовлетворяет условиям $X_{12'} \xi = X_{23'} \xi = X_{34'} \xi = X_4 \xi = 0$, т.е. ξ является старшим вектором. Но вектор ξ имеет вес

$$\lambda - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4) + d_1 \varepsilon_2 + d_2 (\varepsilon_2 + \varepsilon_3) + d_3 \varepsilon_3 + d_4 (\varepsilon_3 + \varepsilon_4) + d_5 \varepsilon_4,$$

не равный весу λ , что противоречит единственности старшего вектора. Следовательно, $v = 0$ и $\dim L \leq 1$.

Б) Покажем, что для некоторого ненулевого гомоморфизма φ справедливо равенство

$$\varphi(X_-) \tilde{v}_0 = Z v_0, \quad (4.31)$$

где

$$Z := (l + 3)(l + 2k + 2)Y - Y_1 \mathcal{D}, \quad (4.32)$$

$$Y_1 := [X_1, Y] = -X_{2'} X_{3'4'} + X_{3'} X_{2'4'} - X_{4'} X_{2'3'}, \quad (4.33)$$

элементы $\mathcal{D}$ и Y задаются формулами (2.13) и (2.14).

Пусть $v = \varphi(X_-) \tilde{v}_0$. В п. А) показано, что вектор v принадлежит подпространству L и что $\dim L = 1$. Так как гомоморфизм φ определен с точностью до умножения на ненулевое число, то для доказательства равенства (4.31) достаточно показать, что $Z v_0 \in L$ и $Z v_0 \neq 0$.

Предварительно отметим несколько соотношений, которые проверяются непосредственно:

$$[X_{2'}, Y_1] = 0, \quad [X_{2'}, Y] = 0, \quad (4.34)$$

$$[X_{2'}, \mathcal{D}] = -2X_{1'2'}(H_1 - H_2 + 1), \quad (4.35)$$

$$[Y_1, \mathcal{D}] = 2(H_1 - H_2 + 2)Y, \quad [Y, \mathcal{D}] = 0. \quad (4.36)$$

Заметим, что элементы X_{α_j} , $j = 1, 2, 3$, коммутируют с Y и Y_1 , а также что $X_{\alpha_j}(\mathcal{D} v_0) = 0$ (последнее следует из формул (2.20) и (2.21)). Тогда $X_{\alpha_j} Z v_0 = 0$ при $j = 1, 2, 3$. Пользуясь (4.34) и (4.35), получаем

$$\begin{aligned} X_{2'}^l Y_1 \mathcal{D} v_0 &= Y_1 \mathcal{D} X_{2'}^l v_0 - 2Y_1 \sum_{0 \leq r \leq l-1} X_{2'}^{l-r-1} X_{1'2'}(H_1 - H_2 + 1) X_{2'}^r v_0 \\ &= Y_1 \mathcal{D} X_{2'}^l v_0 - l(l + 2k + 1) Y_1 X_{1'2'} X_{2'}^{l-1} v_0. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Пусть $v_1 = X_{2'}^l v_0$. Вектор v_1 имеет вес $k\varepsilon_1 + \frac{l}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)$. Очевидно, что $X_{24}v_1 = X_{34}v_1 = 0$ и $(H_2 + H_4)v_1 = (H_3 + H_4)v_1 = 0$. Тогда по лемме 2.1 $X_{2'4'}v_1 = X_{3'4'}v_1 = 0$, т.е.

$$X_{2'4'}X_{2'}^l v_0 = X_{3'4'}X_{2'}^l v_0 = 0. \quad (4.38)$$

Отметим также, что

$$X_{2'}^{l+1} v_0 = 0. \quad (4.39)$$

Из (4.38) и (4.39) следует, что $Y_1 X_{2'}^l v_0 = 0$, а из (4.36) вытекает, что

$$\begin{aligned} Y_1 \mathcal{D} X_{2'}^l v_0 &= \mathcal{D} Y_1 X_{2'}^l v_0 + 2(H_1 - H_2 + 2)Y X_{2'}^l v_0 \\ &= 2(k + l + 2)X_{1'2'}X_{3'4'}X_{2'}^l v_0. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Из (4.38) легко получается, что

$$0 = X_2 X_{4'} X_{2'3'} X_{2'}^l v_0 = -X_{4'} X_{3'} X_{2'}^l v_0 - l X_{4'} X_{2'3'} X_{2'}^{l-1} v_0.$$

Тогда

$$X_{4'} X_{2'3'} X_{2'}^{l-1} v_0 = -\frac{1}{l} X_{4'} X_{3'} X_{2'}^l v_0.$$

Аналогично,

$$X_{3'} X_{2'4'} X_{2'}^{l-1} v_0 = -\frac{1}{l} X_{3'} X_{4'} X_{2'}^l v_0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} Y_1 X_{2'}^{l-1} v_0 &= (-X_{2'} X_{3'4'} + X_{3'} X_{2'4'} - X_{4'} X_{2'3'}) X_{2'}^{l-1} v_0 \\ &= -X_{3'4'} X_{2'}^l v_0 - l^{-1} X_{3'} X_{4'} X_{2'}^l v_0 + l^{-1} X_{4'} X_{3'} X_{2'}^l v_0 \\ &= -(l + 2)l^{-1} X_{3'4'} X_{2'}^l v_0. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Из (4.37), (4.40) и (4.41) получаем

$$X_{2'}^l Y_1 \mathcal{D} v_0 = (l + 3)(l + 2k + 2)X_{1'2'}X_{3'4'}X_{2'}^l v_0.$$

Отметим еще, что $X_{2'}^l Y v_0 = Y X_{2'}^l v_0 = X_{1'2'}X_{3'4'}X_{2'}^l v_0$. Следовательно, $X_{2'}^l Z v_0 = 0$ и $Z v_0 \in L$.

Чтобы доказать, что $Z v_0 \neq 0$, достаточно заметить, что

$$X_{34}X_{12}Z v_0 = l(l(l + 4)(l + 2k + 2) + 2(l + 2k))v_0 \neq 0,$$

так как $l \geq 1$, $k \geq 0$.

В) В нашем случае

$$\begin{aligned} w_0 &= \mathcal{D}^k v_0, & w_r &= Y^r w_0, & \tilde{w}_0 &= \mathcal{D}^k \tilde{v}_0, & \tilde{w}_r &= Y^r \tilde{w}_0, \\ \xi_0 &= \sum_{0 \leq r \leq l} t_r w_r, & \tilde{\xi}_0 &= \sum_{0 \leq r \leq l-1} \tilde{t}_r \tilde{w}_r, \end{aligned}$$

где коэффициенты $t_r = t_r(l)$ и $\tilde{t}_r = t_r(l-1)$ задаются формулой (4.13). Можно считать, что векторы v_0 и $\tilde{v}_0$ выбраны так, что $\langle \xi_0, \xi_0 \rangle = \langle \tilde{\xi}_0, \tilde{\xi}_0 \rangle = 1$. Тогда (см. (4.20) и (4.18))

$$\langle w_0, w_0 \rangle = 60((l+3)(l+4)(l+5))^{-1}, \quad \langle w_r, w_r \rangle = c_r \langle w_0, w_0 \rangle,$$

где коэффициент c_r определяется формулой (4.19).

Из равенства (4.31) следует, что

$$\varphi(X_-)\tilde{w}_0 = \varphi(X_-)\mathcal{D}^k\tilde{v}_0 = \mathcal{D}^k\varphi(X_-)\tilde{v}_0 = \mathcal{D}^k Z v_0.$$

Так как вектор w_0 имеет вес $(0, 0, 0, l)$ и $X_{\alpha_j} w_0 = 0$ при $j = 1, 2, 3$, то и $X_{-\alpha_j} w_0 = 0$ при $j = 1, 2, 3$. Тогда $X_{1',j} w_0 = 0$ при $j = 2, 3, 4$ и $(H_1 - H_2)w_0 = 0$, следовательно, $\mathcal{D}^{k+1}v_0 = \mathcal{D}w_0 = 0$. Из (4.36) получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^k Y_1 \mathcal{D} v_0 &= Y_1 \mathcal{D}^{k+1} v_0 - 2 \sum_{1 \leq r \leq k} \mathcal{D}^{k-r} (H_1 - H_2 + 2) Y \mathcal{D}^r v_0 \\ &= -k(k+3) Y \mathcal{D}^k v_0 = -k(k+3) Y w_0. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^k Z v_0 &= \mathcal{D}^k ((l+3)(l+2k+2)Y - Y_1 \mathcal{D}_1) v_0 \\ &= ((l+3)(l+2k+2) + k(k+3)) Y \mathcal{D}^k v_0 = \alpha Y w_0 = \alpha w_1, \end{aligned}$$

где

$$\alpha = (l+3)(l+2k+2) + k(k+3). \quad (4.42)$$

Следовательно,

$$\varphi(X_-)\tilde{w}_0 = \alpha w_1. \quad (4.43)$$

Из равенства (4.43) получаем

$$\varphi(X_-)\tilde{w}_r = \alpha w_{r+1} \quad \text{и} \quad \varphi(X_-)\xi_0 = \alpha \sum_{0 \leq r \leq l} \tilde{t}_{r-1} w_r.$$

Находим теперь коэффициент A :

$$\begin{aligned} A &= -2\langle \xi_0, \varphi(X_-)\tilde{\xi}_0 \rangle = -2\alpha \langle w_0, w_0 \rangle \sum_{1 \leq r \leq l} t_r \tilde{t}_r c_r \\ &= \alpha \frac{\langle w_0, w_0 \rangle}{(l+1)} \sum_{1 \leq r \leq l} (l-r+1)(l-r+2)r(r+1)(r+2) \\ &= \alpha \langle w_0, w_0 \rangle 60^{-1} l(l+2)(l+3)(l+4)(l+5) = \alpha l(l+2). \end{aligned}$$

Далее, замечая, что $H_1 w_r = (\frac{l}{2} - r)w_r$, находим коэффициент B :

$$\begin{aligned} B &= -8\langle H_1 \xi_0, \varphi(X_-)\tilde{\xi}_0 \rangle = -4\alpha \langle w_0, w_0 \rangle \sum_{1 \leq r \leq l} (l-2r)t_r \tilde{t}_r c_r \\ &= 2\alpha \frac{\langle w_0, w_0 \rangle}{(l+1)} \sum_{1 \leq r \leq l} (l-2r)(l-r+1)(l-r+2)r(r+1)(r+2) \\ &= -\alpha \langle w_0, w_0 \rangle 210^{-1} l(l+2)(l+3)(l+4)(l+5)(l+6) = -\frac{2}{7}(l+6)A. \end{aligned}$$

Г) Так как элемент Y коммутирует с X_2^- и с $X_{2'}$, то, используя (2.27), получим

$$\begin{aligned}\langle w_r, X_{2'}\varphi(X_2^-)\tilde{w}_{r-1} \rangle &= \langle w_r, Y^{r-1}X_{2'}\varphi(X_2^-)\tilde{w}_0 \rangle = \langle (Y^*)^{r-1}w_r, X_{2'}\varphi(X_2^-)\tilde{w}_0 \rangle \\ &= c_r(3l(l+2))^{-1}\langle w_1, \varphi(X_2^-)\tilde{w}_0 \rangle.\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}C &= 2\langle \xi_0, X_{2'}\varphi(X_2^-)\tilde{\xi}_0 \rangle = 2 \sum_{1 \leq r \leq l} t_r \tilde{t}_{r-1} \langle w_r, X_{2'}\varphi(X_2^-)\tilde{w}_{r-1} \rangle \\ &= \frac{2\langle w_1, X_{2'}\varphi(X_2^-)\tilde{w}_0 \rangle}{3l(l+2)} \sum_{1 \leq r \leq l} t_r \tilde{t}_{r-1} c_r \\ &= -180^{-1}(l+3)(l+4)(l+5)\langle w_1, X_{2'}\varphi(X_2^-)\tilde{w}_0 \rangle.\end{aligned}\quad (4.44)$$

Остается найти $\langle w_1, X_{2'}\varphi(X_2^-)\tilde{w}_0 \rangle$. Заметим, что

$$\begin{aligned}\langle w_1, X_{2'}\varphi(X_2^-)\tilde{w}_0 \rangle &= -\langle w_1, X_{2'}(X_2\varphi(X_-) - \varphi(X_-)X_2)\tilde{w}_0 \rangle \\ &= -\langle w_1, X_{2'}X_2\varphi(X_-)\tilde{w}_0 \rangle + \langle w_1, X_{2'}\varphi(X_-)X_2\tilde{w}_0 \rangle.\end{aligned}\quad (4.45)$$

Используя (4.43), получаем

$$\begin{aligned}\langle w_1, X_{2'}X_2\varphi(X_-)\tilde{w}_0 \rangle &= \alpha\langle w_1, X_{2'}X_2w_1 \rangle = \alpha\langle Yw_0, X_{2'}X_2Yw_0 \rangle \\ &= \alpha\langle Yw_0, X_{2'}[X_2, Y]w_0 \rangle + \alpha\langle Yw_0, YX_{2'}X_2w_0 \rangle \\ &= \alpha\langle w_0, Y^*X_{2'}[X_2, Y]w_0 \rangle + \alpha\langle Y^*Yw_0, X_{2'}X_2w_0 \rangle \\ &= \alpha\langle w_0, Y^*X_{2'}[X_2, Y]w_0 \rangle + 3\alpha l(l+2)\langle w_0, X_{2'}X_2w_0 \rangle.\end{aligned}\quad (4.46)$$

Напомним (см. (2.22), (2.25)), что

$$X_{jr}w_0 = 0, \quad X_{j'r'}w_0 = 0, \quad (H_j - H_r)w_0 = 0 \quad \forall j, r > 0. \quad (4.47)$$

Проверим, что

$$\langle w_0, X_{1'}X_1w_0 \rangle = \langle w_0, X_{j'}X_jw_0 \rangle \quad \text{и} \quad \langle w_0, X_1X_{1'}w_0 \rangle = \langle w_0, X_jX_{j'}w_0 \rangle \quad (4.48)$$

при $j = 2, 3, 4$. Действительно,

$$\begin{aligned}\langle w_0, X_{1'}X_1w_0 \rangle &= -\langle X_1w_0, X_{1'}w_0 \rangle = -\langle X_1w_0, [X_{j'1}, X_j]w_0 \rangle \\ &= -\langle X_1w_0, X_{j'1}X_jw_0 \rangle = \langle X_{j1'}X_1w_0, X_jw_0 \rangle \\ &= \langle [X_{j1'}, X_1]w_0, X_jw_0 \rangle = -\langle X_jw_0, X_{j'}w_0 \rangle = \langle w_0, X_{j'}X_jw_0 \rangle.\end{aligned}$$

Аналогично проверяется и другое равенство.

Используя соотношения (4.47) и (4.48), легко получить

$$\langle w_0, Y^*X_{2'}[X_2, Y]w_0 \rangle = -12\langle w_0, H_1^2w_0 \rangle - 12\langle w_0, H_1w_0 \rangle = -3l(l+2)\langle w_0, w_0 \rangle. \quad (4.49)$$

Из равенств (4.25) и (4.27) вытекает, что

$$\langle w_0, X_{2'} X_2 w_0 \rangle = -\frac{1}{4} k(k+l+7) \langle w_0, w_0 \rangle. \quad (4.50)$$

Проводя аналогичные вычисления, находим

$$X_2 \tilde{w}_0 = -k(k+l+6) X_{1'2} \mathcal{D}^{k-1} \tilde{v}_0$$

и

$$\begin{aligned} \langle w_1, X_{2'} \varphi(X_-) X_2 \tilde{w}_0 \rangle &= -k(k+l+6) \langle w_1, X_{2'} X_{1'2} \mathcal{D}^{k-1} Z v_0 \rangle \\ &= -k(k+l+6) \langle w_1, X_{1'} \mathcal{D}^{k-1} Z v_0 \rangle \\ &= -4^{-1} k(k+l+6) \langle w_1, \mathcal{D}^k Z v_0 \rangle \\ &= -4^{-1} k(k+l+6) \alpha \langle w_1, w_1 \rangle \\ &= -4^{-1} \alpha k(k+l+6) 3l(l+2) \langle w_0, w_0 \rangle. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Из (4.44)–(4.46) и (4.49)–(4.51) окончательно получаем

$$C = -\frac{1}{240} l(l+2)(l+3)(l+4)(l+5) \alpha(k+4) \langle w_0, w_0 \rangle = -\frac{1}{4} (k+4) A.$$

По гомоморфизму φ строится оператор $X \in P_0(\lambda, \mu)$, явный вид которого находится из леммы 4.1 по найденным коэффициентам A, B, C . Тогда оператор $X_-^{(\lambda)} = \frac{1}{A} X$ имеет вид (4.28).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.5. При $\lambda = (k, 0, 0, l)$, $k \geq 1$, существует оператор $Y_+^{(\lambda)} \in P_0(\lambda, \lambda + \delta_2)$, имеющий вид

$$(Y_+^{(\lambda)} f)(t) = \frac{df}{dt}(t) - 2l(\operatorname{cth} 2t)f(t) + 2(k+l+7)(\operatorname{cth} t)f(t). \quad (4.52)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. А) В рассматриваемом случае $\mu = \lambda + \delta_2 = (k-1, 0, 0, l+1)$. Векторы w_0, w_r, ξ_0 – те же, что и в предыдущем предложении,

$$\tilde{w}_0 = \mathcal{D}^{k-1} \tilde{v}_0, \quad \tilde{w}_r = Y^r \tilde{w}_0, \quad \tilde{\xi}_0 = \sum_{0 \leq r \leq l+1} \tilde{t}_r \tilde{w}_r,$$

коэффициенты $\tilde{t}_r = t_r(l+1)$ определяются формулой (4.13). Докажем, что для некоторого ненулевого гомоморфизма φ справедливо равенство

$$\varphi(X_-) \tilde{v}_0 = \mathcal{D} v_0. \quad (4.53)$$

Для этого определим следующее линейное подпространство L :

$$L = \{v \in E^\lambda(\lambda - \varepsilon_1) : X_{\alpha_1} v = X_{\alpha_2} v = X_{\alpha_3} v = 0\}.$$

Заметим, что $X_{\alpha_4}L = X_4L \subset E^\lambda(\lambda - \varepsilon_1 + \varepsilon_4)$ и что $\dim E^\lambda(\lambda - \varepsilon_1 + \varepsilon_4) = 1$. Если $\dim L \geq 2$, то в L можно найти вектор $v \neq 0$ такой, что $X_{\alpha_4}v = 0$, и, следовательно, v был бы старшим вектором, что невозможно. Следовательно, $\dim L \leq 1$.

Если $v = \varphi(X_-)\tilde{v}_0$, то $v \in L$. С другой стороны, очевидно, что $\mathcal{D}v_0 \in L$ и $\mathcal{D}v_0 \neq 0$. Умножив φ на подходящее число, можно добиться выполнения равенства (4.53).

Б) Из (4.53) следует, что

$$\varphi(X_-)\tilde{w}_0 = \varphi(X_-)\mathcal{D}^{k-1}\tilde{v}_0 = \mathcal{D}^k v_0 = w_0. \quad (4.54)$$

Почти дословно повторяя вычисления из пп. Б) и В) доказательства предложения 4.3, получаем, что $A = -(l+6)(l+3)^{-1}$, $B = \frac{2}{7}lA$. Вычисления коэффициента C также аналогичны вычислениям из предложения 4.3 и не содержат принципиальных трудностей. Получаем, что $C = -4^{-1}(k+l+7)A$.

По гомоморфизму φ строится оператор $X \in P_0(\lambda, \mu)$. Тогда оператор $Y_+^{(\lambda)} = \frac{1}{A}X$ имеет вид (4.52).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.6. При $\lambda = (k, 0, 0, l)$, $l \geq 1$, существует оператор $Y_-^{(\lambda)} \in P_0(\lambda, \lambda - \delta_2)$, имеющий вид

$$(Y_-^{(\lambda)}f)(t) = \frac{df}{dt}(t) + 2(l+6)(\operatorname{cth} 2t)f(t) - 2(k+l+3)(\operatorname{cth} t)f(t). \quad (4.55)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. А) В рассматриваемом случае $\mu = \lambda - \delta_2 = (k+1, 0, 0, l-1)$. Векторы w_0, w_r, ξ_0 – те же, что и в предыдущих предложениях,

$$\tilde{w}_0 = \mathcal{D}^{k+1}\tilde{v}_0, \quad \tilde{w}_r = Y^r \tilde{w}_0, \quad \tilde{\xi}_0 = \sum_{0 \leq r \leq l-1} \tilde{t}_r \tilde{w}_r,$$

где коэффициенты $\tilde{t}_r = t_r(l-1)$ определяются формулой (4.13). Докажем, что для некоторого ненулевого гомоморфизма φ справедливо равенство

$$\varphi(X_-)\tilde{v}_0 = Y_1 v_0, \quad (4.56)$$

где $Y_1 = [X_1, Y]$. Для этого определим следующее подпространство L :

$$L = \{v \in E^\lambda(\lambda - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4) : X_{\alpha_1}v = X_{\alpha_2}v = X_{\alpha_3}v = 0\}.$$

Покажем, что $\dim L \leq 1$. Пусть $L_1 = X_{\alpha_4}L = X_4L$. Тогда $L_1 \subset E^\lambda(\lambda - \varepsilon_2 - \varepsilon_3)$ и $X_{\alpha_2}L_1 = \{0\}$. Подпространство $E^\lambda(\lambda - \varepsilon_2 - \varepsilon_3)$ порождается векторами $u_1 = X_{2'}X_{3'}v_0$ и $u_2 = X_{2'3'}v_0$. При $l = 1$ эти векторы коллинеарны, а при $l \geq 2$ условие $X_{\alpha_2}u = 0$ выделяет одномерное подпространство в $E^\lambda(\lambda - \varepsilon_2 - \varepsilon_3)$. Следовательно, $\dim L_1 \leq 1$. Если $\dim L \geq 1$, то в L существует вектор $v \neq 0$ такой, что $X_{\alpha_4}v = 0$, т.е. v – старший вектор, что невозможно.

Если $v = \varphi(X_-)\tilde{v}_0$, то $v \in L$. С другой стороны, $Y_1 v_0 \in L$ и $Y_1 v_0 \neq 0$, так как $X_2 X_{34} Y_1 v_0 = -l^2 v_0 \neq 0$. Умножив φ на подходящее число, получим (4.56).

Б) Из (4.56) следует, что $\varphi(X_-)\tilde{w}_0 = \mathcal{D}^{k+1}Y_1v_0$. Используя (4.36) и то, что $\mathcal{D}^{k+1}v_0 = 0$, получаем

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{k+1}Y_1v_0 &= -2 \sum_{0 \leq r \leq k} \mathcal{D}^{k-r}(H_1 - H_2 + 2)Y\mathcal{D}^rv_0 \\ &= -(k+1)(k+4)Y\mathcal{D}^rv_0 = -(k+1)(k+4)Yw_0.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\varphi(X_-)\tilde{w}_0 = -(k+1)(k+4)w_1. \quad (4.57)$$

Дальнейшие вычисления коэффициентов A , B , C проводятся, как в предложении 4.4, и не содержат принципиальных трудностей. В результате получаем

$$A = -(k+1)(k+4)l(l+2), \quad B = -\frac{2}{7}(l+6)A, \quad C = \frac{1}{4}(k+l+3)A.$$

По гомоморфизму φ строится оператор $X \in P_0(\lambda, \mu)$; тогда оператор $Y_-^{(\lambda)} = \frac{1}{A}X$ имеет вид (4.55).

Пользуясь явным видом операторов $\tilde{\Delta}$, $X_{\pm}^{(\lambda)}$, $Y_{\pm}^{(\lambda)}$ (см. (3.14), (4.12), (4.28), (4.52), (4.55)), непосредственными вычислениями проверяются соотношения:

$$X_-^{(\lambda+\delta_1)}X_+^{(\lambda)}f = \tilde{\Delta}f - 4(k+l)(k+l+11)f, \quad (4.58)$$

$$X_+^{(\lambda-\delta_1)}X_-^{(\lambda)}f = \tilde{\Delta}f - 4(k+l-1)(k+l+10)f, \quad (4.59)$$

$$Y_-^{(\lambda+\delta_2)}Y_+^{(\lambda)}f = \tilde{\Delta}f - 4(k+7)(k-4)f, \quad (4.60)$$

$$Y_+^{(\lambda-\delta_2)}Y_-^{(\lambda)}f = \tilde{\Delta}f - 4(k+8)(k-3)f. \quad (4.61)$$

Доказательство теорем I и II проводится аналогично доказательству соответствующих теорем из [1], поэтому отметим только основные моменты доказательств.

Доказательство теоремы I отдельно проводится для случая $\lambda = 0 = (0, 0, 0, 0)$ и затем уже для произвольного λ . Заметим, что при $\lambda = 0$ оператор $\tilde{\Delta}$ совпадает с дифференциальным оператором

$$\Delta_{d,r} = \frac{d^2}{dt^2} + (2k+2r+1)\operatorname{cth} t \cdot \frac{d}{dt} + (2r+1)\operatorname{th} t \cdot \frac{d}{dt}$$

при $d = 4$, $r = 3$, который рассматривался в [1, § 6]. Дальнейшие шаги доказательства теоремы I при $\lambda = 0$ из [1] проходят и для случая, когда M – особое симметрическое пространство, если при этом считать, что $\Phi = \Phi_{4,3}$ ($\Phi_{d,r}$ – преобразование из [1, лемма 5.2]) и $m = 4$.

В общем случае, при $\lambda = (k, 0, 0, l)$, $k, l \geq 0$, доказательство теоремы I проводится индукцией по $p = 2k + l$. При $p = 0$ (тогда $\lambda = 0$) теорема доказана. Используя явный вид операторов $X_{\pm}^{(\lambda)}$, $Y_{\pm}^{(\lambda)}$ и соотношения (4.58)–(4.61), рассуждая, как при доказательстве леммы 6.12 из [1], доказываем следующую лемму.

ЛЕММА 4.7. Пусть $\lambda = (k, 0, 0, l) \in \Lambda_0$, μ — произвольное число из $\mathbb{C}_+$, $r \in \mathbb{Z}_+$. Справедливы следующие соотношения:

- 1) $\dim V_{\mu, r}^{(\lambda)} = r$;
- 2) $\text{Ker } X_{-}^{(\lambda)} = \{0\}$, $\text{Ker } Y_{+}^{(\lambda)} = \{0\}$;
- 3) $\text{Ker } X_{+}^{(\lambda)} = V_{i(2k+2l+11), 1}^{(\lambda)}$, $\text{Ker } Y_{-}^{(\lambda)} = V_{i(2k+5), 1}^{(\lambda)}$;
- 4) $X_{-}^{(\lambda)}(V_{\mu, r}^{(\lambda)}) = V_{\mu, r}^{(\lambda-\delta_1)}$, $Y_{+}^{(\lambda)}(V_{\mu, r}^{(\lambda)}) = V_{\mu, r}^{(\lambda+\delta_2)}$;
- 5) $X_{-}^{(\lambda)}(V_{\mu, r}^{(\lambda)}) = V_{\mu, r_1}^{(\lambda+\delta_1)}$, где $r_1 = r$ при $\mu \neq i(2k+2l+11)$ и $r_1 = r-1$ при $\mu = i(2k+2l+11)$;
- 6) $Y_{-}^{(\lambda)}(V_{\mu, r}^{(\lambda)}) = V_{\mu, r_2}^{(\lambda-\delta_2)}$, где $r_2 = r$ при $\mu \neq i(2k+5)$ и $r_2 = r-1$ при $\mu = i(2k+5)$.

С использованием этой леммы оставшаяся часть доказательства теоремы I проводится так же, как при доказательстве соответствующей теоремы в [1]. Доказательство теоремы II проводится так же, как в [1], без существенных отличий.

Список литературы

1. Платонов С. С. Инвариантные подпространства в некоторых функциональных пространствах на симметрических пространствах. I // Изв. РАН. Сер. матем. 1995. Т. 59. № 5. С. 127–172.
2. Платонов С. С. Инвариантные подпространства в некоторых функциональных пространствах на симметрических пространствах. II // Изв. РАН. Сер. матем. 1998. Т. 62. № 5. С. 131–168.
3. Платонов С. С. Инвариантные подпространства в некоторых функциональных пространствах на n -мерном пространстве Лобачевского // Матем. сб. 1988. Т. 137. № 12. С. 435–461.
4. Хелгасон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. М.: Мир, 1964.
5. Helgason S. Geometric Analysis on Symmetric Spaces. Providence, R.I.: Amer. Math. Soc., 1997.
6. Хелгасон С. Группы и геометрический анализ. М.: Мир, 1987.
7. Гото М., Гросханс Ф. Полупростые алгебры Ли. М.: Мир, 1981.
8. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. Гл. VII, VIII. М.: Мир, 1978.
9. Helgason S. A duality for symmetric spaces with applications to group representations. I // Adv. Math. 1970. V. 5. P. 1–154.
10. Berenstein C. A. Spectral synthesis on symmetric spaces // Contemp. Math. 1987. V. 63. P. 1–25.
11. Wawrzynczyk A. Spectral analysis and synthesis on symmetric spaces // J. Math. Ann. and Appl. 1987. V. 127. P. 1–17.
12. Платонов С. С. Инвариантные подпространства в некоторых функциональных пространствах на симметрических пространствах ранга 1 (симплектический и особый случаи) // ДАН СССР. 1992. Т. 322. № 2. С. 243–247.
13. Cartan E. Sur la structure des groupes de transformations finis et continus. Oeuvres complètes. Partie I. V. 1. Paris, 1952.
14. Kass N. Explicit decompositions of some tensor products of modules for semisimple Lie algebras // Commun. Algebra. 1987. V. 15. P. 2251–2261.

Петрозаводский государственный университет
E-mail: platonov@mainpgu.karelia.ru

Поступило в редакцию
4.XII.2000