Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Соболев, Бирациональные автоморфизмы одного класса многообразий, слоенных на кубические поверхности, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2002, том 66, выпуск 1, 203–224

DOI: <https://doi.org/10.4213/im377>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 18:32:31

УДК 512.6

И. В. Соболев

**Бирациональные автоморфизмы
одного класса многообразий,
расслоенных на кубические поверхности**

Изучаются свойства многообразия V , которое является дивизором бистепени $(2, 3)$ в $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3$. Вычисляется группа его бирациональных автоморфизмов и доказывается, что V не имеет структуры расслоения на коники и не является рациональным.

Библиография: 15 наименований.

Введение

За последние 30 лет развития бирациональной геометрии наиболее важные результаты, относящиеся к проблеме рациональности трехмерных алгебраических многообразий, были получены с привлечением двух методов. Один из них использует теорию промежуточного якобиана, другой же, восходящий к работам Фано, был создан Исковских и Маниным и называется теперь *методом максимальных особенностей*. Оказалось, что эти два подхода в некотором смысле дополняют друг друга и многообразия, к которым они первоначально применялись, обладают противоположными свойствами. Например, применяя метод максимальных особенностей, удавалось доказывать нерациональность многообразий, имеющих “мало” бирациональных автоморфизмов. С другой стороны, этот метод дает исчерпывающее описание бирационального типа многообразия, и его нерациональность получается как следствие гораздо более общих утверждений, поэтому расширение области действия метода максимальных особенностей на как можно больший класс многообразий позволило бы разрешить многие трудные проблемы многомерной бирациональной геометрии. На протяжении многих лет В. А. Исковских и его учениками проводились исследования в этом направлении. Недавно А. В. Пухликову удалось существенно усовершенствовать метод максимальных особенностей и перенести его в произвольную размерность, благодаря чему сразу удалось получить сильные результаты и появилась надежда завершить в обозримом будущем бирациональную классификацию трехмерных алгебраических многообразий с отрицательной размерностью Кодайры.

Одной из классических проблем трехмерной геометрии является проблема рациональности многообразий с пучком поверхностей дель Пеццо. Известно, что

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 99-01-01132) и INTAS-OPEN (грант № 97/2072).

если степень общего слоя d больше четырех, то все такие многообразия рациональны. Случай $d = 4$ рассматривался в работе [1] с использованием метода промежуточного якобиана. Ф. Барделли в [2] доказал нерациональность пучков кубических поверхностей с помощью метода вырождения Клеменса. В. А. Исковских предположил, что если $d = 1, 2, 3$ и расслоение на поверхности дель Пеццо степени d достаточно сильно “закручено” по базе, то его нерациональность можно доказать методом максимальных особенностей. В работе [10] А. В. Пухликов доказал эту гипотезу, заменив условие “закрученности” по базе на равносильное K^2 -условие. М. М. Гриненко в [3], [4] исследовал бирациональные свойства некоторых расслоений на поверхности дель Пеццо степени 1 и 2, для которых K^2 -условие не выполняется. Отметим также близкие результаты работ А. В. Пухликова [11], [12] о многомерных расслоениях на многообразиях Фано.

Пусть V_m – гиперповерхность в $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3$, определенная уравнением

$$p_{m,3}(u, v; x_0, \dots, x_3) = 0,$$

где p имеет степень m по u, v и степень 3 по $x_0, \dots, x_3$. Очевидным образом определена проекция $\pi: V \rightarrow \mathbb{P}^1$, слоем которой является кубическая поверхность в $\mathbb{P}^3$.

В работе [2] установлена нерациональность общего многообразия V_m при $m \geq 2$. В [10] доказано, что при $m \geq 3$ общее многообразие V_m бирационально жестко и обладает единственной структурой расслоения на рациональные поверхности. Для многообразия $V = V_2$ K^2 -условие не выполняется, поэтому вопрос о его бирациональной жесткости до настоящего времени был открыт. В нашей работе этот пробел будет восполнен.

Автор благодарит А. В. Пухликова за многочисленные обсуждения проблемы и В. А. Исковских за внимание к работе.

§ 1. Формулировка результата и начало доказательства

Объект всех наших дальнейших рассуждений – многообразие V , заданное в $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3$ уравнением

$$A(x_0, \dots, x_3)u^2 + B(x_0, \dots, x_3)uv + C(x_0, \dots, x_3)v^2 = 0,$$

где A, B, C – кубические многочлены.

Пусть $\pi: V \rightarrow \mathbb{P}^1$ и $\sigma: V \rightarrow \mathbb{P}^3$ – отображения, являющиеся ограничениями проекций $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3$ на первый и второй множители соответственно; F – слой π , $F_t = \pi^{-1}(t)$ для $t \in \mathbb{P}^1$, $F_x = \pi^{-1}(\pi(x))$ для $x \in V$, F_η – слой π над общей точкой $\mathbb{P}^1$; $T_x F$ – плоскость в $\mathbb{P}^3$, касательная к F в точке $x \in F$; $\text{centre}(\nu)$ – центр дискретного нормирования ν ; $\equiv$ – численная эквивалентность циклов; $(C \circ D)$ – цикл пересечения дивизоров C, D ; $(Z \cdot W)$ – индекс пересечения циклов Z, W .

Основное поле предполагается полем комплексных чисел $\mathbb{C}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. 1) Кривую $C \subset V$ назовем *горизонтальной*, если $\pi(C) = \mathbb{P}^1$, и *вертикальной*, если $\pi(C)$ – точка.

2) Будем говорить, что эффективный одномерный цикл $Z \subset V$ *горизонтален* (*вертикален*), если все его неприводимые компоненты горизонтальны (вертикальны).

3) *Степенью* одномерного цикла $Z \subset V$ назовем число $(F \cdot Z)$, если Z горизонтален, и число $(-K_V \cdot Z)$, если Z вертикален.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Пусть F – кубическая поверхность в $\mathbb{P}^3$. Точку $x \in F$ назовем *регулярной*, если она неособа на F и кривая $T_x F \cap F$ либо неприводима, либо распадается на прямую L и конику Q , причем L не касается Q и не проходит через особые точки F .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. *Горизонтальной прямой* на V будем называть одномерный цикл $Z \subset V$ такой, что $Z = \sigma^{-1}(x)$ для некоторой точки $x \in \mathbb{P}^3$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. Точка x на кубической поверхности F называется *точкой Эккарта*, если существуют ровно три прямые на F , проходящие через x .

Предположим, что V удовлетворяет следующим условиям общности положения:

- 1) уравнения $A = B = C = 0$ определяют ровно 27 различных горизонтальных прямых на V ;
- 2) каждая точка $x \in V$, лежащая на горизонтальной прямой, регулярна как точка на F_x ;
- 3) если $x \in V$ – точка Эккарта на $F = F_x$ и $L \subset F$ – прямая, содержащая x , то L не проходит через особые точки F и не пересекает ни одну из горизонтальных прямых;
- 4) любая горизонтальная прямая трансверсально пересекает поверхность $\mathcal{F}$, заматаемую прямыми в слоях π ;
- 5) если поверхность F_t особа, то она имеет только одну невырожденную квадратичную особую точку, через которую проходят 6 различных прямых на F_t ;
- 6) группа бирегулярных автоморфизмов многообразия V тривиальна.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. *Условия 1)–6) выполняются для общего многообразия V .*

Доказательство будет дано в § 7.

Многообразие V имеет следующие две структуры расслоения на рациональные поверхности. Первая из них определяется проекцией π . Отображение $\tau: V \dashrightarrow V$, которое переставляет точки в слоях σ , определено вне подмножества коразмерности 2 и является бирациональной инволюцией. Вторая структура получается действием τ на первую.

Пусть V' – трехмерное проективное многообразие, неособое в коразмерности 1, причем существует проекция $\pi': V' \rightarrow \mathbb{P}^1$, общий слой которой – рациональная поверхность F' .

Основным результатом настоящей работы является

ТЕОРЕМА. *Если V удовлетворяет условиям 1)–6), приведенным выше, то:*

- 1) *для любого бирационального отображения $\chi: V \dashrightarrow V'$ существует бирациональный автоморфизм $\chi' \in \text{Bir } V$ такой, что $(\chi \circ \chi')^{-1}(|F'|) = |F|$;*
- 2) *группа $\text{Bir } V$ является свободным произведением циклической группы порядка 2, порожденной τ , и группы $\text{Bir } F_\eta$.*

СЛЕДСТВИЕ. 1) Любой пучок рациональных поверхностей на V бирациональными преобразованиями можно перевести в $|F|$.

2) Многообразие V не имеет структуры расслоения на коники и не рационально.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть R – поверхность в проективном пространстве $\mathbb{P}^3$, определенная уравнением $B^2 - 4AC = 0$. В точках, лежащих на пересечении трех кубических поверхностей $A = 0$, $B = 0$ и $C = 0$, поверхность R имеет особенности, которые для общих многочленов A, B, C являются обыкновенными двойными точками. Двойное накрытие $\mathbb{P}^3$, разветвленное в R , – это особое многообразие Фано, бирационально изоморфное V . Таким образом, доказанная теорема дает интересный пример нерационального двойного пространства с 27 особыми точками.

Перейдем к доказательству теоремы.

Пусть $\chi: V \dashrightarrow V'$ – бирациональное отображение и $|\chi|$ – собственный прообраз пучка $|F'|$ на V . Существуют целые числа $n = n(\chi)$ и $l = l(\chi)$ такие, что $|\chi| \subset |-n(\chi)K_V + l(\chi)F|$, причем $n(\chi) \geq 0$.

Дискретное нормирование ν поля рациональных функций многообразия V называется *максимальной особенностью отображения χ* , если выполняется неравенство Нётера–Фано–Исковских $e(\nu) = \nu(|\chi|) - nK(\nu, V) > 0$, где $K(\nu, V)$ – дискрепантность ν по отношению к V .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. Если верны неравенства $n(\chi) \geq 1$, $l(\chi) \geq 0$, то χ имеет максимальную особенность, причем выполняется одно из двух условий:

- 1) существует максимальная особенность ν , центр которой – горизонтальная кривая на V ;
- 2) существует конечное множество $\mathcal{M}$ максимальных особенностей, центры которых – точки, такое, что верно неравенство

$$\sum_{t \in \mathbb{P}^1} \max_{\{\nu \in \mathcal{M} \mid \text{centre}(\nu) \subset F_t\}} \left(\frac{e(\nu)}{\nu(F_t)} \right) > l.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [10, предложение 2.1 и § 3].

Дальнейшие рассуждения проводятся следующим образом: в § 2–5 мы докажем, что второй случай предложения 1.2 не реализуется, в § 6 будет показано, как χ раскладывается в композицию послонных бирациональных отображений, связанных с кривыми – центрами максимальных особенностей и инволюции τ , § 7 посвящен проверке условий 1)–6) для общего V .

§ 2. Максимальные особенности, лежащие над точками

Пусть $D_1, D_2 \in |\chi|$ – общие дивизоры и $Z = (D_1 \circ D_2)$ – одномерный цикл на V ; $Z = Z^v + Z^h$, где Z^h накрывает базу, а компоненты Z^v лежат в слоях. Справедливо разложение

$$Z = Z^h + \sum_{t \in \mathbb{P}^1} Z_t^v, \quad \text{supp } Z_t^v \subset F_t.$$

Группа $A^2(V)$ порождается классом горизонтальной прямой s и классом прямой в слое f .

Запишем $K_V^2 \equiv \alpha s + \beta f$. Пусть L_V – ограничение тавтологического пучка $L \in \text{Pic } \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3$ на V . Имеем $K_V = -L_V$, $\alpha = (K_V^2 \cdot F) = 3$, $\beta = -K_V^3 = 2$, значит,

$$Z = (-nK_V + lF)^2 \equiv 3n^2s + (2n^2 + 6nl)f.$$

Предположим теперь, что реализуется случай 2) предложения 1.2, причем p слоев содержат максимальные особенности из множества $\mathcal{M}$.

Пусть $Z^h \equiv \alpha^h s + \beta^h f$; тогда выполнено неравенство

$$\beta^h + \sum_{t \in \mathbb{P}^1} \deg Z_t^v \leq 2n^2 + 6nl,$$

поэтому найдется максимальная особенность $\nu \in \mathcal{M}$, для которой верно неравенство

$$\deg Z_t^v < \frac{6ne(\nu)}{\nu(F_t)} + \frac{2n^2 - \beta^h}{p},$$

где $\text{centre}(\nu) \subset F_t = F$.

Докажем, что существование такой максимальной особенности приводит к противоречию.

Заметим сразу, что если $\beta^h \geq 2n^2$, то ν исключается так же, как в [10], поэтому всюду в дальнейшем будем считать, что $\beta^h \leq 2n^2$.

§ 3. Начало исключения бесконечно близкой особенности

Пусть $\varphi_{i,i-1}: V_i \rightarrow V_{i-1}$, $i = 1, \dots, K$, – разрешение дискретного нормирования ν (см. [10], [14]), где $\varphi_{i,i-1}$ – раздутие с центром $B_{i-1} \subset V_{i-1}$ и исключительным дивизором $E_i \subset V_i$, причем центры первых $P \leq K$ раздутий – точки, а первые $N \leq P$ раздутий происходят на собственном прообразе F . На множестве индексов $\{1, \dots, K\}$ введем структуру ориентированного графа: j и i соединяются стрелкой, если $j > i$ и $B_{j-1} \subset E_i^{j-1}$. Пусть p_i – число путей в этом графе, ведущих из вершины K в вершину i . Обозначим

$$\begin{aligned} \Sigma_l &= \sum_{i=1}^P p_i, & \Sigma_u &= \sum_{i=P+1}^K p_i, & \Sigma_f &= \sum_{i=1}^N p_i, \\ d_h &= \deg Z^h, & d_v &= \deg Z^v, \\ m_i^h &= \text{mult}_{B_{i-1}}(Z^h)^{i-1}, & m_i^v &= \text{mult}_{B_{i-1}}(Z^v)^{i-1}, \\ m_i^h &\leq m_1^h = m^h, & m_i^v &\leq m_1^v = m^v, \\ m_i &= \text{mult}_{B_{i-1}} Z^{i-1}, & \nu_i &= \text{mult}_{B_{i-1}} |\chi|^{i-1}. \end{aligned}$$

Здесь и далее Z^i обозначает собственный прообраз цикла Z на V_i .

Применяя стандартную технику подсчета кратностей (см. [10], [14]), мы получаем квадратичное неравенство

$$\sum_{i=1}^P p_i m_i^h + \sum_{i=1}^N p_i m_i^v \geq \frac{(2\Sigma_l + \Sigma_u)^2 n^2 + 2(2\Sigma_l + \Sigma_u)ne + e^2}{\Sigma_l + \Sigma_u} \geq 4n^2 \Sigma_l + 4ne.$$

Бесконечно близкая особенность исключается по следующему плану: в этом параграфе доказывается, что центр ν , не лежащий на горизонтальных прямых, может быть только точкой Эккарта на слое; в § 4 устанавливается, что если центр ν лежит на горизонтальной прямой, то через него проходит прямая в слое и для такой максимальной особенности выполнено равенство $P = 1$; в § 5 рассматриваются все оставшиеся случаи.

Пусть $x = \text{centre}(\nu)$, $y = \sigma(x)$, H – плоскость, проходящая через y , и $S = \sigma^{-1}(H)$. Если горизонтальные прямые не проходят через x , то для общей плоскости H поверхность S не содержит компонент цикла Z^h , поэтому верно неравенство

$$\text{mult}_x Z^h \leq (Z^h \cdot S) = \beta^h. \quad (3.1)$$

ЛЕММА 3.1. Пусть x – точка на кубической поверхности F , через которую проходит единственная прямая $L \subset F$, C – кривая на F , не содержащая L в качестве компоненты, и $Z = C + kL$ – эффективный одномерный цикл. Тогда верно неравенство

$$(C \cdot L) \leq 2(\deg Z - \text{mult}_x Z).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любой кривой $C \neq L$ $\text{mult}_x C \leq \frac{1}{2} \deg C$ (см. [10]). Мы имеем следующие неравенства:

$$\begin{aligned} k + \frac{1}{2} \deg C &\geq k + \text{mult}_x C = \text{mult}_x Z, \\ k + \deg C &= \deg Z, \end{aligned}$$

откуда

$$(C \cdot L) \leq \deg C \leq 2(\deg Z - \text{mult}_x Z).$$

ЛЕММА 3.2. Если x не является точкой Эккарта на $F = F_t$, то существует прямая $L \subset F$, проходящая через x , такая, что для разложения $Z_t^v = C + kL$ (C – одномерный цикл, не содержащий L) справедливо неравенство

$$(C \cdot L) < \frac{4ne}{\nu(F)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу квадратичного неравенства и неравенства (3.1) верна следующая оценка на кратность цикла $Z^v = Z_t^v$ в точке x :

$$\text{mult}_x Z^v \geq \frac{4ne}{\nu(F)} + 4n^2 - \beta^h. \quad (3.2)$$

С другой стороны, по определению ν

$$\deg Z^v < \frac{6ne}{\nu(F)} + 2n^2 - \beta^h. \quad (3.3)$$

Если через точку x не проходят прямые, то $\text{mult}_x Z^v \leq \frac{2}{3} \deg Z^v$ (см. [10]), но тогда неравенства (3.2) и (3.3) противоречивы, так как $\beta^h \leq 2n^2$.

Рассмотрим теперь три случая в зависимости от того, лежит ли точка x на одной, двух или шести прямых.

1. *Одна прямая.* В этом случае $T_x F \cap F = L + Q$, где L – прямая, Q – коника. Пусть $Z^v = C + kL$, C не содержит L . Требуемое неравенство получается из (3.2), (3.3) и леммы 3.1.

2. *Две прямые.* Пусть $T_x F \cap F = L_1 + L_2 + L_3$, где L_i – прямые, $x \in L_1$, $x \in L_2$, $x \notin L_3$, $Z^v = Q + k_1 L_1 + k_2 L_2 + k_3 L_3$, $d = \deg Q$, $d_i = (Q \cdot L_i)$, $m = \text{mult}_x Q$. Верно равенство $d_1 + d_2 + d_3 = d$, если точки $L_i \cap L_3$, $i = 1, 2$, неособы на F , иначе верно неравенство $d_1 + d_2 \leq d$. Имеем

$$2m \leq d, \quad d + k_1 + k_2 + k_3 < \frac{6ne}{\nu(F)} + 2n^2 - \beta^h, \quad (3.4)$$

$$k_1 + k_2 + m \geq \frac{4ne}{\nu(F)} + 4n^2 - \beta^h. \quad (3.5)$$

Если для любых $i, j \in \{1, 2\}$, $i \neq j$,

$$k_j + k_3 + d_i \geq \frac{4ne}{\nu(F)},$$

то, складывая эти два неравенства и прибавляя к ним (3.5), получим

$$2(k_1 + k_2 + k_3) + m + d_1 + d_2 \geq \frac{12ne}{\nu(F)} + 4n^2 - \beta^h,$$

что противоречит (3.4), так как $\beta^h \geq 0$, поэтому можно положить $C = Q + k_i L_i + k_3 L_3$ для некоторого $i \in \{1, 2\}$.

3. *Шесть прямых.* В этом случае x – обыкновенная двойная точка на слое F . Среди шести прямых L_i , содержащих x , найдется одна (например, L_1) такая, что

$$B_1 \notin L_i^1$$

для $i \neq 1$ (см. выше разрешение максимальной особенности).

Запишем $Z^v = kL_1 + R + Q$, где R состоит из прямых, проходящих через x (кроме L_1), Q не содержит этих прямых. Пусть $B_{i-1} \in L_1^{i-1}$ при $i = 1, \dots, M$, $q_i = \text{mult}_{B_{i-1}} Q^{i-1}$. Тогда, учитывая квадратичное неравенство, так же, как в [10], имеем

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=1}^M p_i \right) k + p_1 \deg R + \sum_{i=1}^N p_i q_i \geq 4ne + \left(\sum_{i=1}^N p_i \right) (4n^2 - \beta^h), \\ & \left(\sum_{i=1}^M p_i \right) k + \frac{1}{2} \left(2p_1 + \sum_{i=2}^N p_i \right) (\deg R + \deg Q) \geq 4ne + \left(\sum_{i=1}^N p_i \right) (4n^2 - \beta^h), \\ & \left(2p_1 + \sum_{i=2}^N p_i \right) (k + \deg R + \deg Q) < 6ne + \left(2p_1 + \sum_{i=2}^N p_i \right) (2n^2 - \beta^h), \end{aligned}$$

откуда

$$\left(\sum_{i=2}^M p_i\right)k > 2ne + \left(\sum_{i=2}^N p_i\right)(6n^2 - \beta^h) + 4n^2 p_1$$

или

$$k > \frac{2ne}{\nu(F)} + 6n^2 - \beta^h,$$

так как $M \leq N$. Полагая $C = R + Q$, получим требуемое неравенство.

ЛЕММА 3.3. *Если точка x — центр максимальной особенности и через x проходит прямая $L \subset F_x$, то для разложения $Z^v = C + kL$ выполнено неравенство*

$$(C \cdot L) \geq \frac{4ne}{\nu(F)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [10].

Таким образом, если x не является точкой Эккарта, то дальнейшие рассуждения, исключающие максимальную особенность, ничем не отличаются от рассуждений, проведенных в [10].

ЛЕММА 3.4. *Пусть x — точка Эккарта на F . Тогда существует прямая $L \subset F$, содержащая x , такая, что для разложения $Z^v = C + kL$ выполняется по крайней мере одно из двух условий:*

- 1) $(C \cdot L) < \frac{4ne}{\nu(F)}$;
- 2) $(C \cdot L) < \frac{4ne}{\nu(F)} + 2n^2 - \beta^h$, $(Z^h \cdot L) \leq \beta^h + n^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть L_1, L_2, L_3 — прямые, проходящие через x , $Z^v = Q + k_1 L_1 + k_2 L_2 + k_3 L_3$, $d = \deg Q$, $d_i = (Q \cdot L_i)$. Для каждой прямой L_i рассмотрим кривую $S_i = \sigma^{-1}(\sigma(L_i))$. Пусть $Z^h = Z_0^h + Z_1^h + Z_2^h + Z_3^h$, где все компоненты Z_i^h при $i \neq 0$ являются горизонтальными компонентами S_i , а Z_0^h и S_i не имеют общих компонент. В силу условия 3) из § 1 циклы Z_i^h неприводимы и $Z_i^h \equiv \beta_i^h(3s + f)$. Пусть $Z_0^h \equiv \alpha_0^h s + \beta_0^h f$. Так как

$$3(\beta_1^h + \beta_2^h + \beta_3^h) \leq \alpha^h \leq 3n^2,$$

то среди чисел $\beta_1^h, \beta_2^h, \beta_3^h$ найдутся два (например, β_1^h, β_2^h), не превосходящих $n^2/2$. Рассмотрим проекцию $\tilde{\sigma}: \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$. Поверхность $\tilde{S}_i = \tilde{\sigma}^{-1}(\sigma(L_i))$ изоморфна $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Так как $L_i \subset \tilde{S}_i$, $Z_i^h \subset \tilde{S}_i$, то $(Z_i^h \cdot L_i) = 3\beta_i^h$. Пусть H_i — плоскость в $\mathbb{P}^3$, содержащая прямую $\sigma(L_i)$, и $G_i = \sigma^{-1}(H_i)$. Для общей плоскости H_i поверхность G_i не содержит компонент цикла Z_j^h при $i \neq j$. Поэтому $(Z_j^h \cdot L_i) \leq (Z_j^h \cdot G_i) = \beta_j^h$. Имеем неравенство

$$(Z^h \cdot L_i) \leq 3\beta_i^h + \beta_j^h + \beta_k^h + \beta_0^h = \beta^h + 2\beta_i^h,$$

$\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, поэтому

$$(Z^h \cdot L_i) \leq \beta^h + n^2$$

для $i = 1, 2$. Предположим теперь, что

$$k_3 + k_i + d_j \geq \frac{4ne}{\nu(F)} + 2n^2 - \beta^h$$

для $\{i, j\} = \{1, 2\}$ и

$$k_1 + k_2 + d_3 \geq \frac{4ne}{\nu(F)}.$$

Складывая эти неравенства, получим

$$k_1 + k_2 + k_3 + d \geq \frac{6ne}{\nu(F)} + 2n^2 - \beta^h,$$

что противоречит неравенству

$$\deg Z^v < \frac{6ne}{\nu(F)} + 2n^2 - \beta^h,$$

т.е. для одной из L_i выполнено утверждение леммы.

Исключение максимальной особенности над точкой Эккарта мы отложим до § 5.

§ 4. Максимальная особенность над точкой горизонтальной прямой

Пусть G – граф разрешения максимальной особенности ν . Рассмотрим граф Γ , полученный из G удалением ребер, соединяющих вершины i и j такие, что $j > P > i$. Пусть r_i – число путей в графе Γ , соединяющих вершину K с вершиной i . Легко видеть, что функция $a(i) = r_i$ согласована со структурой графа G (см. [10]), поэтому верно неравенство

$$\sum_{i=1}^P r_i m_i \geq \sum_{i=1}^K r_i \nu_i^2.$$

Обозначим

$$e' = \sum_{i=1}^K \nu_i r_i - 2n \sum_{i=1}^P r_i - n \sum_{i=P+1}^K r_i.$$

Предположим, что $\nu_1 \leq 2n$. Тогда поскольку $r_i \leq p_i$ при $i \leq P$, $r_i = p_i$ при $i > P$, то $e' \geq e$, поэтому если заменить p_i на r_i , e на e' , то неравенство Нётера–Фано и квадратичное неравенство сохраняются.

Если точка $x = \text{centre}(\nu)$ лежит на горизонтальной прямой L_h , то в силу условия 2) из § 1 неравенство $\nu_1 \leq 2n$ выполнено (см. [6]), так что в дальнейшем мы будем предполагать, что коэффициенты p_i при $i < P$ с самого начала уменьшены и удовлетворяют соотношению

$$p_i = \sum_{\substack{j \rightarrow i \\ j \leq P}} p_j.$$

Пусть теперь $Z^h = \alpha L_h + \tilde{Z}^h$, $\tilde{Z}^h$ не содержит L_h . Имеем неравенства

$$\sum_{i=1}^N p_i m_i^v + \sum_{i=1}^P p_i m_i^h \geq 4n^2 \sum_{i=1}^P p_i + 4ne, \quad (4.1)$$

$$d^v < \frac{6ne}{\nu(F)} + \frac{2n^2 - \beta^h}{p}, \quad (4.2)$$

$$m^h \leq \min\{3n^2, \alpha + \beta^h\}. \quad (4.3)$$

Если $p > 1$ и через точку x не проходят прямые, лежащие в слое, то из (4.1)–(4.3) будем иметь

$$\frac{4ne}{\nu(F)} + n^2 \leq m^v \leq \frac{2}{3}d^v < \frac{4ne}{\nu(F)} + \frac{2}{3}n^2,$$

что противоречиво, поэтому при $p > 1$ существует (единственная) прямая $L \subset F$, содержащая x . Записав $Z^v = C + kL$ и используя неравенства (4.1)–(4.3) и леммы 3.1, 3.3, получим противоречие, т.е. только один слой F содержит максимальные особенности из множества $\mathcal{M}$, значит, для максимальной особенности ν верно неравенство

$$e(\nu) > l\nu(F).$$

Пусть B_1 – точка и $N = 1$ (при этом $P > 1$). Тогда $\sum_{i=1}^P p_i \geq 2 \sum_{i=1}^N p_i = 2p_1$, откуда, используя неравенство (4.1), получим

$$m^v \geq \frac{4ne}{\nu(F)} + 2n^2.$$

Через точку x проходит прямая $L \subset F$, а по лемме 3.1 для разложения $Z^v = C + kL$ имеем

$$(C \cdot L) < \frac{4ne}{\nu(F)}.$$

В силу леммы 3.3 этот случай невозможен.

Если $N > 1$, то $B_1 \notin L_h^1$, так как $L_h^1 \cap F^1 = \emptyset$, значит, $m_i^h \leq \beta^h$ при $i \geq 2$. Поскольку $p_1 \leq \sum_{i=2}^P p_i$, то

$$\sum_{i=1}^P p_i m_i^h \leq (\alpha + \beta^h)p_1 + \beta^h \sum_{i=2}^P p_i \leq \left(\frac{\alpha}{2} + \beta^h\right) \sum_{i=1}^P p_i < (2n^2 + \beta^h) \sum_{i=1}^P p_i,$$

то есть

$$m^v \geq \frac{4ne}{\nu(F)} + 2n^2 - \beta^h.$$

Далее, используя леммы 3.1 и 3.3, получаем противоречие.

Остается рассмотреть случай $P = 1$.

ЛЕММА 4.1. Пусть $x \in V$ – точка, неособая на слое $F = F_x$, D – дивизор на V , $C = (D \circ F)$, $\sigma: V_1 \rightarrow V$ – раздутие точки x с исключительным дивизором E , $B \in E$ – гладкая кривая, D^1, F^1, C^1 – собственные прообразы соответствующих циклов относительно σ , y – любая точка пересечения B с F^1 . Тогда верно неравенство

$$\text{mult}_x D + \text{mult}_B D^1 \leq \text{mult}_x C + \text{mult}_y C^1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$D^1 \circ F^1 = (D \circ F)^1 + mE_1, \quad E_1 = E \cap F^1, \\ \text{mult}_x(D \circ F) = \text{mult}_x D + m$$

(см. [10], [14]). Из первого равенства

$$\text{mult}_y(D^1 \circ F^1) = \text{mult}_y(D \circ F)^1 + m,$$

так что

$$\begin{aligned} \text{mult}_x C + \text{mult}_y C^1 &= \text{mult}_x D + m + \text{mult}_y C^1 \\ &= \text{mult}_x D + \text{mult}_y(D^1 \circ F^1) \geq \text{mult}_x D + \text{mult}_B D^1. \end{aligned}$$

ЛЕММА 4.2. Если $x = B_0$ – регулярная точка слоя $F_x = F$ и B_1 – кривая, то верно неравенство

$$\nu_1 + \nu_2 \leq 3n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $D \in |\chi|$, $C = (D \circ F)$, $C \subset |-nK_F|$. В силу леммы 4.1 достаточно доказать, что для любой точки y , бесконечно близкой к x , выполнено неравенство $\text{mult}_x C + \text{mult}_y C^1 \leq 3n$.

Рассмотрим два случая.

1) Кривая $T_x F \cap F = T$ неприводима.

Пусть $C = aT + R$, R не содержит T . Имеем

$$\begin{aligned} \text{mult}_x C &= 2a + \text{mult}_x R, \quad \text{mult}_y C^1 \leq a + \text{mult}_y R^1, \\ \text{mult}_y R^1 &\leq \text{mult}_x R \leq \frac{1}{2} \deg R, \\ \text{mult}_x C + \text{mult}_y C^1 &\leq 3a + \deg R = 3n. \end{aligned}$$

2) Кривая $T_x F \cap F = T$ приводима.

Здесь придется воспользоваться регулярностью точки x . Кривая T распадается на прямую L и конику Q , причем не более чем одна из кривых L^1 , Q^1 проходит через точку y . Запишем $C = aL + bQ + R$, R не содержит L , Q , $0 \leq a, b \leq n$. Обозначим $\mu_1 = \text{mult}_x R$, $\mu_2 = \text{mult}_y R^1$. Если $y \notin T^1$, то

$$\text{mult}_x C + \text{mult}_y C^1 = a + b + \mu_1 + \mu_2 \leq a + b + \deg R \leq 3n,$$

в противном случае получаем неравенства

$$2\mu_1 + \mu_2 \leq \deg R, \quad \mu_2 \leq \mu_1.$$

Легко видеть, что при этих двух условиях максимум суммы $\mu_1 + \mu_2$ достигается при $\mu_1 = \mu_2 = \frac{1}{3} \deg R$.

Пусть $y \in Q^1$. Тогда имеем

$$\text{mult}_x C + \text{mult}_y C^1 \leq a + 2b + \frac{2}{3} \deg R = 2n + \frac{a + 2b}{3} \leq 3n.$$

Если же $y \in L^1$, то

$$\text{mult}_x C + \text{mult}_y C^1 \leq 2a + b + \frac{2}{3} \deg R = 2n + \frac{4a - b}{3}, \quad (4.4)$$

с другой стороны, $\mu_2 \leq \mu_1 \leq (R \cdot Q) = 2n - 2a$, откуда

$$\text{mult}_x C + \text{mult}_y C^1 \leq 4n + b - 2a. \quad (4.5)$$

Прибавляя равенство (4.4), умноженное на 3, к равенству (4.5), получим

$$4(\text{mult}_x C + \text{mult}_y C^1) \leq 10n + 2a \leq 12n,$$

что и требовалось доказать.

ЛЕММА 4.3. Пусть $P = 1$ и x — центр максимальной особенности. Тогда имеет место неравенство

$$\text{mult}_x Z^v \geq \frac{3}{2}(n^2 + 3nl).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $e > l\nu(F) = lp_1$, то из квадратичного неравенства получаем

$$m^h + m^v > \frac{(2np_1 + n\Sigma_u + lp_1)^2}{p_1(p_1 + \Sigma_u)} = 4n^2 + 4nl + f(\Sigma_u),$$

где

$$f(\Sigma_u) = \frac{(n\Sigma_u - lp_1)^2}{p_1(p_1 + \Sigma_u)}.$$

В силу неравенства Нётера–Фано

$$\sum_{i=1}^K \nu_i p_i > 2np_1 + n\Sigma_u + lp_1.$$

Далее имеем

$$p_1 \leq \sum_{i=2}^K p_i, \quad \sum_{i=1}^K \nu_i p_i \leq \frac{\nu_1 + \nu_2}{2} \sum_{i=1}^K p_i \leq \frac{3n}{2}(p_1 + \Sigma_u)$$

по предыдущей лемме, т.е. получаем неравенство

$$\Sigma_u > \frac{n + 2l}{n} p_1.$$

При $\Sigma_u > \frac{l}{n} p_1$ выполнено $f'(\Sigma_u) > 0$, поэтому

$$f(\Sigma_u) > f\left(\frac{n + 2l}{n} p_1\right) = \frac{n}{2}(n + l).$$

Лемма доказана.

Если точка x не лежит на прямых в слое, то $m^v \leq \frac{2}{3}d^v < 4nl + \frac{4}{3}n^2$, что противоречит лемме 4.3. Пусть $x \in L \subset F$, L — прямая, $Z^v = C + kL$. Из лемм 3.1, 4.3 и неравенства (4.2) получим оценку

$$(C \cdot L) < 3nl + n^2.$$

Далее нам понадобится также оценка $\alpha \geq 2n^2$, которая получается из неравенств (4.1)–(4.3) и лемм 3.1 и 3.3.

§ 5. Исключение бесконечно близкой особенности

Ранее было установлено, что если x – центр максимальной особенности ν , то существует прямая $L \subset F_x = F$, проходящая через x , причем если $Z^v = C + kL$, то имеются две возможности:

1) x – точка Эккарта на F ,

$$(C \cdot L) < \frac{4ne}{\nu(F)} + 2n^2 - \beta^h, \quad (Z^h \cdot L) \leq \beta^h + n^2;$$

2) x лежит на горизонтальной прямой L_h , $Z^h = \alpha L_h + \tilde{Z}^h$,

$$\alpha \geq 2n^2, \quad e > l\nu(F), \quad (C \cdot L) < 3nl + n^2,$$

при разрешении ν на V центр только первого раздутья является точкой.

Для исключения этих случаев мы используем конструкцию лестницы, ассоциированной с прямой L , введенную в [10].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. *Лестницей, ассоциированной с прямой $L \subset V$, называется последовательность раздутий $\sigma_i: V^{(i)} \rightarrow V^{(i-1)}$ с центром L_{i-1} и исключительным дивизором $E^{(i)}$, начинающаяся с $V^{(0)} = V$ и такая, что $E^{(i)}$ – линейчатая поверхность типа $\mathbb{F}_1$, $L_i - (-1)$ -кривая на ней для всех $i \geq 1$, а $L_0 = L$.*

Собственный прообраз $E^{(i)}$ на $V^{(j)}$ будем обозначать $E^{(i,j)}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. *Существует лестница, ассоциированная с L , состоящая из $M \geq 1$ раздутий и удовлетворяющая следующим условиям:*

- 1) для $i = 1, \dots, M-1$ центр ν на $V^{(i)}$ – точка $x_i \in L_i$, $x_0 = x$;
- 2) центр ν на $V^{(M)}$ является

либо

- а) точкой $x_M \notin L_M$, $x_M \notin E^{(M-1,M)}$,

либо

- б) прямой $B = \sigma_M^{-1}(x_{M-1})$, $x_M \notin E^{(M-1,M)}$,

либо

- с) точкой $x_M = E^{(M-1,M)} \cap \sigma_M^{-1}(x_{M-1})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [10, предложение 6.1].

Пусть $E = E^{(M)}$ в случаях а) и б), $E_+ = E^{(M)}$, $E_- = E^{(M-1,M)}$ в случае с).

Перепишем теперь неравенство Нётера–Фано и квадратичное неравенство для многообразия $V^{(M)}$.

Обозначим

$$\lambda_i = \text{mult}_{L_{i-1}} |\chi|^{(i-1)},$$

где $|\chi|^{(i)}$ – собственный прообраз $|\chi|$ на $V^{(i)}$.

Пусть $\varphi_{i,i-1}: V_i \rightarrow V_{i-1}$, $i = 1, \dots, K$, – разрешение дискретного нормирования ν на $V^{(M)}$, где $\varphi_{i,i-1}$ – раздутие с центром $B_{i-1} \subset V_{i-1}$ и исключительным дивизором $E_i \subset V_i$.

Введем следующие обозначения (см. [10]): $\nu_i = \text{mult}_{B_{i-1}} |\chi|^{i-1}$; p_i – число путей от E_K до E_i в графе разрешения; $P = \max\{i | 1 \leq i \leq K, B_{i-1} \text{ – точка}\}$

в случаях а) и с); $N^* = \max\{i \mid 1 \leq i \leq K, B_{i-1} \subset E^{i-1}\}$ в случаях а) и б); $N = \min\{N^*, P\}$ в случае а); $N = N^*$ в случае б); $N_{\pm}^* = \max\{i \mid 1 \leq i \leq K, B_{i-1} \subset E_{\pm}^{i-1}\}$ в случае с); $N_{\pm} = \min\{N_{\pm}^*, P\}$; $\Sigma_0 = \sum_{i=1}^P p_i$, $\Sigma_1 = \sum_{i=P+1}^K p_i$ в случаях а) и с); $\Sigma = \sum_{i=1}^K p_i$ в случае б); $\varepsilon = \sum_{i=1}^{N^*} p_i$, $\Sigma_* = \sum_{i=1}^N p_i$ в случаях а) и б); $\varepsilon_{\pm} = \sum_{i=1}^{N_{\pm}^*} p_i$, $\Sigma_{\pm} = \sum_{i=1}^{N_{\pm}} p_i$ в случае с).

Имеем

$$\sum_{i=1}^K \nu_i p_i = \varepsilon \sum_{i=1}^M (n - \lambda_i) + 2n\Sigma_0 + n\Sigma_1 + e$$

в случае а),

$$\sum_{i=1}^K \nu_i p_i = \varepsilon \sum_{i=1}^M (n - \lambda_i) + n\Sigma + e$$

в случае б),

$$\sum_{i=1}^K \nu_i p_i = \varepsilon_+ \sum_{i=1}^M (n - \lambda_i) + \varepsilon_- \sum_{i=1}^{M-1} (n - \lambda_i) + 2n\Sigma_0 + n\Sigma_1 + e$$

в случае с).

Пусть $D_k^{(i)}$ – общие дивизоры из прообраза линейной системы $|\chi|$ на $V^{(i)}$, $Z^{(i)} = (D_1^{(i)} \circ D_2^{(i)})$, $m_i = \text{mult}_{B_{i-1}}(Z^{(M)})^{(i-1)}$.

Квадратичное неравенство в случаях а)–с) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{а) } \sum_{i=1}^P p_i m_i &\geq \frac{(\varepsilon \sum_{i=1}^M (n - \lambda_i) + 2n\Sigma_0 + n\Sigma_1 + e)^2}{\Sigma_0 + \Sigma_1}; \\ \text{б) } \text{mult}_B Z^{(M)} &\geq \frac{(\varepsilon \sum_{i=1}^M (n - \lambda_i) + n\Sigma + e)^2}{\sum_{i=1}^K p_i^2}; \\ \text{с) } \sum_{i=1}^P p_i m_i &\geq \frac{(\varepsilon_+ \sum_{i=1}^M (n - \lambda_i) + \varepsilon_- \sum_{i=1}^{M-1} (n - \lambda_i) + 2n\Sigma_0 + n\Sigma_1 + e)^2}{\Sigma_0 + \Sigma_1}. \end{aligned}$$

Обозначим через s_i и f_i классы исключительного сечения и слоя поверхности $E^{(i)}$ в группе $A^2(V^{(i)})$.

ЛЕММА 5.1. Пусть $Z_E^{(i)}$ – компонента цикла $Z^{(i)}$, лежащая на $E^{(i)}$, $Z_E^{(i)} \equiv \alpha_i s_i + \beta_i f_i$ и $Z^v = C + kL$, C не содержит L . Тогда если прямая L не проходит через особые точки F , то β_i удовлетворяет неравенству

$$\beta_i \leq (C \cdot L) + \sum_{j=1}^i (((Z^h)^{(j-1)} \cdot L_{j-1}) - 2\lambda_j n - \lambda_j^2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [10, предложения 7.2 и 7.3].

ЛЕММА 5.2. 1) В случае b) верно неравенство $\text{mult}_B Z^{(M)} \leq \beta_M$.

2) В случае c) справедливо разложение $m_i = m_i^h + m_i^+ + m_i^-$, где $m_i^h \leq \text{mult}_{x_M}(Z^h)^{(M)}$, $m_i^+ \leq \beta_M$ при $i \leq N_+$, $m_i^+ = 0$ при $N_+ < i \leq P$, $m_i^- \leq \beta_{M-1}$ при $i \leq N_-$, $m_i^- = 0$ при $N_- < i \leq P$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [10, ш. 7.6, 7.7].

ЛЕММА 5.3. Если неравенство

$$\beta_i \leq \frac{4ne}{\nu(F)} + \sum_{j=1}^i (3n^2 - 2\lambda_j n - \lambda_j^2)$$

выполнено для $i = M$ в случаях a), b) и для $i = M, M-1$ в случае c), то максимальная особенность исключается.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [10, ш. 7.5–7.7].

ЛЕММА 5.4. Пусть $\mathcal{F}$ – поверхность, заметаемая прямыми в слоях. Тогда верно равенство $\sigma_1^* \mathcal{F} \cap E^{(1)} = L_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для L_1 выполнено условие $(L_1 \cdot E^{(1)}) = 0$, и это единственная кривая на $E^{(1)}$ с таким свойством (см. [10, предложение 6.1]). С другой стороны, легко видеть, что если $C = \sigma_1^* \mathcal{F} \cap E^{(1)}$, то $(C \cdot E^{(1)}) = 0$.

Теперь мы можем закончить исключение максимальной особенности.

Предположим сначала, что для точки $x = \text{centre}(\nu)$ реализуется возможность 1) (см. выше). Тогда для любого $M \geq 1$

$$\begin{aligned} (C \cdot L) + \sum_{i=1}^M (((Z^h)^{(i-1)} \cdot L_{i-1}) - 2\lambda_i n - \lambda_i^2) \\ \leq \frac{4ne}{\nu(F)} + 2n^2 - \beta^h + \sum_{i=1}^M (\beta^h + n^2 - 2\lambda_i n - \lambda_i^2) \\ \leq \frac{4ne}{\nu(F)} + \sum_{i=1}^M (3n^2 - 2\lambda_i n - \lambda_i^2), \end{aligned}$$

поэтому в случаях a) и b), а также в случае c) при $M > 1$, применяя леммы 5.1 и 5.3, получаем, что максимальная особенность исключается. В случае c) при $M = 1$ воспользуемся неравенством $\text{mult}_{x_M}(Z^h)^{(M)} \leq \beta^h$ и леммами 5.1, 5.2. Получим

$$\beta^h \Sigma_0 + \Sigma_-(C \cdot L) \leq \beta^h \Sigma_0 + \Sigma_- \left(\frac{4ne}{\nu(F)} + 2n^2 - \beta^h \right) < 3n^2 \Sigma_0 + \Sigma_- \frac{4ne}{\nu(F)},$$

т.е. в этом случае левая часть квадратичного неравенства оценивается той же величиной, что и в [10].

Пусть теперь центр максимальной особенности лежит на горизонтальной прямой. Из доказанного выше следует, что при разрешении ν на $V^{(M)}$ возможен только случай b). В силу условия 4) § 1 и леммы 5.4 при $i \geq 1$ имеем $L_h^i \cap L_i = \emptyset$ (здесь L_h^i – собственный прообраз L_h на $V^{(i)}$), поэтому при $i \geq 1$

$$((Z^h)^{(i)} \cdot L_i) = ((\tilde{Z}^h)^{(i)} \cdot L_i) \leq (\tilde{Z}^h \cdot L) \leq \alpha^h - \alpha \leq n^2,$$

значит, по лемме 5.1 при $M \geq 2$ верно неравенство

$$\beta_M \leq \frac{4ne}{\nu(F)} + \sum_{i=1}^M (3n^2 - 2\lambda_i n - \lambda_i^2).$$

В силу леммы 5.3 случай $M \geq 2$ невозможен.

Пусть, наконец, $M = 1$. Обозначив $\lambda = \lambda_1$ и учитывая, что $e > l\nu(F) = l\nu(E) = l\varepsilon \geq lp_1$, будем иметь неравенства

$$\begin{aligned} n\Sigma &> p_1(n - \lambda + l), \\ 3nl + 4n^2 - 2n\lambda - \lambda^2 &\geq \frac{(n\Sigma + p_1(n - \lambda + l))^2}{p_1\Sigma} = g(\Sigma). \end{aligned}$$

Так как $K \geq 2$, то $\Sigma \geq 2p_1$. Учитывая, что $g'(\Sigma) > 0$, получим

$$3nl + 4n^2 - 2n\lambda - \lambda^2 > \frac{(3n - \lambda + l)^2}{2},$$

откуда

$$(n - \lambda)^2 + (\lambda - l)^2 + \lambda^2 < 0,$$

что невозможно.

§ 6. Описание бирациональных отображений

Пусть $\chi: V \dashrightarrow V'$ — бирациональное отображение, $|\chi| \subset |-n(\chi)K_V + l(\chi)F|$. Если $n(\chi) = 0$, то χ является послойным и основная теорема верна.

При $n(\chi) \geq 1$ и $l(\chi) \geq 0$ согласно предложению 1.2 и результатам § 2–5 существует максимальная особенность, центр которой — горизонтальная кривая C , удовлетворяющая неравенству

$$\text{mult}_C |\chi| > n(\chi).$$

Такие кривые будем называть *максимальными*.

ЛЕММА 6.1. Пусть $C_1, \dots, C_k$ — горизонтальные кривые на V , являющиеся максимальными. Тогда верно неравенство

$$\sum_{i=1}^k \deg C_i < 3.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ограничим линейную систему $|\chi|$ на общий слой F . Каждая кривая C_i дает $\deg C_i$ базисных точек линейной системы $|\chi|_F$ кратности $\nu_i = \text{mult}_{C_i} |\chi|$. Для общих кривых $Z_1, Z_2 \in |\chi|_F$ имеем

$$3n^2 = (Z_1 \cdot Z_2) \geq \sum_{i=1}^k \nu_i^2 \deg C_i > n^2 \sum_{i=1}^k \deg C_i.$$

Лемма доказана.

Таким образом, степень максимальной кривой C не превосходит 2.

Пусть $\deg C = 1$. Для общей точки $t \in \mathbb{P}^1$ пусть L – прямая в проективном пространстве, содержащем F_t , проходящая через точку $F_t \cap C$. Прямая L пересекает F_t еще в двух точках x и y . Определим послойную бирациональную инволюцию $\tau_C: V \dashrightarrow V$ формулой $\tau_C(x) = y$.

ЛЕММА 6.2. *Справедливы равенства*

$$\begin{aligned} n(\chi \circ \tau_C) &= 2n(\chi) - \text{mult}_C |\chi|, \\ \text{mult}_C |\chi \circ \tau_C| &= 3n(\chi) - 2 \text{mult}_C |\chi|. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [9].

Пусть теперь $\deg C = 2$, для общей точки $t \in \mathbb{P}^1$ $F_t \cap C = \{a, b\}$. Пусть L – прямая, проходящая через точки a, b , x – точка на F_t , P – плоскость, порожденная x и L , $Q = P \cap F_t$, q – третья точка пересечения L и F_t . С кривой степени 2 тоже связана послойная бирациональная инволюция τ_C , которая является отражением x относительно q в смысле группового закона на эллиптической кривой Q .

ЛЕММА 6.3. *Для кривой C степени 2 справедливы равенства*

$$\begin{aligned} n(\chi \circ \tau_C) &= 5n(\chi) - 4 \text{mult}_C |\chi|, \\ \text{mult}_C |\chi \circ \tau_C| &= 6n(\chi) - 5 \text{mult}_C |\chi|. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [9].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. *Если $n(\chi) \neq 0$, то найдется бирациональное отображение $\chi^*: V \dashrightarrow V$ такое, что $n(\chi \circ \chi^*) < n(\chi)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $l(\chi) \geq 0$, то в качестве χ^* возьмем инволюцию τ_C , построенную по максимальной кривой C . Неравенство $n(\chi \circ \chi^*) < n(\chi)$ следует из лемм 6.2 и 6.3.

Если же $l(\chi) < 0$, то положим $\chi^* = \tau$. Легко видеть, что τ действует на $\text{Pic } V$ следующим образом:

$$\tau^* K_V = K_V, \quad \tau^* F = \sigma^{-1}(\sigma(F)) - F = -3K_V - F,$$

поэтому $l(\chi \circ \tau) = -l(\chi)$, и если $l(\chi) < 0$, то $n(\chi \circ \tau) < n(\chi)$.

Первая часть основной теоремы получается последовательным применением предложения 6.1. Из его доказательства и из условия 6) § 1 также следует, что для общего многообразия V группа $\text{Bir } V$ порождается τ и группой $\text{Bir } F_\eta$.

Остается показать, что $\text{Bir } V = \langle \tau \rangle * \text{Bir } F_\eta$.

ЛЕММА 6.4. Пусть C_1, C_2 – горизонтальные кривые, $\deg C_i = 1$, $C_3 = \tau_{C_1}(C_2)$ (τ_{C_i} – инволюция, связанная с кривой C_i). Тогда выполняется соотношение

$$(\tau_{C_3} \circ \tau_{C_2} \circ \tau_{C_1})^2 = \text{id}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [9].

ЛЕММА 6.5 (ср. с леммой 2.1 из [15]). Пусть $\chi \subset |-nK_V + lF|$ – линейная система на V без неподвижных компонент, причем $l \leq 0$. Пусть $S \subset V$ – гладкая поверхность, $\Sigma \in |-K_V|$, $\Sigma|_S = H$, $\chi|_S = \Lambda$, $\Lambda = \sum_{i=1}^k \nu_i C_i + \gamma$, где γ – подвижная часть Λ , а C_i – неприводимые кривые, являющиеся неподвижными компонентами Λ , причем $\sum_{i=1}^k C_i = H$. Предположим, что матрица $\Pi = \|(C_i \cdot C_j)\|$ обратима и для некоторого i все элементы i -й строки обратной матрицы $\Theta = \Pi^{-1} = \|\theta_{ij}\|$ неотрицательны. Тогда верно неравенство $\nu_i \leq n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого j имеем

$$0 \leq (\gamma \cdot C_j) = (\Lambda \cdot C_j) - \sum_{l=1}^k \nu_l (C_l \cdot C_j) \leq n(H \cdot C_j) - \sum_{l=1}^k \nu_l (C_l \cdot C_j) = \sum_{l=1}^k (n - \nu_l) (C_l \cdot C_j).$$

Так как $\theta_{ij} \geq 0$ для всех j , то

$$0 \leq \sum_{j=1}^k \theta_{ij} (\gamma \cdot C_j) \leq \sum_{j=1}^k \sum_{l=1}^k (n - \nu_l) \theta_{ij} (C_l \cdot C_j) = n - \nu_i.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 6.6. Пусть $\chi \in \text{Bir } V$ и $l(\chi) \leq 0$. Тогда χ не имеет максимальных кривых.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $l = l(\chi) \leq 0$, $n = n(\chi)$, кривая C максимальна для χ и $C \equiv as + bf$. Для общих дивизоров $D_1, D_2 \in |\chi|$ одномерный цикл $Z = (D_1 \circ D_2)$ содержит C в качестве компоненты, кратность которой больше n^2 . Так как $Z \equiv 3n^2s + (2n^2 + 6nl)f$, то $a < 3$, $b < 2$. Рассмотрим два случая.

1°. $b = 0$. В этом случае $a = 1$ и $\sigma(C) = x$ – точка в $\mathbb{P}^3$. Пусть $L \subset \mathbb{P}^3$ – прямая, содержащая x , и $\sigma^{-1}(L) = C + C_L$. Для общей L кривая C_L не является базисной для линейной системы $|\chi|$. Ограничив $|\chi|$ на C_L , получим линейную систему степени $2n + 2l \leq 2n$. С другой стороны, так как $(C \cdot C_L) = 2$ и C максимальна для χ , эта линейная система имеет две базисные точки, кратность каждой из которых больше n . Противоречие.

2°. $b = 1$. Тогда $\sigma(C)$ – прямая в $\mathbb{P}^3$. Рассмотрим плоскость P , содержащую $\sigma(C)$, и поверхность $S = \sigma^{-1}(P)$. Пусть $\sigma^{-1}(\sigma(C)) = \sum_{i=1}^k C_i$, $C_1 = C$, C_i – неприводимые кривые. Применим теперь лемму 6.5, вычисляя матрицы $\Pi = \|(C_i \cdot C_j)\|$ и $\Theta = \Pi^{-1}$ для всех возможных конфигураций кривых C_i и убеждаясь, что первая строка матрицы Θ всегда неотрицательна. Для кривых C_i имеются следующие возможности:

1) $k = 2$, $C_1 \equiv us + f$, $C_2 \equiv (3 - u)s + f$, $1 \leq u \leq 2$,

$$\Pi = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad \Theta = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix};$$

2) $k = 3$, $C_1 \equiv 2s + f$, $C_2 \equiv s$, $C_3 \equiv f$,

$$\Pi = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \Theta = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & 0 & 4 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix};$$

3) $k = 3$, $C_1 \equiv s + f$, $C_2 \equiv s + f$, $C_3 \equiv s$,

$$\Pi = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \Theta = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 5 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix};$$

4) $k = 4$, $C_1 \equiv s + f$, $C_2 \equiv C_3 \equiv s$, $C_4 \equiv f$,

$$\Pi = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \Theta = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Мы видим, что во всех случаях все элементы матрицы Θ неотрицательны. Лемма доказана.

ЛЕММА 6.7. Пусть $\chi \in \text{Bir } V$, $n(\chi) \geq 1$, $l(\chi) \geq 0$. Тогда для горизонтальной кривой C равенство $\text{mult}_C |\chi| = n(\chi)$ невозможно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложения 1.2 и результатов § 2–5 χ имеет максимальную кривую. Дальнейшие рассуждения не отличаются от рассуждений, проведенных в [7], где аналогичное утверждение доказывается для поверхностей дель Пеццо над незамкнутым полем.

ЛЕММА 6.8. Пусть бирациональное отображение $\chi: V \dashrightarrow V$ имеет две максимальные горизонтальные кривые C_1 и C_2 , $\deg C_i = 1$, τ_i – инволюции, связанные с C_i , $C_3 = \tau_1(C_2)$, $\tau_3 = \tau_{C_3}$. Тогда справедливы неравенства

$$n(\chi \circ \tau_1 \circ \tau_3) < n(\chi),$$

$$n(\chi \circ \tau_1 \circ \tau_3 \circ \tau_2) < n(\chi).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $\nu_i(\chi) = \text{mult}_{C_i} |\chi|$. По лемме 6.2 имеем

$$n(\chi \circ \tau_1 \circ \tau_3) = 2n(\chi \circ \tau_1) - \nu_3(\chi \circ \tau_1) = 4n(\chi) - 2\nu_1(\chi) - \nu_2(\chi) < n(\chi);$$

здесь $\nu_3(\chi \circ \tau_1) = \nu_2(\chi)$, так как $\tau_1(C_3) = C_2$ и τ_1 – бирегулярный изоморфизм в окрестности C_2, C_3 .

Аналогично,

$$\begin{aligned} n(\chi \circ \tau_1 \circ \tau_3 \circ \tau_2) &= 2n(\chi \circ \tau_1 \circ \tau_3) - \nu_2(\chi \circ \tau_1 \circ \tau_3) \\ &= 8n(\chi) - 4\nu_2(\chi) - 2\nu_1(\chi) - \nu_1(\chi \circ \tau_1) \\ &= 5n(\chi) - 2\nu_1(\chi) - 2\nu_2(\chi) < n(\chi). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Пусть теперь между образующими $\tau_1, \dots, \tau_k$ группы $\text{Bir } V$ есть соотношение вида

$$\tau_k \circ \dots \circ \tau_1 = \text{id}, \quad (6.1)$$

причем $\tau_i \circ \tau_{i-1} \neq \text{id}$ для любого i . Обозначим $\chi_i = \tau_k \circ \dots \circ \tau_i$, $n_i = n(\chi_i)$.

ЛЕММА 6.9. Пусть для некоторого s выполнены условия $n_{s+1} \leq n_s$, $n_{s-1} < n_s$, $n_s \geq 1$. Тогда τ_s и τ_{s-1} – инволюции, связанные с горизонтальными кривыми степени 1 и $n_{s+1} < n_s$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что $\tau_s = \tau$. Тогда так как $n(\chi_{s+1}) = n(\chi_s \circ \tau) \leq n(\chi_s)$, то $l(\chi_s) \leq 0$. Если $\tau_s = \tau$, то $\tau_{s-1} \neq \tau$, поэтому $\tau_{s-1} = \tau_C$ для некоторой кривой C . В силу лемм 6.2, 6.3 и условия $n_{s-1} < n_s$ кривая C является максимальной для χ_s . По лемме 6.6 это невозможно. Аналогично получаем, что $\tau_{s-1} \neq \tau$, значит, $\tau_{s-1} = \tau_{C_1}$, $\tau_s = \tau_{C_2}$ для некоторых кривых C_1, C_2 , причем C_1 максимальна для χ_s , а для C_2 выполнено неравенство $\text{mult}_{C_2} |\chi_s| \geq n(\chi_s)$. По лемме 6.6 $l(\chi_s) > 0$, следовательно, по лемме 6.7 кривая C_2 тоже максимальна для χ_s и $n_{s+1} < n_s$. Из леммы 6.1 получаем, что $\deg C_i = 1$.

Без ограничения общности можно считать, что в (6.1) $\tau_k \neq \tau$. Если $\max_{1 \leq i \leq k} n_i = n_s \geq 1$, то $s \neq 1, k$, и в силу леммы 6.9 $\tau_{s-1} = \tau_{C_1}$, $\tau_s = \tau_{C_2}$, C_i – максимальные кривые для χ_s степени 1. Пусть $C_3 = \tau_{C_2}(C_1)$, τ_{C_3} – инволюция, связанная с C_3 . Обозначим $\alpha_i = \tau_{C_i}$. По лемме 6.4, заменив в (6.1) $\tau_s \circ \tau_{s-1}$ на $\alpha_3 \circ \alpha_1 \circ \alpha_2 \circ \alpha_3$, получим новое соотношение между образующими. Используя лемму 6.8, будем иметь

$$\begin{aligned} n(\chi_{s+1} \circ \alpha_3) &= n(\chi_s \circ \alpha_2 \circ \alpha_3) < n(\chi_s), \\ n(\chi_{s+1} \circ \alpha_3 \circ \alpha_1) &= n(\chi_s \circ \alpha_2 \circ \alpha_3 \circ \alpha_1) < n(\chi_s), \\ n(\chi_{s+1} \circ \alpha_3 \circ \alpha_1 \circ \alpha_2) &= n(\chi_s \circ \alpha_1 \circ \alpha_3) < n(\chi_s). \end{aligned}$$

Применяя такое преобразование конечное число раз, придем к соотношению вида $\tau'_m \circ \dots \circ \tau'_1 = \text{id}$, где $n(\tau'_m \circ \dots \circ \tau'_i) = 0$ для всех i , т.е. все τ'_i лежат в $\text{Bir } F_\eta$.

§ 7. Проверка условий общности

Условия 1) и 5) § 1 выполняются по очевидным соображениям. Размерность многообразия нерегулярных точек на V равна 1, поэтому условие 2) выполнено для общего многообразия V . Условие 3) выполняется, так как на V существует только конечное число точек Экарта. Выполнение условия 6) легко следует из тривиальности группы бирегулярных автоморфизмов общей кубической поверхности в $\mathbb{P}^3$. Проверим условие 4).

Пусть горизонтальная прямая L_h пересекает поверхность $\mathcal{F}$ в точке P и L – прямая в слое, проходящая через P . Выберем аффинную систему координат (x, y, z, t) с центром в точке P так, чтобы локальное уравнение V в ней имело вид

$$A(x, y, z) + tB(x, y, z) + t^2C(x, y, z) = 0,$$

а прямые L_h и L имели уравнения $x = y = z = 0$ и $x = y = t = 0$ соответственно. Если L_h пересекает $\mathcal{F}$ нетрансверсально, то существует кривая $C \subset \mathcal{F}$, проходящая через P и касающаяся L_h . Пусть $x = x_C(t)$, $y = y_C(t)$, $z = z_C(t)$ – параметрические уравнения кривой C . Условие нетрансверсальности означает, что

$$x_C(0) = y_C(0) = z_C(0) = x'_C(0) = y'_C(0) = z'_C(0) = 0.$$

Так как $C \subset \mathcal{F}$, то через точку $(t, x_C(t), y_C(t), z_C(t))$ проходит прямая L_t , лежащая в слое. Пусть $(a(t), b(t), c(t))$ – ее направляющий вектор и $a'(0) = \alpha$, $b'(0) = \beta$, $c'(0) = \gamma$.

При подстановке $x = x_C(t) + \lambda a(t)$, $y = y_C(t) + \lambda b(t)$, $z = z_C(t) + \lambda c(t)$ в уравнение V мы получим многочлен третьей степени по λ , все коэффициенты которого должны быть тождественно равны нулю.

Пусть a_{ijk} (соответственно, b_{ijk} , c_{ijk}) – коэффициент многочлена A (соответственно, B , C) при $x^i y^j z^k$.

В силу выбора системы координат имеем

$$a_{000} = b_{000} = c_{000} = a_{001} = a_{002} = a_{003} = 0.$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} a(t) &= \alpha t + \dots, & b(t) &= \beta t + \dots, & c(t) &= 1 + \gamma t + \dots, \\ x_C(t) &= \xi t^2 + \dots, & y_C(t) &= \eta t^2 + \dots, & z_C(t) &= \theta t^2 + \dots, \end{aligned}$$

и отбрасывая при подстановке в уравнение V члены, имеющие степень больше 1 по t , получим систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} a_{100}\alpha + a_{010}\beta + b_{001} &= 0, \\ a_{101}\alpha + a_{011}\beta + b_{002} &= 0, \\ a_{102}\alpha + a_{012}\beta + b_{003} &= 0, \end{aligned}$$

которая имеет решение, если матрица

$$\begin{pmatrix} a_{100} & a_{010} & b_{001} \\ a_{101} & a_{011} & b_{002} \\ a_{102} & a_{012} & b_{003} \end{pmatrix}$$

вырождена.

Ясно, что если V достаточно общее, то прямая L_h пересекает поверхность $\mathcal{F}$ в конечном числе точек, причем для каждой из них соответствующая матрица невырождена, поэтому пересечение трансверсально.

Список литературы

1. Алексеев В. А. Условия рациональности трехмерных многообразий с пучком поверхностей дель Пеццо степени 4 // Матем. заметки. 1987. Т. 41. С. 724–730.
2. Bardelli F. Polarized mixed Hodge structures: On irrationality of threefolds via degeneration // Ann. Mat. Pura et Appl. 1984. V. 137. P. 287–369.
3. Гриненко М. М. Бирациональные автоморфизмы трехмерного двойного конуса // Матем. сб. 1998. Т. 189. № 7. С. 37–52.
4. Гриненко М. М. Бирациональные свойства пучков поверхностей дель Пеццо степени 1 и 2 // Матем. сб. 2000. Т. 191. № 5. С. 17–38.
5. Исковских В. А., Манин Ю. И. Трехмерные квартики и контрпримеры к проблеме Люрота // Матем. сб. 1971. Т. 86(128). № 1. С. 140–166.
6. Исковских В. А. О проблеме рациональности для трехмерных алгебраических многообразий, расслоенных на поверхности дель Пеццо // Тр. МИАН. 1995. Т. 208. С. 128–138.
7. Исковских В. А. Факторизация бирациональных отображений рациональных поверхностей с точки зрения теории Мори // УМН. 1996. Т. 51. № 4. С. 3–72.
8. Манин Ю. И. Рациональные поверхности над совершенными полями // Publ. Math. IHES. 1966. Т. 30. С. 56–97.
9. Манин Ю. И. Кубические формы: Алгебра, геометрия, арифметика. М.: Наука, 1972.
10. Пухликов А. В. Бирациональные автоморфизмы трехмерных алгебраических многообразий с пучком поверхностей дель Пеццо // Изв. РАН. Сер. матем. 1998. Т. 62. № 1. С. 123–164.
11. Пухликов А. В. Бирационально жесткие расслоения Фано // Изв. РАН. Сер. матем. 2000. Т. 64. № 3. С. 131–150.
12. Pukhlikov A. V. Certain examples of birationally rigid varieties with a pencil of double quadrics // J. Math. Sci. 1999. Т. 94. № 1. С. 986–995.
13. Pukhlikov A. V. Birational automorphisms of Fano hypersurfaces // Invent. math. 1998. V. 134. P. 401–426.
14. Pukhlikov A. V. Essentials of method of maximal singularities // Explicit Birational Geometry of 3-folds. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000. P. 73–100.
15. Пухликов А. В. Бирационально жесткие двойные гиперповерхности Фано // Матем. сб. 2000. Т. 191. № 6. С. 101–126.

Поступило в редакцию
30.I.2001