Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. З. Гринес, Е. В. Жужома, Структурно устойчивые диффеоморфизмы с базисными множествами коразмерности один, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2002, том 66, выпуск 2, 3–66

DOI: <https://doi.org/10.4213/im378>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 16:43:08

УДК 517.9+513.83

В. З. Гринес, Е. В. Жужома

Структурно устойчивые диффеоморфизмы с базисными множествами коразмерности один

Исследуется топологическая и гомотопическая структура замкнутых n -мерных ($n \geq 3$) многообразий, на которых существуют структурно устойчивые диффеоморфизмы с ориентируемыми растягивающимися аттракторами и сжимающимися репеллерами коразмерности один. Полученные результаты применяются для топологической классификации таких диффеоморфизмов на n -мерном торе T^n , $n \geq 3$.

Библиография: 69 наименований.

Введение

Структурно устойчивые диффеоморфизмы составляют важный класс динамических систем, и на любом замкнутом многообразии они образуют непустое открытое множество в пространстве диффеоморфизмов. Поэтому представляет интерес задача исследования многообразий, допускающих структурно устойчивые диффеоморфизмы с дополнительными ограничениями, и задача классификации диффеоморфизмов выделенного класса. Известно, что структурно устойчивые диффеоморфизмы удовлетворяют аксиоме А Смейла [66] (т.е. являются А-диффеоморфизмами) и строгому условию трансверсальности [51]. Один из самых замечательных классов структурно устойчивых диффеоморфизмов составляют диффеоморфизмы Аносова [1]. Существует несколько работ, посвященных изучению связи между топологией несущего многообразия и динамическими свойствами диффеоморфизмов Аносова коразмерности один. В [39], [55] доказано, что любой диффеоморфизм Аносова коразмерности один на замкнутом многообразии сопряжен гиперболическому автоморфизму коразмерности один тора T^n . (Напомним, что алгебраический автоморфизм $A: T^n \rightarrow T^n$ n -мерного тора T^n , $n \geq 3$, называется *гиперболическим автоморфизмом коразмерности один*, если матрица, определяющая A , имеет единственное собственное число, по абсолютной величине либо меньшее, либо большее единицы, а остальные собственные числа лежат соответственно либо вне единичной окружности комплексной плоскости, либо внутри.)

Непосредственным развитием диффеоморфизмов Аносова коразмерности один являются структурно устойчивые диффеоморфизмы с базисными множествами коразмерности один (коразмерность один означает, что топологическая размерность базисного множества на единицу меньше размерности объемлющего многообразия). Поэтому естественно для данных диффеоморфизмов исследовать топологическую структуру несущего многообразия. Если к диффеоморфизму Аносова коразмерности один применить “хирургическую операцию”, то получим структурно

Авторы благодарят РФФИ (гранты № 99-01-00230 и № 02-01-00098) и INTAS (грант 97-1843) за финансовую поддержку.

устойчивый A -дiffeоморфизм с нетривиальным базисным множеством коразмерности один, локально гомеоморфным произведению гиперплоскости коразмерности один на канторово множество [66]. В зависимости от исходного диффеоморфизма Аносова, полученное нетривиальное базисное множество Ω является либо растягивающимся аттрактором, либо сжимающимся репеллером. При этом достижимая из $T^n - \Omega$ граница любой компоненты множества $T^n - \Omega$ состоит из двух инвариантных многообразий коразмерности один, так называемой 2-связки. Следуя [66], будем называть полученный A -дiffeоморфизм *DA-дiffeоморфизмом*.

Согласно [22, теорема 1] произвольное базисное множество коразмерности один является либо аттрактором, либо репеллером. Если оно не образует вложенное компактное подмногообразие коразмерности один, то остается открытым (насколько известно авторам) вопрос, имеются ли другие базисные множества топологической размерности $n - 1$, отличные от растягивающихся аттракторов или сжимающихся репеллеров (на компактных n -мерных многообразиях при $n \geq 3$). Согласно [22] и [69] растягивающиеся аттракторы и сжимающиеся репеллеры коразмерности один локально устроены как произведение канторова множества на гиперплоскость коразмерности один. Априорная возможность существования базисных множеств, которые имеют другую локальную структуру, отмечалась в [66, с. 155, примечание]. В [41] построен структурно устойчивый диффеоморфизм пятимерной сферы с одномерным базисным множеством, которое локально не гомеоморфно произведению канторова множества и интервала. Отметим также примеры базисных множеств, рассмотренных в [47] и [38]. В последней работе на трехмерном замкнутом многообразии построен пример ориентируемого растягивающегося аттрактора коразмерности один, который не является расслоением ни над каким многообразием с канторовым множеством в качестве слоя.

В настоящей статье мы рассматриваем базисные множества коразмерности один, которые являются растягивающимися аттракторами или сжимающимися репеллерами. Имеется еще одно ограничение, которое мы накладываем на базисное множество, – условие ориентируемости. Грубо говоря, для аттрактора коразмерности один это условие означает, что любое одномерное устойчивое инвариантное многообразие пересекает только “в одну сторону” неустойчивые инвариантные многообразия, из которых состоит базисное множество (точное определение см. в §1). Упомянутый выше DA -дiffeоморфизм имеет ориентируемое базисное множество коразмерности один, которое является либо растягивающимся аттрактором, либо сжимающимся репеллером, и такой структурно устойчивый диффеоморфизм может быть построен на торе T^n любой размерности $n \geq 2$.

Одним из основных результатов статьи в изучении структуры несущего многообразия является теорема 5.1, которая утверждает, что если f – структурно устойчивый диффеоморфизм замкнутого n -мерного многообразия M^n , $n \geq 3$, и Ω – ориентируемый растягивающийся аттрактор коразмерности один диффеоморфизма f , то M^n гомотопически эквивалентен n -мерному тору T^n . При этом если $n \neq 4$, то M^n гомеоморфно T^n . Более того, Ω является единственным нетривиальным базисным множеством диффеоморфизма f и неблуждающее множество f содержит, по крайней мере, одну источниковую периодическую точку.

Отметим, что теорема 5.1 не справедлива, вообще говоря, для размерности $n = 2$. Однако если дополнительно потребовать, чтобы Ω содержало только связки степени 2 и $M^2 - \Omega$ состояло из односвязных компонент, то эта теорема будет справедлива и в случае $n = 2$.

Из теоремы 5.1 непосредственно следует, что если f – структурно устойчивый диффеоморфизм n -мерного замкнутого многообразия M^n , $n \geq 3$, неблуждающее множество которого содержит ориентируемый растягивающийся аттрактор Ω коразмерности один, то спектральное разложение диффеоморфизма f состоит из Ω , конечного (возможно, пустого) множества периодических орбит индекса $n - 1$ и конечного непустого множества периодических орбит индекса n .

После этого результата естественно возникает задача топологической классификации структурно устойчивых диффеоморфизмов с ориентируемыми базисными множествами коразмерности один на n -мерном торе T^n , $n \geq 3$. Отметим, что процесс классификации можно условно разделить на три этапа. Сперва строится полный топологический инвариант, определяющий классы топологической сопряженности, затем выделяются допустимые инварианты и, наконец, для данного допустимого инварианта строится стандартный представитель (т.е. диффеоморфизм с данным инвариантом).

В настоящей статье для структурно устойчивого диффеоморфизма f тора T^n , $n \geq 3$, с ориентируемым растягивающимся аттрактором коразмерности один строится полный инвариант топологической сопряженности, который представляет собой конечный набор периодических орбит некоторого гиперболического автоморфизма $A(f)$ коразмерности один, при этом каждой периодической орбите приписано некоторое натуральное число (см. подробности в § 6). Этот инвариант мы называем *допустимой d -сигнатурой*. Любой конечный набор периодических орбит с приписанным каждой из этих орбит произвольным натуральным числом образует допустимую d -сигнатуру $\{O_j, d_j\}_{j=1}^r$. Основные результаты статьи по классификации составляют теоремы 6.2 и 6.3. Теорема 6.2 устанавливает необходимые и достаточные условия топологической сопряженности двух диффеоморфизмов из рассматриваемого класса, а теорема 6.3 доказывает существование представителя класса топологической сопряженности для каждого набора топологических инвариантов.

Отметим некоторые результаты, относящиеся к рассматриваемой тематике, и прокомментируем полученные. Без предположения о структурной устойчивости Плыкин [25], [26] доказал, что устойчивое многообразие ориентируемого растягивающегося C -плотного аттрактора коразмерности один имеет гомотопический тип тора T^n , из которого выколото конечное число точек (см. также [17], где получены близкие результаты). В частности, такой аттрактор имеет окрестность указанного вида. Первое утверждение теоремы 5.1 говорит о том, что при наличии структурной устойчивости ориентируемый растягивающийся аттрактор коразмерности один является C -плотным, и гомотопическую эквивалентность тору T^n можно доказать для всего объемлющего многообразия. Заметим, что без предположения о структурной устойчивости первое утверждение теоремы 5.1 неверно. Аналогично [64] (см. также [40] для $n = 3$) можно построить структурно неустойчивый A -диффеоморфизм f многообразия, гомеоморфного связной сумме двух торов T^n , $n \geq 3$, с неблуждающим множеством, состоящим из одного ориентируемого растягивающегося аттрактора коразмерности один и одного ориентируемого сжимающегося репеллера коразмерности один. Отметим, что первое утверждение теоремы 5.1 для размерности $n = \dim M = 2$ неверно даже в случае структурной устойчивости [10].

Что касается второго утверждения теоремы 5.1 о единственности нетривиального базисного множества, то из него следует, что если A -диффеоморфизм f имеет,

по крайней мере, два нетривиальных базисных множества, одно из которых – либо ориентируемый растягивающийся аттрактор, либо ориентируемый сжимающийся репеллер коразмерности один, то диффеоморфизм f структурно неустойчив.

Упомянутый пример Робинсона–Вильямса [64] показывает, что второе утверждение теоремы 5.1 также неверно без предположения о структурной устойчивости. То же самое замечание относится и к третьему утверждению теоремы 5.1 о существовании тривиальных аттракторов или репеллеров (последние часто называются источниковой или стоковой периодической орбитой). Отметим несколько результатов для размерности $n = \dim M = 2$, относящиеся к третьему утверждению теоремы 5.1. Для двумерной сферы и двумерного тора это утверждение справедливо и в случае, когда диффеоморфизм f не является структурно устойчивым, а лишь удовлетворяет аксиоме A Смейла, а базисное множество может быть неориентируемым. В случае сферы это непосредственно следует из результата Плькина [23], доказавшего, что если на многообразии M^2 существует гомотопная нулю простая замкнутая кривая, составленная из отрезков устойчивого и неустойчивого многообразий какой-либо точки, принадлежащей одномерному аттрактору (репеллеру), то в диске, ограниченном этой кривой, необходимо имеется источниковая (стоковая) периодическая точка диффеоморфизма f . Для двумерного тора аналогичное утверждение следует из [9, теорема 2.1] и из того, что неблуждающее множество A -диффеоморфизма двумерного тора может содержать не более одного просторно расположенного одномерного базисного множества [23]. Аналогичные утверждения имеют место для проективной плоскости и бутылки Клейна [24]. В работе [10] доказано, что третье утверждение справедливо на замкнутых ориентируемых поверхностях любого рода.

Перейдем к вопросам топологической классификации. Возможность топологической классификации структурно устойчивых диффеоморфизмов с ориентируемыми базисными множествами коразмерности один основана на установленной в настоящей работе структуре неблуждающего множества таких диффеоморфизмов (следствие 5.1) и классификации A -диффеоморфизмов тора T^n , $n \geq 3$, с ориентируемыми растягивающимися аттракторами коразмерности один, полученной авторами в [11], [12].

Остановимся подробнее на результатах по классификации A -диффеоморфизмов. Если неблуждающее множество A -диффеоморфизма содержит нетривиальные базисные множества коразмерности один, то при решении задачи топологической классификации таких диффеоморфизмов естественно вначале возникает задача топологической сопряженности ограничений диффеоморфизмов на базисные множества, которая формулируется следующим образом. Пусть Ω, Ω' – базисные множества коразмерности один A -диффеоморфизмов f, f' соответственно. Требуется найти необходимые и достаточные условия существования гомеоморфизма $g: M \rightarrow M$ такого, что

$$g(\Omega) = \Omega' \text{ и } f'|_{\Omega} = g \circ f \circ g^{-1}|_{\Omega'}.$$

Первые результаты в решении этой задачи были получены первым автором статьи для размерности $n = \dim M = 2$ для ориентируемых одномерных аттракторов [7]–[9], и затем были обобщены Плькиным на случай просторно расположенных аттракторов [26] (нетривиальное базисное множество Ω называется *просторно расположенным*, если не существует гомотопной нулю петли, образованной парой отрезков устойчивого и неустойчивого многообразия какой-либо точки из Ω)

и для размерности $n = \dim M \geq 3$ на случай аттракторов со связками степени не больше двух [25], [26]. Поставленная задача для размерности $n = \dim M = 2$ была полностью решена Гринесом и Калаем для произвольных аттракторов на ориентируемой поверхности рода $p \geq 0$ [13]–[15]. Отметим также работу Бонатти и Ланжевена [34], где получена классификация произвольных структурно устойчивых диффеоморфизмов ориентируемых компактных поверхностей рода $p \geq 0$.

Имеется цикл работ Жирова [16], посвященных комбинаторному описанию и конечной алгоритмической классификации одномерных аттракторов на поверхностях.

Структура статьи следующая. В § 1 даются основные определения. В § 2 исследуется топологическая структура многообразия в предположении, что характеристические сферы ориентируемого растягивающегося аттрактора коразмерности один ограничивают в многообразии шар (в дальнейшем показывается, что это условие выполняется, если диффеоморфизм структурно устойчивый). В § 3 исследуется топологическая структура универсальной накрывающей и доказывается теорема 3.1, которая является ключевой в доказательстве первого утверждения теоремы 5.1. В § 4 доказывается теорема 4.2, которая является ключевой в доказательстве остальных утверждений теоремы 5.1. В некотором смысле ее можно рассматривать как одно достаточное условие структурной неустойчивости. Теорема 5.1 доказывается в § 5. Классификационные теоремы 6.2 и 6.3 доказываются в § 6.

Авторы благодарят Д. В. Аносова, С. Х. Арансона, М. И. Малкина, В. С. Медведева, Р. В. Плькина, Х. Бонатти, Р. Ланжевена, П. Швейцера, Р. Вильямса за плодотворные обсуждения.

§ 1. Основные определения и вспомогательные предложения

Напомним некоторые понятия и факты, касающиеся диффеоморфизмов, удовлетворяющих аксиоме А Смейла [66]. Хорошим источником являются книги [48], [19], а также обзорные статьи [4], [5], [27] и [66]. Везде далее под диффеоморфизмом понимается C^∞ -диффеоморфизм.

1.1. А-диффеоморфизмы. Пусть f – диффеоморфизм замкнутого n -мерного, $n \geq 2$, многообразия $M = M^n$, снабженного некоторой римановой метрикой d . Множество $\Lambda \subset M$, инвариантное относительно f , называется *гиперболическим*, если ограничение $T_\Lambda M$ касательного расслоения TM многообразия M на Λ можно представить в виде суммы Уитни $E_\Lambda^s \oplus E_\Lambda^u$ df -инвариантных подрасслоений E_Λ^s , E_Λ^u , $\dim E_\Lambda^s + \dim E_\Lambda^u = n$, $x \in \Lambda$, и существуют константы $C_s > 0$, $C_u > 0$, $0 < \lambda < 1$ такие, что

$$\begin{aligned} \|df^n(v)\| &\leq C_s \lambda^n \|v\|, & v \in E_\Lambda^s, & \quad n > 0, \\ \|df^{-n}(v)\| &\leq C_u \lambda^n \|v\|, & v \in E_\Lambda^u, & \quad n > 0. \end{aligned}$$

Точка $x \in M$ называется *неблуждающей*, если для любой ее окрестности $U(x)$ и любого натурального числа N найдется $n_0 \in \mathbb{Z}$, $|n_0| \geq N$, такое, что $f^{n_0}(x) \in U(x)$. Множество неблуждающих точек диффеоморфизма f будем обозначать через $NW(f)$. Диффеоморфизм f *удовлетворяет аксиоме А* (или, что то же самое, является *А-диффеоморфизмом*), если множество $NW(f)$ гиперболическое и периодические точки всюду плотны в $NW(f)$.

1.2. Устойчивые и неустойчивые многообразия. Гиперболическая структура на неблуждающем множестве порождает существование так называемых устойчивых и неустойчивых многообразий. Их существование и свойства исследовались во многих работах (см., например, [1], [19], [44]–[66]), начиная с работ Адамара [42] и Перрона [57], [58]. Поэтому соответствующие результаты иногда называют *теоремой Адамара–Перрона*.

Пусть Λ – компактное гиперболическое множество диффеоморфизма $f: M \rightarrow M$. Тогда для любого $x \in \Lambda$ существует инъективная C^∞ -иммерсия $J_x^s: \mathbb{R}^s \rightarrow M$, образ которой $J_x^s(\mathbb{R}^s) \stackrel{\text{def}}{=} W^s(x)$ называется *устойчивым многообразием точки x* , такая, что выполняются следующие свойства:

- 1) точки $x, y \in M$ принадлежат одному многообразию $W^s(x)$ тогда и только тогда, когда $d(f^n(x), f^n(y)) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$;
- 2) $f(W^s(x)) = W^s(f(x))$, $T_x W^s(x) = E_\Lambda^s$;
- 3) если $x, y \in \Lambda$, то либо $W^s(x) = W^s(y)$, либо $W^s(x) \cap W^s(y) = \emptyset$;
- 4) если точки $x, y \in \Lambda$ близки на M , то $W^s(x), W^s(y)$ близки на компактных множествах (это свойство обычно называют *теоремой о непрерывной зависимости устойчивых многообразий от начальных условий*).

Неустойчивое многообразие $W^u(x)$ точки $x \in \Lambda$ определяется как устойчивое многообразие относительно диффеоморфизма f^{-1} . Неустойчивые многообразия обладают аналогичными свойствами. Учитывая свойство 2), устойчивые и неустойчивые многообразия называют *инвариантными многообразиями*. Отметим, что с точки зрения дифференциальной топологии инвариантные многообразия не являются “настоящими” подмногообразиями. Однако они являются иммерсированными подмногообразиями (см., например, [63]).

Обозначим через $W_\varepsilon^{s(u)}(x)$ ε -окрестность точки x в многообразии $W^{s(u)}(x)$ (в его внутренней топологии). Следующее утверждение, доказанное Смейлом [66], часто называют *теоремой о локальной структуре произведения*: пусть диффеоморфизм f удовлетворяет аксиоме A ; тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любых ε -близких точек $x_1, x_2 \in NW(f)$ пересечение $W_\varepsilon^s(x_1) \cap W_\varepsilon^u(x_2)$ состоит из единственной точки, принадлежащей $NW(f)$.

1.3. Спектральное разложение. Смейл [66] доказал следующее утверждение, известное как *теорема о спектральном разложении*: пусть диффеоморфизм f компактного многообразия M удовлетворяет аксиоме A ; тогда множество неблуждающих точек $NW(f)$ представляется в виде конечного объединения попарно непересекающихся замкнутых инвариантных множеств $\Omega_1, \dots, \Omega_k$, называемых *базисными множествами*, каждое из которых содержит всюду плотную орбиту. При этом многообразие M можно представить в виде

$$M = \bigcup_{i=1}^k W^s(\Omega_i) = \bigcup_{i=1}^k W^u(\Omega_i), \quad W^{s(u)}(\Omega_i) = \bigcup_{x \in \Omega_i} W^{s(u)}(x).$$

Базисное множество называется *нетривиальным*, если оно не является периодической орбитой (в частности, не является неподвижной точкой).

В силу транзитивности f на каждом базисном множестве Ω_i слои расслоений $E_{\Omega_i}^s, E_{\Omega_i}^u$ имеют постоянную размерность во всех точках $x \in \Omega_i$. *Индексом (Морса) базисного множества Ω_i* называется размерность $\dim E_x^u$, где x – любая точка из Ω_i .

Базисное множество Ω называется *аттрактором*, если существует окрестность U этого множества такая, что $\bigcap_{j \geq 0} f^j(U) = \Omega$. Множество называется *репеллером*, если оно является аттрактором для f^{-1} . Ясно, что многие результаты об аттракторах можно перефразировать применительно к репеллерам, и наоборот.

Из [2] и [35] вытекает следующее уточнение структуры базисного множества. Каждое базисное множество Ω_i представляется в виде конечного объединения непересекающихся компактов $\Omega_{i1}, \dots, \Omega_{ih}$, которые под действием f циклически переходят друг в друга. Более того, устойчивое и неустойчивое многообразие любой точки $x \in \Omega_{ij}$ содержит множество, плотное в Ω_{ij} . Каждое Ω_{ij} называется *C-плотной компонентой* базисного множества Ω_i . Базисное множество называется *C-плотным*, если оно имеет ровно одну C-плотную компоненту, с которой оно совпадает.

1.4. Структурно устойчивые диффеоморфизмы. Пусть $\text{Diff}^1(M)$ – пространство C^1 -диффеоморфизмов многообразия M , наделенное равномерной C^1 -топологией. Два диффеоморфизма $f, g \in \text{Diff}^1(M)$ называются (топологически) *сопряженными*, если существует гомеоморфизм $\varphi: M \rightarrow M$ такой, что $\varphi \circ f = g \circ \varphi$. Диффеоморфизм $f \in \text{Diff}^1(M)$ называется *структурно устойчивым*, если существует его окрестность $U(f) \subset \text{Diff}^1(M)$ такая, что любой диффеоморфизм $g \in U(f)$ сопряжен f . Если потребовать, чтобы сопрягающий гомеоморфизм был близок к тождественному в C^0 -топологии, то получим определение *грубого* диффеоморфизма (см. обзор [3], где обсуждаются различные определения и соответствующие результаты).

При формулировке условий структурной устойчивости большую роль играет условие, которое называют *сильным условием трансверсальности*. Пусть $W_1, W_2 \subset M$ – два иммерсированных подмногообразия, имеющие непустое пересечение. По определению W_1, W_2 *пересекаются трансверсально*, если для любой точки $x \in W_1 \cap W_2$ касательное пространство $T_x M$ порождается касательными подпространствами $T_x W_1$ и $T_x W_2$. В частности, если W_1, W_2 пересекаются трансверсально, то $\dim T_x W_1 + \dim T_x W_2 \geq \dim T_x M$.

Говорят, что A -диффеоморфизм *удовлетворяет сильному условию трансверсальности*, если для любых точек $x, y \in NW(f)$ многообразия $W^s(x), W^u(y)$ имеют только трансверсальные пересечения.

Известно [51], [62], что диффеоморфизм структурно устойчив тогда и только тогда, когда он является A -диффеоморфизмом и удовлетворяет сильному условию трансверсальности. Необходимость доказал Мане [51], достаточность – Робинсон [62].

1.5. Базисные множества коразмерности один. Под размерностью базисного множества мы понимаем топологическую размерность. Аттрактор Ω называется *растягивающимся*, если размерность Ω совпадает с размерностью неустойчивого многообразия любой его точки. Базисное множество диффеоморфизма f называется *сжимающимся репеллером*, если оно является растягивающимся аттрактором диффеоморфизма f^{-1} .

Если $\dim \Omega = n - 1$, то Ω называется *базисным множеством коразмерности один*. Согласно [22, теорема 1] базисное множество Ω коразмерности один является либо аттрактором, либо репеллером. В этом случае неустойчивое (если Ω – аттрактор), либо устойчивое (если Ω – репеллер) многообразие любой точки $x \in \Omega$ принадлежит Ω . Согласно [22, теорема 2] растягивающийся аттрак-

тор или сжимающийся репеллер коразмерности один имеет локальную структуру прямого произведения $(n - 1)$ -мерного евклидова пространства и канторова множества. В этом случае Ω состоит либо из неустойчивых (если Ω – аттрактор), либо из устойчивых (если Ω – репеллер) $(n - 1)$ -мерных многообразий своих точек. Обратное, очевидно, также справедливо, т.е. если базисное множество Ω состоит либо из неустойчивых (если Ω – аттрактор), либо из устойчивых (если Ω – репеллер) $(n - 1)$ -мерных многообразий своих точек и имеет вышеуказанную локальную структуру прямого произведения, то Ω есть либо растягивающийся аттрактор, либо сжимающийся репеллер коразмерности один. Отметим, что до настоящего времени (насколько нам известно) не доказана достаточно правдоподобная гипотеза о том, что аттрактор (соответственно, репеллер) коразмерности один, образующий компактного подмногообразия, является растягивающимся аттрактором (соответственно, сжимающимся репеллером).

Каждое инвариантное многообразие $W^s(x)$, $W^u(x)$ есть образ евклидова пространства относительно гладкой иммерсии (т.е. $W^s(x)$, $W^u(x)$ являются иммерсированными подмногообразиями). Поэтому открытые диски $W_\alpha^s(x)$, $W_\beta^u(x)$ являются ориентируемыми и нормально ориентируемыми иммерсированными подмногообразиями дополнительной размерности, $\dim W_\alpha^s(x) + \dim W_\beta^u(x) = n$, для любых $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Следовательно, корректно определение ориентируемости (по Гринесу) базисного множества. Будем говорить, что базисное множество Ω *ориентируемо*, если для любой точки $x \in \Omega$ и любых фиксированных чисел $\alpha > 0$, $\beta > 0$ индекс пересечения $W_\alpha^s(x) \cap W_\beta^u(x)$ во всех точках пересечения один и тот же (+1, либо –1) [7], [8]. В противном случае базисное множество Ω называется *неориентируемым*.

Отметим, что в настоящей статье и, в частности, в приведенном определении ориентируемости базисного множества, несущее многообразие M^n может быть как ориентируемым, так и неориентируемым (об индексе пересечения подмногообразий в неориентируемом многообразии см. [32, с. 175]).

1.6. Граничные периодические точки. Пусть Ω – базисное множество индекса (Морса) $n - 1$ A -дiffeоморфизма $f: M \rightarrow M$. Следовательно,

$$\dim E_\Omega^s \stackrel{\text{def}}{=} \dim E_x^s = 1 \quad \text{для любой точки } x \in \Omega.$$

Обозначим через $(x, y)^s$ (соответственно, $[x, y]^s$) открытую (соответственно, замкнутую) дугу на одномерном устойчивом многообразии $W^s(z)$ с концевыми точками $x, y \in W^s(z)$, где $z \in \Omega$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. Пусть Ω – базисное множество индекса $n - 1$ A -дiffeоморфизма $f: M^n \rightarrow M^n$, $n \geq 2$. Предположим, что $x \in \Omega$ – непериодическая точка. Тогда обе компоненты множества $W^s(x) - x$ пересекают $W^u(\Omega)$. Более того, если $W^u(x)$ не содержит периодических точек, то обе компоненты множества $W_\delta^s(x) - x$ пересекают $W^u(\Omega)$ для любого числа $\delta > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f^{n_i}(x) \rightarrow x_*$ – сходящаяся последовательность при $n_i \rightarrow -\infty$. Так как Ω – замкнутое и инвариантное множество, то $x_* \in \Omega$. Вначале предположим, что $W^u(x)$ не содержит периодических точек. Тогда, перейдя, если необходимо, к подпоследовательности, можем считать, что $W^u(f^{n_i}(x)) =$

Рис. 1. Окрестность точки x_*

$f^{n_i}(W^u(x))$ попарно не пересекаются. Из локальной структуры произведения следует, что $W_\varepsilon^s(x_2) \cap W_\varepsilon^u(x_j)$, $j = 1, 3$, есть одна точка множества Ω из некоторой окрестности точки x_* , где $x_i = f^{n_i}(x)$ (см. рис. 1). Не уменьшая общности, можем считать, что точки $W_\varepsilon^s(x_2) \cap W_\varepsilon^u(x_1)$, $W_\varepsilon^s(x_2) \cap W_\varepsilon^u(x_3)$ принадлежат различным компонентам множества $W_\varepsilon^s(x_2) - x_2$. Следовательно, обе компоненты множества $W^s(x) - x$ пересекают Ω . Более того, для некоторой подпоследовательности $f^{n_j}(x) \rightarrow x_*$ обе компоненты множества $W_\varepsilon^s(f^{n_j}(x)) - f^{n_j}(x)$ пересекают $W^u(\Omega)$. Так как

$$\lim_{n_j \rightarrow -\infty} \text{diam } f^{-n_j}(W_\varepsilon^s(f^{n_j}(x))) \rightarrow 0,$$

то обе компоненты множества $W_\delta^s(x) - x$ пересекают $W^u(\Omega)$ для любого $\delta > 0$.

Предположим теперь, что $W^u(x)$ содержит периодическую точку $x_0 \in \Omega$. Для простоты будем считать x_0 неподвижной точкой. Так как ограничение $f|_{W^u(x_0)}$ растягивает инвариантное многообразие $W^u(x_0)$, то существует последовательность $n_i \rightarrow +\infty$ такая, что расстояние между $f^{n_i}(x)$ и $f^{n_j}(x)$ в метрике многообразия $W^u(x)$ больше, чем ε , при $i \neq j$. Перейдя, если необходимо, к подпоследовательности, можно считать, что $f^{n_i}(x)$ сходится к некоторой точке $x_* \in \Omega$. Дальнейшее рассуждение полностью аналогично рассмотренному выше.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. Пусть Ω – растягивающийся аттрактор коразмерности один (ориентируемый или неориентируемый) A -диффеоморфизма $f: M^n \rightarrow M^n$, $n \geq 2$. Предположим, что $x \in \Omega$ – непериодическая точка. Тогда обе компоненты множества $W^s(x) - x$ пересекают Ω . Более того, если $W^u(x)$ не содержит периодических точек, то обе компоненты множества $W_\delta^s(x) - x$ пересекают Ω для любого числа $\delta > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из предложения 1.1, поскольку для растягивающегося аттрактора Ω выполняется равенство $W^u(\Omega) = \Omega$.

Везде далее в этом параграфе Ω – растягивающийся аттрактор коразмерности один. Следуя [7], [8], будем называть точку $p \in \Omega$ *граничной*, если одна из компонент множества $W^s(p) - p$ не пересекается с Ω . Так как $\Omega \neq M$, то граничные точки существуют [7], [8], [23], [55]. Из работ [7], [8], [23], [26], [55] вытекают следующие свойства граничных точек, которые для ссылок мы сформулируем в виде леммы.

ЛЕММА 1.1. Пусть Ω – растягивающийся аттрактор коразмерности один. Тогда:

- 1) в Ω имеется только конечное ненулевое число граничных точек и все они периодические;
- 2) для каждой граничной точки $p \in \Omega$ имеется только одна компонента множества $W^s(p) - p$, которая не пересекается с Ω , эту компоненту мы будем обозначать через $W_{\mathcal{O}}^s(p)$;
- 3) если $p \in \Omega$ – граничная точка, то для любой точки $x \in W^u(p) - p$ существует единственная дуга $(x, y)^s \stackrel{\text{def}}{=} (x, y)_{\mathcal{O}}^s$ такая, что $(x, y)^s \cap \Omega = \emptyset$ и $y \in \Omega$.

В следующих предложениях детализируется структура устойчивого многообразия растягивающегося аттрактора коразмерности один.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3. Пусть Ω – C -плотный растягивающийся аттрактор коразмерности один (ориентируемый или неориентируемый) A -диффеоморфизма $f: M^n \rightarrow M^n$, $n \geq 2$. Предположим, что для некоторой точки $x \in \Omega$ одна из компонент множества $W^s(x) - x$, которую мы обозначим через $W^{s+}(x)$, содержит последовательность точек $x_k \in W^{s+}(x) \cap \Omega$, не ограниченную в топологии кривой $W^{s+}(x)$. Тогда пересечение $W^{s+}(x) \cap \Omega$ всюду плотно в Ω . В частности, если $W^s(x)$ не содержит граничных периодических точек, то пересечения $W^{s+}(x) \cap \Omega$ и $W^{s-}(x) \cap \Omega$ всюду плотны в Ω , где $W^{s\pm}(x)$ – компоненты множества $W^s(x) - x$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перейдя, если необходимо, к подпоследовательности, можно считать, что последовательность точек $x_k \in W^{s+}(x) \cap \Omega$ сходится. Так как множество Ω замкнуто, то $x_k \rightarrow z \in \Omega$ при $k \rightarrow \infty$ для некоторой точки z . Сперва предположим, что $z \in \Omega - W^s(x)$. Возьмем любую точку $y \in \Omega$ и любую η -окрестность $U_\eta(y)$ точки y , $\eta > 0$. Так как Ω – C -плотное, то существует дуга $[z, z_\eta]^s$ с $z_\eta \in U_\eta(y)$ (см. рис. 2). В силу теоремы о непрерывной зависимости устойчивых инвариантных многообразий от начальных условий существует $\delta > 0$ такое, что каждое устойчивое многообразие $W^s(x_k)$, проходящее через δ -окрестность $U_\delta(z)$ точки z , пересекает $U_\eta(y)$, и имеется точка y_k с $[x_k, y_k]^s \subset U_\delta([z, z_\eta]^s)$, где $U_\delta([z, z_\eta]^s)$ – δ -окрестность дуги $[z, z_\eta]^s$. Возьмем $\delta > 0$ такое, что $x \notin U_\delta([z, z_\eta]^s)$. Тогда $x \notin [x_k, y_k]^s$ и, следовательно, $W^{s+}(x) \cap U_\eta(y) \neq \emptyset$. Поэтому $W^{s+}(x) \cap \Omega$ плотно в Ω .

Рис. 2. Дуга $[z, z_\eta]^s$

Осталось рассмотреть случай $z \in \Omega \cap W^s(x)$. В силу теоремы о непрерывной зависимости инвариантных многообразий от начальных условий и локальной структуры произведения отсюда вытекает, что $W^{s+}(x) \cap \Omega$ плотно в $W^s(x) \cap \Omega$.

В силу C -плотности Ω множество $W^s(x) \cap \Omega$ плотно в Ω . Поэтому $W^{s+}(x) \cap \Omega$ также плотно в Ω .

Если $W^s(x)$ не содержит граничных периодических точек, то каждая компонента $W^{s\pm}(x)$ множества $W^s(x) - x$ содержит последовательность точек $x_k \in W^{s\pm}(x) \cap \Omega$, не ограниченную в топологии кривой $W^{s\pm}(x)$. Из доказанного выше следует, что $W^{s+}(x) \cap \Omega$ и $W^{s-}(x) \cap \Omega$ всюду плотны в Ω .

1.7. Связки базисного множества коразмерности один. Пусть $G \subset M$ – открытое множество с границей ∂G в смысле теоретико-множественной топологии, $\partial G = \text{clos } G - \text{int } G$. Подмножество $\delta G \subset \partial G$ называется *достижимой из G границей*, если для любой точки $x \in \delta G$ найдется открытая дуга, полностью лежащая в G и такая, что x является одной из ее концевых точек. Иногда будем называть δG *достижимой изнутри границей* области G .

Пусть Ω – растягивающийся аттрактор коразмерности один A -диффеоморфизма $f: M \rightarrow M$. В работах [7], [8], [23], [26] была исследована достижимая изнутри граница открытого множества $M - \Omega$: $\delta(M - \Omega)$ есть объединение конечного числа неустойчивых многообразий всех граничных периодических точек аттрактора Ω . Эта достижимая граница разбивается на попарно непересекающиеся связки, которые определяются следующим образом: попарно различные неустойчивые многообразия $W^u(p_1), \dots, W^u(p_k)$ образуют k -связку, если существуют точки $x_i \in W^u(p_i)$ и дуги $(x_i, y_i)_\partial^s$, $y_i \in W^u(p_{i+1})$, $1 \leq i \leq k+1$, где мы считаем $W^u(p_{k+1}) = W^u(p_1)$ (таким образом, $y_k \in W^u(p_1)$), при этом число k максимально возможное (другими словами, не существует $(k+1)$ -связки, которая содержит данную связку). Точки $p_1, \dots, p_k$ называются *ассоциированными* (см. рис. 3).

Рис. 3. a – 1-связка, b – 2-связка, c – 3-связка

Плюкин [26] доказал, что в размерности $n = \dim M \geq 3$ возможны только 1- и 2-связки. Нетрудно видеть, что у ориентируемого растягивающегося аттрактора не может быть 1-связок. Таким образом, граничные периодические точки растягивающегося ориентируемого аттрактора Ω распадаются на пары ассоциированных точек, которые мы будем обозначать через $\{p_i, q_i\}$, иногда опуская индекс.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4. Пусть Ω – растягивающийся аттрактор (ориентируемый или неориентируемый) A -диффеоморфизма $f: M^n \rightarrow M^n$, $n \geq 2$. Если точка z принадлежит $W^s(\Omega) - \Omega$, то либо $z \in (x, y)_\partial^s$, где $x \in W^u(p)$ и $y \in W^u(q)$ для некоторых ассоциированных граничных точек $p, q \in \Omega$ (возможно, $p = q$), либо $z \in W_\partial^s(p)$ для некоторой периодической граничной точки $p \in \Omega$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно [45] $z \in W^s(x_0)$ для некоторой точки $x_0 \in \Omega$. Так как Ω замкнуто, то либо $z \in (x, y)^s$ с $x, y \in \Omega$ и $(x, y)^s \cap \Omega = \emptyset$, либо z принадлежит компоненте множества $W^s(p) - p$, $p \in \Omega$, которая не пересекается с Ω . В последнем случае в силу предложения 1.2 и леммы 1.1 p – граничная периодическая точка и $z \in W_\emptyset^s(p)$. Если $z \in (x, y)^s$, то в силу предложения 1.2 и леммы 1.1 $x \in W^u(p)$ и $y \in W^u(q)$ для некоторых ассоциированных граничных точек $p, q \in \Omega$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.5. Пусть Ω – растягивающийся аттрактор (ориентируемый или неориентируемый) A -диффеоморфизма $f: M^n \rightarrow M^n$, $n \geq 2$. Тогда для любой точки $x \in \Omega$ достижимые из $W^s(x) - (\Omega \cap W^s(x))$ точки канторова множества $W^s(x) \cap \Omega$ принадлежат неустойчивым инвариантным многообразиям (коразмерности один) граничных периодических точек.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из леммы 1.1 и предложения 1.4.

1.8. Характеристические сферы и связывающие цилиндры. Пусть Ω – ориентируемый растягивающийся аттрактор коразмерности один A -диффеоморфизма $f: M \rightarrow M$, и пусть B_{pq} – 2-связка аттрактора Ω , состоящая из двух неустойчивых многообразий $W^u(p)$ и $W^u(q)$ ассоциированных граничных периодических точек p и q соответственно. В силу леммы 1.1 для каждой точки $x \in W^u(p) - p$ имеется единственная точка $y \in W^u(q) - q$ такая, что $(x, y)^s = (x, y)_\emptyset^s$, и, наоборот, для каждой точки $x \in W^u(q) - q$ имеется единственная точка $y \in W^u(p) - p$ с $(x, y)^s = (x, y)_\emptyset^s$. Определим отображение

$$\varphi_{pq} \stackrel{\text{def}}{=} \varphi: (W^u(p) - p) \cup (W^u(q) - q) \rightarrow (W^u(p) - p) \cup (W^u(q) - q),$$

положив $\varphi(x) = y$, где $(x, y)^s = (x, y)_\emptyset^s$. Тогда

$$\varphi(W^u(p) - p) = W^u(q) - q \quad \text{и} \quad \varphi(W^u(q) - q) = W^u(p) - p,$$

т.е. отображение φ переводит проколотые неустойчивые многообразия 2-связки друг в друга и является инволюцией. В силу теоремы о непрерывной зависимости инвариантных многообразий на компактных множествах отображение φ является гомеоморфизмом. Из инвариантности семейства устойчивых многообразий точек базисного множества Ω вытекает соотношение

$$f^{mn} \circ \varphi|_{(W^u(p)-p) \cup (W^u(q)-q)} = \varphi \circ f^{mn}|_{(W^u(p)-p) \cup (W^u(q)-q)}, \quad (1.1)$$

где $n \in \mathbb{Z}$ и $m = m(p, q)$ – период точек p, q .

Стандартная k -мерная сфера Σ^k задается равенствами

$$x_1^2 + \dots + x_{k+1}^2 = 1, \quad x_{k+2} = \dots = 0;$$

k -мерной сферой называется множество, гомеоморфное Σ^k ; k -мерная сфера $S^k \subset M^k$ называется *цилиндрически вложенной* в $(k+1)$ -мерное многообразие M^k , если существует гомеоморфное отображение h произведения $\Sigma^k \times [-1, +1]$ в M^k такое, что $h(\Sigma^k \times 0) = S^k$.

Так как ограничение $f^m|_{W^u(p)}$ имеет ровно одну гиперболическую отталкивающую неподвижную точку p , то существует замкнутый $(n-1)$ -мерный шар $D_p \subset W^u(p)$, ограниченный гладко вложенной в $W^u(p)$ $(n-2)$ -мерной сферой $S_p^{n-2} = \partial D_p$, такой, что $p \in \text{int}(D_p) = D_p - \partial D_p$ и $D_p \subset \text{int}(f^m(D_p))$.

Тогда множество $C_{pq} = \bigcup_{x \in \partial D_p} (x, \varphi(x))_{\varnothing}^s$ гомеоморфно открытому $(n-1)$ -мерному цилиндру $\Sigma^{n-2} \times (0, 1)$. Действительно, пусть $\nu: S_p^{n-2} \rightarrow \Sigma^{n-2}$ – произвольный гомеоморфизм. Обозначим через $\lambda_x(z)$ длину отрезка $(x, z)_{\varnothing}^s \subset (x, y)_{\varnothing}^s$. В силу непрерывной зависимости инвариантных многообразий от начальных условий на компактных множествах функция $\lambda_x(z)$ непрерывно зависит от переменных x и z . Из компактности S_p^{n-2} и определения связки следует, что $\lambda_x(\varphi(x)) \geq \alpha > 0$ при всех $x \in S_p^{n-2}$. Определим отображение $\nu_{pq}: C_{pq} \rightarrow \Sigma^{n-2} \times (0, 1)$, положив

$$\nu_{pq}(z) = \left(\nu(x), \frac{\lambda_x(z)}{\lambda_x(\varphi(x))} \right), \quad z \in (x, \varphi(x))_{\varnothing}^s.$$

Так как устойчивые многообразия попарно не пересекаются, то ν_{pq} является взаимно однозначным отображением. Из непрерывности $\lambda_x(z)$ и того, что $(n-2)$ -мерные сферы S_p^{n-2} и $S_q^{n-2} = \varphi(S_p^{n-2})$ находятся друг от друга на ненулевом расстоянии, вытекает, что ν_{pq} – гомеоморфизм. Множество C_{pq} мы будем называть *связывающим цилиндром*.

Так как φ – гомеоморфизм, то $S_q^{n-2} = \varphi(S_p^{n-2})$ является цилиндрически вложенной в $W^u(q)$ $(n-2)$ -мерной сферой. Согласно обобщенной теореме Шенфлиса [18, гл. 5] S_q^{n-2} ограничивает в $W^u(q)$ $(n-1)$ -мерный шар, который мы обозначим через D_q . Из равенства (1.1) вытекает, что $q \in \text{int}(D_q)$. Множество $S_{pq} = D_p \cup D_q \cup C_{pq}$ гомеоморфно $(n-1)$ -мерной сфере, которую мы будем называть *характеристической сферой, соответствующей связке* $B_{pq} = W^u(p) \cup W^u(q)$. В силу теоремы о структуре произведения и непрерывной зависимости инвариантных многообразий от начальных условий, S_{pq} является цилиндрически вложенной в M сферой. Отметим, что характеристическая сфера не определяется однозначно связкой.

1.9. Группа голономии. Для полноты изложения приведем здесь определение тривиальности группы голономии. Будем следовать работе [20], где имеется наиболее геометрическое, на наш взгляд, определение.

Пусть $L \in \mathcal{L}$ – слой ламинации $\mathcal{L}$. Для простоты будем рассматривать случай ламинации $\mathcal{L}$ коразмерности один. Возьмем произвольную точку $x_0 \in L$ и петлю $\gamma \subset L$ с начальной точкой x_0 , представляющей элемент $[\gamma]$ фундаментальной группы $\pi_1(L, x_0)$. Не уменьшая общности, можно считать, что γ является гладкой кривой. Восстановим в каждой точке $x \in \gamma$ нормаль l_x к слою L . Это семейство нормалей можно построить таким образом, чтобы оно образовывало кольцо $A = \bigcup_{x \in \gamma} l_x$, трансверсальное слоям ламинации $\mathcal{L}$. Поэтому A пересекается со слоями из $\mathcal{L}$ вдоль кривых (в частности, вдоль кривой γ). Если все достаточно близкие к γ кривые замкнуты, то будем говорить, что γ является *непределельным циклом*. Из непрерывной зависимости слоев от начальных условий на компактных множествах вытекает, что свойство кривой γ быть непределельным циклом не зависит от выбора представителя элемента $[\gamma]$ и не меняется при свободной гомотопии γ , при которой начальная точка x_0 движется по любому пути на L (см. [20, лемма 2.1]).

Таким образом, свойство замкнутой кривой на L быть непределельным циклом есть инвариант свободной гомотопии, что влечет корректность следующего определения. Элемент $[\gamma] \in \pi_1(L)$ является *непределельным циклом*, если любой его представитель есть непределельный цикл. Будем говорить, что $L \in \mathcal{L}$ имеет *тривиальную группу голономии*, если все элементы его фундаментальной группы $\pi_1(L)$ являются непределельными циклами.

§ 2. Характеристические сферы и связывающие цилиндры

Везде в этом параграфе Ω – ориентируемый растягивающийся аттрактор коразмерности один A -дiffeоморфизма $f: M \rightarrow M$ n -мерного замкнутого многообразия $M = M^n$, $n \geq 3$. Как уже отмечалось ранее, достижимая из $M - \Omega$ граница аттрактора Ω состоит из конечного числа неустойчивых $(n-1)$ -мерных многообразий граничных периодических точек. Для каждой пары ассоциированных граничных периодических точек построим из дуг одномерных устойчивых многообразий связывающий $(n-1)$ -мерный цилиндр и соответствующую $(n-1)$ -мерную сферу. Как будет показано в следующем параграфе, свойство этих сфер ограничивать в многообразии n -мерный шар существенно влияет на гомотопический и топологический тип многообразия.

2.1. Построение характеристических сфер. Пусть B_{pq} – 2-связка ориентируемого растягивающегося аттрактора Ω , состоящая из двух неустойчивых многообразий $W^u(p)$ и $W^u(q)$ ассоциированных граничных периодических точек p и q соответственно, и $m = m(p, q)$ – период точек p, q . Так как ограничение $f^m|_{W^u(p)}$ имеет ровно одну гиперболическую отталкивающую неподвижную точку p , то существует замкнутый $(n-1)$ -мерный шар $D_p \subset W^u(p)$, ограниченный гладко вложенной в $W^u(p)$ $(n-2)$ -мерной сферой $S_p^{n-2} = \partial D_p$, такой, что

i) $p \in \text{int}(D_p) = D_p - \partial D_p$, $D_p \subset \text{int}(f^m(D_p))$.

В частности, $S_p^{n-2} \cap f^m(S_p^{n-2}) = \emptyset$ и, следовательно, S_p^{n-2} лежит внутри сферы $f^m(S_p^{n-2})$. Так как обе сферы S_p^{n-2} и $f^m(S_p^{n-2})$ C^1 -вложены, то они удовлетворяют еще одному условию:

ii) $(n-2)$ -мерные сферы S_p^{n-2} и $f^m(S_p^{n-2})$ ограничивают в неустойчивом многообразии $W^u(p)$ $(n-1)$ -мерное кольцо A_p , гомеоморфное $\Sigma^{n-2} \times [0, 1]$ (см. рис. 4).

Рис. 4. Характеристическая сфера $S_{pq} = C_{pq} \cup D_p \cup D_q$

ЛЕММА 2.1. *Отображение φ_{pq} продолжается до гомеоморфизма*

$$\varphi_{pq}: W^u(p) \cup W^u(q) \rightarrow W^u(p) \cup W^u(q),$$

если положить $\varphi_{pq}(p) = q$ и $\varphi_{pq}(q) = p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\varphi_{pq}|_{W^u(p)-p}$ – гомеоморфизм, то $\varphi_{pq}(S_p^{n-2})$ – цилиндрически вложенная в $W^u(q)$ $(n-2)$ -сфера, которую мы обозначим через S_q^{n-2} . Из обобщенной теоремы Шенфлиса [36] (см. также [18, гл. 5]) следует, что S_q^{n-2} ограничивает в $W^u(q)$ замкнутый $(n-1)$ -шар $D_q \subset W^u(q)$.

Так как q – единственная отталкивающая точка ограничения $f^m|_{W^u(q)-q}$, то существует $j_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $D_q \subset f^{j_0 m}(D_q)$. Из (1.1) получаем

$$\varphi_{pq} \circ f^{mj_0}(S_p^{n-2}) = f^{mj_0} \circ \varphi_{pq}(S_p^{n-2}) = f^{j_0 m}(S_q^{n-2}) \subset W^u(q) - D_q.$$

Заметим, что

$$D_p \subset \text{int}(f^m(D_p)) \subset \text{int}(f^{mj_0}(D_p)), \quad f^{mj_0}(S_p^{n-2}) \subset W^u(p) - D_p.$$

Следовательно, $\varphi_{pq}(D_p - p) = D_q - q$. Отсюда получаем, что

$$\varphi_{pq} \circ f^{jm}(D_p - p) = f^{jm} \circ \varphi_{pq}(D_p - p) = f^{jm}(D_q - q).$$

Аналогично, покажем, что

$$\varphi_{pq} \circ f^{jm}(D_q - q) = f^{jm} \circ \varphi_{pq}(D_q - q) = f^{jm}(D_p - p).$$

Отсюда вытекает требуемый результат, поскольку

$$\bigcap_{j \leq 0} f^{jm}(D_p) = p, \quad \bigcap_{j \leq 0} f^{jm}(D_q) = q.$$

СЛЕДСТВИЕ 2.1. *Выполняются следующие условия:*

- 1) $q \in \text{int}(D_q)$, $D_q \subset \text{int}(f^m(D_q))$;
- 2) $(n-2)$ -сферы $S_q^{n-2} = \varphi_{pq}(S_p^{n-2})$ и $f^m(S_q^{n-2})$ ограничивают замкнутое $(n-1)$ -кольцо $A_q = \varphi_{pq}(A_p)$, гомеоморфное $\Sigma^{n-2} \times [0, 1]$.

Более того, выполняется следующее соотношение:

$$f^{mj} \circ \varphi_{pq}|_{W^u(p) \cup W^u(q)} = \varphi_{pq} \circ f^{mj}|_{W^u(p) \cup W^u(q)} \quad (2.1)$$

для любого $j \in \mathbb{Z}$.

Предположим, что точки x, z лежат на одном устойчивом многообразии некоторой точки из Ω . Обозначим через $\lambda(x, z)$ длину дуги $(x, z)^s$. Следующую лемму получим из наличия локальной структуры произведения и теоремы о непрерывной зависимости инвариантных многообразий от начальных условий.

ЛЕММА 2.2. *Функция $\lambda(x, z)$ непрерывно зависит от переменных x, z .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существует $j_0 \in \mathbb{N}$ такое, что дуга $f^{j_0}(x, z)^s = (f^{j_0}(x), f^{j_0}(z))^s$ лежит в окрестности множества Ω с локальной структурой произведения [45]. Следовательно, имеется трубчатая окрестность $U((x, z)^s)$ дуги $(x, z)^s$, гомеоморфная прямому произведению $\mathbb{B}^{n-1}$ и $(0, 1)$, причем дуги устойчивых многообразий соответствуют при этом гомеоморфизме отрезкам $b \times (0, 1)$, $b \in \mathbb{B}^{n-1}$ [44]. Отсюда следует требуемое утверждение.

ЛЕММА 2.3. *Множество $C_{pq} = \bigcup_{x \in S_p^{n-2}} (x, \varphi_{pq}(x))^s$ гомеоморфно открытому $(n-1)$ -мерному цилиндру $\Sigma^{n-2} \times (0, 1)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\nu: S_p^{n-2} \rightarrow \Sigma^{n-2}$ – произвольный гомеоморфизм. Согласно лемме 2.2 длина $\lambda(x, z)$ дуг $(x, z)^s \subset (x, y)_\emptyset^s$, $x \in S_p^{n-2}$, непрерывно зависит от x и z . Более того, $\lambda_x(\varphi_{pq}(x)) \geq \alpha$ для всех $x \in S_p^{n-2}$ и некоторого $\alpha > 0$, поскольку S_p^{n-2} компактно.

Определим отображение $\nu_{pq}: C_{pq} \rightarrow \Sigma^{n-2} \times (0, 1)$, положив

$$\nu_{pq}(z) = \left(\nu(x), \frac{\lambda(x, z)}{\lambda(x, \varphi_{pq}(x))} \right), \quad z \in (x, \varphi_{pq}(x))_\emptyset^s.$$

Это отображение взаимно однозначное, так как инвариантные многообразия попарно не пересекаются. Поскольку $\lambda(x, z)$ непрерывна и $S_p^{n-2} \cap S_q^{n-2} = \emptyset$, то ν_{pq} – гомеоморфизм.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. *Множество*

$$\text{clos } C_{pq} = C_{pq} \cup S_p^{n-2} \cup S_q^{n-2} = \bigcup_{x \in S_p^{n-2}} [x, \varphi_{pq}(x)]_\emptyset^s$$

гомеоморфно замкнутому $(n-1)$ -мерному цилиндру $\Sigma^{n-2} \times [0, 1]$.

Цилиндр $C_{pq} = \bigcup_{x \in \partial D_p} (x, \varphi_{pq}(x))_\emptyset^s$ называется *связывающим цилиндром*, соответствующим связке $B_{pq} = W^u(p) \cup W^u(q)$.

ЛЕММА 2.4. *Множество $S_{pq} = D_p \cup D_q \cup C_{pq}$ гомеоморфно $(n-1)$ -мерной сфере Σ^{n-1} .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу построения $D_p \cap D_q = \emptyset$, $D_p \cap C_{pq} = \emptyset$ и $D_q \cap C_{pq} = \emptyset$. Отсюда и из следствия 2.2 получаем требуемый результат.

Сфера $S_{pq} = D_p \cup D_q \cup C_{pq}$ называется *характеристической сферой*, соответствующей связке $B_{pq} = W^u(p) \cup W^u(q)$. Отметим, что характеристическая сфера и связывающий цилиндр выбираются неоднозначно для связки B_{pq} . Они зависят от выбора $(n-1)$ -шара D_p (см. рис. 4). В силу наличия структуры произведения и теоремы о непрерывной зависимости инвариантных многообразий от начальных условий, S_{pq} является цилиндрически вложенной в M сферой.

2.2. Свойства характеристических сфер. Будем придерживаться обозначений предыдущего пункта. Напомним, что $(n-2)$ -сферы S_p^{n-2} и $f^m(S_p^{n-2})$ ограничивают в $W^u(p)$ замкнутое $(n-1)$ -мерное кольцо A_p , гомеоморфное $\Sigma^{n-2} \times [0, 1]$. В силу равенств

$$W^u(p) - p = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} f^{jm}(A_p), \quad \text{int}(f^{jm}(A_p)) \cap \text{int}(f^{km}(A_p)) = \emptyset, \quad j \neq k, \quad (2.2)$$

A_p называется *фундаментальным кольцом* преобразования $f^m|_{W^u(p)}$. Из следствия 2.1 вытекает, что $A_q = \varphi(A_p)$ есть фундаментальное кольцо преобразования $f^m|_{W^u(q)}$, т.е.

$$W^u(q) - q = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} f^{jm}(A_q), \quad \text{int}(f^{lm}(A_q)) \cap \text{int}(f^{km}(A_q)) = \emptyset, \quad l \neq k. \quad (2.3)$$

Положим

$$A_{pq} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{x \in A_p} [x, y]_\emptyset^s = \bigcup_{x \in A_p} [x, \varphi_{pq}(x)]_\emptyset^s = \bigcup_{x \in A_q} [x, \varphi_{pq}(x)]_\emptyset^s.$$

ЛЕММА 2.5. *Существует гомеоморфизм $h_{pq}: A_{pq} \rightarrow A_p \times [0, 1]$ такой, что*

$$h_{pq}([x, y]_{\emptyset}^s) = \{x\} \times [0, 1] \quad \text{для любого } x \in A_p.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\lambda(x, z)$ – длина дуги $[x, z]^s \subset (x, y)_{\emptyset}^s$. Определим h_{pq} в виде

$$h_{pq}(z) = \left(x, \frac{\lambda(x, z)}{\lambda(x, \varphi_{pq}(x))} \right), \quad z \in [x, \varphi_{pq}(x)]^s \subset A_{pq}.$$

Так как дуги $[x, \varphi_{pq}(x)]_{\emptyset}^s, [x', \varphi_{pq}(x')]_{\emptyset}^s, x \neq x'$, попарно не пересекаются, то h_{pq} взаимно однозначное. Потому в силу леммы 2.2 h_{pq} – гомеоморфизм.

Как следствие, A_{pq} гомеоморфно n -мерному кольцу $\Sigma^{n-2} \times [0, 1]^2$. Положим

$$D_{pq}(S_{pq}) \stackrel{\text{def}}{=} D_{pq} = \bigcup_{j \geq 0} f^{jm}(A_{pq}).$$

Из (2.2) и (2.3) следует

$$f^{jm}(C_{pq}) \subset D_{pq}, \quad j \geq 0. \quad (2.4)$$

ЛЕММА 2.6. *Имеет место равенство $D_{pq} = \bigcup_{x \in W^u(p) - \text{int } D_p} [x, \varphi_{pq}(x)]_{\emptyset}^s$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенств

$$A_{pq} = \bigcup_{x \in A_p} [x, y]_{\emptyset}^s, \quad W^u(p) - \text{int } D_p = \bigcup_{j \geq 0} f^{jm}(A_p)$$

получаем

$$D_{pq} \subset \bigcup_{x \in W^u(p) - \text{int } D_p} [x, \varphi_{pq}(x)]_{\emptyset}^s.$$

Возьмем $[x', \varphi_{pq}(x')]_{\emptyset}^s$ с $x' \in W^u(p) - \text{int } D_p$. Из (2.2) вытекает, что $x' = f^{jm}(x)$ для некоторого $j \geq 0$ и $x \in W^u(p) - \text{int } D_p$. Поэтому

$$\bigcup_{x \in W^u(p) - \text{int } D_p} [x, \varphi_{pq}(x)]_{\emptyset}^s \subset D_{pq}.$$

Пусть $\pi_p: D_{pq} \rightarrow W^u(p) - \text{int } D_p$ – проекция, переводящая точку $a \in D_{pq}$ в x , если $a \in [x, y]_{\emptyset}^s \subset D_{pq}$. Согласно лемме 2.6 проекция π_p определена корректно, поскольку дуги $[x, \varphi_{pq}(x)]_{\emptyset}^s, [x', \varphi_{pq}(x')]_{\emptyset}^s$ попарно не пересекаются при $x \neq x'$.

По построению множества $f^{j_1 m}(A_{pq}), f^{j_2 m}(A_{pq})$ имеют попарно непересекающиеся внутренности при различных j_1, j_2 и пересекаются по множеству, гомеоморфному $\Sigma^{n-2} \times [0, 1]$, только в том случае, если $|j_1 - j_2| = 1$. Поэтому на множестве $D_{pq} = \bigcup_{j \geq 0} f^{jm}(A_{pq})$ корректно вводится топология, индуцированная стандартной топологией на A_{pq} как на гомеоморфном образе множества $\Sigma^{n-2} \times [0, 1]^2$.

ЛЕММА 2.7. *Тройка $(D_{pq}, W^u(p) - \text{int } D_p, \pi_p)$ является тривиальным расслоением со слоем $[0, 1]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что из леммы 2.5 вытекает, что тройка $(D_{pq}, W^u(p) - \text{int } D_p, \pi_p)$ является расслоением со слоем $[0; 1]$, поскольку $D_{pq} = \bigcup_{j \geq 0} f^{jm}(A_{pq})$ и $A_{pq} \cong A_p \times [0; 1]$ есть расслоение со слоем $[0; 1]$. Чтобы доказать тривиальность расслоения, построим послойное отображение

$$H_{pq}: D_{pq} \rightarrow (W^u(p) - \text{int } D_p) \times [0, 1],$$

которое осуществляет изоморфизм с расслоением-произведением

$$((W^u(p) - \text{int } D_p) \times [0, 1], W^u(p) - \text{int } D_p, \text{pr}_1),$$

где $\text{pr}_1: (W^u(p) - \text{int } D_p) \times [0, 1] \rightarrow W^u(p) - \text{int } D_p$ — проекция на первый множитель. Пусть

$$H_{pq}(z) = \left(x, \frac{\lambda(x, z)}{\lambda(x, \varphi_{pq}(x))} \right), \quad z \in [x, \varphi_{pq}(x)]^s \subset D_{pq}.$$

Отсюда непосредственно вытекает, что H_{pq} отображает $\pi_p^{-1}(x)$ в $\{x\} \times [0, 1]$, где $x \in W^u(p) - \text{int } D_p$. Таким образом, H_{pq} является послойным отображением. Так как дуги $[x, \varphi_{pq}(x)]^s, [x', \varphi_{pq}(x')]^s$ при $x \neq x'$ попарно не пересекаются, то H_{pq} взаимно однозначное. В силу леммы 2.2 H_{pq} — гомеоморфизм.

СЛЕДСТВИЕ 2.3. Вложения $S_p = \partial D_p \subset D_{pq}$, $S_q = \partial D_q \subset D_{pq}$ индуцируют изоморфизмы групп

$$\pi_{n-2}(S_p) \rightarrow \pi_{n-2}(D_{pq}), \quad \pi_{n-2}(S_q) \rightarrow \pi_{n-2}(D_{pq}) \cong \mathbb{Z}$$

соответственно. Более того, обе сферы S_p, S_q гомотопически эквивалентны D_{pq} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 2.7 $W^u(p) - \text{int } D_p$ есть ретракт множества D_{pq} . Осталось заметить, что S_p является ретрактом $W^u(p) - \text{int } D_p$, поскольку $W^u(p) \cong \mathbb{R}^{n-1}$.

Возьмем теперь две сферы $S_{pq} = D_p \cup D_q \cup C_{pq}$ и $S'_{pq} = D'_p \cup D'_q \cup C'_{pq}$, соответствующие одной и той же 2-связке B_{pq} .

ЛЕММА 2.8. Характеристические сферы S_{pq}, S'_{pq} изотопны в M^n . В частности, S_{pq} ограничивает шар в M^n , если и только если S'_{pq} ограничивает шар в M^n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что сферы $S_p = \partial D_p$ и $S'_p = \partial D'_p$ C^1 -вложены в $W^u(p)$ и, в частности, они цилиндрически вложены. Поэтому существует изотопия $F_t: W^u(p) \rightarrow W^u(p)$, $0 \leq t \leq 1$, переводящая S_p в S'_p [53] (см. также [18]). Более того, можно построить F_t таким образом, чтобы $F_t(p) = p$ для всех t , поскольку p лежит внутри обеих сфер S_p, S'_p . Следовательно, F_t продолжается до изотопии цилиндров C_{pq}, C'_{pq} и сфер $S_q = \partial D_q, S'_q = \partial D'_q$. Отсюда получаем, что S_{pq} изотопна S'_{pq} .

Напомним, что граничные периодические точки ориентируемого растягивающегося аттрактора Ω коразмерности один распадаются на пары ассоциированных

точек. Это распадение соответствует распадению граничных неустойчивых многообразий базисного множества Ω на 2-связки. Пусть $\{p_i, q_i\}_{i=1}^k$ – пары ассоциированных граничных точек Ω . Каждой паре p_i, q_i однозначно соответствует 2-связка $B_{p_i q_i} = W^u(p_i) \cup W^u(q_i)$. Обозначим через $S_{p_i q_i}$ характеристическую сферу, соответствующую $B_{p_i q_i}$ и состоящую из связывающего $(n-1)$ -мерного цилиндра $C_{p_i q_i}$ и замкнутых $(n-1)$ -шаров $D_{p_i} \subset W^u(p_i)$, $D_{q_i} \subset W^u(q_i)$, где $D_{p_i} \subset \text{int } f^{m_i}(D_{p_i})$, $D_{q_i} \subset \text{int } f^{m_i}(D_{q_i})$, и $m_i = m(p_i, q_i)$ – общий период точек p_i, q_i , $i = 1, \dots, k$. Сферы $S_{p_i}^{n-2} = \partial D_{p_i}$, $f^{m_i}(S_{p_i}^{n-2})$ ограничивают в $W^u(p_i)$ замкнутое $(n-1)$ -мерное кольцо A_{p_i} , гомеоморфное $\Sigma^{n-2} \times [0, 1]$. Имеем

$$A_{p_i q_i} = \bigcup_{x \in A_{p_i}} [x, \varphi_{p_i q_i}(x)]_{\emptyset}^s \cong A_{p_i} \times [0, 1] \cong \Sigma^{n-2} \times [0, 1]^2,$$

где гомеоморфизм

$$\varphi_{p_i q_i} = \varphi_i: W^u(p_i) \cup W^u(q_i) \rightarrow W^u(p_i) \cup W^u(q_i)$$

удовлетворяет равенству (2.1). В силу леммы 2.6

$$D_{p_i q_i} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{j \geq 0} f^{jm_i}(A_{p_i q_i}) = \bigcup_{x \in W^u(p_i) - \text{int } D_{p_i}} [x, \varphi_i(x)]_{\emptyset}^s.$$

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть Ω – ориентируемый растягивающийся аттрактор коразмерности один, и пусть $\{p_i, q_i\}_{i=1}^k$ – пары ассоциированных граничных точек множества Ω . Тогда имеют место следующие свойства:

1) множество

$$D(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{i=1}^k \bigcup_{j \geq 0} f^{jm_i}(A_{p_i q_i}) \cup \Omega = \bigcup_{i=1}^k D_{p_i q_i} \cup \Omega$$

является топологическим n -мерным подмногообразием с границей $\partial D(\Omega) = \bigcup_{i=1}^k S_{p_i q_i}$; в частности, семейство характеристических сфер $\bigcup_{i=1}^k S_{p_i q_i}$ разбивает $M = M^n$, более того, любая компонента подмногообразия $D(\Omega)$ содержит ровно одну C -плотную компоненту множества Ω и, обратно, любая C -плотная компонента множества Ω принадлежит ровно одной компоненте $D(\Omega)$;

2) если каждая характеристическая сфера $S_{p_i q_i}$ ограничивает шар $E_{p_i q_i} \subset M$, то

$$M = \bigcup_{i=1}^k E_{p_i q_i} \cup W^s(\Omega) = \bigcup_{i=1}^k \bigcup_{j \geq 0} f^{jm_i}(E_{p_i q_i}) \cup \Omega,$$

более того, Ω является C -плотным базисным множеством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не уменьшая общности, можно считать, что все периодические граничные точки $\{p_i, q_i\}_{i=1}^k$ являются неподвижными (чтобы этого достичь, достаточно перейти к некоторой степени диффеоморфизма f). Сперва покажем, что первое утверждение теоремы следует из второго. Разрезав M вдоль характеристических сфер, получим конечное число топологических n -многообразий $M_1, \dots, M_l$.

Предположим, что M_1 содержит граничные неустойчивые многообразия некоторых граничных неподвижных точек множества Ω , и пусть $\Omega_1 \subset M_1 \cap \Omega$ – часть Ω , принадлежащая M_1 и состоящая из целых неустойчивых многообразий, т.е. если $W^u \cap \Omega_1 \neq \emptyset$, то $W^u \subset M_1$. Пусть p – граничная неподвижная точка с $W^u(p) \subset M_1$. В силу построения характеристической сферы S_{pq} имеем, что $(W^u(q) - D_q) \cap M_1 \neq \emptyset$, где q – граничная неподвижная точка, ассоциированная с p . Множество $W^u(q) - D_q$ не пересекает связывающих цилиндров базисного множества Ω . Поэтому $W^u(q) - D_q$ не пересекает границу ∂M_1 . Следовательно, $W^u(q) \subset M_1$. Таким образом, Ω_1 содержит граничное неустойчивое многообразие $W^u(p)$ тогда и только тогда, когда Ω_1 содержит граничное неустойчивое многообразие $W^u(q)$, где p, q – ассоциированные точки. Перенумеровав ассоциированные точки множества Ω , можно считать, что ассоциированные точки $p_1, q_1, \dots, p_{k_1}, q_{k_1}$ и их неустойчивые многообразия $W^u(p_1), W^u(q_1), \dots, W^u(p_{k_1}), W^u(q_{k_1})$ лежат в M_1 . По построению ∂M_1 содержит $(n-1)$ -сферы $S_{p_1 q_1}, \dots, S_{p_{k_1} q_{k_1}}$.

Возьмем неустойчивое многообразие $W^u(x) \subset \Omega$, которое не совпадает ни с одним из $W^u(p_i), W^u(q_i)$, $1 \leq i \leq k_1$, но пересекает ∂M_1 . Так как $W^u(x)$ не пересекает открытых связывающих цилиндров (как и любое неустойчивое многообразие из Ω), то из построения характеристических сфер вытекает, что пересечение $W^u(x) \cap M_1$ состоит из $(n-1)$ -мерного шара $D_r \subset \Omega$, где $r \in \Omega$ – граничная точка, отличная от p_i, q_i , $1 \leq i \leq k_1$. Это рассуждение показывает, что если неустойчивое многообразие $W^u(y) \subset \Omega$ проходит через $y \in \text{int } M_1$, то $W^u(y) \subset M_1$ и, более того, $W^u(y)$ полностью лежит в $\text{int } M_1$. Таким образом, Ω_1 есть объединение неустойчивых многообразий $W^u(p_1), W^u(q_1), \dots, W^u(p_{k_1}), W^u(q_{k_1})$ и неустойчивых многообразий из Ω , которые полностью лежат в $\text{int } M_1$.

Рис. 5. $a - A_{pq} \subset f(M_1) - M_1$; $b - A_{pq} \subset M_1 - f(M_1)$

Теперь рассмотрим M_1 как подмножество многообразия M^n . Из соотношений (2.2)–(2.4) вытекает, что множество

$$\widehat{M}_1^+ \stackrel{\text{def}}{=} \text{clos}(f(M_1) - M_1) \cup \text{clos}(M_1 - f(M_1))$$

есть объединение колец вида A_{pq} , приклеенных к границе ∂M_1 (см. рис. 5). Следовательно, M_1 – ретракт как множества $\widehat{M}_1^+ \cup M_1$, так и множества $M_1 - \widehat{M}_1^+$. Возьмем произвольное неустойчивое многообразие $W^u(x) \subset \text{int } M_1$, $x \in \Omega_1$. Так как M_1 линейно связное, то существует путь ω , соединяющий в M_1 точки x и p_1 . Из локальной структуры Ω и того, что M_1 есть ретракт множества $M_1 - \widehat{M}_1^+$, вытекает, что можно взять ω таким образом, чтобы $\omega \subset M_1 - \widehat{M}_1^+$, поскольку $x, p_1 \subset M_1 - \widehat{M}_1^+$. Отсюда и из того, что $f^{-1}(p_1) = p_1$, следует $f^{-1}(\omega) \subset M_1$. Поэтому $f^{-1}(x) \in M_1$. Следовательно, $f^{-1}(W^u(x)) \subset M_1$. Аналогично, используя множество

$$\widehat{M}_1^- \stackrel{\text{def}}{=} \text{clos}(f^{-1}(M_1) - M_1) \cup \text{clos}(M_1 - f^{-1}(M_1)),$$

покажем, что $f(W^u(x)) \subset M_1$. Так как Ω_1 – объединение неустойчивых многообразий своих точек, то получим $f^{\pm 1}(\Omega_1) = \Omega_1$, т.е. Ω_1 является инвариантным множеством диффеоморфизма f . Аналогичное рассуждение применяется для любого базисного множества $\Lambda \subset M_1$, отличного от Ω , и доказывается его инвариантность относительно f , $f(\Lambda) = \Lambda$, поскольку $(\widehat{M}_1^- \cup \widehat{M}_1^+) \cap \Lambda = \emptyset$.

По построению граница ∂M_1 компоненты M_1 состоит из $k_2 \geq k_1$ $(n-1)$ -сфер. Приклеим n -мерные шары $B_1, \dots, B_{k_2}$ к M_1 вдоль каждой $(n-1)$ -сферы из ∂M_1 . Тогда получим замкнутое n -многообразие, которое обозначим через M'_1 . Так как семейство колец

$$\widehat{M}_1^- \cup \widehat{M}_1^+ = \bigcup_{i=1}^{k_1} f(A_{p_i q_i}) \bigcup_{i=k_1+1}^{k_2} f(A_{p_i q_i})$$

образует трубчатую окрестность семейства цилиндров $\{C_{p_i q_i}\}_{i=1}^{k_2}$, то $f|_{M_1}$ можно продолжить до диффеоморфизма $f_1: M'_1 \rightarrow M'_1$ так, чтобы f_1 имел либо отталкивающую, либо притягивающую точку внутри каждого приклеенного n -шара B_i , $1 \leq i \leq k_2$. Отметим здесь два момента. Во-первых, приклеивание шаров не меняет (как множество) Ω_1 . Во-вторых, шары, приклеенные к $S_{p_i q_i}$, $1 \leq i \leq k_1$, содержат отталкивающие неподвижные точки, а шары, приклеенные к сферам $S_{p_i q_i}$, $k_1 + 1 \leq i \leq k_2$, содержат притягивающие неподвижные точки диффеоморфизма f_1 . Продолжение $f|_{M_1}$ до f_1 можно произвести таким образом, чтобы f_1 стал A -диффеоморфизмом и имел аттрактор Ω' , где Ω' совпадает с Ω_1 как множество. Так как локально Ω' гомеоморфно произведению канторова множества и $\mathbb{R}^{n-1}$, то топологическая размерность Ω' равна $n-1$. В то же время, Ω' состоит из $(n-1)$ -мерных неустойчивых многообразий своих точек. Следовательно, Ω' – ориентируемый растягивающийся аттрактор коразмерности один.

В силу построения каждая характеристическая сфера аттрактора Ω' ограничивает в M'_1 шар. В силу второго утверждения

$$M'_1 = \bigcup_{\nu=1}^{k_2} \bigcup_{j \geq 0} f^j(E_{p_\nu q_\nu}) \cup \Omega' = \bigcup_{\nu}^{k_2} E_{p_\nu q_\nu} \cup W^s(\Omega')$$

и Ω' есть C -плотное базисное множество. Так как

$$\bigcup_{\nu=1}^{k_2} S_{p_\nu q_\nu} = \bigcup_{\nu=1}^{k_2} \partial E_{p_\nu q_\nu} \subset W^s(\Omega'),$$

то $k_2 = k_1$, в противном случае существовали бы связывающие цилиндры, которые принадлежали бы как $W^s(\Omega')$, так и устойчивым многообразиям соответствующих притягивающих неподвижных точек, что невозможно.

Пусть $A_{p_\nu q_\nu} = \text{clos}(f(E_{p_\nu q_\nu}) - E_{p_\nu q_\nu})$, $1 \leq \nu \leq k_1$. Из предыдущего доказательства имеем равенство

$$M_1 = \bigcup_{\nu=1}^{k_1} \bigcup_{j \geq 0} f^j(A_{p_\nu q_\nu}) \cup \Omega'.$$

Следовательно, M_1 является топологическим n -мерным подмногообразием многообразия M^n с границей $\partial D(\Omega') = \bigcup_{i=1}^{k_1} S_{p_i q_i}$.

Аналогичные соображения применяются к остальным компонентам M_i , которые содержат целиком, по крайней мере, одно неустойчивое многообразие базисного множества Ω . В частности, если $\text{int } M_i$, $1 \leq i \leq l$, содержит неустойчивое многообразие $W^u \subset \Omega$, принадлежащее C -плотной компоненте $\Omega_c \subset \Omega$, то любое граничное неустойчивое многообразие из Ω_c лежит в M_i , поскольку W^u всюду плотно в Ω_c [2], [35]. Следовательно, $\Omega_{c,i} = \Omega_c \subset M_i$, где $\Omega_{c,i} = M_i \cap \Omega$. Более того, $\Omega_{c,i}$ – единственная C -плотная компонента из Ω , лежащая в M_i . Очевидно, такие компоненты M_i образуют множество $D(\Omega)$, которое является топологическим n -мерным подмногообразием многообразия M^n с границей $\partial D(\Omega) = \bigcup_{i=1}^k S_{p_i q_i}$. Таким образом, из второго утверждения вытекает первое.

Докажем теперь второе утверждение. Сперва докажем равенство

$$\bigcup_{i=1}^{k_1} E_{p_i q_i} \cup W^s(\Omega_c) = \bigcup_{i=1}^{k_1} \bigcup_{j \geq 0} f^j(E_{p_i q_i}) \cup \Omega_c \stackrel{\text{def}}{=} M_0,$$

где Ω_c – некоторая C -плотная компонента базисного множества Ω . Предположим, что ассоциированные граничные неподвижные точки из Ω_c образуют семейство $\{p_i, q_i\}_{i=1}^{k_1}$, $k_1 \leq k$. Из (2.2) и (2.3) вытекает, что

$$A_{p_i q_i} = \text{clos}(f(E_{p_i q_i}) - E_{p_i q_i}) \subset D_{p_i q_i}.$$

В силу леммы 2.6 $D_{p_i q_i} \subset W^s(\Omega_c)$ для $i \leq k_1$. Поэтому

$$\bigcup_{i=1}^{k_1} \bigcup_{j \geq 0} f^j(E_{p_i q_i}) \cup \Omega \subset \bigcup_{i=1}^{k_1} E_{p_i q_i} \cup W^s(\Omega_c).$$

Докажем обратное включение. Возьмем произвольную точку $z \in W^s(\Omega_c) - \Omega_c$. Согласно предложению 1.4 точка z принадлежит либо дуге $(x, y)_{\emptyset}^s$ с $x \in W^u(p_i)$ и $y \in W^u(q_i)$, либо $z \in W_{\emptyset}^s(p_i)$ для некоторой граничной периодической точки $p_i \in \Omega_c$, $i \leq k_1$. В последнем случае $z \in E_{p_i q_i}$. Для $z \in (x, y)_{\emptyset}^s$ рассмотрим две возможности. Если $x \in D_{p_i}$, то $z \in E_{p_i q_i}$. Если $x \notin D_{p_i}$, то $z \in D_{p_i q_i}$. Таким образом, в любом случае $z \in \bigcup_{j \geq 0} f^j(E_{p_i q_i})$. Поэтому

$$W^s(\Omega_c) - \Omega_c \subset \bigcup_{i=1}^{k_1} \bigcup_{j \geq 0} f^j(E_{p_i q_i}).$$

Теперь покажем, что множество M_0 открыто и замкнуто. Очевидно, $W^s(\Omega_c)$ открыто. Любая характеристическая сфера $S_{p_i q_i}$ принадлежит $W^s(\Omega_c)$, поскольку $\Omega_c \subset W^s(\Omega_c)$. Следовательно, $M_0 = \bigcup_{i=1}^{k_1} E_{p_i q_i} \cup W^s(\Omega_c)$ открыто.

Возьмем произвольную точку $z_0 \in \text{clos } M_0$. Тогда существует последовательность $z_s \in \bigcup_{i=1}^{k_1} \bigcup_{j \geq 0} f^j(E_{p_i q_i}) \cup \Omega_c$, сходящаяся к z_0 при $s \rightarrow \infty$. Если имеется бесконечное множество точек z_s из Ω_c , то $z_0 \in \Omega_c \subset M_0$, поскольку Ω_c замкнуто. Поэтому можно считать, что все точки z_s не принадлежат Ω_c . Тогда, в силу предложения 1.4, $z_s \in \bigcup_{j \geq 0} f^j(E_{p_i q_i}) - \Omega_c$ для некоторого $1 \leq i \leq k_1$. Следовательно, $z_s \in f^{j_s}(E_{p_i q_i})$ для некоторой последовательности натуральных чисел j_s . Если эта последовательность j_s ограничена, то z_0 лежит в конечном объединении n -шаров вида $f^{lm}(E_{p_i q_i})$, и, следовательно, $z_0 \in M_0$. Если последовательность j_s ограничена, то $z_s \in (x_s, y_s)_\emptyset^s \subset f^{j_s}(E_{p_i q_i})$. Согласно предложению 1.5 $\lambda(x_s, y_s)_\emptyset^s \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$, где $\lambda(\cdot, \cdot)$ означает длину дуги $(\cdot, \cdot)$. Поэтому $\lim_{s \rightarrow \infty} z_s = \lim_{s \rightarrow \infty} x_s$. Так как $x_s \in \Omega_c$, то $\lim_{s \rightarrow \infty} x_s \in \Omega_c$. Следовательно, $z_0 = \lim_{s \rightarrow \infty} z_s \in \Omega_c$. Это означает, что M_0 замкнуто. Тогда $M = M_0$, поскольку M связно.

Покажем, что $\Omega = \Omega_c$. Предположим противное. Тогда Ω имеет другую C -плотную компоненту, скажем Ω_1 , отличную от Ω_c . Так как $M = \bigcup_{i=1}^{k_1} E_{p_i q_i} \cup W^s(\Omega_c)$, то $\Omega_1 \subset \bigcup_{i=1}^{k_1} E_{p_i q_i}$. Из C -плотности вытекает, что любое неустойчивое многообразие $W^u(x)$, $x \in \Omega_1$, всюду плотно в Ω_1 [2], [35]. Поэтому Ω_1 – связное множество. Следовательно, Ω_1 лежит в одном шаре из объединения $\bigcup_{i=1}^{k_1} E_{p_i q_i}$. Для определенности положим $\Omega_1 \subset E_{p_1 q_1}$. Согласно [2] и [35] Ω_1 – растягивающийся аттрактор коразмерности один для некоторой итерации f^r , $r \in \mathbb{N}$. С другой стороны, Коллмер [50] доказал, что односвязное n -многообразие, $n \geq 3$, не может содержать гиперболических аттракторов коразмерности один (см. также [60], где доказано, что растягивающийся аттрактор коразмерности один Λ определяет нетривиальный элемент группы гомологий, если оба подрасслоения E_Λ^s и E_Λ^u в разложении $T_\Lambda M = E_\Lambda^s \oplus E_\Lambda^u$ ориентируемы). Противоречие.

СЛЕДСТВИЕ 2.4. *Предположим, что выполняются условия теоремы 2.1, и пусть имеется другое базисное множество $\Omega' \neq \Omega$. Тогда если неустойчивое многообразие $W^u(z')$ некоторой точки $z' \in \Omega'$ пересекает $D_{p_i q_i}$, то $W^u(z')$ пересекает связывающий цилиндр $C_{p_i q_i}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как устойчивые многообразия базисных множеств попарно не пересекаются, то $\Omega' \cap D_{p_i q_i} = \emptyset$. Заметим, что $W^u(z')$ связно и не пересекает $W^u(p_i) \cup W^u(q_i)$. Отсюда и из теоремы 2.1 следует требуемое утверждение.

2.3. Применения теории ламинаций к инвариантным многообразиям. Пусть $\bar{M}$ – универсальное накрывающее многообразие для M и $\pi: \bar{M} \rightarrow M$ – соответствующее накрытие. Группу накрывающих отображений будем отождествлять с фундаментальной группой $\pi_1(M)$. Напомним, что точки $\bar{x}, \bar{y} \in \bar{M}$ называются *конгруэнтными*, если $\pi(\bar{x}) = \pi(\bar{y})$. В этом случае существует $\alpha \in \pi_1(M)$ такое, что $\alpha(\bar{x}) = \bar{y}$.

Для любого диффеоморфизма $f: M \rightarrow M$ существует накрывающий диффеоморфизм $\bar{f}: \bar{M} \rightarrow \bar{M}$, $\bar{f} \circ \pi = \pi \circ f$, поскольку $\bar{M}$ односвязно. Если f есть A -диффеоморфизм, то $\bar{f}$ имеет инвариантное множество $\pi^{-1}(NW(f))$, наделенное структурой локального произведения [39], [44], [63]. Обозначим через $w^{u(s)}(\bar{x})$ поднятие

инвариантного многообразия $W^{u(s)}(x)$, $x \in NW(f)$, где $\bar{x} \in \bar{M}$ – поднятие точки x . Имеем

$$\bar{M} = \bigcup_{\bar{x} \in \pi^{-1}(NW(f))} w^u(\bar{x}) = \bigcup_{\bar{x} \in \pi^{-1}(NW(f))} w^s(\bar{x}),$$

поскольку $M = \bigcup_{x \in NW(f)} W^u(x) = \bigcup_{x \in NW(f)} W^s(x)$. Так как каждое инвариантное многообразие диффеоморфизма f является инъективно иммерсированным образом евклидова пространства, то каждое $w^{u(s)}(\bar{x})$ также является инъективно иммерсированным образом евклидова пространства. Более того, оба семейства

$$\{w^u(\bar{x})\}_{\bar{x} \in \pi^{-1}(NW(f))} \quad \text{и} \quad \{w^s(\bar{x})\}_{\bar{x} \in \pi^{-1}(NW(f))}$$

инвариантны относительно $\bar{f}$. Поэтому $w^{u(s)}(\bar{x})$ называется *неустойчивым* (у-стойчивым) *инвариантным многообразием* $\bar{f}$. Таким образом, $\bar{M}$ представляет собой объединение попарно непересекающихся неустойчивых (устойчивых) инвариантных многообразий, которые являются поднятиями неустойчивых (устойчивых) инвариантных многообразий диффеоморфизма f .

Предположим, что $f: M \rightarrow M$ имеет ориентируемый растягивающийся аттрактор (или сжимающийся репеллер) Ω коразмерности один. Тогда $\bar{\Omega} = \pi^{-1}(\Omega)$ есть инвариантное гиперболическое множество диффеоморфизма $\bar{f}$, состоящее из гладко иммерсированных подмногообразий коразмерности один и локально гомеоморфное произведению $(n-1)$ -мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^{n-1}$ и канторова множества [39], [44]. Поэтому можно естественным образом ввести понятия граничных точек (необязательно периодических относительно $\bar{f}$), граничных многообразий, ассоциированных точек и связок для $\bar{\Omega}$. Из предложения 1.2 и леммы 1.1 вытекает, что граничные точки множества $\bar{\Omega}$ в точности совпадают с прообразом $\pi^{-1}(B_\Omega)$, где B_Ω – множество граничных точек множества Ω .

Далее считаем Ω растягивающимся аттрактором. Будем придерживаться обозначений п. 2.1.

ЛЕММА 2.9. Пусть $B_{pq} = W^u(p) \cup W^u(q)$ – связка ориентируемого растягивающегося аттрактора Ω , состоящая из неустойчивых многообразий $W^u(p)$, $W^u(q)$ ассоциированных граничных периодических точек p и q соответственно, и $\bar{p}$ – поднятие точки p . Тогда существует единственное поднятие $\bar{q}$ точки q такое, что $\bar{B}_{\bar{p}\bar{q}} = w^u(\bar{p}) \cup w^u(\bar{q}) \subset \pi^{-1}(B_{pq})$ есть 2-связка множества $\bar{\Omega}$. Более того, существует гомеоморфизм

$$\bar{\varphi}_{\bar{p}\bar{q}}: (w^u(\bar{p}) - \bar{p}) \cup (w^u(\bar{q}) - \bar{q}) \rightarrow (w^u(\bar{p}) - \bar{p}) \cup (w^u(\bar{q}) - \bar{q}),$$

который является накрывающим для φ_{pq} и который продолжается до гомеоморфизма

$$\bar{\varphi}_{\bar{p}\bar{q}}: w^u(\bar{p}) \cup w^u(\bar{q}) \rightarrow w^u(\bar{p}) \cup w^u(\bar{q}),$$

где $\bar{\varphi}_{\bar{p}\bar{q}}(\bar{p}) = \bar{q}$ и $\bar{\varphi}_{\bar{p}\bar{q}}(\bar{q}) = \bar{p}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольную точку $\bar{x} \in w^u(\bar{p}) - \bar{p}$. Так как $\pi(w^u(\bar{p}) - \bar{p}) = W^u(p) - p$, то $x = \pi(\bar{x}) \in W^u(p) - p$. Пусть $[\bar{x}, \bar{y}]^s$ – поднятие дуги $[x, \varphi_{pq}(x)]^s_\emptyset$. Очевидно, $(\bar{x}, \bar{y})^s \cap \bar{\Omega} = \emptyset$ и $\bar{y} \in \bar{\Omega}$. Поэтому $(\bar{x}, \bar{y})^s = (\bar{x}, \bar{y})^s_\emptyset$. Из определения граничной точки и предложения 1.2 вытекает существование точки $\bar{q} \in \pi^{-1}(B_\Omega)$. В силу теоремы о накрывающей гомотопии (см., например, [29,

гл. 4]) $\bar{q}$ есть поднятие точки q . Из ориентируемости Ω следует, что $\bar{q} \neq \bar{p}$. Точка $\bar{q}$ не зависит от выбора точки $\bar{x} \in w^u(\bar{p}) - \bar{p}$, и объединение

$$\bar{B}_{\bar{p}\bar{q}} = w^u(\bar{p}) \cup w^u(\bar{q}) \subset \pi^{-1}(B_{pq})$$

является 2-связкой множества $\bar{\Omega}$, которая есть поднятие 2-связки B_{pq} .

Таким образом, для любой точки $\bar{x} \in w^u(\bar{p}) - \bar{p}$ существует единственная точка $\bar{y} \in w^u(\bar{q})$ такая, что $(\bar{x}, \bar{y})^s = (\bar{x}, \bar{y})_{\emptyset}^s$, и наоборот. Положим $\bar{\varphi}_{\bar{p}\bar{q}}(\bar{x}) = \bar{y}$, $\bar{\varphi}_{\bar{p}\bar{q}}(\bar{y}) = \bar{x}$. В силу теоремы о накрывающей гомотопии $\bar{\varphi}_{\bar{p}\bar{q}}$ есть поднятие отображения φ_{pq} . Отсюда следует, что $\bar{\varphi}_{\bar{p}\bar{q}}$ продолжается до гомеоморфизма $\bar{\varphi}_{\bar{p}\bar{q}}: w^u(\bar{p}) \cup w^u(\bar{q}) \rightarrow w^u(\bar{p}) \cup w^u(\bar{q})$, если положить $\bar{\varphi}_{\bar{p}\bar{q}}(\bar{p}) = \bar{q}$ и $\bar{\varphi}_{\bar{p}\bar{q}}(\bar{q}) = \bar{p}$, поскольку π является локальным гомеоморфизмом.

СЛЕДСТВИЕ 2.5. Если B_{pq} – 2-связка множества Ω , то $\pi^{-1}(B_{pq})$ – объединение попарно непересекающихся 2-связок множества $\bar{\Omega}$. Более того, каждая связка из прообраза $\pi^{-1}(B_{pq})$ является поднятием B_{pq} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из леммы 2.9 и того, что на любом инвариантном неустойчивом многообразии из множества $\bar{\Omega}$ нет конгруэнтных точек.

ЛЕММА 2.10. Пусть $B_{pq} = W^u(p) \cup W^u(q)$ – 2-связка множества Ω и $\bar{B}_{\bar{p}\bar{q}}$ – накрывающая ее 2-связка множества $\bar{\Omega}$, где $\pi(\bar{p}) = p$ и $\pi(\bar{q}) = q$. Пусть S_{pq} – характеристическая сфера, соответствующая B_{pq} и состоящая из связывающего цилиндра C_{pq} и двух $(n-1)$ -шаров D_p, D_q . Тогда существует характеристическая сфера $\bar{S}_{\bar{p}\bar{q}}$, соответствующая $\bar{B}_{\bar{p}\bar{q}}$ и состоящая из связывающего цилиндра $\bar{C}_{\bar{p}\bar{q}}$ и двух $(n-1)$ -шаров $\bar{D}_{\bar{p}}, \bar{D}_{\bar{q}}$ таких, что $\pi(\bar{D}_{\bar{p}}) = D_p$, $\pi(\bar{D}_{\bar{q}}) = D_q$ и $\pi(\bar{C}_{\bar{p}\bar{q}}) = C_{pq}$. Более того, $\pi^{-1}(S_{pq})$ есть объединение попарно непересекающихся характеристических сфер, взаимно однозначно соответствующих связкам из $\pi^{-1}(B_{pq})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы о накрывающей гомотопии существуют $(n-1)$ -шары $\bar{D}_{\bar{p}} \subset w^u(\bar{p})$, $\bar{D}_{\bar{q}} \subset w^u(\bar{q})$ такие, что $\bar{p} \in \bar{D}_{\bar{p}}$, $\bar{q} \in \bar{D}_{\bar{q}}$, $\bar{D}_{\bar{p}}$ есть поднятие D_p и $\bar{D}_{\bar{q}}$ есть поднятие D_q . Согласно лемме 2.9

$$\bar{\varphi}_{\bar{p}\bar{q}}(\bar{D}_{\bar{p}}) = \bar{D}_{\bar{q}}, \quad \bar{\varphi}_{\bar{p}\bar{q}}(\bar{D}_{\bar{q}}) = \bar{D}_{\bar{p}}.$$

Следовательно, множество $\bar{C}_{\bar{p}\bar{q}} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{\bar{x} \in \partial \bar{D}_{\bar{p}}} (\bar{x}, \bar{\varphi}_{\bar{p}\bar{q}}(\bar{x}))_{\emptyset}^s$ гомеоморфно открытому $(n-1)$ -мерному цилиндру $\Sigma^{n-2} \times (0, 1)$ и $\pi(\bar{C}_{\bar{p}\bar{q}}) = C_{pq}$. Поэтому объединение

$$\bar{S}_{\bar{p}\bar{q}} = \bar{D}_{\bar{p}} \cup \bar{D}_{\bar{q}} \bigcup_{\bar{x} \in \partial \bar{D}_{\bar{p}}} (\bar{x}, \bar{y})_{\emptyset}^s$$

есть характеристическая сфера, соответствующая связке $\bar{B}_{\bar{p}\bar{q}}$.

Так как инвариантное многообразие любой точки из $\bar{\Omega}$ не имеет конгруэнтных точек, то ограничение π на каждой характеристической сфере из $\bar{\Omega}$ инъективно. Это завершает доказательство.

Далее мы предполагаем знакомство читателя с основами теории слоений и ламинаций. Достаточным источником может служить книга [31] или статья [54]. Напомним определение ламинации.

Пусть $\mathcal{S} \subset M^n$ – некоторое подмножество многообразия M^n ; d -мерной локальной $C^{r,l}$ -ламинацией $\mathcal{L}$, $0 \leq l \leq r \leq \infty$, заданной на множестве $\mathcal{S} \stackrel{\text{def}}{=} \text{supp } \mathcal{L}$, называется разбиение $\mathcal{S}$ на попарно непересекающиеся линейно связные подмножества L_α , $\text{supp } \mathcal{L} = \bigcup_\alpha L_\alpha$, называемые *слоями*, такое, что выполняется следующее свойство: для любой точки $x \in \text{supp } \mathcal{L}$ существуют окрестность $U(x) \subset M^n$, $x \in U(x)$, и C^l -диффеоморфизм $\varphi: U(x) \rightarrow \mathbb{R}^n$ такие, что любая связная компонента пересечения $U(x) \cap L_\alpha$ (если это пересечение не пусто) отображается C^l -диффеоморфизмом φ в d -мерную гиперплоскость вида $x_{d+1} = c_1, \dots, x_n = c_{n-d}$, при этом ограничение $\varphi|_{U(x) \cap L_\alpha}$ является C^r -диффеоморфизмом на образ. Если подмножество $\text{supp } \mathcal{L}$ замкнуто, то $\mathcal{L}$ называется d -мерной $C^{r,l}$ -ламинацией. Если $d = n - 1$, то $\mathcal{L}$ называется *ламинацией коразмерности один*.

Допуская некоторую вольность, можно сказать, что локальная ламинация есть слоение без особенностей на некотором подмножестве. Если это подмножество совпадает с многообразием, $\mathcal{L} = M^n$, то локальная $C^{r,l}$ -ламинация является C^l -слоением. Ламинация есть слоение без особенностей на замкнутом подмножестве.

ЛЕММА 2.11. Пусть $\mathcal{L}$ – d -мерная $C^{r,l}$ -ламинация и L_α – слой ламинации $\mathcal{L}$. Пусть X – компактное подмножество слоя L_α . Тогда существуют окрестность $U(X) \subset M$ множества $X \subset U(X)$ и C^l -диффеоморфизм $\varphi_X: U(X) \rightarrow \mathbb{R}^n$ такие, что для любого слоя L_β каждая компонента пересечения $U(X) \cap L_\beta$ (локальный слой в $U(X)$) отображается посредством φ_X в d -мерную гиперплоскость $x_{d+1} = c_1, \dots, x_n = c_{n-d}$ для некоторых $c_1, \dots, c_{n-d}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеется конечное покрытие компактного множества X картами $\{U(x_i), \varphi_i\}$, в которых ламинация $\mathcal{L}$ устроена как семейство параллельных гиперплоскостей. Далее, аналогично доказательству теоремы 5.1 из [31], строится конечное семейство когерентных карт, покрывающих X . Отсюда вытекает требуемый результат.

СЛЕДСТВИЕ 2.6. Предположим, что выполняются условия леммы 2.11. Тогда существуют окрестность $U(X) \subset M$, $X \subset U(X)$, и d -мерное C^l -слоение $\mathcal{F}$ в $U(X)$ такие, что локальные слои ламинации $\mathcal{L}$ в $U(X)$ являются слоями $\mathcal{F}$.

Фактически следствие 2.6 означает, что ламинация вблизи компактного множества на слое может быть вложена в слоение.

ЛЕММА 2.12. Пусть $\mathcal{L}$ – $C^{r,l}$ -ламинация коразмерности один, $1 \leq l \leq r$, и L_α – односвязный слой ламинации $\mathcal{L}$. Тогда группа голономии слоя L_α тривиальна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим точку $x_0 \in L_\alpha$ и гладкую замкнутую петлю $\gamma \subset L_\alpha$ в x_0 . Пусть l – трансверсальный $\mathcal{L}$ отрезок, проходящий через x_0 . Тогда $\mathcal{L}$ индуцирует отображение $G_\gamma: l \cap \mathcal{L} \rightarrow l \cap \mathcal{L}$, соответствующее петле γ . Это отображение определяет элемент g_γ группы голономии. Так как L_α односвязный, то γ стягиваема, и мы можем считать, что γ ограничивает 2-диск $D \subset L_\alpha$, поскольку L_α – гладко иммерсированное многообразие коразмерности один. В силу следствия 2.6 существует окрестность $U(D)$ диска D такая, что $\mathcal{L}$ вкладывается в C^l -слоение. Теорема Рэба (Reeb) об устойчивости односвязного слоя [61] влечет,

что $G_\gamma = \text{id}$ (см. также [31, теоремы 5.7, 5.12]). Следовательно, $g_\gamma = \text{id}$. Это завершает доказательство.

Пусть $\mathcal{L} - C^{r,l}$ -ламинация, $1 \leq l \leq r$, коразмерности один такая, что каждый ее слой наделен нормальной ориентацией, и пусть T – дуга или замкнутая кривая, наделенная некоторой внутренней ориентацией. Будем говорить, что T пересекает слой L_α ламинации $\mathcal{L}$ *ориентируемо*, если индекс пересечения в каждой точке из $L_\alpha \cap T$ одинаков (либо $+1$, либо -1).

Пусть $f: M \rightarrow M$ – A -диффеоморфизм, имеющий ориентируемый растягивающийся аттрактор Ω . Тогда неустойчивые многообразия точек из Ω образуют $C^{\infty,1}$ -ламинацию коразмерности один, которую мы обозначим через $\mathcal{L}(\Omega)$ [44],

$$\mathcal{L}(\Omega) = \{W^u(x)\}_{x \in \Omega}, \quad \text{supp } \mathcal{L}(\Omega) = \bigcup_{x \in \Omega} W^u(x).$$

Следовательно, $\pi^{-1}(\mathcal{L}(\Omega)) = \mathcal{L}(\bar{\Omega})$ есть $C^{\infty,1}$ -ламинация на $\bar{M}$, состоящая из неустойчивых многообразий точек из $\bar{\Omega}$, поскольку π – локальный диффеоморфизм.

Напомним, что каждое неустойчивое многообразие растягивающегося аттрактора Ω является гладкой иммерсией евклидова пространства $\mathbb{R}^{n-1}$. Поэтому каждый слой ламинации $\mathcal{L}(\Omega)$ может быть наделен нормальной ориентацией.

ЛЕММА 2.13. *Пусть $T \subset M$ – замкнутая простая кривая, пересекающая слои ламинации $\mathcal{L}(\Omega)$ трансверсально и ориентируемо. Тогда T негомотопна нулю в M .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Тогда существует гладкая иммерсия $\psi: D^2 \rightarrow M$ двумерного диска D^2 в M такая, что $\psi(\partial D^2) = T$ (см., например, [31, гл. 6]). Так как пересечение $\mathcal{L}(\Omega) \cap \psi(D^2)$ компактно, то его можно покрыть конечным числом окрестностей $\{U_i\}_{i=1}^k$, в каждой из которых ламинация $\mathcal{L}(\Omega)$ устроена как семейство параллельных гиперплоскостей. В силу леммы 2.11 $\text{supp } \mathcal{L}(\Omega) \cap U_i$ доопределяется до C^1 -слоения $\mathcal{F}_i$ для каждого $1 \leq i \leq k$. Поэтому в каждой окрестности U_i можно применить стандартную технику, развитую в лемме 5.1 из [39], приведения диска $\psi(D^2)$ в общее положение относительно слоения $\mathcal{F}_i$. Это означает, что пересечение диска $\psi(D^2)$ со слоями является семейством одномерных кривых на $\psi(D^2)$ с конечным числом особенностей, в которых диск $\psi(D^2)$ касается слоев слоения $\mathcal{F}_i$ (см. подробное описание этой техники в примечании Д. В. Аносова в книге [31, с. 281–285] для C^1 -слоений). В силу того, что в каждой окрестности U_i возникает только конечное число точек касания, можно на каждом шаге производить шевеление диска, не меняя предыдущих шевелений वाले ранее получившихся точек касания. Поэтому отображение ψ можно изменить таким образом, чтобы диск $\psi(D^2)$ находился в общем положении относительно ламинации $\mathcal{L}(\Omega)$, т.е. пересечение диска $\psi(D^2)$ со слоями ламинации $\mathcal{L}(\Omega)$ есть семейство одномерных кривых на $\psi(D^2)$ с конечным числом особенностей, в которых диск $\psi(D^2)$ касается слоев ламинации.

Окружим теперь каждую точку касания попарно непересекающимися окрестностями, в каждой из которых $\mathcal{L}(\Omega)$ доопределяется до некоторого C^1 -слоения. В силу [39] можно изменить отображение ψ в этих окрестностях так, чтобы диск $\psi(D^2)$ имел точки касания только морсовского типа. Обозначим через $\mathcal{F}_{D^2}$ одномерную ламинацию, которая индуцируется на диске D^2 ламинацией $\mathcal{L}(\Omega)$, посредством отображения ψ^{-1} . Так как $\psi(D^2)$ имеет точки касания со слоями ламинации

$\mathcal{L}(\Omega)$ только морсовского типа, то $\mathcal{F}_{D^2}$ имеет только изолированные особенности типа “центр” и “седло”. Более того, в силу [39] можно считать, что слоение $\mathcal{F}_{D^2}$ трансверсально границе ∂D^2 и не имеет сепаратрис, соединяющих разные седла. Отметим, что в упомянутом примечании Д. В. Аносова в книге [31, с. 281–285] приводится доказательство этих фактов, включая существование C^1 -иммерсии $\psi: D^2 \rightarrow M$.

По предположению $\mathcal{L}(\Omega) \cap T \neq \emptyset$. Возьмем слой l слоения $\mathcal{F}_{D^2}$, проходящий через точку $x_0 \in \partial D^2$ такую, что $\psi(x_0) \in \mathcal{L}(\Omega) \cap T$. Ориентируем l так, чтобы он входил внутрь D^2 при движении в положительном направлении. Так как пересечение $\mathcal{L}(\Omega) \cap T$ канторово (см. предложение 1.5), то можно считать, что l не является сепаратрисой “седла”, в противном случае можно взять близкий слой с данным свойством. Из ориентируемости пересечения T с $\mathcal{L}(\Omega)$ следует, что l при движении в положительном направлении не пересекает границу ∂D^2 . Так как множество $\mathcal{L}(\Omega) \cap \psi(D^2)$ замкнуто, то предельное множество $\omega(l)$ слоя l непусто и состоит из целых слоев слоения $\mathcal{F}_{D^2}$, также не пересекающих ∂D^2 . Множество $\omega(l)$ содержит, по крайней мере, один одномерный слой, скажем l_0 , потому что слоение $\mathcal{F}_{D^2}$ имеет особенности только типа “центр” и “седло”. Из теории Пуанкаре–Бендиксона для слоений и ламинаций с конечным числом особенностей [6] вытекает, что l_0 не может содержать в своем предельном множестве незамкнутые одномерные слои, поскольку индексы центра и седла являются целыми числами. Тогда l_0 – либо замкнутый слой, либо петля сепаратрисы (напомним, что $\mathcal{F}_{D^2}$ не имеет сепаратрис, соединяющих разные седла), образующая односторонний контур. Так как $\mathcal{L}(\Omega)$ – замкнутое множество, то l_0 принадлежит слою L_0 этой ламинации. Из того, что l_0 лежит в предельном множестве незамкнутого слоя l , следует, что L_0 имеет нетривиальную группу голономии. С другой стороны, все слои ламинации $\mathcal{L}(\Omega)$ односвязны и согласно лемме 2.12 имеют тривиальную группу голономии. Противоречие.

СЛЕДСТВИЕ 2.7. Пусть простая замкнутая кривая C состоит из дуги, лежащей в $W^u(x)$, $x \in \Omega$, и отрезка устойчивого многообразия $W^s(x)$, принадлежащего окрестности точки x с локальной структурой произведения. Тогда кривая C не гомотопна нулю в M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как в силу ориентируемости Ω отрезок устойчивого многообразия $W^s(x)$ пересекает слои ламинации $\mathcal{L}(\Omega)$ ориентируемо, то стандартной процедурой из теории динамических систем (см., например, [33]) можно пошевелить отрезок устойчивого многообразия $W^s(x)$ в окрестности точки x так, чтобы получить замкнутую кривую, которая ориентируемо пересекает слои ламинации $\mathcal{L}(\Omega)$ и гомотопна C . Требуемый результат теперь следует из леммы 2.13.

СЛЕДСТВИЕ 2.8. Пусть Ω' – ориентируемый растягивающийся аттрактор или сжимающийся репеллер коразмерности один A -диффеоморфизма $f: M \rightarrow M$. Тогда не существует шара $E \subset M$ такого, что $\Omega' \subset E$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Не уменьшая общности, можно считать, что Ω' C -плотное. В силу следствия 2.7 существует простая замкнутая кривая $C \subset E$, которая не гомотопна нулю в M . Это противоречит гомотопности нулю этой кривой в E .

СЛЕДСТВИЕ 2.9. Пусть Ω – ориентируемый растягивающийся аттрактор коразмерности один A -диффеоморфизма $f: M \rightarrow M$, и пусть $\{p_i, q_i\}_{i=1}^k$ – пары ассоциированных граничных периодических точек Ω . Если все характеристические сферы S_{p_i, q_i} множества Ω ограничивают шар в M , то Ω является единственным псевдоручным (т.е. растягивающимся аттрактором или сжимающимся репеллером) ориентируемым базисным множеством коразмерности один диффеоморфизма f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Пусть Ω' – ориентируемое псевдоручное базисное множество коразмерности один, отличное от Ω . В силу п. 2) теоремы 2.1 Ω' лежит внутри некоторого шара E_{p_i, q_i} , ограниченного характеристической сферой S_{p_i, q_i} , поскольку устойчивые многообразия $W^s(\Omega')$, $W^s(\Omega)$ попарно не пересекаются. Это противоречит следствию 2.8.

§ 3. Гомеоморфность накрывающей пространству $\mathbb{R}^n$

Везде в этом параграфе Ω – ориентируемый растягивающийся аттрактор коразмерности один A -диффеоморфизма $f: M \rightarrow M$ и $\bar{f}: \bar{M} \rightarrow \bar{M}$ – поднятие f на универсальную накрывающую относительно накрытия $\pi: \bar{M} \rightarrow M$.

ЛЕММА 3.1. Пусть $\bar{\Omega} = \pi^{-1}(\Omega)$. Тогда:

- 1) для любой точки $\bar{x} \in \bar{\Omega}$ отображение включения $w^u(\bar{x}) \subset \bar{M}$ является вложением;
- 2) для любой точки $\bar{x} \in \bar{\Omega}$ отображение включения $w^u(\bar{x}) \subset \bar{M}$ является собственным отображением¹, т.е. для любого компакта $K \subset \bar{M}$ пересечение $K \cap w^u(\bar{x})$ компактно в топологии неустойчивого многообразия $w^u(\bar{x})$;
- 3) для любой точки $\bar{x} \in \bar{\Omega}$ множество $\bar{M} - w^u(\bar{x})$ состоит из двух компонент (другими словами, любой слой $w^u(\bar{x})$ разбивает $\bar{M}$);
- 4) для любых точек $\bar{x}, \bar{y} \in \bar{\Omega}$ пересечение $w^u(\bar{x}) \cap w^s(\bar{y})$ содержит не более одной точки.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как отображение включения инъективно, то для доказательства первого утверждения осталось показать, что внутренняя топология неустойчивого многообразия $w^u(\bar{x})$ совпадает с топологией, индуцируемой на $w^u(\bar{x})$ как на подмножестве $\bar{M}$. Предположим, что первое утверждение не верно. Тогда в достаточно малой окрестности $U(\bar{x}_0)$ некоторой точки $\bar{x}_0 \in w^u(\bar{x})$ со структурой произведения найдутся точки $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in w^u(\bar{x})$, принадлежащие различным компонентам пересечения $U \cap w^u(\bar{x})$. Поэтому существует простая замкнутая кривая $\bar{C}$, состоящая из дуги, лежащей на слое $w^u(\bar{x})$, и отрезка $\bar{S} \subset w^s(\bar{x})$ такого, что $\pi(\bar{S})$ принадлежит окрестности $\pi(U(\bar{x}_0))$ точки $\pi(\bar{x})$ со структурой произведения. Так как $\bar{C}$ гомотопна нулю в $\bar{M}$, то $\pi(\bar{C})$ гомотопна нулю в M , что противоречит следствию 2.7.

Докажем второе утверждение. Предположим противное. Тогда существует последовательность точек $\bar{z}_k \in w^u(\bar{x})$, не ограниченная в топологии слоя $w^u(\bar{x})$, такая, что $\bar{z}_k \rightarrow z \in K$ при $k \rightarrow \infty$. Так как неустойчивые многообразия из $\bar{\Omega}$ образуют ламинацию коразмерности один, то $\bar{z} \in \bar{\Omega}$ и существует окрестность $U(\bar{z})$ точки $\bar{z}$, в которой ламинация $\mathcal{L}(\bar{\Omega})$ гомеоморфна семейству параллельных

¹Отметим, что второе утверждение не следует автоматически из первого, поскольку $w^u(\bar{x})$ некомпактно в $\bar{M}$.

гиперплоскостей коразмерности один. Не уменьшая общности, можно считать, что в $U(\bar{z})$ имеется локальная структура произведения. Обозначим через $\bar{l}_k$ локальные слои (т.е. компоненты пересечения $w^u(\bar{x}) \cap U(\bar{z})$), содержащие точки $\bar{z}_k$. Поскольку точки $\bar{z}_k \in w^u(\bar{x})$ образуют неограниченную последовательность в топологии слоя $w^u(\bar{x})$, они не могут лежать в одном локальном слое $\bar{l}_{k_0}$. Следовательно, имеется, по крайней мере, два локальных слоя $l_{k_1} \neq l_{k_2}$. Далее получаем противоречие, полностью аналогичное доказательству первого утверждения. Именно, из $l_{k_1} \neq l_{k_2}$ вытекает, что существует простая замкнутая кривая $\bar{C}$, состоящая из дуги, лежащей на слое $w^u(\bar{x})$, и отрезка $\bar{S} \subset w^s(\bar{x})$ такого, что $\pi(\bar{S})$ принадлежит окрестности точки $\pi(\bar{x})$ со структурой произведения. Это противоречит следствию 2.7.

Для доказательства третьего утверждения мы воспользуемся рассуждениями Д.В. Аносова, приведенными в [39, примечание к доказательству леммы 5.2]. Проведем через какую-нибудь точку $\bar{y}$ слоя $w^u(\bar{x})$ дугу a , трансверсально пересекающую этот слой и лежащую в окрестности со структурой произведения. В силу первого утверждения дугу a можно взять столь малой, чтобы она пересекалась с $w^u(\bar{x})$ ровно в одной точке. Нужно доказать, что в $\bar{M}$ не существует пути, который соединял бы концевые точки дуги a и не пересекал бы $w^u(\bar{x})$. Предположим, что такой путь существует. Вместе с a он образует замкнутую кривую, которую можно сгладить и малым шевелением избавить от самопересечений. В результате получим простую замкнутую кривую $\bar{C}$, трансверсально пересекающую слой $w^u(\bar{x})$ ровно в одной точке. Так как $\bar{M}$ односвязно, то на $\bar{C}$ можно натянуть диск d , гладко иммерсированный в $\bar{M}$. Путем малого возмущения, ничего не меняющего возле $\bar{C}$, можно достичь того, чтобы во всех точках, где диск пересекает $w^u(\bar{x})$, это пересечение было трансверсальным. В силу первого и второго утверждений пересечение $d \cap w^u(\bar{x})$ компактно в топологии $w^u(\bar{x})$ и состоит из конечного множества кривых, каждая из которых либо замкнута, либо соединяет две точки, лежащие на $\bar{C}$. Так как по построению граница диска пересекается с $w^u(\bar{x})$ в точке $\bar{y}$, то пересечение $d \cap w^u(\bar{x})$ содержит, по крайней мере, одну дугу, не являющуюся замкнутой кривой и пересекающую границу диска в двух различных точках, одна из которых есть точка $\bar{y}$. Это противоречит предположению о том, что точка $\bar{y}$ является единственной точкой пересечения кривой $\bar{C}$ с многообразием $w^u(\bar{x})$.

Утверждение 4) следует из ориентируемости аттрактора Ω и из доказанного выше утверждения 3).

Напомним, что в силу леммы 2.9 для каждой граничной точки $\bar{p} \in \bar{\Omega}$ имеется ассоциированная с ней граничная точка $\bar{q} \in \bar{\Omega}$. Пусть $\bar{x} \in \bar{\Omega}$. Положим

$$w^{s*}(\bar{x}) = \begin{cases} w^s(\bar{x}), & \text{если } w^s(\bar{x}) \text{ не содержит граничных точек } \bar{\Omega}, \\ w^s(\bar{p}) \cup w^s(\bar{q}), & \text{если } w^s(\bar{x}) \text{ содержит граничную точку } \bar{p}, \end{cases}$$

где $\bar{q}$ – точка, ассоциированная $\bar{p}$. Следующая лемма обобщает п. 4) леммы 3.1.

ЛЕММА 3.2. Пусть Ω – ориентируемый растягивающийся аттрактор коразмерности один и $\bar{\Omega} = \pi^{-1}(\Omega)$. Тогда для любых точек $\bar{x}, \bar{y} \in \bar{\Omega}$ пересечение $w^u(\bar{x}) \cap w^{s*}(\bar{y})$ содержит не более одной точки.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Тогда существуют точки $\bar{x}, \bar{y} \in \bar{\Omega}$ такие, что пересечение $w^u(\bar{x}) \cap w^{s*}(\bar{y})$ содержит, по крайней мере, две точки

Рис. 6. Пересечение $w^u(\bar{x}) \cap w^{s*}(\bar{y})$

$\bar{z}_1, \bar{z}_2$ (см. рис. 6). В силу леммы 3.1 $w^{s*}(\bar{y})$ содержит ассоциированные граничные точки $\bar{p}, \bar{q}$ такие, что $w^{s*}(\bar{y}) = w^s(\bar{p}) \cup w^s(\bar{q})$ и $w^u(\bar{x}) \cap w^s(\bar{p}) \neq \emptyset, w^u(\bar{x}) \cap w^s(\bar{q}) \neq \emptyset$. Так как Ω имеет конечное число граничных точек, то найдется точка $\bar{a} \in w^u(\bar{x})$, произвольно близкая к $\bar{z}_1$, такая, что $w^s(\bar{a})$ не содержит граничных точек из $\bar{\Omega}$. Из теоремы о непрерывной зависимости инвариантных многообразий от начальных условий вытекает, что $w^s(\bar{a})$ пересекает $w^u(\bar{x})$ вблизи точки $\bar{z}_2$ (см. рис. 6). Это противоречит лемме 3.1.

ЛЕММА 3.3. Пусть Ω – C -плотный ориентируемый растягивающийся аттрактор коразмерности один и $\bar{\Omega} = \pi^{-1}(\Omega)$. Предположим, что имеются точки $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \bar{\Omega}$, для которых выполняются следующие условия:

- 1) $\bar{y} \in w^u(\bar{x}), \bar{z} \in w^s(\bar{x})$;
- 2) существует последовательность точек $\bar{x}_i \in [\bar{x}, \bar{z}]^s \cap \bar{\Omega}$ такая, что $\bar{x}_i \rightarrow \bar{z}$ при $i \rightarrow \infty$;
- 3) пересечение $w^u(\bar{x}_i) \cap w^s(\bar{y})$ состоит из одной точки $\bar{y}_i$ для каждого $i \in \mathbb{N}$. Тогда последовательность точек $\bar{y}_i$ ограничена на $w^s(\bar{y})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следуем доказательству леммы 5.2 из [39], в которой аналогичный факт доказан для инвариантных многообразий диффеоморфизмов Аносова коразмерности один (как указывает Френкс [39], идея доказательства принадлежит С.П. Новикову).

Рис. 7. Последовательность точек $\bar{y}_i$

В силу леммы 3.1 множество $\overline{M} - w^u(\bar{x})$ состоит из двух компонент. Обозначим через $w^{u+}(\bar{x})$ ту компоненту, которая содержит точку $\bar{z}$. Согласно лемме 3.1 $[\bar{x}, \bar{z}]^s \subset w^{u+}(\bar{x})$ и, следовательно, все точки $\bar{x}_i, \bar{y}_i$ принадлежат $w^{u+}(\bar{x})$. Поэтому все $\bar{y}_i$ принадлежат одной компоненте множества $w^s(\bar{y}) - \bar{y}$, которую мы обозначим через $w^{s+}(\bar{y})$ (см. рис. 7). Предположим, что лемма неверна. Тогда последовательность $\bar{y}_i$ неограничена на $w^{s+}(\bar{y})$. Поэтому последовательность $\pi(\bar{y}_i)$ неограничена во внутренней топологии кривой $\pi(w^{s+}(\bar{y}))$. Из предложения 1.3 и C -плотности базисного множества Ω вытекает, что $\pi(w^{s+}(\bar{y})) \cap \Omega$ всюду плотно в Ω . Следовательно, $\bigcup_{\eta \in \pi_1(M)} \eta(w^{s+}(\bar{y}))$ всюду плотно в $\overline{\Omega}$. Так как $\bar{x} \in \overline{\Omega}$, то существует преобразование $\alpha \in \pi_1(M)$, переводящее отрезок $[\bar{x}, \bar{z}]^s$ в столь близкий к $w^{s+}(\bar{y})$ отрезок $\alpha([\bar{x}, \bar{z}]^s)$, что любое неустойчивое многообразие из $\overline{\Omega}$, пересекающее $w^{s+}(\bar{y})$, пересекает $\alpha([\bar{x}, \bar{z}]^s)$.

Покажем, что каждое неустойчивое многообразие из $\overline{\Omega}$, которое пересекает отрезок $\alpha([\bar{x}, \bar{z}]^s)$, пересекает также $[\bar{x}, \bar{z}]^s$. Возьмем произвольную точку $\bar{a} \in \overline{\Omega} \cap \alpha([\bar{x}, \bar{z}]^s)$. Тогда $w^u(\bar{a}) \cap w^{s+}(\bar{y}) \neq \emptyset$. Так как последовательность точек $\bar{y}_i$ неограничена на $w^s(\bar{y})$, то найдется индекс j такой, что точка $w^u(\bar{a}) \cap w^{s+}(\bar{y})$ принадлежит дуге $(\bar{y}_j, \bar{y}_{j+1})^s$. Поэтому точки $\bar{y}_j, \bar{y}_{j+1}$ лежат в разных компонентах множества $\overline{M} - w^u(\bar{a})$. Следовательно, точки

$$\bar{x}_j = w^u(\bar{y}_j) \cap [\bar{x}, \bar{z}]^s, \quad \bar{x}_{j+1} = w^u(\bar{y}_{j+1}) \cap [\bar{x}, \bar{z}]^s$$

также лежат в разных компонентах множества $\overline{M} - w^u(\bar{a})$. Поэтому неустойчивое многообразие $w^u(\bar{a})$ пересекает отрезок $[\bar{x}, \bar{z}]^s$ между точками $\bar{x}_j, \bar{x}_{j+1}$. Таким образом, каждое неустойчивое многообразие из $\overline{\Omega}$, пересекающее $\alpha([\bar{x}, \bar{z}]^s)$, пересекает также $[\bar{x}, \bar{z}]^s$. Это позволяет определить отображение

$$\lambda \circ \alpha: [\bar{x}, \bar{z}]^s \cap \overline{\Omega} \rightarrow [\bar{x}, \bar{z}]^s \cap \overline{\Omega},$$

положив $\lambda(\bar{a}) = [\bar{x}, \bar{z}]^s \cap w^u(\bar{a})$ для $\bar{a} \in \alpha([\bar{x}, \bar{z}]^s) \cap \overline{\Omega}$. Из выбора точки $\bar{z}$ и очевидного равенства $\alpha(\overline{\Omega}) = \overline{\Omega}$ вытекает, что $[\bar{x}, \bar{z}]^s \cap \overline{\Omega} \neq \emptyset$. Поэтому отображение $\lambda \circ \alpha$ имеет непустую область определения. Введем на отрезке $[\bar{x}, \bar{z}]^s$ ориентацию от точки $\bar{x}$ к точке $\bar{z}$. В силу п. 3) леммы 3.1 отображение $\lambda \circ \alpha$ является монотонным на множестве $[\bar{x}, \bar{z}]^s \cap \overline{\Omega}$. Поэтому $\lambda \circ \alpha$ может быть продолжено до непрерывного отображения на весь отрезок $[\bar{x}, \bar{z}]^s$, поскольку пересечение $[\bar{x}, \bar{z}]^s \cap \overline{\Omega}$ является канторовым множеством. Следовательно, отображение $\lambda \circ \alpha$ имеет неподвижную точку $\bar{x}_0$. Не уменьшая общности, можно считать, что $\bar{x}_0 \in \Omega$. Действительно, если $\bar{x}_0 \notin \Omega$, то $\bar{x}_0$ принадлежит некоторому смежному интервалу канторова множества $[\bar{x}, \bar{z}]^s \cap \overline{\Omega}$. Тогда в силу монотонности отображения $\lambda \circ \alpha$ и инвариантности $[\bar{x}, \bar{z}]^s \cap \overline{\Omega}$ относительно $\lambda \circ \alpha$ концы этого смежного интервала также являются его неподвижными точками. Из $\alpha(\bar{x}) = \bar{x}_0 \in \Omega$ следует $\alpha(w^u(\bar{x}_0)) = w^u(\bar{x}_0)$, что противоречит отсутствию на $w^u(\bar{x}_0)$ конгруэнтных точек.

ЛЕММА 3.4. Пусть Ω – C -плотный ориентируемый растягивающийся аттрактор коразмерности один и $\overline{\Omega} = \pi^{-1}(\Omega)$. Предположим, что имеются точки $\bar{x}, \bar{z} \in \overline{\Omega}$ такие, что $\bar{z} \in w^s(\bar{x}) \cap \overline{\Omega}$. Тогда $w^{s*}(\bar{y}) \cap w^u(\bar{z}) \neq \emptyset$ для любой точки $\bar{y} \in w^u(\bar{x})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$\mathcal{B} \subset w^u(\bar{x}) = \{\bar{b} \in w^u(\bar{x}) \mid w^{s*}(\bar{b}) \cap w^u(\bar{z}) \neq \emptyset\}.$$

Ясно, что $\mathcal{B} \neq \emptyset$, поскольку $\bar{x} \in \mathcal{B}$. В силу теоремы о непрерывной зависимости инвариантных многообразий от начальных условий множество $\mathcal{B}$ открыто в $w^u(\bar{x})$. Докажем, что $\mathcal{B}$ замкнуто в $w^u(\bar{x})$. Возьмем последовательность точек $\bar{a}_i \in \mathcal{B}$ такую, что $\bar{a}_i \rightarrow \bar{b}_0$ при $i \rightarrow \infty$. В силу леммы 3.2 пересечение $w^{s*}(\bar{a}_i) \cap w^u(\bar{z})$ состоит из одной точки, которую обозначим через $\bar{c}_i$. Обозначим через $w^{u+}(\bar{x})$ компоненту множества $\bar{M} - w^u(\bar{x})$, которая содержит точку $\bar{z}$. В силу леммы 3.1 $[\bar{x}, \bar{z}]^s \subset w^{u+}(\bar{x})$ и, следовательно, все точки $\bar{c}_i$ принадлежат $w^{u+}(\bar{x})$. Положим $w^{s+}(\bar{b}_0) = w^{s*}(\bar{b}_0) \cap w^{u+}(\bar{x})$.

Предположим сперва, что $(\bar{x}, \bar{z})^s \cap \bar{\Omega} = \emptyset$. Тогда $(\bar{x}, \bar{z})^s = (\bar{x}, \bar{z})_{\emptyset}^s$ и инвариантные многообразия $w^u(\bar{x})$, $w^u(\bar{z})$ образуют 2-связку. В силу леммы 2.9 $\bar{\varphi}_{\bar{p}\bar{q}}(\bar{b}_0) \subset w^u(\bar{z})$, где $\bar{p} \in w^u(\bar{x})$, $\bar{q} \in w^u(\bar{z})$ – ассоциированные точки 2-связки $w^u(\bar{x}) \cup w^u(\bar{z})$. Поэтому $w^{s*}(\bar{b}_0) \cap w^u(\bar{z}) \neq \emptyset$ и $\bar{b}_0 \in \mathcal{B}$.

Предположим теперь, что $(\bar{x}, \bar{z})^s \cap \bar{\Omega} \neq \emptyset$. Согласно лемме 2.9 и предложению 1.5 можно считать, что $\bar{z}$ не является изолированной точкой в $(\bar{x}, \bar{z}]^s \cap \bar{\Omega}$. Поэтому существует монотонная последовательность $\bar{x}_k \in (\bar{x}, \bar{z}]^s \cap \bar{\Omega}$ такая, что $\bar{x}_k \rightarrow \bar{z}$ при $k \rightarrow \infty$.

Покажем, что каждое неустойчивое многообразие $w^u \subset \bar{\Omega}$, пересекающее $w^{s+}(\bar{b}_0)$ или $[\bar{a}_i, \bar{c}_i]^s$, пересекает $[\bar{x}, \bar{z}]^s$. Отметим, что если $w^u \subset \bar{\Omega}$ пересекает $w^{s+}(\bar{b}_0)$, то w^u пересекает $[\bar{a}_i, \bar{c}_i]^s$ для всех достаточно больших i . Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда w^u пересекает $[\bar{a}_i, \bar{c}_i]^s$. В силу леммы 3.1 точки

$$\bar{a}_i \in w^u(\bar{x}), \quad \bar{c}_i = w^{s*}(\bar{a}_i) \cap w^u(\bar{z}) \subset w^u(\bar{z})$$

лежат в разных компонентах множества $\bar{M} - w^u$. Следовательно, $\bar{x}$ и $\bar{z}$ также лежат в разных компонентах $\bar{M} - w^u$. Поэтому w^u пересекает $[\bar{x}, \bar{z}]^s$. В частности, каждое неустойчивое многообразие, содержащее граничную точку и пересекающее $w^{s+}(\bar{b}_0)$ или $[\bar{a}_i, \bar{c}_i]^s$, пересекает $[\bar{x}, \bar{z}]^s$ (см. рис. 8).

Рис. 8. Пересечение неустойчивых многообразий с дугой $[\bar{x}, \bar{z}]^s$

Покажем теперь, что каждое неустойчивое многообразие $w^u \subset \bar{\Omega}$, пересекающее $[\bar{x}, \bar{z}]^s$, пересекает $w^{s+}(\bar{b}_0)$ и, следовательно, $[\bar{a}_i, \bar{c}_i]^s$. Так как точки $\bar{x}, \bar{z}$ в силу леммы 3.1 лежат в разных компонентах множества $\bar{M} - w^u$, то точки

$$\bar{a}_i \in w^u(\bar{x}), \quad \bar{c}_i = w^{s*}(\bar{a}_i) \cap w^u(\bar{z}) \subset w^u(\bar{z})$$

также лежат в разных компонентах множества $\bar{M} - w^u$. Предположим, что $w^u \cap [\bar{a}_i, \bar{c}_i]^s = \emptyset$. Тогда $[\bar{a}_i, \bar{c}_i]^s$ содержит ассоциированные точки, скажем $\bar{p}_i$ и $\bar{q}_i$. Будем для определенности считать, что $\bar{a}_i$ и $\bar{p}_i$ (соответственно, $\bar{c}_i$ и $\bar{q}_i$) принадлежат одному устойчивому многообразию.

Вышеприведенные рассуждения показывают, что $w^u(\bar{p}_i)$ и $w^u(\bar{q}_i)$ пересекают $[\bar{x}, \bar{z}]^s$. Неустойчивое многообразие w^u не может пересекать ни дугу $[\bar{x}, w^u(\bar{p}_i) \cap w^s(\bar{x})]^s$, ни дугу $[w^u(\bar{q}_i) \cap w^s(\bar{z}), \bar{z}]^s$. В противном случае w^u должно пересекать $[\bar{a}_i, \bar{p}_i]^s$ или $[\bar{q}_i, \bar{c}_i]^s$ соответственно, что противоречит нашему предположению. Поэтому w^u пересекает дугу

$$(w^u(\bar{p}_i) \cap w^s(\bar{x}), w^u(\bar{q}_i) \cap w^s(\bar{z}))^s = (w^u(\bar{p}_i) \cap w^s(\bar{x}), w^u(\bar{q}_i) \cap w^s(\bar{z}))_\emptyset^s,$$

что противоречит лемме 2.9.

Таким образом, $w^{s+}(\bar{b}_0) \cap w^u(\bar{x}_k) \neq \emptyset$. Согласно лемме 3.2 это пересечение состоит из одной точки. Положим $\bar{y}_k = w^{s+}(\bar{b}_0) \cap w^u(\bar{x}_k)$. В силу леммы 3.3 последовательность точек $\bar{y}_k$ ограничена на $w^{s+}(\bar{b}_0)$. Согласно лемме 3.1 последовательность $\bar{y}_k$ монотонная, поскольку последовательность $\bar{x}_k$ монотонная. Так как $\bar{\Omega}$ компактно, то $\bar{y}_k \rightarrow \bar{y}_* \in \bar{\Omega}$.

Рис. 9. Последовательность $\bar{y}_k$

Покажем, что $w^u(\bar{y}_*) = w^u(\bar{z})$. Предположим противное. Тогда $w^u(\bar{y}_*)$ пересекает $(\bar{x}, \bar{z})^s$ в некоторой точке $\bar{x}_*$. Так как $\bar{x}_k \rightarrow \bar{z}$, то имеется бесконечно много точек $\bar{x}_k \in (\bar{x}_*, \bar{z})^s$. Это противоречит тому, что $\bar{y}_k$ стремится монотонно к $\bar{y}_*$ (см. рис. 9). Таким образом, $w^u(\bar{y}_*) = w^u(\bar{z})$. Поэтому множество $\mathcal{B}$ замкнуто. Из связности $w^u(\bar{x})$ вытекает, что $w^u(\bar{x}) = \mathcal{B}$.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Пусть Ω – C -плотный ориентируемый растягивающийся аттрактор коразмерности один и $\bar{\Omega} = \pi^{-1}(\Omega)$. Предположим, что $w^{s*}(\bar{x})$ и $w^{s*}(\bar{y})$ пересекают некоторый слой ламинации $\mathcal{L}(\bar{\Omega})$, где $\bar{x}, \bar{y} \in \bar{\Omega}$. Тогда $w^{s*}(\bar{x})$ и $w^{s*}(\bar{y})$ пересекают одни и те же слои ламинации $\mathcal{L}(\bar{\Omega})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 2.9 и теореме о непрерывной зависимости слоев от начальных условий существует точка $\bar{z} \in w^u(\bar{x})$ такая, что $\pi(w^s(\bar{z}))$ не содержит граничных периодических точек, и $w^s(\bar{z}) \cap w^u(\bar{y}) \neq \emptyset$. Отсюда и из леммы 3.4 вытекает требуемый результат.

ЛЕММА 3.5. Пусть Ω – ориентируемый растягивающийся аттрактор коразмерности один. Предположим, что каждая характеристическая сфера $S_{p_i q_i}$ на Ω ограничивает замкнутый шар $E_{p_i q_i} \subset M$. Пусть $\bar{B}_{\bar{p}\bar{q}} = w^u(\bar{p}) \cup w^u(\bar{q})$ – 2-связка множества $\bar{\Omega} = \pi^{-1}(\Omega)$, где $\bar{p}, \bar{q}$ – ассоциированные точки из $\pi^{-1}(\Omega)$. Пусть $\mathcal{J}_{\bar{p}\bar{q}} \subset \bar{M}$ – открытая область, ограниченная неустойчивыми многообразиями $w^u(\bar{p})$ и $w^u(\bar{q})$. Тогда $\mathcal{J}_{\bar{p}\bar{q}} \cap \bar{\Omega} = \emptyset$, т.е. область $\mathcal{J}_{\bar{p}\bar{q}}$ не содержит точек из $\bar{\Omega}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно следствию 2.5 $\pi(\bar{B}_{\bar{p}\bar{q}}) = B_{pq} = W^u(p) \cup W^u(q)$ есть 2-связка множества Ω , где $p = \pi(\bar{p})$, $q = \pi(\bar{q})$ – периодические ассоциированные точки. Пусть S_{pq} – характеристическая сфера, соответствующая B_{pq} . В силу леммы 2.10 существует характеристическая сфера $\bar{S}_{\bar{p}\bar{q}}$, соответствующая $\bar{B}_{\bar{p}\bar{q}}$ и накрывающая S_{pq} . Пусть t – общий период точек p, q . По условию S_{pq} ограничивает замкнутый шар $E_{pq} \subset M$. Так как шар E_{pq} является односвязным множеством, то из теоремы о накрывающей гомотопии вытекает, что прообраз $\pi^{-1}(E_{pq})$ представляет собой объединение замкнутых шаров. Из следствия 2.8 следует, что эти шары попарно не пересекаются, поскольку один шар не может лежать внутри другого. По аналогичной причине прообраз $\pi^{-1}(f^{mj}(E_{pq}))$ представляет собой объединение попарно не пересекающихся замкнутых шаров. Обозначим через $\bar{E}_{\bar{p}\bar{q}}^j$ шар из $\pi^{-1}(f^{mj}(E_{pq}))$, содержащий точки $\bar{p}, \bar{q}$. Положим

$$\mathcal{J}'_{\bar{p}\bar{q}} = \bigcup_{j \geq 0} \bar{E}_{\bar{p}\bar{q}}^j.$$

В силу леммы 3.1 множество

$$\text{clos } \mathcal{J}_{\bar{p}\bar{q}} = \mathcal{J}_{\bar{p}\bar{q}} \cup w^u(\bar{p}) \cup w^u(\bar{q})$$

связно, поскольку $\mathcal{J}_{\bar{p}\bar{q}}$ связно и $w^u(\bar{p}), w^u(\bar{q})$ вложены в $\bar{M}$. Очевидно, $\mathcal{J}'_{\bar{p}\bar{q}} \subset \text{clos } \mathcal{J}_{\bar{p}\bar{q}}$. Из теоремы о непрерывной зависимости инвариантных многообразий от начальных условий вытекает, что $\mathcal{J}'_{\bar{p}\bar{q}}$ открыто в $\text{clos } \mathcal{J}_{\bar{p}\bar{q}}$. Покажем, что $\mathcal{J}'_{\bar{p}\bar{q}}$ замкнуто в $\text{clos } \mathcal{J}_{\bar{p}\bar{q}}$. Возьмем последовательность точек $\bar{a}_i \in \text{clos } \mathcal{J}_{\bar{p}\bar{q}}$ такую, что $\bar{a}_i \rightarrow \bar{a}_*$ при $i \rightarrow \infty$. Тогда $\bar{a}_i \in \bar{E}_{\bar{p}\bar{q}}^{j(i)}$ для некоторого $j(i) \geq 0$. Если последовательность индексов $j(i)$ ограничена, то $\bar{a}_* \in \bar{E}_{\bar{p}\bar{q}}^{j_*}$ при некотором j_* , поскольку $\bigcup_{j \geq 0} \bar{E}_{\bar{p}\bar{q}}^j$ есть объединение непересекающихся шаров. Если последовательность индексов $j(i)$ неограничена, то в силу теоремы 2.1 $\bar{a}_* \in \bar{\Omega}$. В обоих случаях $\bar{a}_* \in \mathcal{J}'_{\bar{p}\bar{q}}$. Поэтому $\mathcal{J}'_{\bar{p}\bar{q}}$ замкнуто и, следовательно, $\text{clos } \mathcal{J}_{\bar{p}\bar{q}} = \mathcal{J}'_{\bar{p}\bar{q}}$. Так как в силу теоремы 2.1 и следствия 2.8 внутри $\bar{E}_{\bar{p}\bar{q}}^j$ не могут лежать точки из $\bar{\Omega}$, то в области $\mathcal{J}_{\bar{p}\bar{q}}$ нет неустойчивых многообразий из $\bar{\Omega}$.

ЛЕММА 3.6. Предположим, что каждая характеристическая сфера $S_{p_i q_i}$ ориентируемого растягивающегося аттрактора коразмерности один Ω ограничивает замкнутый шар $E_{p_i q_i} \subset M$. Если устойчивое многообразие $W^s(x)$ точки $x \in \Omega$ не содержит граничных периодических точек, то любое его поднятие пересекает все слои ламинации $\mathcal{L}(\bar{\Omega})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 2.1 Ω является C -плотным базисным множеством. Поэтому $W^s(x) \cap \Omega$ плотно в Ω . Согласно предложению 1.3 множества $W^{s+}(x) \cap \Omega$, $W^{s-}(x) \cap \Omega$ плотны в Ω , где $W^{s\pm}(x)$ – компоненты множества $W^s(x) - x$. Отсюда следует, что имеется последовательность $\{\bar{x}_i \in w^s(\bar{x}) \cap \bar{\Omega}\}_{i=-\infty}^{+\infty}$ такая, что

$$\bigcup_{i=-\infty}^{+\infty} [\bar{x}_{-i}, \bar{x}_i]^s = w^s(\bar{x}), \quad \cdots \subset [\bar{x}_{-i}, \bar{x}_i]^s \subset [\bar{x}_{-i-1}, \bar{x}_{i+1}]^s \subset \cdots.$$

Обозначим через $\mathcal{J}_i \subset \bar{M}$ замкнутую область, ограниченную неустойчивыми многообразиями $w^u(\bar{x}_i)$ и $w^u(\bar{x}_{-i})$. В силу леммы 3.1 области $\mathcal{J}_i$ образуют последовательность увеличивающихся связанных множеств

$$\mathcal{J}_1 \subset \mathcal{J}_2 \subset \cdots, \quad \mathcal{J}_i \subset \mathcal{J}_{i+1} \subset \cdots,$$

где все включения собственные. Множество $\bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{J}_i$ открыто в $\bar{M}$, поскольку каждое $\mathcal{J}_i$ является топологическим подмногообразием. Покажем, что $\bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{J}_i$ замкнуто. Возьмем сходящуюся последовательность $\bar{y}_i \rightarrow \bar{z}$ при $i \rightarrow \infty$, где $\bar{y}_i \in w^u(\bar{x}_i)$. Тогда $\bar{z} \in \bar{\Omega}$, поскольку $\bar{\Omega}$ замкнуто. Следовательно, $w^{s*}(\bar{z})$ пересекает $w^u(\bar{x}_i)$ для всех достаточно больших i . В силу следствия 3.1 $w^u(\bar{z})$ пересекает $w^s(\bar{x})$. Так как последовательность $\bar{x}_i$ неограничена на $w^s(\bar{x})$, то $w^u(\bar{z}) \subset \mathcal{J}_j$ для некоторого $j \in \mathbb{N}$, и поэтому $\bar{z} \in \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{J}_i$. Таким образом, $\bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{J}_i$ замкнуто. Следовательно, $\bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{J}_i = \bar{M}$.

Осталось показать, что каждое неустойчивое многообразие $w^u \subset \bar{\Omega}$, лежащее в $w^u \subset \mathcal{J}_i$ для некоторого $i \in \mathbb{N}$, пересекает $w^s(\bar{x})$. Согласно лемме 3.1 $\mathcal{J}_i$ линейно связно. Возьмем произвольный путь $P \subset \mathcal{J}_i$ от точки $\bar{a} \in w^u(\bar{x}_i)$ к точке $\bar{b} \in w^u$. Положим

$$P_a = \{\bar{z} \in P \cap \bar{\Omega} \mid w^u(\bar{z}) \cap w^s(\bar{x})\} \neq \emptyset.$$

Из предыдущих рассуждений и теоремы о непрерывной зависимости инвариантных многообразий от начальных условий вытекает, что P_a замкнуто в P . Поэтому существует точка $\bar{a}_* \in P_a$ такая, что P_a принадлежит замкнутому промежутку $[\bar{a}, \bar{a}_*] \subset P$ и $(\bar{a}_*, \bar{b}) \cap P_a = \emptyset$. Не уменьшая общности, можно считать, что P трансверсально $w^u(\bar{a}_*)$ в некоторой точке $\bar{a}_*$. Тогда, вновь применяя теорему о непрерывной зависимости инвариантных многообразий от начальных условий, получаем, что $\bar{\Omega}$ не пересекается с $(\bar{a}_*, \bar{b})$ вблизи $\bar{a}_*$. Следовательно, $w^u(\bar{a}_*)$ содержит поднятие граничной периодической точки. Обозначим это поднятие через $\bar{p}$ (см. рис. 10).

Рис. 10. Ассоциированные точки $\bar{p}$ и $\bar{q}$

Пусть $\bar{q}$ – точка, ассоциированная с $\bar{p}$. Обозначим через $\mathcal{J}_{\bar{p}\bar{q}}$ замкнутую область, ограниченную $w^u(\bar{p})$ и $w^u(\bar{q})$. В силу следствия 3.1 $w^u(\bar{q}) \cap w^s(\bar{x}) \neq \emptyset$. Из определения точки $\bar{a}_*$ вытекает, что $w^u(\bar{q}) \cap (\bar{a}_*, \bar{b}) = \emptyset$. Так как $\bar{\Omega}$ не пересекает $(\bar{a}_*, \bar{b})$ вблизи $\bar{a}_*$, то $(\bar{a}_*, \bar{b}) \subset \mathcal{J}_{\bar{p}\bar{q}}$. Следовательно, $w^u \subset \mathcal{J}_{\bar{p}\bar{q}}$. С другой стороны, согласно лемме 3.5 в $\mathcal{J}_{\bar{p}\bar{q}}$ имеются точки из $\bar{\Omega}$. Полученное противоречие завершает доказательство.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Пусть выполнены условия леммы 3.6. Тогда $w^{s*}(\bar{z})$ пересекает все неустойчивые многообразия из множества $\bar{\Omega}$, $\bar{z} \in \bar{\Omega}$.

ЛЕММА 3.7. Пусть каждая характеристическая сфера $S_{p_i q_i}$ ориентируемого растягивающегося аттрактора коразмерности один Ω ограничивает замкнутый шар $E_{p_i q_i} \subset M$. Тогда универсальная накрывающая $\bar{M}$ гомотопна $\mathbb{R}^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем точку $\bar{x}_0 \in \bar{\Omega}$ такую, что $w^s(\bar{x}_0)$ не содержит прообразов граничных периодических точек. Введем на $w^s(\bar{x}_0)$ ориентацию и обозначим через

$$\dots, \bar{E}_{-j}, \dots, \bar{E}_{-1}, \bar{E}_1, \dots, \bar{E}_j, \dots$$

шары из $\pi^{-1}(\bigcup_{i=1}^k E_{p_i q_i})$, последовательно пересекаемые кривой $w^s(\bar{x}_0)$. В качестве $\bar{E}_1$ берем произвольный шар из $\pi^{-1}(\bigcup_{i=1}^k E_{p_i q_i})$, пересекаемый кривой $w^s(\bar{x}_0)$. В силу леммы 2.9 существует точка входа (соответственно, точка выхода кривой $w^s(\bar{x}_0)$) в (из) шар(а) $\bar{E}_j$, которую обозначим через x_j^- (соответственно, x_j^+). Не уменьшая общности, можно считать, что $\bar{x}_0$ лежит между x_{-1}^+ и x_1^- .

Обозначим через $\mathbb{R}_n^1 = \{(0, \dots, 0, x_n) \mid x_n \in \mathbb{R}\}$ ось x_n евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ с декартовыми координатами $(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$. Эта ось перпендикулярна гиперплоскости $\mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_n^1 \cong \mathbb{R}^n$, вложенной в $\mathbb{R}^n$, которая задается как множество точек с координатой x_n , равной 0. Возьмем произвольный сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $h: w^s(\bar{x}_0) \rightarrow \mathbb{R}_n^1$ такой, что

$$\begin{aligned} h([x_{-1}^+, x_1^-]^s) &= [-1, +1], & h(\bar{x}_0) &= 0, \\ h([x_j^-, x_j^+]^s) &= [j, j + 0.5] \text{ для } j \geq 1, \\ h([x_j^-, x_j^+]^s) &= [j - 0.5, j] \text{ для } j \leq -1. \end{aligned}$$

Неустойчивое многообразие $w^u(\bar{x}_0)$ снабдим некоторой ориентацией и отождествим $w^u(\bar{x}_0)$ с гиперплоскостью $\mathbb{R}^{n-1}$ с помощью произвольного гомеоморфизма

$$V_0: w^u(\bar{x}_0) \rightarrow \mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^n$$

такого, что $V_0(\bar{x}_0) = 0$. Продолжим сперва V_0 на множество $\bar{\Omega}$. Для этого определим две “проекции” $P_1: \bar{\Omega} \rightarrow w^u(\bar{x}_0)$ и $P_2: \bar{\Omega} \rightarrow w^s(\bar{x}_0)$ следующим образом. Напомним, что для точки $\bar{b} \in \bar{\Omega}$ полагаем $w^{s*}(\bar{b}) = w^s(\bar{b})$, если $w^s(\bar{b})$ не содержит поднятий граничных периодических точек множества Ω , и $w^{s*}(\bar{b}) = w^s(\bar{p}) \cup w^s(\bar{q})$, если $w^s(\bar{b})$ содержит поднятия $\bar{p}, \bar{q}$ граничных периодических точек, при этом $\bar{p}, \bar{q}$ являются ассоциированными точками. В силу леммы 3.1 и следствия 3.2 пересечение $w^{s*}(\bar{b}) \cap w^u(\bar{x}_0)$ состоит из одной точки. Аналогично, пересечение $w^u(\bar{b}) \cap w^s(\bar{x}_0)$ также состоит из одной точки. Положим

$$\begin{aligned} P_1(\bar{b}) &= w^{s*}(\bar{b}) \cap w^u(\bar{x}_0), \quad P_2(\bar{b}) = w^u(\bar{b}) \cap w^s(\bar{x}_0), \quad \bar{b} \in w^u(\bar{p}), \\ V(\bar{b}) &= (V_0(P_1(\bar{b})), h(P_2(\bar{b}))) = (V_0(w^{s*}(\bar{b}) \cap w^u(\bar{x}_0)), h(w^u(\bar{b}) \cap w^s(\bar{x}_0))). \end{aligned}$$

Так как $\bar{\Omega} \cap \text{int } \bar{E}_j = \emptyset$ для $j \in \mathbb{Z} - 0$, то отображение $V: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ корректно определено и является продолжением отображения V_0 . Для простоты изложения последующие продолжения отображения V будем обозначать той же буквой.

Определим теперь V в точке

$$\bar{b} \in \bar{M} - \left(\bar{\Omega} \cup \pi^{-1} \left(\bigcup_{i=1}^k \text{int } E_{p_i q_i} \right) \right).$$

Так как $\bar{b} \notin \pi^{-1} \left(\bigcup_{i=1}^k \text{int } E_{p_i q_i} \right)$, то в силу теоремы 2.1 $\bar{b} \in W^s(\bar{\Omega})$. Тогда $\bar{b} \in (\bar{x}, \bar{y})^s$, где $\bar{x} \in w^u(\bar{p})$, $\bar{y} \in w^u(\bar{q})$, и $\bar{p}, \bar{q}$ – ассоциированные точки. Напомним, что $\bar{\varphi}_{\bar{p}\bar{q}}(\bar{y}) = \bar{x}$ и $\bar{\varphi}_{\bar{p}\bar{q}}(\bar{x}) = \bar{y}$, где гомеоморфизм $\bar{\varphi}_{\bar{p}\bar{q}}(\bar{y})$ удовлетворяет лемме 2.9. Обозначим через

$$\lambda'(\bar{b}) = \frac{\lambda_{\bar{x}}(\bar{b})}{\lambda_{\bar{x}}(\bar{y})} = \frac{\lambda_{\bar{x}}(\bar{b})}{\lambda_{\bar{x}}(\bar{\varphi}_{\bar{p}\bar{q}}(\bar{x}))}$$

“относительное” расстояние между точками $\bar{x}, \bar{b}$, где $\lambda_{\bar{x}}(\bar{z})$ – длина отрезка $(\bar{x}, \bar{z})^s$. Согласно лемме 3.6 оба пересечения

$$w^s(\bar{x}_0) \cap w^u(\bar{x}) = P_2(\bar{x}), \quad w^s(\bar{x}_0) \cap w^u(\bar{y}) = P_2(\bar{y})$$

не пусты. В силу следствия 3.2 пересечение $w^{s*}(\bar{b}) \cap w^u(\bar{x}_0)$ состоит из одной точки. Положим

$$V(\bar{b}) = (V_0(w^{s*}(\bar{b}) \cap w^u(\bar{x}_0)), [1 - \lambda'(\bar{b})]h(P_2(\bar{x})) + \lambda'(\bar{b})h(P_2(\bar{y}))).$$

Так как $P_2(\bar{x}), P_2(\bar{y}) \in w^s(\bar{x}_0)$, то точки $h(P_2(\bar{x})), h(P_2(\bar{y}))$ определены и, следовательно, $V(\bar{b})$ корректно определено. Нетрудно видеть, что так определенное отображение является продолжением построенного выше отображения $V: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Осталось продолжить V на внутренность шаров $\pi^{-1}(\bigcup_{i=1}^k E_{p_i q_i})$. Пусть характеристическая сфера $S_{\bar{p}\bar{q}} = D_{\bar{p}} \cup D_{\bar{q}} \cup C_{\bar{p}\bar{q}}$ ограничивает замкнутый шар $E_{\bar{p}\bar{q}} \subset \pi^{-1}(\bigcup_{i=1}^k E_{p_i q_i})$. Покажем, что $V(S_{\bar{p}\bar{q}})$ является $(n-1)$ -мерной сферой в $\mathbb{R}^n$.

В силу леммы 2.10 и теоремы о непрерывной зависимости инвариантных многообразий от начальных условий, $P_1(\bar{D}_{\bar{p}})$ и $P_2(\bar{D}_{\bar{q}})$ являются $(n-1)$ -мерными шарами в $w^u(\bar{x}_0)$. Более того, $P_1(\bar{D}_{\bar{p}}) = P_1(\bar{D}_{\bar{q}})$, поскольку $w^{s*}(\bar{x}) = w^{s*}(\bar{\varphi}_{\bar{p}\bar{q}}(\bar{x}))$ для любой точки $\bar{x} \in \bar{D}_{\bar{p}}$ и, следовательно, $P_1(\bar{x}) = P_1(\bar{\varphi}_{\bar{p}\bar{q}}(\bar{x}))$. Поэтому $V(\bar{D}_{\bar{p}})$ и $V(\bar{D}_{\bar{q}})$ являются $(n-1)$ -мерными шарами в $\mathbb{R}^n$, которые получаются один из другого с помощью сдвига

$$s: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad s(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + \alpha),$$

вдоль оси Ox_n , где $\alpha = |h(P_2(\bar{x})) - h(P_2(\bar{y}))|$, $\bar{y} = \bar{\varphi}_{\bar{p}\bar{q}}(\bar{x})$. Так как по построению любой отрезок $(\bar{x}, \bar{y})^s$, где $\bar{x} \in \partial \bar{D}_{\bar{p}}$, $\bar{y} \in \partial \bar{D}_{\bar{q}}$, отображается под действием V в отрезок

$$[V_0(P_1(\bar{x})), t], \quad h(P_2(\bar{x})) \leq t \leq h(P_2(\bar{x})) + \alpha,$$

длины $|h(\bar{x}_\perp) - h(\bar{y}_\perp)|$, то объединение

$$V(C_{\bar{p}\bar{q}}) = \bigcup_{\bar{x} \in \bar{S}_{\bar{p}}} V([\bar{x}, \bar{\varphi}_{\bar{p}\bar{q}}(\bar{x})])$$

образует $(n - 1)$ -мерный цилиндр в $\mathbb{R}^n$. Отсюда вытекает, что $V(S_{\bar{p}\bar{q}})$ является $(n - 1)$ -мерной сферой в $\mathbb{R}^n$. В силу теоремы о непрерывной зависимости инвариантных многообразий от начальных условий, $V(S_{\bar{p}\bar{q}})$ является цилиндрически вложенной сферой. Поэтому $V(S_{\bar{p}\bar{q}})$ ограничивает n -мерный шар, скажем $E_{V(\bar{p}\bar{q})}$ [53].

Так как h и V_0 сохраняют ориентацию, то $V|S_{\bar{p}\bar{q}}$ продолжается на шар $E_{V(\bar{p}\bar{q})}$ до гомеоморфизма $E_{\bar{p}\bar{q}} \rightarrow E_{V(\bar{p}\bar{q})}$ (такое продолжение существует; см., например, [18]). Таким образом, V гомеоморфно продолжается внутрь всех шаров из $\pi^{-1}(\bigcup_{i=1}^k E_{p_i q_i})$. Это завершает построение отображения $V: \bar{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$, поскольку $\bar{M} = W^s(\bar{\Omega}) \cup (\pi^{-1}(\bigcup_{i=1}^k E_{p_i q_i}))$. Отметим, что если $E_{\bar{p}\bar{q}} = \bar{E}_j$ для некоторого j , то, вообще говоря, V не совпадает с h на $\bar{E}_j \cap w^s(\bar{x}_0)$.

В силу построения и непрерывной зависимости инвариантных многообразий от начальных условий, V является взаимно однозначным отображением на свой образ и локальным гомеоморфизмом. Покажем, что V является собственным отображением. Предположим противное. Тогда существует последовательность точек $\bar{b}_j \in \bar{M}$, не имеющая точек накопления и такая, что последовательность $V(\bar{b}_j)$ ограничена. Обозначим через

$$\begin{aligned} \text{pr}_1: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}, & \text{pr}_1(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) &= (x_1, \dots, x_{n-1}, 0), \\ \text{pr}_n: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}, & \text{pr}_n(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) &= (0, \dots, 0, x_n), \end{aligned}$$

естественные проекции. Тогда обе последовательности $\text{pr}_n(V(\bar{b}_j))$ и $\text{pr}_1(V(\bar{b}_j))$ ограничены. Если $\bar{b}_j \in \pi^{-1}(\bigcup_{i=1}^k E_{p_i q_i})$, то, не уменьшая общности, можно считать, что $\bar{b}_j \in \pi^{-1}(\bigcup_{i=1}^k S_{p_i q_i})$, поскольку семейство характеристических сфер $S_{p_i q_i}$ конечно и, следовательно, $\text{diam } \bar{E} < k_0 < \infty$ для некоторого $k_0 > 0$ и любого шара $\bar{E} \subset \pi^{-1}(\bigcup_{i=1}^k E_{p_i q_i})$. Таким образом, далее можно рассматривать последовательность точек $P_1(\bar{b}_j)$, так как $\bar{b}_j$ лежат на устойчивых многообразиях точек из $\bar{\Omega}$. Если эта последовательность $P_1(\bar{b}_j)$ не имеет точек накопления в $w^u(\bar{x}_0)$, то в силу леммы 3.1 последовательность $P_1(\bar{b}_j)$ не ограничена в топологии неустойчивого многообразия $w^u(\bar{x}_0)$. Тогда последовательность $V(\bar{b}_j) = (V_0(P_1(\bar{b}_j)), \cdot) = (\text{pr}_1(\bar{b}_j), \cdot)$ должна быть неограниченной, поскольку V_0 – гомеоморфизм. Следовательно, можно считать, что $P_1(\bar{b}_j)$ сходится в топологии $w^u(\bar{x}_0)$.

Обозначим через $\mathcal{J}_j$ область, ограниченную неустойчивыми многообразиями $w^u(x_j^+)$ и $w^u(x_j^-)$. Так как

$$h([x_j^-, x_j^+]) = [-(j + 0.5); j + 0.5]$$

и последовательность $\text{pr}_n(V(\bar{b}_j))$ ограничена, то точки $\bar{b}_j$ лежат в $\mathcal{J}_k$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Поэтому последовательность $\bar{b}_j$ также ограничена. Полученное противоречие показывает, что V является собственным отображением и, следовательно, гомеоморфизмом на свой образ.

Осталось доказать, что V является сюръекцией. Возьмем произвольную точку

$$v = (v_{n-1}, v_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^1 = \mathbb{R}^n.$$

Так как V_0 является гомеоморфизмом, то существует точка $z_0 \in w^u(\bar{x}_0)$ такая, что $V_0(z_0) = v_{n-1}$. Согласно следствию 3.2 $w^{s*}(z_0)$ пересекает все неустойчивые

многообразия из $\bar{\Omega}$. Отсюда вытекает, что найдутся точки $z_1, z_2 \in w^{s*}(z_0) \cap \bar{\Omega}$ такие, что $\text{pr}_n V(z_1) \leq v_n \leq \text{pr}_n V(z_2)$. Рассмотрим сперва случай, когда точки $z_1, z_2 \in w^{s*}(z_0)$ соединяются отрезком устойчивого многообразия. Если отрезок $[z_1, z_2]^s$ не пересекает шары из $\pi^{-1}(\bigcup_{i=1}^k E_{p_i q_i})$, то из построения V следует, что существует точка $z_3 \in [z_1, z_2]^s$ с $\text{pr}_n V(z_3) = v_n$. Тогда $V(z_3) = v$, и z_3 есть искомая точка. Предположим теперь, что отрезок $[z_1, z_2]^s$ пересекает шары из $\pi^{-1}(\bigcup_{i=1}^k E_{p_i q_i})$. Из конечности числа шаров, пересекающих $[z_1, z_2]^s$, вытекает, что достаточно рассмотреть случай, когда z_1 есть точка входа в некоторый шар $E_{\bar{p}\bar{q}} \subset \pi^{-1}(\bigcup_{i=1}^k E_{p_i q_i})$, а z_2 – точка выхода. Тогда $v \in V(E_{\bar{p}\bar{q}})$, что влечет существование точки $z_3 \in E_{\bar{p}\bar{q}}$ с $V(z_3) = v$.

Наконец, если точки $z_1, z_2 \in w^{s*}(z_0)$ не соединяются отрезком устойчивого многообразия, то $w^{s*}(z_0)$ содержит поднятия граничных периодических точек, являющихся ассоциированными точками, которые лежат “между” $z_1, z_2 \in w^{s*}(z_0)$. Не уменьшая общности, можно считать, что точки z_1, z_2 являются ассоциированными. Тогда $v \in V(E_{\bar{p}\bar{q}})$, и поэтому существует $z_3 \in V(E_{z_1 z_2})$ с $V(z_3) = v$. Это завершает доказательство леммы.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть f – A -диффеоморфизм n -мерного замкнутого многообразия M^n , $n \geq 3$, и пусть Ω – ориентируемый растягивающийся (сжимающийся) аттрактор (репеллер) коразмерности один диффеоморфизма f . Предположим, что каждая характеристическая сфера $S_{p_i q_i}$ базисного множества Ω ограничивает n -мерный шар $E_{p_i q_i} \subset M^n$. Тогда:

- 1) любое отличное от Ω базисное множество диффеоморфизма f лежит в $\bigcup_{i=1}^k E_{p_i q_i}$, где объединение берется по всем парам $\{(p_i, q_i)\}_{i=1}^k$ ассоциированных граничных периодических точек множества Ω ;
- 2) Ω – единственный ориентируемый растягивающийся (сжимающийся) аттрактор (репеллер) коразмерности один диффеоморфизма f ;
- 3) универсальное накрывающее пространство $\bar{M}^n$ гомеоморфно $\mathbb{R}^n$;
- 4) фундаментальная группа $\pi_1(M^n)$ изоморфна целочисленной решетке $\mathbb{Z}^n$; в частности, M^n гомотопически эквивалентно n -мерному тору T^n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1) следует из теоремы 2.1, поскольку устойчивые многообразия базисных множеств попарно не пересекаются. Утверждения 2) и 3) вытекают из следствия 2.7 и леммы 3.7 соответственно. Доказательство утверждения 4) следует доказательству второй половины теоремы 5.1 из [20], где аналогичный результат доказывается для многообразий, допускающих слоения с тривиальной группой голономии (интересующий нас частный случай получается для слоений из плоскостей коразмерности один, к этому случаю можно свести доказательство, используя теорему Плыкина о вложении аттрактора в слоение [26, с. 93]). Для удобства читателя мы схематично приведем прямое доказательство. Для краткости обозначений положим $M = M^n$.

Возьмем точку $\bar{x} \in \bar{\Omega}$ такую, что $w^s(\bar{x})$ не содержит поднятий граничных периодических точек. Согласно леммам 3.1 и 3.6 $\bar{w}^s(\bar{x})$ пересекает каждое неустойчивое многообразие $\bar{w}^u \subset \bar{\Omega}$ ровно в одной точке. Тогда каждый элемент α фундаментальной группы $\pi_1(M^n)$ индуцирует на $\bar{w}^s(\bar{x}) \cap \bar{\Omega}$ отображение $\mathcal{R}(\alpha)$ следующим образом:

$$\bar{z} \mapsto w^s(\bar{x}) \cap \alpha(w^u(\bar{z})), \quad \bar{z} \in w^s(\bar{x}) \cap \bar{\Omega}.$$

Обозначим через $\mathcal{R}(\pi_1(M^n))$ группу, образованную отображениями $\mathcal{R}(\alpha)$, где

α пробегает $\pi_1(M^n)$. Очевидно, соответствие $\pi_1(M^n) \rightarrow \mathcal{R}(\pi_1(M^n))$ является гомоморфизмом. Так как любое неустойчивое многообразие из $\bar{\Omega}$ не содержит конгруэнтных точек, то группа $\mathcal{R}(\pi_1(M))$ состоит из преобразований, которые не имеют неподвижных точек. Следовательно, $\mathcal{R}(\pi_1(M))$ изоморфна фундаментальной группе $\pi_1(M)$.

Введем на $w^s(\bar{x})$ ориентацию (т.е. зададим положительное направление). Для произвольной точки $\bar{z}_0 \in w^s(\bar{x}) \cap \bar{\Omega}$ существуют точки $\bar{z}_1, \bar{z}_2 \in w^s(\bar{x}) \cap \bar{\Omega}$ такие, что $\bar{z}_1 < \bar{z}_0 < \bar{z}_2$. В силу леммы 3.1 $w^u(\bar{z}_0)$ принадлежит области $\mathcal{J}_{12}$, ограниченной $w^u(\bar{z}_1)$ и $w^u(\bar{z}_2)$. Из лемм 3.1, 3.6 вытекает, что пересечение $\mathcal{R}(\alpha)(\mathcal{J}_{12}) \cap w^s(\bar{x})$ есть интервал. Поэтому точка $\alpha(\bar{z}_0)$ лежит между точками $\alpha(\bar{z}_1), \alpha(\bar{z}_2)$. Следовательно, $\mathcal{R}(\alpha)$ – непрерывное отображение. В силу леммы 3.1 $\mathcal{R}(\alpha)$ взаимно однозначно. Отсюда получаем, что $\mathcal{R}(\alpha)$ есть гомеоморфизм $\bar{w}^s(\bar{x}) \cap \bar{\Omega} \rightarrow \bar{w}^s(\bar{x}) \cap \bar{\Omega}$.

Для произвольного $\mathcal{R}(\alpha) \in \mathcal{R}(\pi_1(M^n))$ покажем, что если $\mathcal{R}(\alpha)(t_0) > t_0$ для некоторой точки $t_0 \in w^s(\bar{x}) \cap \bar{\Omega}$, то $\mathcal{R}(\alpha)(t) > t$ для любой $t \in w^s(\bar{x}) \cap \bar{\Omega}$. Предположим противное. Тогда существует точка $t'_0 \in w^s(\bar{x}) \cap \bar{\Omega}$ такая, что $\mathcal{R}(\alpha)(t'_0) < t'_0$. Положим

$$P_u = \{t \in w^s(\bar{x}) \cap \bar{\Omega} \mid \mathcal{R}(\alpha)(t) > t\}, \quad P_l = \{t \in w^s(\bar{x}) \cap \bar{\Omega} \mid \mathcal{R}(\alpha)(t) < t\}.$$

Сперва покажем, что оба множества P_u и P_l замкнуты. Возьмем последовательность $t_i \in P_u$ такую, что $t_i \rightarrow t_*$. Тогда $t_* \in w^s(\bar{x}) \cap \bar{\Omega}$, поскольку множество $w^s(\bar{x}) \cap \bar{\Omega}$ замкнуто. Так как $\mathcal{R}(\alpha)$ – непрерывное отображение, то $\mathcal{R}(\alpha)(t_*) \geq t_*$ и, следовательно, $\mathcal{R}(\alpha)(t_*) > t_*$, поскольку $\mathcal{R}(\alpha)$ не имеет неподвижных точек. Отсюда вытекает, что P_u замкнуто. Аналогично доказывается замкнутость множества P_l .

Для определенности будем считать, что $t_0 < t'_0$ (в противном случае можно перейти к $\mathcal{R}(\alpha^{-1})$). Так как P_u и P_l замкнуты, то $\sup P_u \in P_u$ и $\inf P_l \in P_l$. Более того, $(\sup P_u, \inf P_l)^s \cap \bar{\Omega} = \emptyset$. В силу предложения 1.3 точка $\sup P_u$ принадлежит неустойчивому многообразию $w^u(\bar{p})$ с граничной точкой $\bar{p}$. Аналогично, $\inf P_l$ принадлежит $w^u(\bar{q})$ с граничной точкой $\bar{q}$. Согласно лемме 2.9 точки $\bar{p}$ и $\bar{q}$ ассоциированы, поскольку $(\sup P_u, \inf P_l)^s = (\sup P_u, \inf P_l)^s_{\emptyset}$.

Обозначим через $\mathcal{J}_{\bar{p}\bar{q}} \subset \bar{M}$ открытую область, ограниченную неустойчивыми многообразиями $w^u(\bar{p})$ и $w^u(\bar{q})$. Согласно лемме 3.5 $\mathcal{J}_{\bar{p}\bar{q}} \cap \bar{\Omega} = \emptyset$ и, следовательно, $\alpha(\mathcal{J}_{\bar{p}\bar{q}}) \cap \bar{\Omega} = \emptyset$. Поэтому $\mathcal{R}(\alpha)((\sup P_u, \inf P_l)^s)$ есть интервал такой, что $\mathcal{R}(\alpha)((\sup P_u, \inf P_l)^s) \cap \bar{\Omega} = \emptyset$. Отсюда получаем, что если $\mathcal{R}(\alpha)(\sup P_u) > \inf P_l$, то $\mathcal{R}(\alpha)(\sup P_l) > \inf P_l$. Следовательно,

$$\mathcal{R}(\alpha)(\sup P_u) = \inf P_l, \quad \alpha(w^u(\bar{p})) = w^u(\bar{q}).$$

Тогда $\pi(w^u(\bar{p})) = \pi(w^u(\bar{q}))$, что означает, что Ω имеет 1-связку. Это противоречит ориентируемости Ω .

Таким образом, $\mathcal{R}(\alpha)(t) > t$ для всех $t \in w^s(\bar{x}) \cap \bar{\Omega}$, если только $\mathcal{R}(\alpha)(t_0) > t_0$ для некоторого $t_0 \in w^s(\bar{x}) \cap \bar{\Omega}$. Это утверждение позволяет ввести отношение порядка на группе $\mathcal{R}(\pi_1(M))$ следующим образом:

$$\mathcal{R}(\alpha) > \mathcal{R}(\beta), \quad \text{если } \mathcal{R}(\alpha)(\bar{z}) > \mathcal{R}(\beta)(\bar{z})$$

для одного (и, следовательно, для всех) $\bar{z} \in w^s(\bar{x}) \cap \bar{\Omega}$, где $\alpha, \beta \in \pi_1(M)$. Так как каждое неустойчивое многообразие из Ω в силу теоремы 2.1 всюду плотно в Ω , то

$\mathcal{R}(\pi_1(M))$ имеет архимедово упорядочивание: для $\mathcal{R}(\alpha) \neq \mathcal{R}(\beta)$ найдется целое m такое, что

$$\mathcal{R}(\alpha)^m > \mathcal{R}(\beta) \quad \text{или} \quad \mathcal{R}(\alpha)^{-m} > \mathcal{R}(\beta).$$

В силу теоремы Гёльдера об архимедово упорядоченных группах группа

$$\mathcal{R}(\pi_1(M)) \cong \pi_1(M)$$

свободная абелева. Из компактности многообразия M вытекает, что фундаментальная группа $\pi_1(M)$ конечно порожденная [49] и, следовательно, изоморфна целочисленной решетке $\mathbb{Z}^r$. Из доказанного п. 3) следует, что $\pi_r(M^n) = 0$ при $r \geq 2$, т.е. M является так называемым $K(\pi, 1)$ -пространством. Отсюда и из компактности M получаем $k = n$. Таким образом,

$$\pi_r(M^n) = 0 = \pi_r(T^n), \quad r \geq 2, \quad \pi_1(M^n) = \mathbb{Z}^n = \pi_1(T^n).$$

Это означает, что M^n слабо гомотопно тору T^n . Так как M^n является $K(\pi, 1)$ -пространством, то M^n гомотопически эквивалентно T^n .

§ 4. О существовании нетрансверсальных пересечений инвариантных многообразий

В этом параграфе будем придерживаться обозначений § 2. В частности, Ω – ориентируемый растягивающийся аттрактор коразмерности один A -дiffeоморфизма $f: M \rightarrow M$ n -мерного замкнутого многообразия $M = M^n$, $n \geq 3$. В следующей теореме рассматривается характеристическая сфера S_{pq} , соответствующая 2-связке $W^u(p) \cup W^u(q)$ базисного множества Ω , где $p, q \in \Omega$ – ассоциированные граничные периодические точки. Напомним, что S_{pq} есть объединение замкнутых $(n-1)$ -мерных шаров $D_p \subset W^u(p)$, $D_q \subset W^u(q)$ и связывающего $(n-1)$ -мерного цилиндра

$$C_{pq} = \bigcup_{x \in \partial D_p, y \in \partial D_q} (x, y)_{\emptyset}^s, \quad p \in \text{int } D_p, \quad q \in \text{int } D_q.$$

Напомним также, что

$$D_{pq} = \bigcup_{x \in W^u(p) - \text{int } D_p} [x, \varphi_{pq}(x)]_{\emptyset}^s.$$

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть f – структурно устойчивый диффеоморфизм замкнутого n -мерного многообразия M^n , $n \geq 3$, и Ω – ориентируемый растягивающийся аттрактор коразмерности один диффеоморфизма f . Пусть $\Omega' \neq \Omega$ – базисное множество индекса $n-1$ такое, что $W^u(\Omega') \cap D_{pq} \neq \emptyset$, и пусть $C \subset D_{pq} \cap W^u(z')$ – компонента пересечения $D_{pq} \cap W^u(z')$, где $z' \in \Omega'$ – периодическая точка. Тогда

$$W^u(z') \cap C_{pq} = C \cap C_{pq} \neq \emptyset,$$

и это пересечение состоит ровно из одной $(n-2)$ -мерной сферы, скажем S^{n-2} , которая изотопна обеим сферам $S_p = \partial D_p$, $S_q = \partial D_q$ в цилиндре C_{pq} . В частности, S^{n-2} разбивает C_{pq} на два $(n-1)$ -мерных цилиндра, каждый из которых гомеоморфен $\Sigma^{n-2} \times [0; 1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме Мане [51] f удовлетворяет сильному условию трансверсальности. В силу следствия 2.4 и того, что $W^u(\Omega') \cap D_{pq} \neq \emptyset$, получаем $W^u(z') \cap C_{pq} \neq \emptyset$ и $C \cap C_{pq} \neq \emptyset$. Согласно сильному условию трансверсальности пересечение $W^u(z') \cap C_{pq}$ локально есть $(n-2)$ -мерное подмногообразие, трансверсальное любому отрезку $(x, \varphi_{pq}(x))_{\emptyset}^s$, $x \in S_p = \partial D_p$. Обозначим через S компоненту пересечения $C \cap C_{pq}$. Докажем, что S является $(n-2)$ -мерной сферой и $W^u(z') \cap C_{pq} = S$.

Напомним, что согласно лемме 2.7 тройка $(D_{pq}, W^u(p) - \text{int } D_p, \pi_p)$ есть тривиальное расслоение, слоем которого является промежуток $[0; 1]$, где $\pi_p: D_{pq} \rightarrow W^u(p) - \text{int } D_p$ — проекция, переводящая каждую точку $b \in D_{pq}$ в $x \in W^u(p) - \text{int } D_p$, если $b \in [x, \varphi_{pq}(x)]_{\emptyset}^s \subset D_{pq}$.

Для удобства разобьем доказательство теоремы на шаги.

ШАГ 4.1. Для любой точки $x_0 \in W^u(p) - p$ существует окрестность U_0 этой точки в $W^u(p)$ со следующим свойством: если $\pi_p^{-1}(x_0)$ пересекает неустойчивое многообразие $W^u(\theta)$ точки θ из некоторого базисного множества Θ индекса $n-1$, то любая компонента пересечения $\pi_p^{-1}(U_0) \cap W^u(\theta)$ отображается посредством π_p гомеоморфно на U_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как доказал Смейл [66], M^n есть объединение попарно не пересекающихся неустойчивых многообразий базисных множеств. Отсюда и из сильного условия трансверсальности вытекает, что каждая точка $x \in \pi_p^{-1}(x_0)$ принадлежит либо неустойчивому n -мерному многообразию, либо неустойчивому $(n-1)$ -мерному многообразию. Обозначим через D_{n-1} (соответственно, D_n) подмногожество точек отрезка $\pi_p^{-1}(x_0)$, принадлежащих неустойчивым $(n-1)$ -мерным (соответственно, n -мерным) многообразиям точек базисных множеств, отличных от Ω . Так как неустойчивое n -мерное многообразие открыто в M^n , то D_n открыто в $\pi_p^{-1}(x_0)$. Следовательно, D_{n-1} — компактное множество. Отсюда вытекает, что углы между дугой $\pi_p^{-1}(x_0)$ и неустойчивыми $(n-1)$ -мерными многообразиями, проходящими через D_{n-1} , отделены от нуля некоторой положительной константой. Поэтому существует окрестность U'_0 точки x_0 в $W^u(p)$ такая, что для любого неустойчивого многообразия W^u , проходящего через D_{n-1} , любая компонента пересечения $W^u \cap \pi_p^{-1}(U'_0)$ пересекает все дуги $\pi_p^{-1}(x)$, $x \in U'_0$. Так как π_p является локально тривиальным расслоением (даже просто тривиальным, но в данном случае достаточно локальной тривиальности), то, уменьшив, если необходимо, окрестность U'_0 , можно добиться того, чтобы компонента пересечения $W^u \cap \pi_p^{-1}(U'_0)$ пересекала каждую дугу $\pi_p^{-1}(x)$, $x \in U'_0$, ровно в одной точке. Отсюда следует требуемый результат, поскольку локально компоненты из $W^u \cap \pi_p^{-1}(U'_0)$ попарно не пересекаются.

Далее, когда будем говорить, что $A \subset W^u(p) - \text{int } D_p$ открыто в $W^u(p) - \text{int } D_p$, будем иметь в виду внутреннюю топологию многообразий $W^u(p)$ и $W^u(p) - \text{int } D_p$. Обозначим через $\pi_p|_C: C \rightarrow W^u(p) - \text{int } D_p$ ограничение π_p на C .

ШАГ 4.2. Множество $\pi_p(C)$ открыто в $W^u(p) - \text{int } D_p$, и $\pi_p|_C$ является накрывающим отображением на свой образ $\pi_p(C)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольную точку $x \in \pi_p(C)$. Из сильного условия трансверсальности следует, что пересечение $\pi_p^{-1}(x) \cap C$ состоит из не более чем счетного множества точек $x_i \in D_{pq}$. Очевидно, каждая x_i является внутренней точкой многообразия $W^u(z')$ и, следовательно, внутренней точкой C в

топологии, индуцируемой множеством D_{pq} в $C \subset W^u(z') \cap D_{pq}$ как на подмножестве. Поэтому $\pi_p|_C(x_i)$ есть внутренняя точка множества $\pi_p(C)$, поскольку $\pi_p|_C$ является локальным гомеоморфизмом в x_i . Следовательно, $\pi_p(C)$ открыто в $W^u(p) - \text{int } D_p$.

Пусть $U(x) \subset W^u(p) - \text{int } D_p$ – окрестность x в $W^u(p) - \text{int } D_p$, удовлетворяющая шагу 4.1, и $U(x_i)$ – компонента из $C \cap \pi_p^{-1}(U(x))$, содержащая x_i . Каждая $U(x_i)$ есть окрестность точки x_i , так как $\pi_p|_C$ – непрерывное отображение. В силу шага 4.1 окрестности $U(x_i)$ попарно не пересекаются и ограничение $\pi_p|_{C \cap U(x_i)}$ является гомеоморфизмом на $U(x)$. Это завершает доказательство.

Так как π_p является тривиальным расслоением, то для любого множества $N \subset W^u(p) - \text{int } D_p$ ограничение $\pi_p|_{\pi_p^{-1}(N)}$ также является тривиальным расслоением со слоем $[0; 1]$. Поэтому ограничение

$$P \stackrel{\text{def}}{=} \pi_p|_{\text{clos } C_{pq}} : \text{clos } C_{pq} \rightarrow S_p^{n-2}, \quad \text{clos } C_{pq} = C_{pq} \cup S_p^{n-2} \cup S_q^{n-2},$$

является тривиальным расслоением со слоем $[0; 1]$ и тотальным пространством $\text{clos } C_{pq} = \pi_p^{-1}(S_p^{n-2})$.

Для формулировки следующего шага напомним, что символом S мы обозначили компоненту пересечения $C \cap C_{pq}$.

ШАГ 4.3. *Отображение $\pi_p|_C : C \rightarrow W^u(p) - \text{int } D_p$ сюръективно, т.е. $\pi_p(C) = W^u(p) - \text{int } D_p$. В частности, $P|_S : S \rightarrow S_p^{n-2}$ есть сюръекция, $P(S) = S_p^{n-2}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Поскольку (см. шаг 4.2) $\partial\pi_p|_C(C) \neq \emptyset$, то существует точка $x_0 \in \partial\pi_p|_C(C) - \pi_p|_C(C)$. Поэтому имеется последовательность точек $a_i \in D_{pq} \cap C$ такая, что $a_i \rightarrow a_* \in D_{pq} - C$ и $\pi_p|_C(a_i) \rightarrow x_0$ при $i \rightarrow \infty$.

Пусть $U(x_0) \subset W^u(p) - \text{int } D_p$ – окрестность точки x_0 в $W^u(p) - \text{int } D_p$, удовлетворяющая шагу 4.1. Тогда окрестность $U = \pi_p^{-1}(U(x_0))$ заполнена неустойчивыми n -мерными и $(n-1)$ -мерными инвариантными многообразиями, необходимо пересекающимися $\pi_p^{-1}(x_0)$. Так как $a_i \rightarrow a_*$, то $a_i \in U$ начиная с некоторого индекса i_0 . Следовательно, C пересекает $\pi_p^{-1}(x_0)$. Но тогда $x_0 \notin \partial\pi_p|_C(C)$, поскольку $\pi_p|_C$ является локальным гомеоморфизмом. Это противоречие завершает доказательство.

ШАГ 4.4. *Если $n \geq 4$, то $\pi_p|_C : C \rightarrow W^u(p) - \text{int } D_p$ – гомеоморфизм и $\pi_p^{-1}(x) \cap C$ состоит из одной точки для любого $x \in W^u(p) - \text{int } D_p$. В частности, $P|_S : S \rightarrow S_p^{n-2}$ есть гомеоморфизм и S является $(n-2)$ -мерной сферой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из шагов 4.2 и 4.3 вытекает, что $\pi_p|_C : C \rightarrow W^u(p) - \text{int } D_p$ – накрытие. Так как $n \geq 4$, то $\pi_1(S_p^{n-2}) = \pi_1(W^u(p) - \text{int } D_p) = 0$. Поэтому $\pi_p|_C : C \rightarrow W^u(p) - \text{int } D_p$ является тривиальным накрытием (см., например, [30, п. 13.9]), т.е. C гомеоморфно произведению множества $W^u(p) - \text{int } D_p$ и не более чем счетного множества точек. Из связности C вытекает, что слой накрытия $\pi_p|_C$ состоит из одной точки. Поэтому $\pi_p|_C$ есть гомеоморфизм $C \rightarrow W^u(p) - \text{int } D_p$. Из определения $\pi_p|_C$ получаем, что $S \cap \pi_p^{-1}(x)|_C$ состоит из одной точки для каждого $x \in W^u(p) - \text{int } D_p$.

Перед доказательством аналогичного утверждения для $n = 3$ покажем, что некоторое специальное семейство кривых на цилиндре C_{pq} удовлетворяет теореме о непрерывной зависимости от начальных условий. Напомним, что из сильного условия трансверсальности следует, что цилиндр C_{pq} пересекается только 2-мерными и 3-мерными неустойчивыми инвариантными многообразиями при $n = 3$. Обозначим через $D_2 \subset C_{pq}$ множество пересечений C_{pq} с 2-мерными неустойчивыми инвариантными многообразиями. Эти многообразия пересекают C_{pq} вдоль кривых, семейство которых обозначим через $\mathcal{F}$.

ШАГ 4.5. *Кривые семейства $\mathcal{F}$ удовлетворяют теореме о непрерывной зависимости от начальных условий.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольную кривую $c_0 \in \mathcal{F}$ и точки $x_0, y_0 \in c_0$. Обозначим через s_x (соответственно, s_y) слой расслоения π_p , проходящий через x_0 (соответственно, y_0); см. рис. 11. Пусть $x_k \in D_2$ – произвольная последовательность точек, сходящаяся к x_0 при $k \rightarrow \infty$. Обозначим через $c_k \in \mathcal{F}$ кривую, проходящую через x_k . Согласно шагу 4.3 каждая кривая c_k пересекает s_x и s_y . Поэтому, не уменьшая общности, можно считать, что $x_k \in s_x$ и точки x_k сходятся к x_0 монотонно на s_x . Пусть $[x_k, y_k] \subset c_k$ – отрезок с концевыми точками x_k и $y_k \in s_y$ такими, что $\pi_p([x_k, y_k]) = \pi_p([x_0, y_0])$ для любого k (см. рис. 11), где отрезок $[x_0, y_0] \subset c_0$ отображается посредством π_p в $\pi_p([x_0, y_0])$ гомеоморфно. Тогда последовательность y_k монотонна на s_y . Мы должны доказать, что $y_k \rightarrow y_0$ при $k \rightarrow \infty$.

Рис. 11. Семейство $\mathcal{F}$

Предположим противное. Тогда, перейдя, если необходимо, к подпоследовательности, можно считать, что $y_k \rightarrow y_*$ при $k \rightarrow \infty$ для некоторой точки $y_* \in s_y$, лежащей между y_1 и y_0 , $y_* \neq y_0$. Так как D_2 – компакт, то $y_* \in D_2$ и, следовательно, существует кривая, скажем $c_* \in \mathcal{F}$, проходящая через y_* . В силу шага 4.3 c_* пересекает s_x . Возьмем отрезок $[x_*, y_*] \subset c_*$ такой, что $\pi_p([x_*, y_*]) = \pi_p([x_0, y_0])$, где $x_* \in s_x$. Тогда $x_* \neq x_0$, поскольку $y_* \neq y_0$. Это невозможно, потому что последовательность y_k монотонная на s_y и, следовательно, нет точек вида y_k на отрезке $[y_*, y_0] \subset s_y$ между y_* и y_0 .

ШАГ 4.6. *Каждая компонента S пересечения $C \cap C_{pq}$ является $(n - 2)$ -мерной сферой. Более того, $S \cap P^{-1}(x)$ состоит из одной точки для каждого $x \in S_p^{n-2}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно шагу 4.4 осталось рассмотреть только случай $n = 3$. Переобозначим $S = c$ и предположим, что кривая $c \subset W^u(z') \cap C_{pq}$ не гомеоморфна окружности. Тогда c имеет точку накопления $m_0 \in C_{pq}$, т.е. существует последовательность точек $m_i \in c$ таких, что $m_i \rightarrow m_0$ при $i \rightarrow \infty$. Возьмем окрестность $U(m_0) \subset C_{pq}$ точки m_0 , которая является тривиальным расслоением над отрезком $P(U(m_0))$, $P(m_0) \in P(U(m_0))$, со слоями, являющимися дугами устойчивых многообразий точек $x \in P(U(m_0))$ (см. рис. 12).

Рис. 12. Окрестность $U(m_0)$ точки m_0

Пусть $W_0^s \subset U(m_0)$ – компонента множества $W^s(P(m_0)) \cap U(m_0)$, проходящая через m_0 . Обозначим через $K(m_i)$ компоненту множества $c \cap U(m_0)$, содержащую точку m_i . В силу шага 4.3 можно считать, что $K(m_i)$ пересекает W_0^s . Так как $K(m_i)$ трансверсально слоям тривиального расслоения $U(m_0)$, то $K(m_i) \cap W_0^s$ состоит из одной точки. Не уменьшая общности, можно считать, что $K(m_i) \cap W_0^s = m_i$. Более того, можно считать, что компоненты $K(m_i)$ попарно не пересекаются, поскольку $m_i \rightarrow m_0$ при $i \rightarrow \infty$.

Обозначим через $C(m_i, m_{i+1})$ дугу кривой c с концевыми точками m_i, m_{i+1} и через $C_{i,i+1}$ – замкнутую кривую, равную объединению $C(m_i, m_{i+1})$ и отрезка $(m_i, m_{i+1}) \subset W_0^s$. Так как $C(m_i, m_{i+1})$ трансверсальна слоям расслоения $P: \text{clos } C_{pq} \rightarrow S_p^{n-2}$, то $P(m_i) = P(m_{i+1})$, $C_{i,i+1}$ не гомотопна нулю в цилиндре $\text{clos } C_{pq}$ и $P(C_{i,i+1}) = S_p^{n-2}$. В силу сильного условия трансверсальности $C(m_i, m_{i+1})$ пересекает $P^{-1}(P(m_0))$ только в точках m_i, m_{i+1} . Отсюда вытекает, что последовательность $\{m_i\}_{i=1}^\infty$ монотонно сходится к m_0 и, следовательно, c спиралеобразно подходит к m_0 . Согласно [45] и [66] $m_0 \in W^u(\theta)$ для некоторой точки θ базисного множества Θ . В силу сильного условия трансверсальности $\dim W^u(\theta) \geq 2$. Так как m_0 – точка накопления точек $m_i \in W^u(z')$ с $\dim W^u(z') = 2$, то $\dim W^u(\theta) = 2$. Поэтому пересечение $W^u(\theta) \cap \text{clos } C_{pq}$ содержит кривую c_0 , проходящую через m_0 .

Согласно шагу 4.5 кривая c_0 принадлежит предельному множеству кривой c . Аргументы теории Пуанкаре–Бендиксона (см., например, [33], [6]) с использованием того, что c и c_0 трансверсальны дугам $P^{-1}(a)$, $a \in S_p^1$, показывают, что c_0 – замкнутая кривая. Следовательно, c_0 ограничивает диск на $W^u(\theta)$.

Покажем, что θ – периодическая точка. Согласно теореме о непрерывной зависимости инвариантных многообразий от начальных условий существует $\alpha > 0$ та-

кое, что любое неустойчивое многообразие $W^u(\eta)$, $\eta \in \Theta$, пересекающее $W_\alpha^s(\theta)$, необходимо пересекает цилиндр $\text{clos } C_{pq}$ вдоль замкнутой кривой вблизи c_0 . Так как c спиралеобразно подходит к c_0 , то, по крайней мере, одна компонента множества $W_\alpha^s(\theta) - \theta$ не пересекается с неустойчивыми многообразиями $W^u(\eta)$, $\eta \in \Theta$. Тогда из предложения 1.1 получаем, что θ – периодическая точка.

Таким образом, для достаточно большого $\beta > 0$ диск $W_\beta^u(\theta)$ пересекает цилиндр $\text{clos } C_{pq}$ вдоль замкнутой кривой c_0 . Аналогично доказательству леммы 1.5 из [56] можно показать, что $W^u(z')$ пересекает $W_\alpha^s(\theta) - \theta$. Тогда из λ -леммы и теоремы о непрерывной зависимости инвариантных многообразий от начальных условий вытекает, что $W^u(z')$ пересекает цилиндр $\text{clos } C_{pq}$ вблизи m_0 вдоль замкнутых кривых. Полученное противоречие показывает, что c – замкнутая кривая.

Для завершения доказательства осталось заметить, что из замкнутости c и сильного условия трансверсальности вытекает, что пересечение $c \cap P^{-1}(x)$ состоит из одной точки для любого $x \in S_p^1$.

Отметим, что в шагах 4.2–4.4 и 4.6 сфера S_p^{n-2} могла быть любой цилиндрически вложенной в $W^u(p)$ $(n-2)$ -мерной сферой, не проходящей через точку p . Все, что нам было необходимо при доказательстве этих шагов, это только существование множества $\pi_p^{-1}(S_p^{n-2}) \stackrel{\text{def}}{=} \text{clos } C_{pq}$. В дальнейшем будем рассматривать сферу S_p^{n-2} как границу $(n-1)$ -мерного шара D_p , принадлежащего характеристической сфере S_{pq} .

ШАГ 4.7. $(n-2)$ -мерная сфера $S = C \cap C_{pq}$ изотопна сферам S_p^{n-2} и S_q^{n-2} в цилиндре $\text{clos } C_{pq}$. В частности, включение $S \subset D_{pq}$ индуцирует мономорфизм $\pi_{n-2}(S) \rightarrow \pi_{n-2}(D_{pq}) \cong \mathbb{Z}$. Более того, S разбивает $\text{clos } C_{pq}$ на два цилиндра, каждый из которых гомеоморфен $\Sigma^{n-2} \times [0; 1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что P есть тривиальное расслоение со слоем $[0; 1]$. В силу шага 4.3 и сильного условия трансверсальности $P|_S: S \rightarrow S_p^{n-2}$ – гомеоморфизм. В частности, каждый слой расслоения $(\text{clos } C_{pq}, S_p^{n-2}, P)$ пересекает S ровно в одной точке. Поэтому существует изотопия S в S_p^{n-2} вдоль слоев расслоения $(\text{clos } C_{pq}, S_p^{n-2}, P)$. Аналогично, S изотопна S_q^{n-2} . Так как S пересекает каждый слой тривиального расслоения $(\text{clos } C_{pq}, S_p^{n-2}, P)$ ровно в одной точке, а слоем является интервал $[0; 1]$, то S разбивает $\text{clos } C_{pq}$ на два цилиндра, каждый из которых гомеоморфен $\Sigma^{n-2} \times [0; 1]$. Отсюда и из следствия 2.3 получаем, что $\pi_{n-2}(S) \rightarrow \pi_{n-2}(D_{pq})$ – мономорфизм.

В силу теоремы о непрерывной зависимости инвариантных многообразий от начальных условий каждая $(n-2)$ -мерная сфера S из пересечения $W^u(z') \cap C_{pq}$ является цилиндрически вложенной как в $W^u(z')$, так и в C_{pq} . Поэтому S ограничивает открытый $(n-1)$ -мерный шар в $W^u(z')$, который мы обозначим через B_S^{n-1} [36]. Такая $(n-2)$ -мерная сфера $S \subset W^u(z') \cap C_{pq}$ и соответствующий $(n-1)$ -мерный шар $B_S^{n-1} \subset W^u(z')$ называются *минимальными*, если внутри B_S^{n-1} нет точек из $W^u(z') \cap C_{pq}$. В силу сильного условия трансверсальности любое компактное подмножество $K \subset W^u(z')$ пересекает конечное число сфер из $W^u(z') \cap C_{pq}$. Поэтому минимальные сферы и соответствующие минимальные шары существуют.

ШАГ 4.8. Пусть $B_S^{n-1} \subset W^u(z')$ – минимальный $(n-1)$ -мерный шар, ограниченный минимальной $(n-2)$ -мерной сферой $S \subset W^u(z') \cap C_{pq}$. Тогда $B_S^{n-1} \cap D_{pq} = \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Тогда $B_S^{n-1} \subset D_{pq}$, поскольку шар B_S^{n-1} минимальный. Поэтому S определяет тривиальный элемент группы $\pi_{n-2}(D_{pq})$. С другой стороны, согласно шагу 4.7 сфера S определяет нетривиальный элемент группы $\pi_{n-2}(D_{pq})$. Полученное противоречие завершает доказательство.

Имеются следующие возможности:

1) существует минимальный $(n-1)$ -мерный шар $B' \subset W^u(z')$, содержащий точку z' ;

2) не существует минимального шара, содержащего точку z' .

Рассмотрим случай 1). Не уменьшая общности, можно считать, что $f(z') = z'$, $f(p) = p$ и $f(q) = q$, иначе мы перешли бы к некоторой итерации f^k . Более того, будем предполагать, что ограничение $f|_{W^u(z')}$ является сохраняющим ориентацию диффеоморфизмом.

Напомним, что гомеоморфизм $\psi: M \rightarrow M$ является *устойчивым в смысле Бинга* (см., например, [18]), если ψ можно представить в виде суперпозиции $\psi = \psi_1 \circ \dots \circ \psi_k$, где каждый гомеоморфизм ψ_i , $1 \leq i \leq k$, неподвижен внутри некоторого открытого множества $D_i \subset M$. Известно, что сохраняющий ориентацию диффеоморфизм устойчив в смысле Бинга.

Так как $f(C_{pq}) \subset D_{pq}$, то $f(S) \cap S = \emptyset$, где $(n-2)$ -мерная сфера S ограничивает B' на $W^u(z')$. Поэтому S лежит внутри $f(S)$, поскольку $z' \in B'$ является гиперболическим источником ограничения $f|_{W^u(z')}$. Тогда согласно [37] $(n-2)$ -мерные сферы S , $f(S)$ ограничивают замкнутое кольцо, обозначаемое через $A \subset W^u(z')$, гомеоморфное $\Sigma^{n-2} \times [0; 1]$, так как диффеоморфизм $f|_{W^u(z')}$ устойчив в смысле Бинга. Учитывая $f(S) \cap S = \emptyset$, получаем, что A есть фундаментальное кольцо ограничения $f|_{W^u(z')}$, т.е.

$$\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} f^j(A) = W^u(z') - z', \quad \text{int } f^i(A) \cap \text{int } f^l(A) = \emptyset, \quad i \neq l.$$

Более того, $\bigcup_{j \geq 0} f^j(A) = W^u(z') - B'$. В частности, $B' \cap A = \emptyset$.

ШАГ 4.9. *Предположим, что имеет место случай 1), т.е. S – минимальная сфера, содержащая внутри z' , и пусть A – фундаментальное кольцо диффеоморфизма $f|_{W^u(z')}$, ограниченное $(n-2)$ -мерными сферами S , $f(S)$. Тогда*

$$A \subset D_{pq}, \quad A \cap \text{int } D_{pq} = \text{int } A \cup f(S).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $h: \Sigma^{n-2} \times [0; 1] \rightarrow A$ – произвольный сохраняющий ориентацию гомеоморфизм такой, что

$$h(\Sigma^{n-2} \times \{0\}) = S \quad \text{и} \quad h(\Sigma^{n-2} \times \{1\}) = f(S).$$

В силу сильного условия трансверсальности ограничение

$$P_A \stackrel{\text{def}}{=} \pi_p|_{A \cap D_{pq}}: A \cap D_{pq} \rightarrow W^u(p) - \text{int } D_p$$

Рис. 13. $P_A(h(a)) = P_A(h(b)) = x_0$

является локальным гомеоморфизмом. Так как $B' \cap D_{pq} = \emptyset$ (см. шаг 4.8) и $B' \cap A = \emptyset$, то существует $\varepsilon > 0$ такое, что $h(\Sigma^{n-2} \times [0; \varepsilon]) \subset D_{pq}$. Поэтому $P_A(h(\Sigma^{n-2} \times [0; \varepsilon])) \subset W^u(p) - \text{int } D_p$. Кроме того, можно взять $\varepsilon > 0$ таким, чтобы P_A переводил кольцо $h(\Sigma^{n-2} \times [0; \varepsilon])$ на $P_A(h(\Sigma^{n-2} \times [0; \varepsilon]))$ гомеоморфно, поскольку P_A является локальным гомеоморфизмом, а $P_A|_S = P|_S$ является гомеоморфизмом $S \rightarrow S_p^{n-2}$ (см. шаг 4.6). Следовательно, для любого $0 \leq t < \varepsilon$ $(n-2)$ -мерная сфера $P_A(h(\Sigma^{n-2} \times \{t\}))$ лежит внутри $(n-2)$ -мерной сферы $P_A(h(\Sigma^{n-2} \times \{\varepsilon\}))$ на неустойчивом многообразии $W^u(p)$.

Обозначим через $E \subset [0; 1]$ множество параметров t_0 , удовлетворяющих следующим условиям:

- а) $h(\Sigma^{n-2} \times [0; t_0]) \subset D_{pq}$ и $P_A(h(\Sigma^{n-2} \times [0; t_0])) \subset W^u(p) - \text{int } D_p$;
- б) P_A гомеоморфно отображает $(n-1)$ -кольцо $h(\Sigma^{n-2} \times [0; t_0])$ на $P_A(h(\Sigma^{n-2} \times [0; t_0]))$;
- в) для любого $0 \leq t < t_0$ $(n-2)$ -мерная сфера $P_A(h(\Sigma^{n-2} \times \{t\}))$ лежит внутри $(n-2)$ -мерной сферы $P_A(h(\Sigma^{n-2} \times \{t_0\}))$ на $W^u(p)$; в частности, $P_A(h(\Sigma^{n-2} \times [0; t_0])) \subset W^u(p) - \text{int } D_p$.

Множество E непусто, поскольку $[0; \varepsilon] \subset E$. В силу сильного условия трансверсальности E открыто в $[0; 1]$. Далее, если $t \in E$, то $[0; t] \subset E$. Таким образом, E есть промежуток в $[0; 1]$ с левой конечной точкой 0. Пусть $t_* = \sup E$. Очевидно, $t_* > 0$. В силу непрерывности гомеоморфизма h имеем $h(\Sigma^{n-2} \times \{t_*\}) \subset D_{pq}$, так как D_{pq} замкнуто. Более того, $h(\Sigma^{n-2} \times \{t_*\}) \subset \text{int } D_{pq}$, поскольку $[0; \varepsilon] \subset E$ при $\varepsilon > 0$ и, следовательно, $t_* \geq \varepsilon$.

Покажем, что P_A гомеоморфно отображает $h(\Sigma^{n-2} \times \{t_*\})$ на $P_A(h(\Sigma^{n-2} \times \{t_*\}))$. Для $n \geq 4$ это следует из шага 4.4. Осталось доказать этот факт для $n = 3$. Предположим противное. Тогда существуют точки $a, b \in \Sigma^1 \times \{t_*\}$ такие, что

$$P_A(h(a)) = P_A(h(b)) \stackrel{\text{def}}{=} x_0, \quad a \neq b$$

(см. рис. 13). Тогда $h(\Sigma^1 \times [0; t_*])$ пересекает дугу $\pi_p^{-1}(x_0)$ в двух точках $h(a)$, $h(b)$. В силу сильного условия трансверсальности существуют 2-мерные диски $D_a \subset W^u(z')$, $D_b \subset W^u(z')$, содержащие точки a , b соответственно, такие, что $D_a \cap D_b = \emptyset$. Более того, можно считать, что π_p отображает оба диска D_a и D_b

гомеоморфно на $\pi_p(D_a)$ и $\pi_p(D_b)$ соответственно, и $D_a \cup D_b \subset \text{int } D_{pq}$, поскольку $h(a), h(b) \subset \text{int } D_{pq}$.

Возьмем $0 < t < t_*$ столь близким к t_* , чтобы простая замкнутая кривая $h(\Sigma^1 \times \{t\})$ пересекала оба диска D_a и D_b . Так как $P_A(D_a)$ и $P_A(D_b)$ являются дисками, то $P_A(h(\Sigma^1 \times \{t\}))$ ограничивает диск B_0 в $W^u(p)$,

$$B_0 \cup P_A((D_a) \cup P_A(D_b)) \stackrel{\text{def}}{=} Q,$$

содержащий простую замкнутую кривую S_0^1 , проходящую через x_0 . Более того, можно взять S_0^1 так, чтобы $S_0^1 \subset Q - D_p$. Тогда $\pi_p^{-1}(S_0^1)$ определено и гомеоморфно замкнутому кольцу $\Sigma^1 \times [0; 1]$. По построению пересечение $\pi_p^{-1}(S_0^1) \cap W^u(z')$ содержит компоненту S_0 , проходящую через точки $h(a), h(b)$. Это противоречит шагу 4.6. Таким образом, P_A отображает $h(\Sigma^{n-2} \times \{t_*\})$ на $P_A(h(\Sigma^1 \times \{t_*\}))$ гомеоморфно для всех $n \geq 3$.

Учитывая сильное условие трансверсальности, получаем $t_* \in E$. Поэтому $t_* = 1$. Следовательно, $P_A(h(\Sigma^{n-2} \times [0; 1])) \subset W^u(p) - \text{int } D_p$ и $A \cap \text{int } D_{pq} = \text{int } A \cup f(S)$.

Положим $W' = W^u(z') - B'$. Из шага 4.9 следует $W' \subset D_{pq} \subset W^s(\Omega)$, поскольку $\bigcup_{j \geq 0} f^j(A) = W^u(z') - B'$ и $f^j(D_{pq}) \subset D_{pq}$ для любого $j \geq 0$. Поэтому $C = W'$ является единственной компонентой пересечения $D_{pq} \cap W^u(z')$, а $S = C \cap C_{pq}$ — единственная компонента пересечения $W^u(z') \cap C_{pq}$. Это доказывает теорему в случае 1).

Рассмотрим случай 2), когда отсутствуют минимальные шары, содержащие z' . Покажем, что этот случай не осуществляется.

ШАГ 4.10. *Предположим, что имеет место случай 2), т.е. не существует минимального шара, содержащего точку z' . Тогда любой путь $\omega \subset W^u(z')$, соединяющий z' и минимальную сферу, пересекает сферы из пересечения $W^u(z') \cap C_{pq}$, при этом*

$$\text{int } \omega \cap (W^u(z') \cap C_{pq}) \neq \emptyset.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ω — путь, соединяющий точку z' и $z'' \in S$, где $S \subset W^u(z') \cap C_{pq}$ — некоторая минимальная сфера. Предположим противное. Тогда

$$\omega \cap (W^u(z') \cap C_{pq}) = z''.$$

Согласно шагу 4.8 $B_S \cap D_{pq} = \emptyset$, где $B_S \subset W^u(z')$ — минимальный $(n-1)$ -мерный шар, ограниченный сферой S . Из сильного условия трансверсальности следует, что внешность S вблизи S лежит в D_{pq} . Поэтому $\omega \subset D_{pq}$ и, следовательно, $z' \subset D_{pq}$, что невозможно.

Рис. 14. Область Q

ШАГ 4.11. *Предположим, что имеет место случай 2), т.е. не существует минимального шара, содержащего точку z' . Тогда существует область $Q \subset W^u(z')$, ограниченная сферами из $W^u(z') \cap C_{pq}$, такая, что $Q \subset D_{pq}$, при этом Q лежит внутри некоторой сферы $S_{\text{ext}} \subset W^u(z') \cap C_{pq}$ (см. рис. 14).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что существуют сфера $S' \subset W^u(z') \cap C_{pq}$ и минимальный шар $B'' \subset W^u(z')$ внутри S' такие, что нет сфер из $W^u(z') \cap C_{pq}$, лежащих внутри S' и содержащих внутри себя B'' . Действительно, в этом случае рассмотрим область $R \subset W^u(z')$, ограниченную $S' \stackrel{\text{def}}{=} S_{\text{ext}}$, и затем удалим из R все шары, ограниченные сферами из $W^u(z') \cap C_{pq}$, которые лежат внутри S' . Тогда получим требуемую область Q , поскольку Q содержит часть внешности шара B'' , которая согласно шагу 4.8 лежит в D_{pq} вблизи B'' и, следовательно, $Q \subset D_{pq}$, так как внутренность Q не содержит сфер из $W^u(z') \cap C_{pq}$.

Возьмем произвольный минимальный шар $B' \subset W^u(z')$. Согласно шагу 4.10 существует сфера $S \subset W^u(z') \cap C_{pq}$, отделяющая z' от B' . Тогда либо z' , либо B' лежит внутри S . В последнем случае достаточно взять минимально возможную сферу, которая ограничивает область с шаром B' и не является границей шара B' . Из сильного условия трансверсальности и шагов 4.8, 4.10 такая сфера существует.

Таким образом, осталось рассмотреть случай, когда точка z' лежит в шаре B , ограниченном сферой S . Из сильного условия трансверсальности и компактности $B \cup S$ следует, что шар B содержит конечное число сфер из $W^u(z') \cap C_{pq}$. Поэтому, перейдя к минимально возможной, если необходимо, сфере, можно считать, что внутри S нет других сфер, окружающих z' . Так как никакой минимальный шар согласно шагу 4.8 не содержит z' , то B не является минимальным. Следовательно, B содержит минимальный шар, скажем B'' , ограниченный сферой $S'' = \partial B''$, также лежащей внутри S . Согласно шагу 4.8 имеем $B'' \cap D_{pq} = \emptyset$. Очевидно, $z' \notin D_{pq}$. Поэтому в силу шага 4.10 существует сфера, окружающая B'' , но не окружающая z' . Мы приходим к случаю, рассмотренному выше. Это завершает доказательство.

Рис. 15. Точка z_* нарушения локальной гомеоморфности P_Q

Обозначим через $Q \subset W^u(z')$ замыкание области, удовлетворяющей условиям шага 4.11. Тогда $Q \cap C_{pq} = Q \cap D_{pq} = \partial Q$, поскольку $\partial Q \subset W^u(z') \cap C_{pq}$. Положим

$$P_Q \stackrel{\text{def}}{=} \pi_p|_Q: Q \rightarrow W^u(p) - \text{int } D_p.$$

Из сильного условия трансверсальности следует, что $P_Q|_{\text{int } Q}$ является локальным гомеоморфизмом. Поэтому

$$P_Q|_{\text{int } Q}: \text{int } Q \rightarrow P_Q(\text{int } Q)$$

является накрытием. Снова применяя сильное условие трансверсальности, получаем, что существует кольцо $A_1 \subset Q$ с $\partial A_1 \subset \partial Q$ такое, что кольцо $P_Q(A_1) = R$ имеет S_p в качестве одной из компонент границы (см. рис. 15). Отсюда вытекает, что $\partial P_Q(Q) - S_p \neq \emptyset$, поскольку Q и $P_Q(Q)$ – компактные множества. Возьмем произвольную точку $x_* \in \partial P_Q(Q) - S_p$. Существует точка $z_* \in Q$ с $P_Q(z_*) = x_*$, так как $P_Q(Q)$ – компакт. Поэтому $\partial P_Q(Q) \subset P_Q(Q)$. Так как $x_* \in \partial P_Q(Q) - S_p$, то $z_* \in \text{int } Q$. Отсюда вытекает, что $P_Q|_{\text{int } Q}$ не является локальным гомеоморфизмом в точке z_* , что противоречит сильному условию трансверсальности. Это противоречие завершает доказательство теоремы.

Основной результат этого параграфа содержится в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 4.2. *Пусть f – A -диффеоморфизм замкнутого n -мерного многообразия M^n , $n \geq 3$, и Ω – ориентируемый растягивающийся аттрактор коразмерности один. Предположим, что имеется нетривиальное базисное множество $\Omega' \neq \Omega$ диффеоморфизма f такое, что $W^u(\Omega') \cap W^s(\Omega) \neq \emptyset$. Тогда f не является структурно устойчивым.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно результатам [51], [62] достаточно показать, что f не удовлетворяет сильному условию трансверсальности. Поэтому можно считать, что индекс Морса любого базисного множества Θ , удовлетворяющего условию $W^u(\Theta) \cap W^s(\Omega) \neq \emptyset$, не меньше чем $n - 1$, поскольку $\dim E_x^s = 1$, $x \in \Omega$.

Предположим, что теорема неверна. Тогда любое устойчивое многообразие $W^s(x)$, $x \in \Omega$, пересекается трансверсально с любым неустойчивым многообразием $W^u(y)$, $y \in NW(f)$. В силу [45] и условия теоремы имеем $W^s(z) \cap W^u(z') \neq \emptyset$ для некоторых точек $z \in \Omega$, $z' \in \Omega'$. Поэтому неустойчивое многообразие $W^u(z')$ либо $(n - 1)$ -мерное, либо n -мерное. Если $W^u(z')$ n -мерное, то z' является периодической точкой, а базисное множество Ω' тривиально. Следовательно, $W^u(z')$ $(n - 1)$ -мерное. Не уменьшая общности, можно считать, что точки z и z' периодические, поскольку периодические точки плотны в базисных множествах.

Возьмем произвольную точку $a \in W^s(z) \cap W^u(z')$. Очевидно, каждая точка из $W^s(z) \cap W^u(z')$ не принадлежит Ω , поскольку Ω – аттрактор и состоит из неустойчивых многообразий своих точек. Из предложения 1.4 следует, что либо $a \in (x_a, y_a)_{\emptyset}^s \subset W^s(z)$, где $x_a \in W^u(p)$, $y_a \in W^u(q)$ для некоторых ассоциированных граничных периодических точек $p, q \in \Omega$, либо $a \in W_{\emptyset}^s(p)$ для некоторой граничной периодической точки $p \in \Omega$. В силу теоремы о непрерывной зависимости инвариантных многообразий от начальных условий можно считать, что $a \in (x_a, y_a)_{\emptyset}^s \subset W^s(z)$.

Пусть S_{pq} – характеристическая сфера, соответствующая 2-связке $W^u(p) \cup W^u(q)$. Напомним, что S_{pq} есть объединение двух замкнутых $(n - 1)$ -мерных шаров $D_p \subset W^u(p)$, $D_q \subset W^u(q)$ и связывающего цилиндра

$$C_{pq} = \bigcup_{x \in \partial D_p, y \in \partial D_q} (x, y)_{\emptyset}^s, \quad p \in \text{int } D_p, \quad q \in \text{int } D_q.$$

В силу построения характеристической сферы (см. п. 2.1) можно взять S_{pq} так, чтобы

$$(x_a, y_a)_\emptyset^s \subset D_{pq}, \quad D_{pq} = \bigcup_{x \in W^u(p) - \text{int } D_p} [x, \varphi_{pq}(x)]_\emptyset^s.$$

Тогда $D_{pq} \cap W^u(z') \neq \emptyset$. Согласно следствию 2.4 $W^u(z')$ пересекает C_{pq} .

Согласно теореме 4.1 пересечение $W^u(\Omega') \cap D_{pq}$ состоит ровно из одной компоненты $C \subset D_{pq} \cap W^u(z')$. Более того,

$$W^u(z') \cap C_{pq} = C \cap C_{pq} = S^{n-2}$$

есть $(n-2)$ -мерная сфера, изотопная обеим сферам $S_p = \partial D_p$ и $S_q = \partial D_q$ в цилиндре C_{pq} . Обозначим через $B' \subset W^u(z')$ открытый $(n-1)$ -мерный шар, ограниченный S^{n-2} в $W^u(z')$.

Положим $W' = W^u(z') - B'$, и пусть Ω'_c — C -плотная компонента базисного множества Ω' , содержащая точку z' . Не уменьшая общности, можно считать, что $f(\Omega'_c) = \Omega'_c$ (см. [2], [35]). Так как $W^u(z') \cap C_{pq} = S^{n-2}$, то $W' \subset D_{pq} \subset W^s(\Omega)$. Следовательно, $W' \cap \Omega'_c = \emptyset$. Из нетривиальности базисного множества Ω' и C -плотности Ω'_c вытекает, что пересечение $W^u(z') \cap \Omega'_c$ плотно в Ω'_c . Поэтому пересечение

$$W^u(z') \cap \Omega'_c = (B' \cup W') \cap \Omega'_c = B' \cap \Omega'_c$$

также плотно в Ω'_c . С другой стороны, $B' \cap \Omega'_c$ нигде не плотно в Ω'_c , поскольку $\text{clos } B'$ является компактным множеством. Полученное противоречие завершает доказательство.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Пусть f — структурно устойчивый A -диффеоморфизм замкнутого n -мерного многообразия M^n , $n \geq 3$, и Ω — ориентируемый растягивающийся аттрактор коразмерности один. Пусть B — 2-связка, состоящая из двух неустойчивых многообразий $W^u(p)$ и $W^u(q)$, где $p, q \in \Omega$ — ассоциированные граничные периодические точки, и S_{pq} — характеристическая сфера, соответствующая B , которая, в свою очередь, есть объединение связывающего цилиндра C_{pq} и двух $(n-1)$ -мерных шаров $D_p \subset W^u(p)$, $D_q \subset W^u(q)$. Предположим, что Θ — базисное множество индекса $n-1$ такое, что пересечение $W^u(z) \cap C_{pq}$, $z \in \Theta$, непусто. Тогда Θ — тривиальное базисное множество, а z — периодическая точка. Более того, $W^u(z) \cap C_{pq}$ состоит ровно из одной $(n-2)$ -мерной сферы, скажем S^{n-2} , которая изотопна обеим сферам $S_p = \partial D_p$ и $S_q = \partial D_q$ в цилиндре C_{pq} . В частности, S^{n-2} разбивает C_{pq} на два цилиндра, гомеоморфные $\Sigma^{n-2} \times [0; 1]$.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Пусть f — структурно устойчивый A -диффеоморфизм замкнутого n -мерного многообразия M^n , $n \geq 3$, и Ω — ориентируемый растягивающийся аттрактор коразмерности один. Пусть B — 2-связка, состоящая из двух неустойчивых многообразий $W^u(p)$ и $W^u(q)$, где $p, q \in \Omega$ — ассоциированные граничные периодические точки. Тогда $W_\emptyset^s(p)$ и $W_\emptyset^s(q)$ принадлежат n -мерным неустойчивым многообразиям источников периодических точек (возможно, совпадающих).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Тогда $W^u(z) \cap (W_\emptyset^s(p) \cup W_\emptyset^s(q)) \neq \emptyset$ для некоторой точки $z \in \Theta$, где базисное множество Θ имеет индекс $n - 1$. Предположим для определенности, что $W^u(z) \cap W_\emptyset^s(p) \neq \emptyset$. Согласно теореме 4.2 Θ – тривиальное базисное множество и z – периодическая точка. Поэтому $W^u(z)$ пересекает $W_\emptyset^s(p)$ произвольно близко к p . Далее воспользуемся обозначениями следствия 4.1. Согласно λ -лемме $W^u(z)$ должна пересекать связывающий цилиндр C_{pq} в бесконечном множестве компонент. Это противоречит следствию 4.1.

§ 5. Гомотопический и топологический тип несущих многообразий

Основной результат этого параграфа содержится в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть f – структурно устойчивый диффеоморфизм замкнутого n -мерного многообразия M^n , $n \geq 3$, и Ω – ориентируемый растягивающийся аттрактор коразмерности один диффеоморфизма f . Тогда:

- 1) M^n гомотопически эквивалентен n -мерному тору T^n ; если $n \neq 4$, то M^n гомеоморфен T^n ;
- 2) Ω – единственное нетривиальное базисное множество диффеоморфизма f ;
- 3) f имеет, по крайней мере, одну источниковую периодическую точку.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольную связку B базисного множества Ω . Так как Ω ориентируемое, то B является 2-связкой, состоящей из неустойчивых многообразий $W^u(p)$ и $W^u(q)$, где p, q – ассоциированные граничные периодические точки множества Ω [26]. Пусть S_{pq} – характеристическая сфера, соответствующая B и состоящая из двух $(n - 1)$ -мерных шаров $D_p \subset W^u(p)$, $D_q \subset W^u(q)$ и связывающего $(n - 1)$ -мерного цилиндра $C_{pq} \subset W^s(\Omega)$. Согласно теореме 3.1 для доказательства гомотопической эквивалентности M^n и T^n покажем, что S_{pq} ограничивает шар.

Можно считать, перейдя к некоторой итерации f^k , если необходимо, что обе точки p и q являются неподвижными. Тогда в силу следствия 4.2 $W_\emptyset^s(p)$ и $W_\emptyset^s(q)$ принадлежат неустойчивым n -мерным многообразиям источников неподвижных точек (или, просто, истоков) α_p и α_q соответственно. Следовательно, p и q принадлежат достижимой границе $\delta(W^u(\alpha_p))$ и $\delta(W^u(\alpha_q))$ соответственно. Согласно теореме о непрерывной зависимости неустойчивых многообразий от начальных условий $W^u(p)$ и $W^u(q)$ также принадлежат $\delta(W^u(\alpha_p))$ и $\delta(W^u(\alpha_q))$ соответственно. Следовательно, $W^u(\alpha_p)$ и $W^u(\alpha_q)$ необходимо пересекают цилиндр C_{pq} . Очевидно, оба пересечения $W^u(\alpha_p) \cap C_{pq}$ и $W^u(\alpha_q) \cap C_{pq}$ являются открытыми подмножествами цилиндра C_{pq} .

Отметим, что C_{pq} может пересекать только n -мерные и $(n - 1)$ -мерные неустойчивые многообразия, поскольку f структурно устойчивый и, следовательно, удовлетворяет сильному условию трансверсальности [51]. Если C_{pq} не пересекается с $(n - 1)$ -мерными неустойчивыми многообразиями, то из связности C_{pq} вытекает, что $W^u(\alpha_p) = W^u(\alpha_q)$ и $\alpha_p = \alpha_q \stackrel{\text{def}}{=} \alpha$. Поэтому $C_{pq} \subset W^u(\alpha)$.

В силу наличия локальной структуры произведения на D_p , для достаточно малого $\varepsilon > 0$ множество

$$N(D_p) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{x \in D_p} W_\varepsilon^s(x)$$

является тотальным пространством тривиального расслоения

$$(N(D_p), D_p, N(D_p) \rightarrow D_p) \cong (D_p \times (-1; +1), D_p, D_p \times (-1; +1), D_p)$$

со слоем $W_\varepsilon^s(x)$ над каждой точкой $x \in D_p$. Ясно, что D_p делит $N(D_p)$ на две области. Одну из них, скажем $N^+(D_p)$, пересекают как C_{pq} , так и $W_\varepsilon^s(p)$. Отсюда и из включения $D_p \subset \delta(W^u(\alpha))$ получаем

$$\text{clos } N^+(D_p) \subset D_p \cup W^u(\alpha) \subset \delta(W^u(\alpha)) \cup W^u(\alpha).$$

Имея в виду естественный изоморфизм расслоений $N(D_p)$ и $D_p \times (-1; +1)$, положим

$$D_{p,\varepsilon} \cong D_p \times \left\{ \frac{1}{2} \right\} \subset N^+(D_p), \quad C_{p,\varepsilon} = \left(\bigcup_{x \in \partial D_p} (x, y)_{\emptyset, \varepsilon}^s \right) \cap C_{pq} = N^+(D_p) \cap C_{pq}.$$

Из тривиальности расслоения $D_p \times (-1; +1)$ следует, что $C_{p,\varepsilon}$ является $(n-1)$ -мерным цилиндром, гомеоморфным C_{pq} . Поэтому объединение $C_{p,\varepsilon} \cup D_p$ является $(n-1)$ -мерным шаром, принадлежащим характеристической сфере S_{pq} . Нетрудно также показать, что $D_{p,\varepsilon}$, D_p и $C_{p,\varepsilon}$ ограничивают n -мерный шар $B_p \subset W^u(\alpha)$.

Пусть $D_{q,\varepsilon}$, $C_{q,\varepsilon}$ – аналогичные $(n-1)$ -мерные шар и подцилиндр соответственно, построенные в некоторой “трубчатой” области $N(D_q)$ вокруг D_p . Положим

$$C_{pq,\varepsilon} \stackrel{\text{def}}{=} C_{pq} - (C_{p,\varepsilon} \cup C_{q,\varepsilon}).$$

Тогда $S'_{pq} = C_{pq,\varepsilon} \cup D_{p,\varepsilon} \cup D_{q,\varepsilon}$ является $(n-1)$ -мерной сферой, изотопной S_{pq} в $W^u(\alpha)$. Заметим, что $D_p \subset \delta(W^u(\alpha))$ и $D_q \subset \delta(W^u(\alpha))$ изотопны $D_{p,\varepsilon}$ и $D_{q,\varepsilon}$ в $B_p \subset W^u(\alpha)$ и $B_q \subset W^u(\alpha)$ соответственно.

Не уменьшая общности, можно считать, что S'_{pq} является цилиндрически вложенной сферой. Поэтому S'_{pq} ограничивает замкнутый n -мерный шар, скажем B'_{pq} , в $W^u(\alpha)$, поскольку $W^u(\alpha)$ гомеоморфно $\mathbb{R}^n$. Отсюда вытекает, что S_{pq} также ограничивает замкнутый n -мерный шар $B'_{pq} \cup B_p \cup B_q$ в $W^u(\alpha)$. Таким образом, мы доказали, что если C_{pq} не пересекается с $(n-1)$ -мерными неустойчивыми многообразиями, то S_{pq} ограничивает n -мерный замкнутый шар в M^n .

Предположим теперь, что C_{pq} пересекает $(n-1)$ -мерные неустойчивые многообразия. Согласно теореме 4.2 каждое из этих неустойчивых многообразий является неустойчивым многообразием некоторой седловой периодической точки, которую мы обозначим через P_i . Орбиты каждой такой точки P_i образуют тривиальное базисное множество индекса $n-1$. Поэтому имеется только конечное число таких точек, так как число базисных множеств конечно. Итак, мы имеем конечное число периодических седловых точек $P_1, \dots, P_k$ таких, что $W^u(P_i) \cap C_{pq} \neq \emptyset$, $1 \leq i \leq k$.

Согласно следствию 4.1 для данной точки P_i пересечение $W^u(P_i) \cap C_{pq}$ состоит ровно из одной $(n-2)$ -мерной сферы, скажем S_i^{n-2} , которая изотопна $S_p = \partial D_p$ и $S_q = \partial D_q$ в цилиндре C_{pq} . В частности, S_i^{n-2} разбивает C_{pq} на два цилиндра, гомеоморфные $\Sigma^{n-2} \times [0; 1]$. Поэтому можно так перенумеровать точки P_i , чтобы

Рис. 16. Сферы $S_i^{n-2} = W^u(P_i) \cap C_{pq}$

соответствующие им сферы S_i^{n-2} были упорядочены в цилиндре C_{pq} , начиная с $S_0^{n-2} = W^u(p) \cap \partial C_{pq} = \partial D_p$ до $S_{k+1}^{n-2} = W^u(q) \cap \partial C_{pq} = \partial D_q$.

Переобозначим также α_p и α_q на α_0 и α_k соответственно (см. рис. 16).

Каждая сфера $S_i^{n-2} = W^u(P_i) \cap C_{pq}$ цилиндрически вложена в $W^u(P_i)$ и, следовательно, ограничивает замкнутый $(n-1)$ -мерный шар $D_i \subset W^u(P_i)$, поскольку $W^u(P_i) \cong \mathbb{R}^{n-1}$, $i = 1, \dots, k$. Так как S_i^{n-2} и S_{i+1}^{n-2} изотопны в C_{pq} , то они ограничивают область $C_i \subset C_{pq}$, гомеоморфную открытому цилиндру $\Sigma^{n-2} \times (0; 1)$, $i = 0, \dots, k$. Поэтому объединение

$$S_i \stackrel{\text{def}}{=} D_i \cup C_i \cup D_{i+1}$$

является $(n-1)$ -мерной сферой, цилиндрически вложенной в M^n . Согласно следствию 4.2 каждый цилиндр C_i принадлежит n -мерному неустойчивому многообразию источников периодической точки, скажем α_i . Перейдя к некоторой итерации f , если необходимо, мы можем считать, что все точки $p = P_0, P_1, \dots, P_k, P_{k+1} = q$, $\alpha_0, \dots, \alpha_k$ неподвижны.

Из теоремы о непрерывной зависимости инвариантных многообразий от начальных условий и из включений $C_i \subset W^u(\alpha_i)$, $C_{i-1} \subset W^u(\alpha_{i-1})$ вытекает, что

$$D_i \subset \delta(W^u(\alpha_i)) \cap \delta(W^u(\alpha_{i-1})), \quad i = 1, \dots, k.$$

Поэтому $W^s(P_i) \cap W^u(\alpha_i) \neq \emptyset$ и $W^s(P_i) \cap W^u(\alpha_{i-1}) \neq \emptyset$. Заметим, что P_i — седловая неподвижная точка индекса $n-1$. Следовательно, $W^s(P_i)$ — одномерная кривая, которая делится точкой P_i на две кривые $W^{s-}(P_i)$ и $W^{s+}(P_i)$. Каждая из них не может пересекаться с неустойчивыми $(n-1)$ -мерными многообразиями, поскольку в противном случае C_{i-1} или C_i также пересекались бы с неустойчивыми $(n-1)$ -мерными многообразиями, что невозможно. Таким образом,

$$W^{s-}(P_i) \cup W^{s+}(P_i) \subset W^u(\alpha_i) \cup W^u(\alpha_{i-1}).$$

Аналогично рассмотренному выше случаю $k = 0$ покажем, что $(n-1)$ -мерная сфера S_0 ограничивает n -мерный шар $B_0 \subset W^u(\alpha_0)$. В силу наличия локальной структуры произведения на Ω , для любой точки $x \in D_0 - P_0$ дуга $[x, \varphi_{pq}(x)]_\emptyset^s$ входит в B_0 . Эта дуга должна выйти из B_0 , поскольку точка $\varphi_{pq}(x)$ лежит вне B_0 (напомним, что $D_0 = D_p$ и $P_0 = p$). Пусть $\varphi_{01}(x)$ — первая точка пересечения дуги $[x, \varphi_{pq}(x)]_\emptyset^s$ с $S_0 = \partial B_0$ после x . В силу ориентируемости Ω , $\varphi_{01}(x) \notin D_0$. Следовательно, $\varphi_{01}(x) \in D_1 - P_1$. Так как устойчивые многообразия попарно не пересекаются, то отображение

$$\varphi_{01}: D_0 - P_0 \rightarrow D_1 - P_1$$

взаимно однозначное. Отсюда вытекает, что обе кривые $W^{s-}(P_1)$ и $W^{s+}(P_1)$ не пересекают $D_1 - P_1$. Поэтому существует ровно одна компонента множества $W^s(P_1) - P_1$, скажем $W^{s-}(P_1)$, которая лежит в $B_0 \cap W^u(\alpha_0)$. Другая компонента $W^{s+}(P_1)$ лежит в $W^u(\alpha_1)$. В частности, $\alpha_0 \neq \alpha_1$.

Продолжая рассуждать подобным образом, получаем, что каждая $(n-1)$ -мерная сфера S_i ограничивает n -мерный шар $B_i \subset W^u(\alpha_i)$, а точки $\alpha_0, \dots, \alpha_k$ попарно различны. Следовательно, открытые шары $\text{int } B_0, \dots, \text{int } B_k$ также попарно различны. Отсюда следует, что характеристическая сфера S_{pq} ограничивает открытый n -мерный шар

$$\bigcup_{i=1}^k \text{int } B_i \bigcup_{i=1}^k \text{int } D_i \stackrel{\text{def}}{=} B_{pq}^n.$$

Согласно теореме 3.1 многообразие M^n гомотопически эквивалентно n -мерному тору T^n .

В [46] доказано, что любое замкнутое n -мерное, $n \geq 5$, многообразие, гомотопически эквивалентное тору, гомеоморфно тору. Таким образом, для доказательства п. 1) осталось показать, что в случае $n = 3$ многообразие M^3 гомеоморфно T^3 .

Согласно лемме 2 из [65] M^3 неприводимо (т.е. любая цилиндрически вложенная 2-сфера $S^2 \subset M^3$ ограничивает в M^3 шар), поскольку имеет универсальное накрывающее, гомеоморфное $\mathbb{R}^3$. Теперь применим теорему Столлинга [67], которая утверждает, что если существует эпиморфизм $\pi_1(M^3)$ на $\mathbb{Z}$, ядро которого отлично от $\mathbb{Z}_2$, то M^3 является расслоением над окружностью S^1 со слоем, являющимся двумерной поверхностью T . Так как $\pi_1(M^3)$ изоморфна $\mathbb{Z}^3$, то такой эпиморфизм существует. Действительно, если $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ — образующие группы $\pi_1(M^3)$, то положим $\gamma_1 \rightarrow 1$ и $\gamma_2, \gamma_3 \rightarrow 0$, продолжив далее по линейности. В силу коммутативности $\pi_1(M^3)$, ядро данного эпиморфизма отлично от $\mathbb{Z}_2$.

Таким образом, M^3 является расслоением над S^1 со слоем T . Точная гомотопическая последовательность

$$\pi_3(S^1) \rightarrow \pi_2(T) \rightarrow \pi_2(M^3) \rightarrow \pi_2(S^1) \rightarrow \pi_1(T) \rightarrow \pi_1(M^3) \rightarrow \pi_1(S^1) \rightarrow 0$$

расслоения $M^3 \rightarrow S^1$ принимает вид

$$0 \rightarrow \pi_2(T) \rightarrow \pi_2(M^3) \rightarrow 0 \rightarrow \pi_1(T) \rightarrow \mathbb{Z}^3 \rightarrow \mathbb{Z}^1.$$

Следовательно, $\pi_2(T) = \pi_2(M^3) = 0$ и $\pi_1(T)$ мономорфно вкладывается в коммутативную группу $\mathbb{Z}^3$. Поэтому поверхность T имеет коммутативную фундаментальную группу $\pi_1(T)$ и нулевую группу $\pi_2(T)$. Отсюда вытекает, что T есть двумерный тор $T^2 = S^1 \times S^1$.

Теперь расслоение M^3 можно представить в виде произведения $T \times \mathbb{R}^1$, профакторизованному по следующему отношению эквивалентности: $(m, x+1) \in T \times \mathbb{R}^1$ отождествляется с $(f(m), x)$ для некоторого диффеоморфизма $f: T \rightarrow T$. В качестве образующих группы $\pi_1(M^3)$ можно взять элементы $a, b \in \pi_1(T)$ и c , удовлетворяющие соотношениям:

$$ab = ba, \quad f_*(a) = c^{-1}ac, \quad f_*(b) = c^{-1}bc,$$

где $f_*: \pi_1(T) \rightarrow \pi_1(T)$ — гомоморфизм, индуцированный диффеоморфизмом f [43]. Так как $\pi_1(T)$ коммутативна, то $f_*(a) = a$ и $f_*(b) = b$. Следовательно, f изотопен

тождественному. Отсюда получаем гомеоморфность M^3 тору $T \times S^1 = S^1 \times S^1 \times S^1$. Это завершает доказательство п. 1).

Утверждение 2) следует из утверждения 1) и теоремы 3.1. Для доказательства утверждения 3) заметим, что любой ориентируемый растягивающийся аттрактор коразмерности один имеет, по крайней мере, одну 2-связку B . Согласно следствию 4.2 внутри характеристической сферы, соответствующей связке B , лежит периодическая точка, принадлежащая тривиальному репеллеру. Это завершает доказательство теоремы.

Следующие утверждения непосредственно вытекают из доказательства вышеприведенной теоремы.

СЛЕДСТВИЕ 5.1. Пусть f – структурно устойчивый диффеоморфизм n -мерного замкнутого многообразия M^n , $n \geq 3$, неблуждающее множество которого содержит ориентируемый растягивающийся аттрактор Ω коразмерности один. Тогда спектральное разложение диффеоморфизма f состоит из Ω , конечного (возможно, пустого) множества периодических орбит индекса $n - 1$ и конечного непустого множества периодических орбит индекса n .

СЛЕДСТВИЕ 5.2. Пусть f – структурно устойчивый диффеоморфизм n -мерного замкнутого многообразия M^n , $n \geq 3$, имеющий ориентируемый растягивающийся аттрактор Ω коразмерности один. Пусть S_{pq} – характеристическая сфера, соответствующая 2-связке $B = W^u(p) \cup W^u(q)$ аттрактора Ω , где $p, q \in \Omega$ – ассоциированные граничные периодические точки. Тогда S_{pq} ограничивает n -мерный шар, содержащий $k_0 + 1$ источниковых периодических точек $\alpha_1, \dots, \alpha_{k_0+1}$, $k_0 \geq 0$, индекса n и $k \geq 0$ седловых периодических точек $P_1, \dots, P_k$ индекса $n - 1$. Более того, выполняются следующие условия:

- 1) $k = k_0$;
- 2) объединение

$$a_{pq} = \{p\} \cup W_{\emptyset}^s(p) \cup \alpha_1 \cup W^s(P_1) \cup P_1 \cup \alpha_2 \cup \dots \cup P_k \cup \alpha_{k+1} \cup W_{\emptyset}^s(q) \cup \{q\}$$

является компактной дугой без самопересечений с концевыми точками p, q ;

3) на дуге a_{pq} источниковые периодические точки индекса n чередуются с седловыми периодическими точками индекса $n - 1$, включая p и q (см. рис. 17).

Рис. 17. Дуга a_{pq}

СЛЕДСТВИЕ 5.3. Пусть f – A -диффеоморфизм n -мерного замкнутого многообразия M^n , $n \geq 3$, и пусть Ω – ориентируемый растягивающийся (сжимающийся) аттрактор (репеллер) коразмерности один диффеоморфизма f . Тогда следующие условия влекут структурную неустойчивость диффеоморфизма f :

- 1) диффеоморфизм f имеет нетривиальное базисное множество, отличное от Ω ;
- 2) многообразие M^n не гомеоморфно n -мерному тору.

§ 6. Топологическая классификация структурно устойчивых диффеоморфизмов с базисными множествами коразмерности один на торе

После теоремы 5.1 естественным шагом по пути классификации структурно устойчивых диффеоморфизмов с базисными множествами коразмерности один является классификация структурно устойчивых диффеоморфизмов с растягивающимися аттракторами или сжимающимися репеллерами коразмерности один на торе T^n , $n \geq 3$. Пусть $f: T^n \rightarrow T^n$ – такой диффеоморфизм. Для определенности будем считать, что f имеет растягивающийся аттрактор Ω коразмерности один. Обозначим через

$$f_*: H_1(T^n, \mathbb{R}^n) \rightarrow H_1(T^n, \mathbb{R}^n)$$

автоморфизм одномерной группы гомологий $H_1(T^n, \mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{R}^n$ тора T^n , индуцированный диффеоморфизмом f . Автоморфизм f_* называется *гиперболическим*, если он не имеет собственных значений, по модулю равных единице. Автоморфизм называется *гиперболическим автоморфизмом коразмерности один*, если он имеет единственное собственное число, либо меньшее, либо большее единицы по абсолютной величине, а остальные собственные числа лежат соответственно либо вне единичной окружности комплексной плоскости, либо внутри. Следующая теорема была доказана в [11] и [12].

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть $f: T^n \rightarrow T^n$ – A -диффеоморфизм n -мерного тора T^n , $n \geq 3$, имеющий ориентируемый растягивающийся аттрактор Ω коразмерности один. Тогда f_* – гиперболический автоморфизм коразмерности один.

Следуя [39], будем называть диффеоморфизм $f: M \rightarrow M$ π_1 -диффеоморфизмом, если для любого гомеоморфизма $g: K \rightarrow K$ компактного CW -комплекса K на себя и непрерывного отображения $h: K \rightarrow M$, для которых выполняется соотношение $f_* \circ h_* = h_* \circ g_*$, существует единственное отображение $h': K \rightarrow M$, переводящее базисную точку на K в базисную точку на M , гомотопное h и такое, что $f \circ h' = h' \circ g$.

Согласно теореме 6.1 существует алгебраический автоморфизм $A(f): T^n \rightarrow T^n$ с $f_* = A(f)_*$, который является гиперболическим. В силу предложения 2.1 из [39] гиперболический автоморфизм тора является π_1 -диффеоморфизмом. Поэтому существует непрерывное отображение $h: T^n \rightarrow T^n$, гомотопное тождественному, такое, что $h \circ f = A(f) \circ h$. Положим

$$P(f, h) = \{x \in T^n \mid h^{-1}(x) \text{ содержит более одной точки}\}.$$

ЛЕММА 6.1. Пусть $f: T^n \rightarrow T^n$ – A -диффеоморфизм n -мерного тора T^n , $n \geq 3$, имеющий ориентируемый растягивающийся аттрактор Ω коразмерности один, и пусть $h: T^n \rightarrow T^n$ – непрерывное отображение, гомотопное тождественному, такое, что $h \circ f = A(f) \circ h$. Тогда h удовлетворяет следующим условиям:

- а) $h(\Omega) = T^n$;
- б) пусть $\{p_i, q_i\}_{i=1}^k$ – семейство пар ассоциированных граничных периодических точек диффеоморфизма f ; тогда $h(p_i) = h(q_i)$ является периодической точкой автоморфизма $A(f)$ для каждого $i = 1, \dots, k$;
- в) $h(W^u(p_i)) = h(W^u(q_i))$, $i = 1, \dots, k$;
- г) $P(f, h) = \bigcup_{i=1}^k h(W^u(p_i))$;
- д) пусть K_i – компонента множества $T^n - \Omega$; тогда $h(K_i)$ есть неустойчивое многообразие $W^u(h(p_i)) = W^u(h(q_i))$ автоморфизма $A(f)$, где p_i, q_i – ассоциированные граничные периодические точки такие, что $\delta(K_i) = W^u(p_i) \cup W^u(q_i)$, более того, $h(K_i \cup \delta(K_i)) = W^u(h(p_i))$;
- е) пусть $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ – объединение неустойчивых многообразий, не содержащих граничных периодических точек; тогда ограничение $h|_{\tilde{\Omega}}$ является гомеоморфизмом на свой образ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательствам теоремы 2 из [11] и леммы 4 из [12]. Мы его опускаем.

СЛЕДСТВИЕ 6.1. Пусть $f: T^n \rightarrow T^n$ – структурно устойчивый диффеоморфизм n -мерного, $n \geq 3$, тора T^n , имеющий ориентируемый растягивающийся аттрактор Ω коразмерности один. Тогда $A(f)$ является алгебраическим автоморфизмом Аносова коразмерности один.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из соотношения $h \circ f = A(f) \circ h$ и леммы 6.1.

Пусть Ω – ориентируемый растягивающийся аттрактор коразмерности один структурно устойчивого диффеоморфизма f , и пусть S_{pq} – характеристическая сфера, соответствующая 2-связке $B = W^u(p) \cup W^u(q)$ аттрактора Ω , где $p, q \in \Omega$ – ассоциированные граничные периодические точки. Согласно следствию 5.2 внутри сферы S_{pq} лежит $d \geq 1$ периодических точек индекса n и $d - 1 \geq 0$ периодических точек индекса $n - 1$. Положим $d(p, q) = d$. Если Ω – репеллер, то через $d(p, q)$ обозначим число периодических точек индекса 0, лежащих внутри S_{pq} . В обоих случаях число $d(p, q)$ корректно определено, так как не зависит от выбора характеристической сферы S_{pq} . Нетрудно видеть, что точки $f^j(p)$, $f^j(q)$ являются ассоциированными граничными и периодическими, а число периодических точек одного индекса внутри сфер S_{pq} и $f^j(S_{pq}) = S_{f^j(p), f^j(q)}$ одинаковое для любого $j \in \mathbb{Z}$. Поэтому можно приписать число $d(O(p, q)) \stackrel{\text{def}}{=} d(p, q)$ объединению $O(p, q) = O(p) \cup O(q)$ орбит точек p, q .

Граничные периодические точки разбиваются на пары $\{O(p_i, q_i)\}_{i=1}^k$ орбит ассоциированных граничных точек. Пусть $\{d(O(p_i, q_i))\}_{i=1}^k$ – соответствующие им определенные выше числа, указывающие на количество периодических точек индекса n (если Ω – аттрактор) или индекса 0 (если Ω – репеллер) в соответствующих характеристических сферах. Согласно лемме 6.1 $h(O(p_i)) = h(O(q_i))$ является периодической орбитой автоморфизма $A(f)$. Припишем каждой орбите $h(O(p_i)) = h(O(q_i))$ число $d(O(p_i, q_i))$. Семейство $\{h(O(p_i)), d(O(p_i, q_i))\}_{i=1}^k$ называется d -сигнатурой диффеоморфизма f и обозначается через $\mathcal{D}(f, h)$.

Пусть A – гиперболический автоморфизм коразмерности один тора T^n , и пусть $\{O_j\}_{j=1}^r$ – конечный набор периодических орбит O_j автоморфизма A . Каждой орбите O_j припишем произвольным образом натуральное число $d_j \in \mathbb{N}$. Семейство $\{O_j, d_j\}_{j=1}^r$ называется *допустимой d -сигнатурой автоморфизма A* . Согласно теореме 5.1 d -сигнатура структурно устойчивого диффеоморфизма f является допустимой.

Пусть $\{O_j^1, d_j^1\}_{j=1}^{r_1}$, $\{O_j^2, d_j^2\}_{j=1}^{r_2}$ – допустимые d -сигнатуры гиперболических автоморфизмов A_1 и A_2 соответственно. Эти сигнатуры называются *эквивалентными*, если существует линейный диффеоморфизм (т.е. композиция автоморфизма и сдвига) $\psi: T^n \rightarrow T^n$ такой, что $\psi(\bigcup_{j=1}^{r_1}(O_j^1)) = \bigcup_{j=1}^{r_2}(O_j^2)$, $d(\psi(O_j^1)) = d(O_j^2)$ для всех $1 \leq j \leq r_1$ и выполняется соотношение $\psi \circ A_1 = A_2 \circ \psi$. Непосредственно из определения следует, что $r_1 = r_2$.

Следующая теорема решает задачу топологической сопряженности в классе структурно устойчивых диффеоморфизмов на торе T^n , $n \geq 3$, имеющих ориентируемые растягивающиеся аттракторы или сжимающиеся репеллеры коразмерности один. Она показывает, что d -сигнатура является полным инвариантом сопряженности в данном классе диффеоморфизмов.

ТЕОРЕМА 6.2. Пусть $f_1, f_2: T^n \rightarrow T^n$ – структурно устойчивые диффеоморфизмы, имеющие ориентируемые растягивающиеся аттракторы коразмерности один Ω_1 и Ω_2 соответственно. Диффеоморфизмы f_1, f_2 сопряжены тогда и только тогда, когда их d -сигнатуры $\mathcal{D}(f_1, h_1)$, $\mathcal{D}(f_2, h_2)$ эквивалентны, где $h_i: T^n \rightarrow T^n$, $i = 1, 2$, – гомотопные тождественному непрерывные отображения такие, что $h_i \circ f_i = A(f_i) \circ h_i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится по схеме доказательств теоремы 3 из [11] и теоремы 2 из [12], где рассматривалась сопряженность диффеоморфизмов в окрестностях базисных множеств без предположения о структурной устойчивости (см. также [26, теорема 2.5] и [17, теорема 4]). В данном случае лемма 6.1 и следствие 5.2 позволяют получить доказательство сопряженности не только в окрестности базисных множеств, но и на всем торе.

Следующая теорема решает задачу реализации в классе структурно устойчивых диффеоморфизмов на торе T^n , $n \geq 3$, имеющих ориентируемые базисные множества коразмерности один (растягивающиеся аттракторы или сжимающиеся репеллеры). Именно, для каждого допустимого топологического инварианта (d -сигнатуры) строится структурно устойчивый диффеоморфизм с данным инвариантом.

ТЕОРЕМА 6.3. Пусть $A: T^n \rightarrow T^n$ – гиперболический автоморфизм с неустойчивым расслоением коразмерности один в каждом слое касательного расслоения тора T^n , $n \geq 3$ (это означает, что устойчивые многообразия всех точек одномерные). Для любой допустимой d -сигнатуры $\{O_j, d_j\}_{j=1}^r$ автоморфизма A существует структурно устойчивый диффеоморфизм $f: T^n \rightarrow T^n$, имеющий ориентируемый растягивающийся аттрактор коразмерности один такой, что $\mathcal{D}(f, h) = \{O_j, d_j\}_{j=1}^r$, где $f_* = A_*$ и $h: T^n \rightarrow T^n$ – непрерывное гомотопное тождественному отображение, удовлетворяющее соотношению $h \circ f = A \circ h$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем, используя так называемую “хирургическую операцию”, описанную Смейлом [66] и Вильямсом [68] при построении DA -диффеоморфизма с одномерным базисным множеством на 2-мерном торе. Строгое изложение конструкции имеется в [48] (для 2-мерного тора), в [40] (для 3-мерного тора) и в [26] (для n -мерного, $n \geq 2$, тора). Согласно теореме 2.3 из [26] существует структурно устойчивый DA -диффеоморфизм $f': T^n \rightarrow T^n$, имеющий единственный ориентируемый растягивающийся аттрактор коразмерности один Ω' с d -сигнатурой $\{O_j, 1\}_{j=1}^r$. Затем, учитывая следствие 5.2, можно модифицировать f' внутри характеристических сфер таким образом, чтобы получить требуемый диффеоморфизм f с d -сигнатурой $\{O_j, d_j\}_{j=1}^r$ и базисным множеством $\Omega = \Omega'$.

Список литературы

1. Аносов Д. В. Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны // Тр. МИАН СССР. 1967. Т. 90.
2. Аносов Д. В. Об одном классе инвариантных множеств гладких динамических систем // Тр. пятой международной конференции по нелинейным колебаниям. Т. 2. Качественные методы. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1970. С. 39–45.
3. Аносов Д. В. Грубые системы // Тр. МИАН СССР. 1985. Т. 169. С. 59–93.
4. Аносов Д. В., Солодов В. В. Гиперболические множества // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления / Ред. Д. В. Аносов. Т. 66. Динамические системы – 9. М.: ВИНТИ, 1991. С. 12–99.
5. Арансон С. Х., Гринес В. З. Каскады на поверхностях // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления / Ред. Д. В. Аносов. Т. 66. Динамические системы – 9. М.: ВИНТИ, 1991. С. 148–187.
6. Арансон С. Х., Жужома Е. В. О структуре квазимиимальных множеств слоений на поверхностях // Матем. сб. 1994. Т. 185. С. 31–62.
7. Гринес В. З. О топологической сопряженности диффеоморфизмов двумерного многообразия на одномерных базисных множествах // УМН. 1974. Т. 29. № 6. С. 163–164.
8. Гринес В. З. О топологической сопряженности диффеоморфизмов двумерного многообразия на одномерных ориентируемых базисных множествах. 1 // Тр. ММО. 1975. Т. 32. С. 35–60.
9. Гринес В. З. О топологической сопряженности диффеоморфизмов двумерного многообразия на одномерных ориентируемых базисных множествах. 2 // Тр. ММО. 1977. Т. 34. С. 243–252.
10. Гринес В. З. О топологической классификации структурно устойчивых диффеоморфизмов поверхностей с одномерными аттракторами и репеллерами // Матем. сб. 1997. Т. 188. С. 57–94.
11. Гринес В. З., Жужома Е. В. О топологической классификации ориентируемых аттракторов на n -мерном торе // УМН. 1979. Т. 34. № 4. С. 185–186.
12. Гринес В. З., Жужома Е. В. Необходимые и достаточные условия топологической эквивалентности ориентируемых аттракторов на n -мерном торе // Дифференциальные и интегральные уравнения: Сб. научных трудов. Горький: Изд-во Горьк. гос. ун-та, 1981. С. 89–93.
13. Гринес В. З., Калай Х. Х. Диффеоморфизмы двумерных многообразий с просторно расположенными базисными множествами // УМН. 1985. Т. 40. № 1. С. 189–190.
14. Гринес В. З., Калай Х. Х. О топологической эквивалентности диффеоморфизмов с нетривиальными базисными множествами на двумерных многообразиях // Методы качественной теории дифференциальных уравнений / Ред. Е. А. Леонтович-Андропова. Горький: Изд-во Горьк. гос. ун-та, 1988. С. 40–49.
15. Гринес В. З., Калай Х. Х. Топологическая классификация базисных множеств без пар сопряженных точек A -диффеоморфизмов на поверхностях // Деп. ВИНТИ 10.02.88. 1137 – В88. Горький, 1988. С. 1–95.
16. Жиров А. Ю. Гиперболические аттракторы диффеоморфизмов ориентируемых поверхностей. Ч. 1. Кодирование, классификация и накрытия // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 6.

- С. 3–50; Ч. 2. Перечисление и применение к псевдоаносовским диффеоморфизмам // Матем. сб. 1994. Т. 185. №9. С. 29–80; Ч. 3. Алгоритм классификации // Матем. сб. 1995. Т. 186. №9. С. 59–82.
17. *Жужома Е. В.* Ориентируемые базисные множества коразмерности 1 // Изв. вузов. Математика. 1982. Т. 5. С. 16–21.
18. *Келдыш Л. В.* Топологические вложения в евклидово пространство // Тр. МИАН СССР. 1966. Т. 81.
19. *Нитецки З.* Введение в дифференциальную динамику. М.: Мир, 1975.
20. *Новиков С. П.* Топология слоений // Тр. ММО. 1965. Т. 14. С. 248–278.
21. *Палис Ж., Ду Мелу В.* Геометрическая теория динамических систем. Введение. М.: Мир, 1986.
22. *Плыкин Р. В.* О топологии базисных множеств диффеоморфизмов Смейла // Матем. сб. 1971. Т. 84. №9. С. 301–312.
23. *Плыкин Р. В.* Источники и стоки A -диффеоморфизмов поверхностей // Матем. сб. 1974. Т. 94. №6. С. 243–264.
24. *Плыкин Р. В.* О существовании притягивающих (отталкивающих) периодических точек A -диффеоморфизмов проективной плоскости и бутылки Клейна // УМН. 1977. Т. 32. №3. С. 179.
25. *Плыкин Р. В.* О гиперболических аттракторах диффеоморфизмов // УМН. 1980. Т. 35. №3. С. 94–104.
26. *Плыкин Р. В.* О геометрии гиперболических аттракторов гладких каскадов // УМН. 1984. Т. 39. №6. С. 75–113.
27. *Плыкин Р. В., Сатаев Е. А., Шлячков С. В.* Странные аттракторы // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления / Ред. Д. В. Аносов. Т. 66. Динамические системы – 9. М.: ВИНТИ, 1991. С. 100–148.
28. *Постников М. М.* Лекции по алгебраической топологии. Основы теории гомотопий. М.: Наука, 1984.
29. *Рохлин В. А., Фукс Д. Б.* Начальный курс топологии. Геометрические главы. М.: Наука, 1977.
30. *Стинрод Н.* Топология косых произведений. М.: ИЛ, 1953.
31. *Тамура И.* Топология слоений. М.: Мир, 1979.
32. *Хирш М.* Дифференциальная топология. М.: Мир, 1979.
33. *Aranson S., Belitsky G., Zhuzhoma E.* Introduction to Qualitative Theory of Dynamical Systems on Closed Surfaces. Translations of Math. Monographs // Amer. Math. Soc. 1996. V. 153. P. 331.
34. *Bonatti Ch., Langevin R.* Difféomorphismes de Smale des surfaces // Astérisque. 1998. V. 250.
35. *Bowen R.* Periodic points and measures for axiom A -diffeomorphisms // Transactions of the American Math. Soc. 1971. V. 154. P. 337–397.
36. *Brown M.* A proof of generalized Shoenflies theorem // Bull. Amer. Math. Soc. 1960. V. 66. № 2. P. 74–76.
37. *Brown M., Gluck H.* Stable structure on manifolds // Ann. of Math. 1964. V. 79. № 1. P. 1–58.
38. *Farrell F., Jones L.* New attractors in hyperbolic dynamics // J. Diff. Geom. 1980. V. 15. P. 107–133.
39. *Френкс Дж.* Диффеоморфизмы Аносова // Гладкие динамические системы / Ред. Д. В. Аносов. М.: Мир, 1977. С. 32–86.
40. *Franks J., Robinson C.* A quasi-Anosov diffeomorphism that is not Anosov // Trans. AMS. 1976. V. 223. P. 267–278.
41. *Guckenheimer J.* Endomorphisms of Riemann sphere // Global Analysis. Proc. Symp. in Pure Math. AMS. 1970. V. 14. P. 95–123.
42. *Hadamard J.* Sur l'iteration et les solutions asymptotiques des équations différentielles // Bull. Soc. Math. France. 1901. V. 29. P. 224–228.
43. *Hempel J.* 3-manifolds // Annals Math. Studies. 1976. V. 86. P. 196.

44. *Hirsch M., Pugh C.* Stable manifolds and hyperbolic sets // Global Analysis. Proc. Symp. Amer. Math. Soc. 1970. V. 14. P. 133–163.
45. *Hirsch M., Palis J., Pugh C., Shub M.* Neighborhoods of hyperbolic sets // Invent. Math. 1970. V. 9. P. 121–134.
46. *Hsiang W. C., Wall C. T. C.* On homotopy tori. II // Bull. London Math. Soc. 1969. V. 1. P. 341–342.
47. *Jones L.* Locally strange hyperbolic sets // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. V. 275. № 1. P. 153–162.
48. *Katok A., Hasselblatt B.* Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems // Encyclopedia of Math. and its Appl. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1994.
49. *Kirby R., Siebenmann L.* On the triangulation of manifolds and Hauptvermutung // Bull. Amer. Math. Soc. 1979. V. 75. № 4. P. 742–749.
50. *Kollmer H.* On hyperbolic attractors of codimension one // Lect. Notes Math. 1977. V. 597. P. 330–334.
51. *Mañé R.* A proof of C^1 stability conjecture // Publ. Math. IHES. 1988. V. 66. P. 161–210.
52. *Manning A.* There are no new Anosov diffeomorphisms on tori // Amer. J. of Math. 1974. V. 96. P. 422–429.
53. *Mazur B.* On embedding of spheres // Bull. Amer. Math. Soc. 1959. V. 65. P. 59–65.
54. *Morgan J. W., Shalen P.* Valuations, trees, and degenerations of hyperbolic structure, II: measured laminations in 3-manifolds // Annals of Math. 1988. V. 127. P. 403–465.
55. *Neuhouse S. E.* On codimension one Anosov diffeomorphisms // Amer. J. Math. 1970. V. 92. № 3. P. 761–770.
56. *Palis J.* On Morse–Smale dynamical systems // Topology. 1969. V. 8. № 4. P. 385–404.
57. *Perron O.* Über Stabilität und asymptotisches Verhalten der Integrale von Differentialgleichungssystemen // Math. Z. 1928. V. 29. P. 129–160.
58. *Perron O.* Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen // Math. Z. 1930. V. 32. P. 703–728.
59. *Plante J.* On the existence of exceptional minimal sets in foliations of codimension one // J. Diff. Equat. 1974. V. 15. P. 178–194.
60. *Plante J.* The homology class of an expanded invariant manifolds // Lect. Notes Math. 1975. V. 468. P. 251–256.
61. *Reeb G.* Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées // Actual. Sci. Ind. № 1183. Paris: Hermann, 1952.
62. *Robinson C.* Structural stability of C^1 diffeomorphisms // J. Diff. Equat. 1976. V. 22. № 1. P. 28–73.
63. *Robinson C.* Dynamical Systems: stability, symbolic dynamics, and chaos // Studies in Adv. Math., Sec. edition, Boca Raton, FL. CRC Press, 1999. P. 506.
64. *Robinson R. C., Williams R. F.* Finite stability is not generic // Dynamical Systems: Proc. Symp. (Brazil, 1971). N. Y.–London: Academic Press, 1973. P. 451–462.
65. *Rosenberg H.* Foliations by planes // Topology. 1968. V. 7. P. 131–138.
66. *Smale S.* Differentiable dynamical systems // Bull. Amer. Math. Soc. 1967. V. 73. № 1. P. 741–817; *Сме́йл С.* Дифференцируемые динамические системы // УМН. 1970. Т. 25. № 1(151). С. 113–185.
67. *Stallings J.* On fibering certain 3-manifolds // Topology of 3-manifolds. Proc. Univ. of Georgia Institute. N.J.: Printice-Hall, 1962. P. 95–100.
68. *Williams R. F.* The DA -maps of Smale and structural stability // Proc. Berk. Symp. 1970. V. 14. P. 329–334.
69. *Williams R.* Expanding attractors // Publ. Math. I.H.E.S. 1974. V. 43. P. 169–203.

Поступило в редакцию
7.II.2001