Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Дубинин, О применении конформных отображений в неравенствах для рациональных функций, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2002, том 66, выпуск 2, 67–80

DOI: <https://doi.org/10.4213/im379>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 13:57:10

УДК 517.5

В. Н. Дубинин

О применении конформных отображений в неравенствах для рациональных функций

С помощью классических свойств конформных отображений получены новые точные неравенства для рациональных функций с предписанными полюсами. В частности, доказаны новое неравенство бернштейновского типа, неравенство для произведений Бляшке и теорема, обобщающая неравенство Турана для полиномов. Полученные оценки усиливают некоторые известные неравенства Виденского и Русака, а также примыкают к недавним результатам Борвейна, Эрдели, Ли, Мохпатры, Родригеса, Азиза и других.

Библиография: 17 наименований.

Введение

Многочисленные теоремы покрытия, искажения и мажорации для аналитических функций составляют существенную часть классического содержания геометрической теории функций комплексного переменного [1]. Вместе с тем, в современных работах по неравенствам для полиномов и рациональных функций внимание к этой теории уделяется в меньшей степени, чем это можно было бы ожидать. Цель данной работы – восполнить частично указанный пробел.

Неравенства для рациональных функций, обобщающие широко известные неравенства для полиномов, были получены и существенно использовались в теории рациональной аппроксимации [2], [3]. В последнее время уделяется большое внимание точным оценкам [4]–[13]. Рассматриваются рациональные функции с предписанными полюсами. Следуя этим работам, введем класс $\mathcal{R}_m(a_1, \dots, a_n)$, состоящий из рациональных функций вида $R(z) = P(z) / \prod_{k=1}^n (z - a_k)$, где $P(z)$ – алгебраический полином степени m и $|a_k| > 1$, $k = 1, \dots, n$. Экстремальная функция зачастую является функцией Бляшке

$$B(z) = B_a(z) \equiv \prod_{k=1}^n [(1 - \bar{a}_k z) / (z - a_k)],$$

определенной в общем случае для любой совокупности полюсов $a = (a_1, \dots, a_n)$, $|a_k| \neq 1$, $k = 1, \dots, n$. Наконец, пусть $M(R) := \max\{|R(z)| : |z| = 1\}$. Наиболее известными являются неравенства бернштейновского типа, обобщающие классическую оценку для полиномов [14]. Приведем одно из таких неравенств.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00443) и Министерства образования РФ (грант № Е00-1.0-46).

ТЕОРЕМА А. Если функция $R(z)$ принадлежит классу $\mathcal{R}_n(a_1, \dots, a_n)$, то

$$|R'(z)| \leq |B'(z)|M(R)$$

для любых точек z на окружности $|z| = 1$.

По-видимому, впервые эта теорема встречается в работах Русака (см. [2]). Позднее теорема А с некоторыми уточнениями была доказана Борвейном, Эрдели [6] и, независимо, Ли, Мохпатрой, Родригесом [7] с помощью специальных интерполяционных формул (см., также [5], [9], [15]). Желая сравнить различные подходы к неравенствам для рациональных функций, приведем здесь простое альтернативное доказательство теоремы А. Кроме того, получим новую теорему, являющуюся усилением этой теоремы и содержащую максимум и минимум реальной части $\operatorname{Re} R(z)$ на окружности $|z| = 1$ и “взвешенные коэффициенты” в окрестности полюсов:

$$\Lambda(R, a_k) := \lim_{z \rightarrow a_k} |z^{n-m} R(z)/B_a(z)|, \quad k = 1, \dots, n,$$

$R(z) \in \mathcal{R}_m(a_1, \dots, a_n)$. В настоящей работе получены также неравенства для этих коэффициентов, неравенство для произведений Бляшке и новые оценки для рациональных функций, обобщающие известное неравенство Турана для полиномов [16]. Последние результаты примыкают к работам [7], [10].

При доказательстве неравенств мы используем, в основном, конформные отображения. Именно, нам понадобятся две леммы о регулярных функциях, тесно связанные с хорошо известной леммой Шварца [1, с. 29]. Одна из них по форме совпадает с традиционным принципом мажорации и доказывается также известным путем. Вторая, по существу, есть “теорема искажения”. В предшествующих работах это утверждение, по-видимому, не встречалось, хотя приведенное нами доказательство опирается на классическую теорему Бибербаха об оценке модуля регулярной и однолистной функции [1, с. 53]. Указанные вопросы рассматриваются в § 1, а в § 2 в качестве приложений приводятся доказательства новых неравенств для рациональных функций. Применяется также один результат работы [17], которая посвящена исключительно развитию техники обобщенных приведенных модулей к неравенствам для полиномов. Данный подход является частью теории потенциала и иногда приводит к интересным результатам.

§ 1. Две леммы для регулярных отображений

Следующее утверждение является простым примером реализации принципа максимума модуля аналитической функции.

ЛЕММА 1. Пусть G – открытое множество, лежащее в круге $|\zeta| < 1$, и пусть функция $f(\zeta)$ регулярна на множестве G , за исключением полюсов $p_1, \dots, p_\nu$, каждый из которых выписан столько раз, какова его кратность. Предположим, что при приближении к границе множества G все предельные значения модуля $|f(\zeta)|$ не превосходят единицы. Тогда

$$|f(\zeta)| \leq \left| \prod_{k=1}^{\nu} \frac{1 - \bar{p}_k \zeta}{\zeta - p_k} \right|, \quad \zeta \in G.$$

Равенство в точке ζ , отличной от полюса, достигается только в том случае, когда в некоторой окрестности этой точки функция $f(\zeta)$ совпадает с произведением Бляшке $c \prod_{k=1}^{\nu} [(1 - \bar{p}_k \zeta)/(\zeta - p_k)]$, где $|c| = 1$, $|p_k| < 1$, $k = 1, \dots, \nu$ (как обычно, $\prod_{\emptyset} := 1$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция

$$F(\zeta) = f(\zeta) \prod_{k=1}^{\nu} \frac{\zeta - p_k}{1 - \bar{p}_k \zeta},$$

доопределенная в точках p_k по непрерывности, является регулярной на множестве G . При приближении ζ к границе этого множества функция $F(\zeta)$ имеет предельные значения, не превосходящие по модулю единицы. Следовательно, по принципу максимума модуля, примененного к каждой подобласти множества G , всюду в G имеем оценку $|F(\zeta)| \leq 1$. Равенство в данной точке $\zeta \in G$ достигается только в том случае, когда в соответствующей подобласти множества G функция $F(\zeta)$ постоянна. Лемма доказана.

Если функция $\omega = f(\zeta)$ регулярна в круге $|\zeta| < 1$, причем $f(0) = 0$ и $|f(\zeta)| < 1$ при $|\zeta| < 1$, то, применяя лемму 1 к функции $f(\zeta)/\zeta$, получаем

$$|f(\zeta)| \leq |\zeta| \quad \text{в } |\zeta| < 1, \quad (1)$$

и, следовательно,

$$|f'(0)| \leq 1. \quad (2)$$

Неравенства (1), (2) составляют содержание леммы Шварца. Если, дополнительно, функция $f(\zeta)$ определена в некоторой точке ζ_0 окружности $|\zeta| = 1$, $|f(\zeta_0)| = 1$, и если существует производная $f'(\zeta_0)$, то из неравенства (1) легко заключаем, что

$$|f'(\zeta_0)| \geq 1. \quad (3)$$

Нам понадобится усиление неравенства (3) с учетом производной $f'(0)$ для однолистных в круге $|\zeta| < 1$ функций $f(\zeta)$.

ЛЕММА 2. Пусть $\omega = f(\zeta)$ — конформное и однолистное отображение единичного круга $|\zeta| < 1$ в круг $|\omega| < 1$, $f(0) = 0$. Предположим, что в некоторой граничной точке ζ_0 выполняется $|\zeta_0| = |f(\zeta_0)| = 1$, и пусть существует производная $f'(\zeta_0)$. Тогда справедливо неравенство

$$|f'(\zeta_0)|^2 |f'(0)| \geq 1.$$

Знак равенства достигается для функции $f(\zeta) = c\zeta$, $|c| = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственно убеждаемся в том, что для любого вещественного числа φ функция

$$w = \frac{f(\zeta)}{f'(0)(1 + e^{i\varphi}f(\zeta))^2} = \zeta + \dots$$

регулярна и однолистка в круге $|\zeta| < 1$. Из классической теоремы Бибераха, примененной к этой функции, вытекает оценка

$$\frac{|f(\zeta)|}{(1 - |f(\zeta)|)^2} \leq \frac{|f'(0)\zeta|}{(1 - |\zeta|)^2},$$

справедливая для любых точек ζ в круге $|\zeta| < 1$. Отсюда

$$\left| \frac{f(\zeta)}{\zeta} \right| \leq |f'(0)| \left| \frac{1 - f(\zeta)}{1 - |\zeta|} \right|^2.$$

Осталось перейти к пределу при $\zeta \rightarrow \zeta_0$ вдоль радиального отрезка $[0, \zeta_0]$. Лемма доказана.

Условие $f(0) = 0$ в лемме 2 носит канонический характер. От него можно легко избавиться дробно-линейной заменой переменной, получая при этом формально более общее соотношение:

$$|f'(\zeta_0)|^2 |f'(0)| (1 - |f(0)|^2) \geq |1 - f(\zeta_0)\overline{f(0)}|^4. \quad (4)$$

Это неравенство вытекает из леммы 2, примененной к функции

$$(f(\zeta) - f(0)) / (1 - f(\zeta)\overline{f(0)}),$$

причем знак равенства достигается в случае, когда эта функция тождественно равна $c\zeta$, $|c| = 1$.

§ 2. Неравенства для рациональных функций

Здесь и ниже приняты обозначения из введения. Определим дополнительно величины

$$L = L(R) := \min_{|z|=1} \operatorname{Re} R(z) \quad \text{и} \quad H = H(R) := \max_{|z|=1} \operatorname{Re} R(z),$$

$R(z) \in \mathcal{R}_m(a_1, \dots, a_n)$. Учитывая тот факт, что функция Бляшке отображает единичную окружность в себя, легко заключаем, что на этой окружности выполняются равенства

$$\frac{zB'_a(z)}{B_a(z)} = \operatorname{Re} \frac{zB'_a(z)}{B_a(z)} = \sum_{k=1}^n \frac{|a_k|^2 - 1}{|z - a_k|^2}.$$

Сумму в правой части равенства будем считать определением левой части на окружности $|z| = 1$ в случае произвольной совокупности точек $a = (a_1, \dots, a_n)$,

$a_k \in \mathbb{C}_z$, $k = 1, \dots, n$. Если $|a_k| = 1$ при некотором k , то соответствующее слагаемое полагаем равным нулю для любых z , $|z| = 1$. Заметим также, что на окружности $|z| = 1$ имеют место равенства

$$|B'_a(z)| = \left| \frac{d|B_a(z)|}{d|z|} \right| = \left| \frac{d \log |B_a(z)|}{d|z|} \right| = \left| \operatorname{Re} \frac{z B'_a(z)}{B_a(z)} \right|.$$

ТЕОРЕМА 1. Если функция $R(z)$ принадлежит классу $\mathcal{R}_m(a_1, \dots, a_n)$, $m \geq n$, то для любого l , $l = 1, \dots, n$, выполняются неравенства

$$\Lambda(R, a_l) \leq (H(R) - L(R))/2 \leq M(R). \quad (5)$$

Если, кроме того, $m = n$ и все нули $b_1, \dots, b_n$ функции $R(z)$ лежат в круге $|z| \leq 1$, то

$$\prod_{l=1}^n \Lambda(R, a_l) \Lambda(1/R, b_l) \geq 1. \quad (6)$$

Равенство в (5) достигается для функции $R(z) = \beta z^{m-n} B_a(z)$, а в (6) – для функции $R(z) = \beta B_a(z)$, $|\beta| = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\omega = \Phi(w)$ однозначную ветвь сложной функции:

$$\omega = \frac{\sqrt{w_1/(1-w_1)} + i}{\sqrt{w_1/(1-w_1)} - i}, \quad w_1 = \frac{w - 2L}{2H - 2L}, \quad (7)$$

конформно и однолистно отображающую внешность отрезка $\gamma := [2L, 2H]$ на внешность единичного круга $|\omega| > 1$ так, что $\Phi(\infty) = \infty$ и $\Phi(2L) = -1$. Пусть G – открытое множество $\{\zeta: |\zeta| < 1, R(1/\zeta) + \overline{R(\bar{\zeta})} \notin \gamma\}$, и пусть $f(\zeta) = \Phi(R(1/\zeta) + \overline{R(\bar{\zeta})})$, $\zeta \in G$. Из леммы 1 вытекает неравенство

$$|f(\zeta)| \leq \left| \zeta^{n-m} \prod_{k=1}^n \frac{1 - (\overline{1/a_k})\zeta}{\zeta - 1/a_k} \right| = \left| \zeta^{n-m} \prod_{k=1}^n \frac{\zeta - \overline{a_k}}{1 - a_k \zeta} \right|. \quad (8)$$

Умножая обе части неравенства (8) на $|1/a_l - \zeta|$ и затем переходя к пределу при $\zeta \rightarrow 1/a_l$, получим неравенство (5).

Доказательство неравенства (6) опирается на результат статьи [17, с. 74], согласно которому для любых двух полиномов

$$P(z) := c \prod_{k=1}^n (z - b_k), \quad Q(z) := \prod_{k=1}^n (z - a_k)$$

с разделенными нулями $0 < |b_k| < 1$, $|a_k| > 1$, $k = 1, \dots, n$, имеет место неравенство

$$\left| \prod_{k=1}^n b_k^n a_k^n P(1/\bar{b}_k) Q(1/\bar{a}_k) \right| \leq \left| \prod_{k=1}^n P(a_k) Q(b_k) \right|.$$

Заметим, что для любого l , $l = 1, \dots, n$,

$$\begin{aligned}\Lambda(R, a_l) &= \lim_{z \rightarrow a_l} \left| \frac{R(z)}{B_a(z)} \right| = \lim_{z \rightarrow a_l} \left| c \prod_{k=1}^n \frac{z - b_k}{1 - \bar{a}_k z} \right| \\ &= \left| \frac{c}{a_l^n} \prod_{k=1}^n \frac{a_l - b_k}{1/a_l - \bar{a}_k} \right| = \left| \frac{P(a_l)}{a_l^n Q(1/\bar{a}_l)} \right|.\end{aligned}$$

Аналогично,

$$\Lambda\left(\frac{1}{R}, b_l\right) = \left| \frac{Q(b_l)}{b_l^n P(1/\bar{b}_l)} \right|, \quad l = 1, \dots, n.$$

Таким образом, указанный выше результат совпадает с неравенством (6). Случай равенства проверяется непосредственно.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если нули и полюсы рациональной функции $R(z)$ класса $\mathcal{R}_n(a_1, \dots, a_n)$ расположены по разные стороны от окружности $|z| = 1$, то

$$(H(R) - L(R))(H(1/R) - L(1/R)) \geq 4.$$

Равенство достигается для произведения Бляшке.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что полюсы a_k и нули b_k удовлетворяют условиям $0 < |b_k| < 1 < |a_k| < \infty$, $k = 1, \dots, n$. Введем функцию $\tilde{R}(z) = 1/R(1/z)$. Легко видеть, что $H(\tilde{R}) = H(1/R)$, $L(\tilde{R}) = L(1/R)$, $\Lambda(\tilde{R}, 1/b_l) = \Lambda(1/R, b_l)$, $l = 1, \dots, n$. Осталось применить неравенства (5) и (6).

ТЕОРЕМА 2. Для любой функции $R(z)$ класса $\mathcal{R}_m(a_1, \dots, a_n)$, $m \geq n$, и любой точки z на окружности $|z| = 1$, в которой $\operatorname{Re} R(z)$ отлична от $L(R)$ и $H(R)$, справедливо неравенство

$$\begin{aligned}& \frac{|\operatorname{Im}(zR'(z))|}{\sqrt{(\operatorname{Re} R(z) - L(R))(H(R) - \operatorname{Re} R(z))}} \\ & \leq |(z^{m-n}B(z))'| + \min_{1 \leq l \leq n} \frac{|a_l|^2 - 1}{|1 - \bar{a}_l z|^2} \left[\sqrt{\frac{2\Lambda(R, a_l)}{H(R) - L(R)}} - 1 \right]. \quad (9)\end{aligned}$$

Равенство в (9) достигается в случае $R(z) = \alpha + \beta z^{m-n}B(z)$, где α и β – произвольные комплексные постоянные, $\beta \neq 0$.

Прежде чем доказывать эту теорему, приведем простое доказательство ее ослабленного варианта и дадим краткий анализ полученного результата. Этот результат вытекает из неравенства (8). Действительно, пусть $f(\zeta)$ – функция, введенная в доказательстве теоремы 1. Поскольку эта функция переводит единичную окружность $|\zeta| = 1$ в окружность $|\omega| = 1$, то в точках окружности $|\zeta| = 1$, где существует производная, из неравенства (8) имеем

$$\frac{\partial |f|}{\partial |\zeta|} \geq \frac{\partial}{\partial |\zeta|} \left| \zeta^{n-m} \prod_{k=1}^n \frac{\zeta - \bar{a}_k}{1 - a_k \zeta} \right| = -\frac{\partial}{\partial |z|} \left| z^{m-n} \prod_{k=1}^n \frac{1 - \bar{a}_k z}{z - a_k} \right| = -|(z^{m-n}B(z))'|,$$

где $z = 1/\zeta$, $|z| = 1$. Нетрудно вычислить также производную в левой части этого неравенства:

$$\begin{aligned} \frac{\partial|f|}{\partial|\zeta|} &= -\frac{\partial|f|}{\partial|z|} = -\left| \frac{d\Phi(R(z) + \overline{R(1/\bar{z})})}{dz} \right| \\ &= -\frac{|R'(z) - \overline{R'(1/\bar{z})}/z^2|}{(2H - 2L)\sqrt{w_1(1 - w_1)}} = -\frac{|\operatorname{Im}(zR'(z))|}{\sqrt{(\operatorname{Re} R(z) - L)(H - \operatorname{Re} R(z))}}. \end{aligned} \quad (10)$$

Окончательно, для рациональных функций $R(z)$ класса $\mathcal{R}_m(a_1, \dots, a_n)$, $m \geq n$, на единичной окружности $|z| = 1$ выполняется

$$|\operatorname{Im}(zR'(z))| \leq |(z^{m-n}B(z))'| \sqrt{(\operatorname{Re} R(z) - L(R))(H(R) - \operatorname{Re} R(z))}. \quad (11)$$

Равенство здесь достигается для функций $R(z) = \alpha + \beta z^{m-n}B(z)$, где α и β – произвольные комплексные числа, $\beta \neq 0$.

Ввиду (5) неравенство (11) является ослабленным вариантом теоремы 2, что особенно заметно при рассмотрении функций $R(z)$ с нулями, близкими к точкам a_l , $l = 1, \dots, n$. Заменяя в (11) среднее геометрическое на среднее арифметическое, получаем

$$|\operatorname{Im}(zR'(z))| \leq |(z^{m-n}B(z))'| (H - L)/2 \leq |(z^{m-n}B(z))'| M(R)$$

для любых функций $R(z) \in \mathcal{R}_m(a_1, \dots, a_n)$. Отсюда при $m = n$ легко следует теорема А. Отметим, что $|(z^{m-n}B(z))'| = d|z^{m-n}B(z)|/d|z| = m - n + |B'(z)|$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Приведенное выше доказательство неравенства (11) справедливо также для рациональных функций $R(z)$ вида

$$P(z) / \left[z^s \prod_{k=1}^{n+l} (z - a_k) \right],$$

где $P(z)$ – полином степени $m \geq n + l + 2s$, $l \leq n$, $|a_k| > 1$, $k = 1, \dots, n$, а каждая из точек a_j , $j = n + 1, \dots, n + l$, симметрична относительно окружности $|z| = 1$ некоторой точке a_k , $1 \leq k \leq n$. Поэтому для этих функций также имеет место неравенство (11), где $B(z)$ остается прежним, а z^{m-n} необходимо заменить на $z^{m-n-l-s}$. В частности, если вновь $P(z)$ – полином степени n , а точки a_k , $|a_k| \neq 1$, $k = 1, \dots, n$, расположены произвольным образом (необязательно по одну сторону от окружности), то, применяя сказанное к рациональной функции $R(z) + \overline{R(1/\bar{z})}$, $R(z) = P(z) / \prod_{k=1}^n (z - a_k)$, и переходя от реальной части к модулю, получим ослабленный вариант неравенства Борвейна и Эрдели (см. [5, с. 324], [6]), где вместо максимума берется сумма соответствующих чисел.

Неравенства бернштейновского типа на окружности и на отрезке тесно связаны между собой [5]. Отметим известные результаты, вытекающие из неравенства (11). Пусть точки $a_k \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$, $k = 1, \dots, n$, и не вещественные числа a_k

этой совокупности образуют сопряженные пары. Следуя [4], [5], [11], определим числа c_k , $k = 1, \dots, n$, соотношениями

$$a_k := (c_k + c_k^{-1})/2, \quad |c_k| < 1, \quad k = 1, \dots, n,$$

так что

$$c_k = a_k - \sqrt{a_k^2 - 1}, \quad k = 1, \dots, n,$$

где под корнем понимается подходящая ветвь. В этом случае положительная величина

$$B_n(x) := \operatorname{Re} \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{a_k^2 - 1}}{a_k - x} = \sum_{k=1}^n \frac{1 - |c_k|^2}{|\zeta - c_k|^2}, \quad x \in [-1, 1]$$

($x = (\zeta + 1/\zeta)/2$), называется *бернштейновским фактором* и играет важную роль в указанных работах.

Пусть

$$R(z) = P(z) / \prod_{k=1}^n (z - a_k),$$

где $P(z)$ – полином с вещественными коэффициентами степени $m \geq n$. Тогда функция $Q(\zeta) := R((\zeta + 1/\zeta)/2)$ имеет вид

$$\tilde{P}(\zeta) / \left[\zeta^{m-n} \prod_{k=1}^n (\zeta - c_k)(\zeta - 1/\bar{c}_k) \right],$$

где $\tilde{P}(\zeta)$ – полином степени $2m$. С учетом замечания 1 из неравенства (11) получим

$$|\operatorname{Im}(\zeta Q'(\zeta))| \leq [m - n + |B'(\zeta)|] \sqrt{(Q(\zeta) - L(Q))(H(Q) - Q(\zeta))},$$

где $B(\zeta) = \prod_{k=1}^n [(1 - \zeta/c_k)/(\zeta - 1/\bar{c}_k)]$, $|\zeta| = 1$. После несложных вычислений получаем неравенство

$$|R'(x)| \sqrt{1 - x^2} \leq [m - n + B_n(x)] \sqrt{\left(R(x) - \min_{[-1,1]} R(x) \right) \left(\max_{[-1,1]} R(x) - R(x) \right)},$$

где $x \in (-1, 1)$.

При $n = 1$, $a_1 = a > 1$ и $|R(x)| \leq 1$, $-1 \leq x \leq 1$, имеем неравенство В.С. Виденского [15, с. 420]

$$|R'(x)| \sqrt{1 - x^2} \leq m - 1 + \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{a - x}, \quad -1 < x < 1.$$

Легко видеть также, что при $n = m$ полученное неравенство эквивалентно одному из результатов, полученных в работе [4], обобщающему на случай рациональных функций известное неравенство Бернштейна–Сеге для тригонометрических полиномов (о других многочисленных обобщениях см. [5, ч. 7]). Интересно отметить

вновь при $n = m$, что если минимум под корнем достигается в точке -1 , а максимум – в точке $+1$, то, заменяя дробь с меньшим знаменателем на производную в “средней” точке, получим одно из неравенств Мина

$$\begin{aligned} |R'(x)| &\leq B_n(x) \sqrt{\frac{R(x) - R(-1)}{x - (-1)} \frac{R(1) - R(x)}{1 - x}} \\ &\leq B_n(x) \sqrt{R'(\xi)} \sqrt{2 \max_{[-1,1]} |R(x)|}, \\ \max_{[-1,1]} |R'(x)| &\leq 2 \left(\max_{[-1,1]} |B_n(x)| \right)^2 \max_{[-1,1]} |R(x)|, \end{aligned}$$

(см. [11, с. 155]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Можно считать, что точки a_l отличны от нулей функции $R(z)$. Для фиксированного номера l , $1 \leq l \leq n$, определим на открытом множестве $G = \{\omega: |\omega| < 1, R(1/\omega) + \overline{R(\overline{\omega})} \notin \gamma, |F(\omega)| \neq 1\}$ функцию

$$\zeta = F(\omega) \equiv \omega^{n-m} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^n \frac{1 - \omega/\overline{a}_k}{\omega - 1/a_k} [\Phi(R(1/\omega) + \overline{R(\overline{\omega})})]^{-1},$$

где отображение $\omega' = \Phi(w)$ задано соотношениями (7) с точностью до переобозначения $\omega \rightarrow \omega'$. Функция $\zeta = F(\omega)$ регулярна на множестве G , причем она отображает точку $1/a_l$, и только эту точку, в начало координат. Далее, окружность $|\omega| = 1$ переходит в смысле граничного соответствия в окружность $|\zeta| = 1$ и все точки границы множества G – в точки, лежащие на $|\zeta| \geq 1$.

Заметим, что множество G состоит из попарно непересекающихся областей, ограниченных конечным числом кусочно аналитических кривых. Каждая точка окружности $|\omega| = 1$, за исключением конечного числа таких точек, принадлежит границе одной из областей множества G вместе с некоторой дугой и является точкой регулярности функции $\zeta = F(\omega)$. Пусть D – одна из указанных областей множества G . Если $1/a_l \notin D$ и, следовательно, $0 \notin F(D)$, то из принципа аргумента легко заключаем, что $F(D) \subset \{\zeta: |\zeta| \geq 1\}$. Поэтому в точках регулярности функции $F(\omega)$, принадлежащих одновременно окружности $|\omega| = 1$ и границе D , выполняется

$$\frac{\partial |F|}{\partial |\omega|} \leq 0. \quad (12)$$

Пусть теперь $1/a_l \in D$. Тогда вновь из принципа аргумента каждая точка круга $|\zeta| < 1$ является образом одной и только одной точки множества D . Поэтому в данном случае для функции $\zeta = F(\omega)$, $\omega \in D$, существует обратная функция $\omega = f(\zeta)$, которая отображает круг $|\zeta| < 1$ в круг $|\omega| < 1$ так, что $f(0) = 1/a_l$. Если для точки ζ , $|\zeta| = 1$, выполняется равенство $|f(\zeta)| = 1$ и если существует производная $f'(\zeta)$, то согласно (4) имеем

$$|f'(\zeta)|^2 |f'(0)| (1 - |1/a_l|^2) \geq |1 - f(\zeta)/\overline{a}_l|^4,$$

или, что то же самое,

$$\frac{\partial|F|}{\partial|\omega|} \leq \frac{\sqrt{(1-|1/a_l|^2)/|F'(1/a_l)|}}{|1-\omega/\bar{a}_l|^2}. \quad (13)$$

Сравнивая неравенства (12) и (13), получаем, что во всех точках окружности $|\omega| = 1$, за исключением, может быть, конечного числа, выполняется неравенство (13). Используя простые вычисления с заменой $z = 1/\omega$, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial|F|}{\partial|\omega|} &= -\frac{\partial}{\partial|z|} \left| z^{m-n} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^n \frac{1-\bar{a}_k z}{z-a_k} \left[\Phi \left(R(z) + \overline{R\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} \right) \right]^{-1} \right| \\ &= -\frac{\partial}{\partial|z|} \left| z^{m-n} \prod_{k=1}^n \frac{1-\bar{a}_k z}{z-a_k} \right| - \frac{\partial}{\partial|z|} \left| \frac{z-a_l}{1-\bar{a}_l z} \right| + \left| \frac{d\Phi(R(z) + \overline{R(1/\bar{z})})}{dz} \right| \\ &= -|(z^{m-n} B(z))'| + \frac{|a_l|^2 - 1}{|1-\bar{a}_l z|^2} + \left| \frac{d\Phi(R(z) + \overline{R(1/\bar{z})})}{dz} \right|. \end{aligned}$$

С другой стороны, правая часть в (13) равна

$$\frac{1-|1/a_l|^2}{|1-\omega/\bar{a}_l|^2} \left[\left(1 - \left| \frac{1}{a_l} \right|^2 \right) \left| F' \left(\frac{1}{a_l} \right) \right| \right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{|a_l|^2 - 1}{|1-\bar{a}_l z|^2} \sqrt{\frac{2\Lambda(R, a_l)}{H(R) - L(R)}}.$$

Учитывая (10), заключаем, что неравенство (13), справедливое для любых l , $l = 1, \dots, n$, влечет неравенство (9). При проверке равенства в (9) достаточно считать $\alpha = 0$ и $|\beta| = 1$. Для функции $R(z) = \beta z^{m-n} B(z)$, $|\beta| = 1$, легко проверяется тождество

$$1 \equiv \beta z^{m-n} B(z) [\Phi(R(z) + \overline{R(1/\bar{z})})]^{-1}.$$

Домножая обе части этого тождества на $(z-a_l)/(1-\bar{a}_l z)$ и переходя к переменной ζ , получим

$$(f(\zeta) - f(0))/(1 - f(\zeta)\overline{f(0)}) \equiv c\zeta, \quad \text{где } |c| = 1.$$

Согласно случаю равенства в соотношении (4), в неравенстве (13) также имеет место равенство для любых $l = 1, \dots, n$. Отсюда имеем равенство в (9). Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3. Если совокупности точек $a = (a_1, \dots, a_n)$ и $b = (b_1, \dots, b_n)$ удовлетворяют условию $|a_k| \geq 1 \geq |b_k|$, $k = 1, \dots, n$, то

$$\frac{zB'_a(z)}{B_a(z)} \geq \frac{zB'_b(z)}{B_b(z)} + 1 - \sqrt{\left| \prod_{k=1}^n \frac{b_k}{a_k} \right|} \quad (14)$$

для любых точек z на окружности $|z| = 1$. Равенство достигается в случае $|a_k| = |b_k| = 1$, $k = 1, \dots, n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что $|a_k| > 1 > |b_k|$, $k = 1, \dots, n$. Введем вспомогательную функцию

$$\zeta = F(\omega) \equiv \omega \prod_{k=1}^n \frac{(1 - b_k \omega)(\omega - \bar{a}_k)}{(\omega - \bar{b}_k)(1 - a_k \omega)},$$

регулярную на открытом множестве $G := \{\omega: |\omega| < 1, |F(\omega)| \neq 1, \infty\}$. Далее повторяем соответствующую часть доказательства теоремы 2, где точку $\omega = 1/a_l$ необходимо заменить на $\omega = 0$. В результате получаем неравенство (13), которое в нашем случае имеет вид

$$\frac{\partial |F|}{\partial |\omega|} \leq \sqrt{\left| \frac{1}{F'(0)} \right|} = \sqrt{\prod_{k=1}^n \left| \frac{b_k}{a_k} \right|},$$

и это неравенство справедливо во всех точках окружности $|\omega| = 1$, за исключением, может быть, конечного числа таких точек. Производная слева равна

$$\begin{aligned} \frac{\partial |F|}{\partial |\omega|} &= -\frac{\partial}{\partial |z|} \log \left| \frac{1}{z} \prod_{k=1}^n \frac{(z - b_k)(1 - \bar{a}_k z)}{(1 - \bar{b}_k z)(z - a_k)} \right| \\ &= 1 + \operatorname{Re} \frac{z B'_b(z)}{B_b(z)} - \operatorname{Re} \frac{z B'_a(z)}{B_a(z)} = 1 + \frac{z B'_b(z)}{B_b(z)} - \frac{z B'_a(z)}{B_a(z)}, \quad z = \frac{1}{\omega}. \end{aligned}$$

Неравенство (14) доказано. Случай равенства проверяется непосредственно.

СЛЕДСТВИЕ 2. Для любых точек $z, b_1, \dots, b_n$, удовлетворяющих условиям $|z| = 1$, $|b_k| \leq 1$, $k = 1, \dots, n$, справедливы неравенства

$$\sum_{k=1}^n \frac{1 - |b_k|^2}{|z - b_k|^2} \geq 1 - \sqrt{\prod_{k=1}^n |b_k|}, \quad (15)$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1 - |b_k|^2}{|z - b_k|^2} \geq n - \sum_{k=1}^n \sqrt{|b_k|}. \quad (16)$$

Равенство в (15) достигается для $|b_k| = 1$, $k = 1, \dots, n$, а в случае $n = 1$ — также и для $b_1 = 0$. Равенство в (16) достигается в случае $|b_k| = 1$ либо $b_k = 0$, $k = 1, \dots, n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство (15) вытекает из теоремы 3 при $|a_k| = 1$, $k = 1, \dots, n$. Второе неравенство получается, если применить первое в случае $n = 1$ для каждого b_k , $k = 1, \dots, n$, а затем сложить полученные результаты.

Следующее простое утверждение не связано с конформными отображениями. В работах по неравенствам для полиномов и рациональных функций нередко можно видеть его следствия либо частные случаи, однако в общей форме оно в литературе, по-видимому, не встречалось.

ЛЕММА 3. Если комплексные числа a_k , $k = 1, \dots, n$, и b_k , $k = 1, \dots, m$, не лежат на единичной окружности $|z| = 1$, а число c не равно нулю, то для рациональной функции

$$R(z) := c \left[\prod_{k=1}^m (z - b_k) \right] / \left[\prod_{k=1}^n (z - a_k) \right]$$

на окружности $|z| = 1$ справедливо равенство

$$2 \operatorname{Re} \frac{zR'(z)}{R(z)} = m - n + \sum_{k=1}^n \frac{|a_k|^2 - 1}{|z - a_k|^2} - \sum_{k=1}^m \frac{|b_k|^2 - 1}{|z - b_k|^2}$$

(в случае, когда совокупность $\{a_k\}_{k=1}^n$ либо $\{b_k\}_{k=1}^m$ есть пустое множество, полагаем соответствующее слагаемое равным нулю).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим сначала, что $m = n \neq 0$. Непосредственно проверяется тождество

$$\frac{\overline{R(1/\bar{z})}}{R(z)} \equiv \frac{B_b(z)}{B_a(z)}, \quad z \neq a_k, \quad z \neq b_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Взяв от обеих частей этого тождества логарифмическую производную и умножив на z , получаем

$$-\frac{1}{z} \frac{\overline{R'(1/\bar{z})}}{\overline{R(1/\bar{z})}} - \frac{zR'(z)}{R(z)} \equiv -\frac{zB'_a(z)}{B_a(z)} + \frac{zB'_b(z)}{B_b(z)}.$$

Поэтому в точках z , лежащих на единичной окружности, имеем

$$-2 \operatorname{Re} \frac{zR'(z)}{R(z)} = -\sum_{k=1}^n \frac{|a_k|^2 - 1}{|z - a_k|^2} + \sum_{k=1}^n \frac{|b_k|^2 - 1}{|z - b_k|^2}.$$

Общий случай получается применением предыдущего к функции $z^{n-m}R(z)$. Лемма доказана.

В качестве следствий из леммы 3 приведем следующие неравенства. Пусть функция $R(z)$ принадлежит классу $\mathcal{R}_m(a_1, \dots, a_n)$, $m \leq n$, и пусть все ее нули лежат в $\{z: |z| \geq 1\}$. Тогда непосредственно из леммы 3 вытекает

$$\operatorname{Re} \frac{zR'(z)}{R(z)} \leq \frac{1}{2} \frac{zB'_a(z)}{B_a(z)} = \frac{1}{2} |B'_a(z)|, \quad |z| = 1, \quad R(z) \neq 0.$$

Если же все нули $R(z)$ лежат в круге $|z| \leq 1$, то вновь из леммы 3 имеем

$$\left| \frac{R'(z)}{R(z)} \right| \geq \operatorname{Re} \frac{zR'(z)}{R(z)} \geq \frac{1}{2} |B'_a(z)| - \frac{1}{2} (n - m), \quad |z| = 1, \quad R(z) \neq 0.$$

Оба выписанных неравенства получены ранее в работе [7, лемма 4, теорема 4]. Эти же неравенства играют важную роль при обобщении неравенств Лаха и Турана [10, теоремы 2 и 3]. В дополнение к приведенной оценке снизу рассмотрим следующий результат.

ТЕОРЕМА 4. *Если рациональная функция $R(z)$ с предписанными полюсами $a_1, \dots, a_n$ имеет в точности m нулей и все они лежат в круге $|z| \leq 1$, то на окружности $|z| = 1$ в точках, отличных от нулей, выполняется неравенство*

$$\operatorname{Re} \frac{zR'(z)}{R(z)} \geq \frac{1}{2} \left(m - n + \frac{zB'_a(z)}{B_a(z)} \right). \quad (17)$$

Если, дополнительно, все полюсы a_k , $k = 1, \dots, n$, лежат в $\{z: |z| \geq 1\}$, то на окружности $|z| = 1$ в точках, отличных от нулей и полюсов, имеем

$$\operatorname{Re} \frac{zR'(z)}{R(z)} \geq \frac{1}{2} \left(m - n + 1 - \sqrt{\prod_{k=1}^s \left| \frac{1}{a_k} \right|} \right), \quad s = \min(n, m), \quad (18)$$

$$\operatorname{Re} \frac{zR'(z)}{R(z)} \geq \frac{1}{2} \left(m - \sum_{k=1}^n \sqrt{\left| \frac{1}{a_k} \right|} \right). \quad (19)$$

Равенство в (17) достигается для любой рациональной функции с нулями на единичной окружности. Равенства в (18) и (19) выполняются, когда и нули и полюсы принадлежат окружности $|z| = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство (17) легко вытекает из леммы 3. Неравенство (18) следует из леммы 3 и теоремы 3. Наконец, неравенство (19) получаем из леммы 3 и неравенства (16), примененного к точкам $b_k = 1/a_k$, $k = 1, \dots, n$. Случаи равенства проверяются непосредственно с учетом леммы 3. Теорема доказана.

Применяя неравенство (17) к функции класса $\mathcal{R}_m(a_1, \dots, a_n)$, получаем упомянутую выше теорему 4 работы [7], обобщающую на случай рациональных функций известную теорему Турана:

$$\max_{|z|=1} |P'(z)| \geq \frac{n}{2} \max_{|z|=1} |P(z)|, \quad (20)$$

где $P(z)$ – полином степени n с нулями в круге $|z| < 1$ [16]. Отметим, что неравенство (19) также обобщает (20). Действительно, применяя (19) к функции

$$R(z) = P(z) / \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{z}{a_k} \right), \quad |a_k| \geq 1, \quad k = 1, \dots, n,$$

и переходя к пределу при $a_k \rightarrow \infty$, $k = 1, \dots, n$, получим (20).

Автор выражает благодарность факультету математики Хельсинского университета и лично профессору М. Вуоринену за организацию его визита в Финляндию, в ходе которого было положено начало работы над данной статьей.

Список литературы

1. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.
2. Русак В. Н. Рациональные функции как аппарат приближения. Минск: Изд-во БГУ, 1979.
3. Petrushev P. P., Popov V. A. Rational approximation of real functions. Cambridge: Cambridge University Press, 1987.
4. Borwein P. B., Erdelyi T., Zhang J. Chebyshev polynomials and Markov–Bernstein type inequalities for rational spaces // J. London Math. Soc. 1994. V. 50. P. 501–519.
5. Borwein P. B., Erdelyi T. Polynomials and polynomial inequalities. N.Y.: Springer-Verlag, 1995.
6. Borwein P. B., Erdelyi T. Sharp extensions of Bernstein’s inequality to rational spaces // Mathematika. 1996. V. 43. № 2. P. 413–423.
7. Li X., Mohapatra R. N., Rodriguez R. S. Bernstein-type inequalities for rational functions with prescribed poles // J. London Math. Soc. 1995. V. 51. № 3. P. 523–531.
8. Jones R., Li X., Mohapatra R. N., Rodriguez R. S. On the Bernstein inequality for rational functions with a prescribed zero // J. Approximation Theory. 1998. V. 95. № 3. P. 476–496.
9. Li X. Integral formulas and inequalities for rational functions // J. Math. Analysis and Appl. 1997. V. 211. № 2. P. 386–394.
10. Aziz A., Shah W. M. Some refinements of Bernstein-type inequalities for rational functions // Glasnik Mat. 1997. V. 32(52). № 1. P. 29–37.
11. Min G. Inequalities for rational functions with prescribed poles // Can. J. Math. 1998. V. 50. № 1. P. 152–166.
12. Min G. Inequalities for the derivatives of rational functions with real zeros // Acta Math. Hungar. 1999. V. 82. № 1–2. P. 11–20.
13. Лукашов А. Л. Неравенство типа Бернштейна для производных рациональных функций на двух отрезках // Матем. заметки. 1999. Т. 66. № 4. С. 508–514.
14. Бернштейн С. Н. Собрание сочинений. Т. 1. М.: Изд-во АН СССР, 1952.
15. Виденский В. С. Некоторые оценки производных от рациональных дробей // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1962. Т. 26. № 3. С. 415–426.
16. Turan P. Über die ableitung von polynomen // Compositio Math. 1939. V. 7. P. 89–95.
17. Дубинин В. Н., Ким В. Ю. Приведенные модули и неравенства для полиномов // Зап. научн. семин. ПОМИ. 2000. Т. 263. С. 70–83.

Институт прикладной математики ДВО РАН, г. Владивосток
 E-mail: dubinin@iam-mail.febras.ru

Поступило в редакцию
 09.I.2001