Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Козырев, Теория всплесков как p -адический спектральный анализ, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2002, том 66, выпуск 2, 149–158

DOI: <https://doi.org/10.4213/im381>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 14:16:48

УДК 517.58+517.53.02

С. В. Козырев

Теория всплесков как p -адический спектральный анализ

Построен новый ортонормированный базис из собственных функций для оператора Владимирова p -адического дробного дифференцирования. Построено отображение p -адических чисел на вещественные числа (p -адическая замена переменных), переводящее меру Хаара на поле p -адических чисел в меру Лебега на положительной полупрямой. p -адическая замена переменных (для $p = 2$) задает эквивалентность между построенным базисом из собственных функций для оператора Владимирова и базисом из всплесков (вейвлетов) на $L^2(\mathbb{R}_+)$, порожденных всплеском Хаара. Это означает, что теория всплесков может рассматриваться как p -адический спектральный анализ.

Библиография: 17 наименований.

§ 1. Введение

В настоящей работе строится новый ортонормированный базис из собственных векторов оператора Владимирова p -адического дробного дифференцирования. Этот базис обладает замечательными свойствами: анализ всплесков (вейвлетов) после p -адической замены переменных переходит в разложение по построенному базису.

Пример базиса из собственных векторов оператора Владимирова можно найти в [1]. Другой пример базиса из собственных функций оператора Владимирова был построен в [2]–[4]. Эти базисы и базис, построенный в настоящей работе, состоят из локально постоянных функций с носителями на p -адических дисках.

Мы проверим, что построенный базис из собственных функций оператора Владимирова (для $p = 2$) эквивалентен базису всплесков в $L^2(\mathbb{R}_+)$, порожденному всплеском Хаара. Эта эквивалентность задается p -адической заменой переменных: непрерывным отображением p -адических чисел на вещественные числа, сохраняющим меру. Это означает, что анализ всплесков может рассматриваться как p -адический спектральный анализ (разложение функций по собственным векторам оператора Владимирова p -адического дробного дифференцирования).

Введение в p -адический анализ можно найти в [1], [5]; p -адический анализ и p -адическая математическая физика привлекают большой интерес (см. [1], [6], [7]). В частности, были введены p -адические модели в теории струн (см. [8], [9]), были

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке ИНТАС (грант № 9900545), Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 990100866) и CRDF (грант № 10105).

исследованы p -адическая квантовая механика [10] и p -адическая квантовая гравитация [11]. p -адический анализ применялся для исследования спонтанного нарушения репличной симметрии (см. [12]–[15]).

Будем использовать следующие обозначения. Поле Q_p p -адических чисел есть пополнение поля рациональных чисел Q по p -адической норме на Q . Эта норма определяется следующим образом. Произвольное рациональное число x может быть записано в виде $x = p^\gamma \frac{m}{n}$, где m и n не делятся на p ; p -адическая норма рационального числа $x = p^\gamma \frac{m}{n}$ равна $|x|_p = p^{-\gamma}$.

Норма на Q_p удовлетворяет сильному неравенству треугольника

$$|x + y|_p \leq \max(|x|_p, |y|_p).$$

Будем рассматривать диски в Q_p вида $\{x \in Q_p : |x - x_0|_p \leq p^{-k}\}$. Например, кольцо Z_p целых p -адических чисел есть диск $\{x \in Q_p : |x|_p \leq 1\}$, являющийся пополнением целых чисел по p -адической норме. Диски в ультраметрических пространствах имеют следующие основные свойства:

- 1) каждая точка диска является его центром;
- 2) два диска либо не пересекаются, либо один диск содержит другой.

p -адическое преобразование Фурье F функции $f(x)$ определяется следующим образом:

$$F[f](\xi) = \int_{Q_p} \chi(\xi x) f(x) d\mu(x).$$

Здесь $d\mu(x)$ – мера Хаара на Q_p . Обратное преобразование Фурье имеет вид

$$F^{-1}[g](x) = \int_{Q_p} \chi(-\xi x) g(\xi) d\mu(\xi),$$

где $\chi(\xi x)$ – характер поля p -адических чисел. В частности, преобразование Фурье характеристической функции $\Omega(x)$ диска радиуса 1 с центром в нуле (функции, равной 1 на диске и 0 вне диска) есть функция того же вида:

$$F[\Omega](\xi) = \Omega(\xi).$$

В настоящей работе мы используем следующий оператор Владимирова D^α дробного p -адического дифференцирования, определенный как (см. [1])

$$D^\alpha f(x) = F^{-1} |\xi|_p^\alpha F[f](x) = \frac{p^\alpha - 1}{1 - p^{-1-\alpha}} \int_{Q_p} \frac{f(x) - f(y)}{|x - y|_p^{1+\alpha}} d\mu(y). \quad (1)$$

Здесь F – (p -адическое) преобразование Фурье, второе равенство выполнено для $\alpha > 0$.

Сведения по p -адическому анализу можно найти в [1], [5].

§ 2. p -адиический спектральный анализ

Построим ортонормированный базис из собственных векторов оператора Владимирова.

Следующая лемма дает основной технический результат.

ЛЕММА 1. *Функция*

$$\psi(x) = \chi(p^{-1}x)\Omega(|x|_p) \quad (2)$$

является собственным вектором оператора Владимирова:

$$D^\alpha \psi(x) = p^\alpha \psi(x).$$

Заметим, что собственное значение для $\psi(x)$ совпадает с собственным значением для характера $\chi(p^{-1}x)$:

$$D^\alpha \chi(p^{-1}x) = p^\alpha \chi(p^{-1}x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим, что $\psi(x)$ есть собственный вектор оператора Владимирова. Имеем

$$\begin{aligned} D^\alpha \psi(x) &= \frac{p^\alpha - 1}{1 - p^{-1-\alpha}} \int \frac{\psi(x) - \psi(y)}{|x - y|_p^{1+\alpha}} d\mu(y) \\ &= \frac{p^\alpha - 1}{1 - p^{-1-\alpha}} \int \frac{\chi(p^{-1}x)\Omega(|x|_p) - \chi(p^{-1}y)\Omega(|y|_p)}{|x - y|_p^{1+\alpha}} d\mu(y) \\ &= \chi(p^{-1}x) \frac{p^\alpha - 1}{1 - p^{-1-\alpha}} \int \frac{\Omega(|x|_p) - \chi(p^{-1}(y-x))\Omega(|y|_p)}{|x - y|_p^{1+\alpha}} d\mu(y). \end{aligned} \quad (3)$$

Вычислим интеграл в формуле (3) для двух случаев.

1) Пусть $|x|_p \leq 1$. В этом случае интеграл в (3) равен

$$\int \frac{1 - \chi(p^{-1}(y-x))\Omega(|y|_p)}{|x - y|_p^{1+\alpha}} d\mu(y).$$

Так как каждая точка p -адиического диска является его центром, мы получим, что для $|x|_p \leq 1$ выполнено $\Omega(|y|_p) = \Omega(|x - y|_p)$ и, следовательно, интеграл равен

$$\int \frac{1 - \chi(p^{-1}(y-x))\Omega(|y-x|_p)}{|x - y|_p^{1+\alpha}} d\mu(y) = \int \frac{1 - \chi(p^{-1}z)\Omega(|z|_p)}{|z|_p^{1+\alpha}} d\mu(z).$$

2) Пусть $|x|_p > 1$. Для интеграла в формуле (3) получаем

$$-\frac{1}{|x|_p^{1+\alpha}} \int_{|y|_p \leq 1} \chi(p^{-1}(y-x)) d\mu(y) = 0.$$

Это доказывает, что $\psi(x)$ есть собственный вектор для оператора Владимирова, отвечающий собственному значению:

$$\begin{aligned} D^\alpha \psi(x) &= \psi(x) \frac{p^\alpha - 1}{1 - p^{-1-\alpha}} \int \frac{1 - \chi(p^{-1}z)\Omega(|z|_p)}{|z|_p^{1+\alpha}} d\mu(z) \\ &= \psi(x) \frac{p^\alpha - 1}{1 - p^{-1-\alpha}} \left(p^{-1} \sum_{i=0}^{p-1} (1 - \chi(p^{-1}i)) + (1 - p^{-1}) \sum_{\gamma=1}^{\infty} p^\gamma p^{-(1+\alpha)\gamma} \right) \\ &= p^\alpha \psi(x), \end{aligned}$$

что завершает доказательство леммы.

Из леммы 1 следует, что

$$D^\alpha \psi(ax + b) = |a|_p^\alpha p^\alpha \psi(ax + b). \quad (4)$$

Можно проверить, что множество (интегрируемых) функций $\psi(ax + b)$ (для различных a, b) есть полная система в гильбертовом пространстве $L^2(Q_p)$. Более того, верна следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. *Набор функций $\{\psi_{\gamma j n}\}$,*

$$\begin{aligned} \psi_{\gamma j n}(x) &= p^{-\frac{\gamma}{2}} \chi(p^{\gamma-1} j x) \Omega(|p^\gamma x - n|_p), \\ \gamma \in \mathbb{Z}, \quad n \in Q_p/Z_p, \quad j = 1, \dots, p-1, \end{aligned} \quad (5)$$

есть ортонормированный базис в $L^2(Q_p)$ из собственных векторов оператора Владимирова D^α :

$$D^\alpha \psi_{\gamma j n} = p^{\alpha(1-\gamma)} \psi_{\gamma j n}. \quad (6)$$

Здесь $n = \sum_{i=1}^m n_i p^{-i}$, $n_i = 0, \dots, p-1$, — параметр на группе Q_p/Z_p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим скалярное произведение

$$\begin{aligned} \langle \psi_{\gamma j n}, \psi_{\gamma' j' n'} \rangle &= \int_{Q_p} p^{-\frac{\gamma}{2}} \chi(-p^{\gamma-1} j x) \Omega(|p^\gamma x - n|_p) p^{-\frac{\gamma'}{2}} \\ &\quad \times \chi(p^{\gamma'-1} j' x) \Omega(|p^{\gamma'} x - n'|_p) d\mu(x). \end{aligned} \quad (7)$$

Пусть $\gamma \leq \gamma'$. Тогда произведение следующих характеристических функций равно характеристической функции или нулю:

$$\Omega(|p^\gamma x - n|_p) \Omega(|p^{\gamma'} x - n'|_p) = \Omega(|p^\gamma x - n|_p) \Omega(|p^{\gamma'-\gamma} n - n'|_p).$$

Поскольку $n' \in Q_p/Z_p$, величина $\Omega(|p^{\gamma'-\gamma} n - n'|_p)$ не равна нулю (и равна единице) для

$$n' = p^{\gamma'-\gamma} n.$$

Для скалярного произведения (7) получаем

$$\begin{aligned} & \int_{Q_p} p^{-\frac{\gamma}{2}} \chi(-p^{\gamma-1} j x) \Omega(|p^\gamma x - n|_p) p^{-\frac{\gamma'}{2}} \chi(p^{\gamma'-1} j' x) \\ & \times \Omega(|p^\gamma x - n|_p) \Omega(|p^{\gamma'-\gamma} n - n'|_p) d\mu(x). \end{aligned} \quad (8)$$

Рассмотрим $\gamma < \gamma'$. Тогда для интеграла (8) мы получим

$$\int_{Q_p} p^{-\frac{\gamma}{2}} p^{-\frac{\gamma'}{2}} \chi(-p^{\gamma-1} j x) \chi(p^{\gamma'-\gamma-1} j' n) \Omega(|p^\gamma x - n|_p) \Omega(|p^{\gamma'-\gamma} n - n'|_p) d\mu(x) = 0.$$

Следовательно, скалярное произведение (7) может быть ненулевым только для $\gamma = \gamma'$, и для $\gamma = \gamma'$ интеграл (8) равен

$$\int_{Q_p} p^{-\gamma} \chi(-p^{\gamma-1} j x) \chi(p^{\gamma-1} j' x) \Omega(|p^\gamma x - n|_p) \Omega(|n - n'|_p) d\mu(x).$$

Поскольку $n, n' \in Q_p/Z_p$, то выполнено равенство

$$\Omega(|n - n'|_p) = \delta_{nn'},$$

следовательно, для (7) получаем

$$\begin{aligned} \langle \psi_{\gamma j n}, \psi_{\gamma' j' n'} \rangle &= \delta_{\gamma \gamma'} \delta_{nn'} \int_{Q_p} p^{-\gamma} \chi(p^{\gamma-1} (j' - j) x) \Omega(|p^\gamma x - n|_p) d\mu(x) \\ &= \delta_{\gamma \gamma'} \delta_{nn'} \delta_{jj'}, \end{aligned}$$

что доказывает ортонормальность векторов $\psi_{\gamma j n}$.

Для проверки того, что набор векторов $\{\psi_{\gamma j n}\}$ есть ортонормированный базис (есть полная система в $L^2(Q_p)$), используем равенство Парсеваля.

Поскольку набор индикаторов (характеристических функций) p -адических дисков полон в $L^2(Q_p)$, а множество векторов $\{\psi_{\gamma j n}\}$ инвариантно относительно сдвигов и растяжений $x \mapsto p^n x$, $x \in Q_p$, для доказательства того, что $\{\psi_{\gamma j n}\}$ есть полная система, достаточно проверить равенство Парсеваля для индикатора $\Omega(|x|_p)$.

Имеем

$$\langle \Omega(|x|_p), \psi_{\gamma j n} \rangle = p^{-\frac{\gamma}{2}} \theta(\gamma) \delta_{n0}, \quad \theta(\gamma) = 0, \quad \gamma \leq 0, \quad \theta(\gamma) = 1, \quad \gamma \geq 1. \quad (9)$$

Отсюда для функции $\Omega(|x|_p)$ следует равенство Парсеваля

$$\sum_{\gamma, j, n} |\langle \Omega(|x|_p), \psi_{\gamma j n} \rangle|^2 = \sum_{\gamma=1}^{\infty} (p-1) p^{-\gamma} = 1 = |\langle \Omega(|x|_p), \Omega(|x|_p) \rangle|^2,$$

доказывающее, что $\{\psi_{\gamma j n}\}$ есть ортонормированный базис в $L^2(Q_p)$.

Из формулы (4) следует, что базис $\{\psi_{\gamma j n}\}$ есть ортонормированный базис собственных векторов для оператора Владимирова D^α с собственными значениями (6). Это завершает доказательство теоремы.

§ 3. Связь базиса $\{\psi_{\gamma j n}\}$ со всплесками

Обсудим связь построенного базиса $\{\psi_{\gamma j n}\}$ с базисом всплесков в пространстве квадратично интегрируемых функций $L^2(\mathbb{R}_+)$ на положительной полупрямой. Базис всплесков (или вейвлетов) в $L^2(\mathbb{R}_+)$ есть базис, состоящий из сдвигов и растяжений базисного всплеска (“mother wavelet function” [16]).

Простейший пример такой функции есть всплеск Хаара

$$\Psi(x) = \chi_{[0, \frac{1}{2}]}(x) - \chi_{[\frac{1}{2}, 1]}(x) \quad (10)$$

(разность двух характеристических функций).

Базис всплесков в $L^2(\mathbb{R}_+)$ (или базис из разномасштабных всплесков, “multi-resolution wavelets”) есть базис

$$\Psi_{\gamma n}(x) = 2^{-\frac{\gamma}{2}} \Psi(2^{-\gamma} x - n), \quad \gamma \in \mathbb{Z}, \quad n \geq 0 \in \mathbb{Z}. \quad (11)$$

Рассмотрим p -адическую замену переменных, т. е. сюръективное отображение

$$\begin{aligned} \rho: Q_p &\rightarrow \mathbb{R}_+, \\ \rho: \sum_{i=\gamma}^{\infty} x_i p^i &\mapsto \sum_{i=\gamma}^{\infty} x_i p^{-i-1}, \quad x_i = 0, \dots, p-1, \quad \gamma \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (12)$$

Это отображение не является взаимно однозначным. Отображение ρ непрерывно, более того, верна следующая лемма.

ЛЕММА 3. *Отображение ρ удовлетворяет неравенству Гёльдера:*

$$|\rho(x) - \rho(y)| \leq |x - y|_p. \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим p -адические числа

$$x = \sum_{i=\alpha}^{\infty} x_i p^i, \quad y = \sum_{i=\beta}^{\infty} y_i p^i.$$

Без потери общности будем считать, что $\alpha \leq \beta$. Тогда

$$\rho(x) - \rho(y) = \sum_{i=\alpha}^{\beta-1} x_i p^i + \sum_{i=\beta}^{\infty} (x_i - y_i) p^i.$$

Рассмотрим следующие два случая.

1) Пусть $\alpha < \beta$. Тогда

$$|\rho(x) - \rho(y)| \leq (p-1) \sum_{i=\alpha}^{\infty} p^{-i-1} = |x - y|_p.$$

2) Пусть $\alpha = \beta$. Тогда $|x - y|_p = p^{-\gamma}$, $\gamma > \alpha$. При этом

$$\begin{aligned}\rho(x) - \rho(y) &= \sum_{i=\gamma}^{\infty} (x_i - y_i) p^{-i-1}, \\ |\rho(x) - \rho(y)| &\leq (p-1) \sum_{i=\gamma}^{\infty} p^{-i-1} = p^{-\gamma} = |x - y|_p,\end{aligned}$$

что завершает доказательство леммы.

Сужение ρ на Q_p/Z_p есть взаимно однозначное отображение:

$$\rho: Q_p/Z_p \rightarrow \mathbb{N},$$

где $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, включающее нуль. Здесь Q_p/Z_p – группа (по сложению по модулю 1) чисел вида

$$x = \sum_{i=\gamma}^{-1} x_i p^i.$$

ЛЕММА 4. Для $n \in Q_p/Z_p$ и $m, k \in \mathbb{Z}$ отображение ρ удовлетворяет условиям

$$\rho: p^m n + p^k Z_p \rightarrow p^{-m} \rho(n) + [0, p^{-k}], \quad (14)$$

$$\rho: Q_p \setminus \{p^m n + p^k Z_p\} \rightarrow \mathbb{R}_+ \setminus \{p^{-m} \rho(n) + [0, p^{-k}]\}, \quad (15)$$

верным с точностью до конечного множества точек.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим для простоты случай $m, k = 0$. Пусть n принадлежит Q_p/Z_p и имеет вид

$$n = \sum_{i=\gamma}^{-1} n_i p^i;$$

тогда

$$n - 1 = \sum_{i=\gamma}^{-1} n_i p^i + \sum_{i=0}^{\infty} (p-1) p^i.$$

Применяя к n и $n - 1$ отображение ρ , получим

$$\begin{aligned}\rho(n) &= \sum_{i=\gamma}^{-1} n_i p^{-i-1}, \\ \rho(n-1) &= \rho\left(\sum_{i=\gamma}^{-1} n_i p^i + \sum_{i=0}^{\infty} (p-1) p^i\right) \\ &= \sum_{i=\gamma}^{-1} n_i p^{-i-1} + \sum_{i=0}^{\infty} (p-1) p^{-i-1} = \rho(n) + 1.\end{aligned}$$

Применив два раза формулу (13) для $y = n$ и $y = n - 1$, докажем, что $n + Z_p$ отображается в $\rho(n) + [0, 1]$. Поскольку отображение $Q_p/Z_p \rightarrow \mathbb{N}$ взаимно однозначно, это доказывает лемму.

ЛЕММА 5. *Отображение ρ переводит меру Хаара μ на Q_p в меру Лебега l на $\mathbb{R}_+$: для измеримого подмножества $X \subset Q_p$ имеем*

$$\mu(X) = l(\rho(X)),$$

или, в сокращенной записи, $\rho: d\mu(x) \mapsto dx$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 4 следует, что шары в Q_p отображаются на отрезки в $\mathbb{R}_+$ с сохранением меры. Отображение $\rho: Q_p \rightarrow \mathbb{R}_+$ сюръективно, причем непересекающиеся шары отображаются на отрезки, которые либо не пересекаются, либо пересекаются по множеству нулевой меры (снова по лемме 4). Это доказывает лемму.

Из леммы 5 следует, что сопряженное отображение

$$\rho^*: L^2(\mathbb{R}_+) \rightarrow L^2(Q_p), \quad \rho^* f(x) = f(\rho(x)), \quad (16)$$

есть унитарный оператор.

Прямым следствием леммы 4 является

ЛЕММА 6. *Всплеск Хаара (10) для $p = 2$ при отображении ρ переходит в функцию (2):*

$$\rho^*: \Psi \mapsto \psi. \quad (17)$$

Эту формулу следует понимать как равенство в L^2 : на множестве точек нулевой меры отображение (17) может не выполняться.

ТЕОРЕМА 7. *Для $p = 2$ отображение ρ переводит ортонормированный базис (11) всплесков на $L^2(\mathbb{R}_+)$, порожденный всплеском Хаара, на базис (5) из собственных векторов для оператора Владимирова:*

$$\rho^*: \Psi_{\gamma\rho(n)}(x) \mapsto (-1)^n \psi_{\gamma 1n}(x). \quad (18)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Символом $(-1)^n$ в (18) для $n \in Q_p/Z_p$, $n = \sum_{i=\gamma}^{-1} n_i p^i$, обозначаем

$$(-1)^n = (-1)^{\sum_{i=\gamma}^{-1} n_i p^i},$$

где степень в правой части равенства будем понимать как рациональное число.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$2^{-\gamma} \rho(x) = \rho(2^\gamma x). \quad (19)$$

Для $\rho(n) \in \mathbb{N}$ из леммы 4 получаем

$$\chi_{[0,1]}(\rho(x) - \rho(n)) = \chi_{[0,1]}(\rho(x - n)) \quad (20)$$

(почти всюду). Аналогично,

$$\chi_{[0, \frac{1}{2}]}(\rho(x) - \rho(n)) = \chi_{[0, \frac{1}{2}]}(\rho(x - n)). \quad (21)$$

Из (11), используя (19)–(21), получим

$$\begin{aligned} \Psi_{\gamma\rho(n)}(\rho(x)) &= 2^{-\frac{\gamma}{2}} \Psi(2^{-\gamma}\rho(x) - \rho(n)) \\ &= 2^{-\frac{\gamma}{2}} \Psi(\rho(2^\gamma x - n)) = 2^{-\frac{\gamma}{2}} \psi(2^\gamma x - n). \end{aligned}$$

Последнее равенство следует из (17).

Из (5) следует, что для $p = 2$

$$\psi_{\gamma 1n}(x) = 2^{-\frac{\gamma}{2}} \chi(2^{\gamma-1}x) \Omega(|2^\gamma x - n|_2) = (-1)^n 2^{-\frac{\gamma}{2}} \psi(2^\gamma x - n),$$

что доказывает формулу (18) и завершает доказательство теоремы.

Следовательно, после p -адической замены переменных (12) анализ всплесков становится p -адическим спектральным анализом (разложением функций по собственным векторам оператора Владимирова p -адического дробного дифференцирования).

Используя эту интерпретацию, будем называть базис (5) *базисом всплесков* (или *базисом p -адических всплесков*).

С помощью отображения (16) можно перенести действие оператора Владимирова в пространство $L^2(\mathbb{R}_+)$, определив оператор

$$\partial_p^\alpha f(x) = \rho^{*-1} D^\alpha \rho^* f(x)$$

(отметим, что D^α и ρ^* зависят от p).

Легко видеть, что

$$\partial_p^\alpha f(x) = \frac{p^\alpha - 1}{1 - p^{-1-\alpha}} \int_0^\infty \frac{f(x) - f(y)}{|\rho^{-1}(x) - \rho^{-1}(y)|_p^{1+\alpha}} dy, \quad (22)$$

где ρ^{-1} – обратное отображение к ρ . Поскольку ρ не является взаимно однозначным отображением, отображение ρ^{-1} , вообще говоря, многозначно, но многозначность сосредоточена на множестве нулевой меры, что делает определение (22) корректным.

Автор благодарен В. С. Владимирову, И. В. Воловичу, В. А. Аветисову, А. Х. Биккулову, В. П. Михайлову и А. К. Гушину за обсуждение вопросов, связанных с настоящей работой.

Список литературы

1. Владимиров В. С., Волович И. В., Зеленов Е. И. p -Адический анализ и математическая физика. М.: Наука, 1994.
2. Владимиров В. С. О спектрах некоторых псевдодифференциальных операторов над полем p -адических чисел // Алгебра и анализ. 1990. Т. 2. С. 107–124.
3. Kochubei A. N. Additive and multiplicative fractional differentiations over the field of p -adic numbers // p -adic Functional Analysis. Lect. Notes Pure Appl. Math. V. 192. N. Y.: Dekker, 1997. P. 275–280.

4. *Vladimirov V. S.* Ramified characters of Idele groups of one-class quadratic fields // Тр. МИАН. 1999. Т. 224. С. 107–114.
5. *Боревич З. И., Шафаревич И. Р.* Теория чисел. М.: Наука, 1985.
6. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции над полем p -адических чисел // УМН. 1989. Т. 43. № 5. С. 17–53.
7. *Khrennikov A.* p -adic valued distributions in mathematical physics. Dordrecht: Kluwer Academic Publ, 1994.
8. *Volovich I. V.* p -adic String // Class. Quantum Gravity. 1987. V. 4. P. L83–L87.
9. *Freund P. G. O., Olson M.* Nonarchimedean strings // Phys. Lett. B. 1987. V. 199. P. 186.
10. *Vladimirov V. S., Volovich I. V.* p -adic quantum mechanics // Commun. Math. Phys. 1989. V. 123. P. 659–676.
11. *Aref'eva I. Ya., Dragovic B., Frampton P., Volovich I. V.* Wave function of the universe and p -adic gravity // Mod. Phys. Lett. A. 1991. V. 6. P. 4341–4358.
12. *Avetisov V. A., Bikulov A. H., Kozyrev S. V.* Application of p -adic analysis to models of spontaneous breaking of replica symmetry // J. Phys. A. 1999. V. 32. P. 8785–8791; <http://xxx.lanl.gov/abs/cond-mat/9904360>.
13. *Parisi G., Sourlas N.* p -adic numbers and replica symmetry breaking // European Phys. J. B. 2000. V. 14. P. 535.
14. *Carlucci D. M., De Dominicis C.* On the replica Fourier transform. <http://xxx.lanl.gov/abs/cond-mat/9709200>.
15. *De Dominicis C., Carlucci D. M., Temesvari T.* Replica Fourier transform on ultrametric trees and block diagonalizing of multireplica matrices // J. Phys. I France. 1997. V. 7. P. 105–115; <http://xxx.lanl.gov/abs/cond-mat/9703132>.
16. *Daubechies I.* Orthonormal bases of compactly supported wavelets // Comm. Pure Appl. Math. 1988. V. 41. P. 906.
17. *Daubechies I.* The wavelet transform, time frequency localization and signal analysis // IEEE Trans. Inform. Theory. 1990. V. 36. P. 961.

Поступило в редакцию
23.II.2001