Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Г. Танкеев, Об арифметике и геометрии общего гиперповерхностного сечения,
Изв. РАН. Сер. матем., 2002, том 66, выпуск 2, 173–204

DOI: <https://doi.org/10.4213/im383>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 14:28:46

УДК 512.6

С. Г. Танкеев

Об арифметике и геометрии общего гиперповерхностного сечения

Если гипотеза Ходжа (соответственно, гипотеза Тэйта или гипотеза Мамфорда–Тэйта) выполняется для гладкого проективного многообразия X над полем k характеристики нуль, то она верна для общего члена X_t k -рационального пучка Лефшеца гиперповерхностных сечений X достаточно высокой степени. Гипотеза Мамфорда–Тэйта верна для $\mathbb{Q}$ -структуры Ходжа, ассоциированной с исчезающими циклами на X_t . Если трансцендентная часть вторых когомологий поверхности S типа КЗ над числовым полем является абсолютно неприводимым модулем относительно действия группы Ходжа $Hg(S)$, то точечная схема Гильберта $\text{Hilb}^2(S)$ является гиперкэлеровым четырехмерным многообразием, удовлетворяющим гипотезам Ходжа, Тэйта и Мамфорда–Тэйта.

Библиография: 30 наименований.

Введение

Пусть X – гладкое проективное многообразие над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел.

ГИПОТЕЗА ХОДЖА ($\text{Hodge}^r(X)$ [11]). Для данного натурального числа r $\mathbb{Q}$ -пространство $H^{2r}(X, \mathbb{Q}) \cap H^{r,r}(X, \mathbb{C})$ порождается классами алгебраических циклов коразмерности r на X .

Если $\text{Hodge}^r(X)$ верна для любого натурального числа r , то мы говорим, что гипотеза Ходжа $\text{Hodge}(X)$ выполняется для X .

Пусть $k \hookrightarrow \mathbb{C}$ – конечно порожденное расширение поля $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, и пусть X – гладкое проективное многообразие над k . Рассмотрим естественное l -адическое представление в этальных когомологиях $X \otimes_k \bar{k}$:

$$\rho_l^{(i)}: \text{Gal}(\bar{k}/k) \rightarrow \text{GL}(H^i(X \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Q}_l)).$$

ГИПОТЕЗА МАМФОРДА–ТЭЙТА ($\text{Mumford–Tate}^i(X)$ [17]). Существует естественный изоморфизм алгебр Ли

$$\text{Lie Im}(\rho_l^{(i)}) \simeq \text{Lie MT}(H^i(X \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q}))(\mathbb{Q}_l),$$

где $\text{MT}(H^i(X \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q}))$ – группа Мамфорда–Тэйта, ассоциированная с $\mathbb{Q}$ -структурой Ходжа на $H^i(X \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q})$.

Если $\text{Mumford–Tate}^i(X)$ верна для любого натурального числа i , то мы говорим, что гипотеза $\text{Mumford–Tate}(X)$ выполняется для X .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 00-01-00058), при частичной поддержке DFG-гранта университета Эссена (1999) и Института высших научных исследований (Бюр-сюр-Иветт, 2000). Автор благодарит сотрудников институтов за их теплое гостеприимство и превосходные условия для работы.

ГИПОТЕЗА ТЭЙТА ($\text{Tate}^r(X)$ [26]). Для данного натурального числа r $\mathbb{Q}_l$ -пространство

$$[H^{2r}(X \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Q}_l(r))]^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}$$

порождается классами k -рациональных алгебраических циклов коразмерности r на X .

Если $\text{Tate}^r(X)$ верна для любого натурального числа r , то мы говорим, что гипотеза Тэйта $\text{Tate}(X)$ выполняется для X .

В настоящей статье мы доказываем следующий основной результат.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. *Если гипотеза Ходжа (соответственно, гипотеза Тэйта или гипотеза Мамфорда–Тэйта) выполняется для гладкого проективного многообразия X над полем k характеристики нуль, то она выполняется для общего члена X_t k -рационального пучка Лефшеца гиперповерхностных сечений X достаточно высокой степени.*

Более точно, мы развиваем некоторые идеи работ [22], [25], чтобы доказать общие результаты, относящиеся к алгебраическим циклам на общем гиперповерхностном сечении многообразия.

ТЕОРЕМА 0.1. *Если гипотеза Ходжа выполняется для гладкого проективного многообразия X , то она выполняется для общего (типичного или общего в смысле А.Вейля) члена X_t пучка Лефшеца гиперповерхностных сечений X достаточно высокой степени.*

ТЕОРЕМА 0.2. *Предположим, что k – конечно порожденное расширение поля $\mathbb{Q}$ рациональных чисел. Пусть X – гладкое проективное d -мерное многообразие над k , и пусть $X_t \hookrightarrow X$ – общий член k -рационального пучка Лефшеца $(X_s)_{s \in \mathbb{P}_k^1}$ гиперплоских сечений X .*

Тогда для любого натурального числа $r < d/2$ имеем $\text{Tate}^r(X_t) \Leftrightarrow \text{Tate}^r(X)$. Более того, если d – нечетное число, то $\text{Tate}(X_t) \Rightarrow \text{Tate}(X)$; если d – четное число, то для любого натурального числа $r \neq d/2$ имеем $\text{Tate}(X_t) \Rightarrow \text{Tate}^r(X)$.

Если гипотеза Тэйта выполняется для X , то она верна для X_t .

Следующая теорема дает описание алгебры Ли образа глобальной геометрической монодромии в $\mathbb{Q}_l$ -пространстве E_{sl}^{d-1} исчезающих циклов.

ТЕОРЕМА 0.3. *Пусть X – гладкое проективное d -мерное многообразие над полем k характеристики нуль, $(X_s)_{s \in \mathbb{P}_k^1}$ – k -рациональный пучок Лефшеца гиперповерхностных сечений X степени t , $S_k \hookrightarrow \mathbb{P}_k^1$ – (конечный) исключительный локус пучка.*

Рассмотрим глобальную геометрическую монодромию

$$\bar{\rho}_{\bar{s}}: \hat{\pi}_1(\mathbb{P}_k^1 \setminus S_k, \bar{s}) \rightarrow \text{GL}(E_{sl}^{d-1})(\mathbb{Q}_l).$$

Если d – нечетное число и t достаточно большое, то для любой геометрической точки $\bar{s} \rightarrow s \in \mathbb{P}_k^1 \setminus S_k$ существует канонический изоморфизм $\text{Lie Im}(\bar{\rho}_{\bar{s}}) \simeq \text{so}(E_{sl}^{d-1})$.

Если d – четное число, то по хорошо известной теореме Каждана–Маргулиса $\text{Lie Im}(\bar{\rho}_{\bar{s}}) \simeq \text{sp}(E_{sl}^{d-1})$ [6, теорема 5.10]. Поэтому мы приходим к следующему результату.

СЛЕДСТВИЕ 0.4. Пусть X – гладкое проективное d -мерное многообразие над полем k характеристики нуль, $(X_s)_{s \in \mathbb{P}_k^1}$ – k -рациональный пучок Лефшеца гиперповерхностных сечений X степени t , $S_k \hookrightarrow \mathbb{P}_k^1$ – (конечный) исключительный локус пучка.

Рассмотрим глобальную геометрическую монодромию

$$\bar{\rho}_{\bar{s}}: \hat{\pi}_1(\mathbb{P}_k^1 \setminus S_k, \bar{s}) \rightarrow \mathrm{GL}(E_{\bar{s}l}^{d-1})(\mathbb{Q}_l).$$

Тогда для любой геометрической точки $\bar{s} \rightarrow s \in \mathbb{P}_k^1 \setminus S_k$

$$\mathrm{Lie} \, \mathrm{Im}(\bar{\rho}_{\bar{s}}) \simeq \begin{cases} \mathrm{so}(E_{\bar{s}l}^{d-1}), & \text{если } d - \text{нечетное и } t - \text{достаточно большое,} \\ \mathrm{sp}(E_{\bar{s}l}^{d-1}), & \text{если } d - \text{четное число.} \end{cases}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 0.5. Теорема 4.4.1 из [7] тесно связана с нашей теоремой 0.3 и следствием 0.4. Напомним первый шаг доказательства теоремы 4.4.1 из [7, с. 227]: если компактная l -адическая подгруппа Ли

$$\mathrm{Im}(\bar{\rho}_{\bar{s}}) \hookrightarrow G = \mathrm{Aut}(E_{\bar{s}l}^{d-1})(\mathbb{Q}_l)$$

плотна в топологии Зариского G , то $\mathrm{Im}(\bar{\rho}_{\bar{s}})$ открыта в G .

Это утверждение приведено в [7, с. 227] без доказательства. Поскольку оно не является очевидным, то докажем его в п. 3.2 при следующем дополнительном предположении:

$$\exists U \in \mathrm{Lie} \, \mathrm{Im}(\bar{\rho}_{\bar{s}}): U^2 = 0 \text{ и } \dim \mathrm{Im}(U) = 2;$$

при этом мы используем существование l -адических логарифмов элементов некоторой подгруппы конечного индекса в $\mathrm{Im}(\bar{\rho}_{\bar{s}})$ (заметим, что для нечетного d l -адические логарифмы преобразований Пикара–Лефшеца не определены).

Следующий результат показывает, что гипотеза Мамфорда–Тэйта выполняется для $\mathbb{Q}$ -структуры Ходжа, ассоциированной с исчезающими циклами на общем слое пучка Лефшеца.

ТЕОРЕМА 0.6. Предположим, что k – конечно порожденное расширение поля $\mathbb{Q}$ рациональных чисел. Пусть X – гладкое проективное d -мерное многообразие над k , и пусть $X_t \hookrightarrow X$ – общий член k -рационального пучка Лефшеца $(X_s)_{s \in \mathbb{P}_k^1}$ гиперповерхностных сечений X достаточно высокой степени t . Для канонического l -адического представления

$$\rho_l: \mathrm{Gal}(\overline{k(t)}/k(t)) \rightarrow \mathrm{GL}(E_{tl}^{d-1})(\mathbb{Q}_l)$$

в $\mathbb{Q}_l$ -пространстве исчезающих циклов E_{tl}^{d-1} существует естественный изоморфизм алгебр Ли

$$\mathrm{Lie} \, \mathrm{Im}(\rho_l) \simeq \mathrm{Lie} \, \mathrm{MT}(E_{t\mathbb{C}}^{d-1})(\mathbb{Q}_l),$$

где $\mathrm{MT}(E_{t\mathbb{C}}^{d-1})$ – группа Мамфорда–Тэйта, ассоциированная с $\mathbb{Q}$ -структурой Ходжа на $\mathbb{Q}$ -пространстве исчезающих циклов $E_{t\mathbb{C}}^{d-1} \hookrightarrow H^{d-1}(X_t \otimes_{k(t)} \mathbb{C}, \mathbb{Q})$ (для данных вложений $k(t) \hookrightarrow \overline{k(t)} \hookrightarrow \mathbb{C}$).

ТЕОРЕМА 0.7. *Предположим, что k – конечно порожденное расширение поля $\mathbb{Q}$ рациональных чисел. Пусть X – гладкое проективное d -мерное многообразие над k , и пусть $X_t \hookrightarrow X$ – общий член k -рационального пучка Лефшеца $(X_s)_{s \in \mathbb{P}_k^1}$ гиперповерхностных сечений X степени m .*

Тогда мы имеем

$$\text{Mumford–Tate}^{d-1}(X_t) \Rightarrow \text{Mumford–Tate}^{d-1}(X).$$

Если m достаточно большое, то для любого натурального числа $r \leq d-1$

$$\text{Mumford–Tate}^r(X_t) \Leftrightarrow \text{Mumford–Tate}^r(X)$$

и

$$\text{Mumford–Tate}(X) \Rightarrow \text{Mumford–Tate}(X_t).$$

Четномерное односвязное гладкое проективное многообразие V над полем характеристики нуль называется *гиперкэлеровым*, если $H^0(V, \Omega_V^2)$ одномерно и порождается формой ω , невырожденной во всех точках.

Обозначим через $\text{Hg}(S)$ группу Ходжа гладкой проективной поверхности S типа КЗ [28]. Пусть $T_{\mathbb{Q}}(S)$ – трансцендентная часть $H^2(S, \mathbb{Q})$ (другими словами, ортогональное дополнение подпространства $\text{NS}(S) \otimes \mathbb{Q} = \text{NS}_{\mathbb{Q}}(S) \hookrightarrow H^2(S, \mathbb{Q})$ относительно $\cup$ -произведения). Группа $\text{Hg}(S)$ естественно действует на $T_{\mathbb{Q}}(S)$.

ТЕОРЕМА 0.8. *Пусть S – гладкая проективная поверхность типа КЗ над $\mathbb{C}$. Предположим, что ортогональное дополнение $T_{\mathbb{Q}}(S)$ подпространства $\text{NS}_{\mathbb{Q}}(S) \hookrightarrow H^2(S, \mathbb{Q})$ относительно $\cup$ -произведения является абсолютно неприводимым $\text{Hg}(S)$ -модулем. Тогда:*

а) $H^4(S \times S, \mathbb{Q}) \cap H^{2,2}(S \times S, \mathbb{C})$ порождается классами пересечений дивизоров и классом диагонали $\Delta_S \hookrightarrow S \times S$; в частности, гипотеза Ходжа выполняется для $S \times S$;

б) точечная схема Гильберта $\text{Hilb}^2(S)$, параметризующая конечные замкнутые подсхемы S длины 2, является гладким односвязным проективным гиперкэлеровым четырехмерным многообразием с числом Бетти $b_2 = 23$, и гипотеза Ходжа верна для $\text{Hilb}^2(S)$.

СЛЕДСТВИЕ 0.9. *Пусть S – гладкая проективная поверхность типа КЗ над $\mathbb{C}$. Предположим, что $\text{rank NS}(S) \in \{3, 5, 9, 11, 15, 17, 19\}$. Тогда $T_{\mathbb{Q}}(S)$ – абсолютно неприводимый $\text{Hg}(S)$ -модуль и гипотеза Ходжа верна для $S \times S$ и для $\text{Hilb}^2(S)$.*

ТЕОРЕМА 0.10. *Пусть S – гладкая проективная поверхность типа КЗ над числовым полем $k \hookrightarrow \mathbb{C}$, $[k : \mathbb{Q}] < \infty$. Тогда гипотеза Мамфорда–Тэйта верна для гиперкэлерова четырехмерного многообразия $\text{Hilb}^2(S)$.*

Если ортогональное дополнение $T_{\mathbb{Q}}(S \otimes_k \mathbb{C})$ подпространства $\text{NS}_{\mathbb{Q}}(S \otimes_k \mathbb{C}) \hookrightarrow H^2(S \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q})$ относительно $\cup$ -произведения является абсолютно неприводимым $\text{Hg}(S \otimes_k \mathbb{C})$ -модулем, то для любого натурального числа r $\mathbb{Q}_l$ -пространство

$$[H^{2r}(\text{Hilb}^2(S) \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Q}_l(r))]^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}$$

порождается классами алгебраических циклов коразмерности r на $\text{Hilb}^2(S)$ (другими словами, гипотеза Тэйта верна для $\text{Hilb}^2(S)$).

Автор благодарен Э. Эно и Э. Фивегу за теплое гостеприимство и интересные обсуждения во время стажировки в университете Эссена (ноябрь 1999 г.).

§ 1. Некоторые замечания о гипотезе Ходжа

1.1. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 0.1. Пусть $X_t \hookrightarrow X$ – общий (типичный или общий в смысле А. Вейля) член пучка Лефшеца гиперповерхностных сечений достаточно высокой степени m , $d = \dim X$, E_t^{d-1} – $\mathbb{Q}$ -пространство исчезающих циклов. Имеется каноническое разложение $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа

$$H^{d-1}(X_t, \mathbb{Q}) = H^{d-1}(X, \mathbb{Q}) \oplus E_t^{d-1}. \quad (1.1)$$

Если d – нечетное число, то $d = 2r + 1$ и (1.1) дает разложение

$$H^{2r}(X_t, \mathbb{Q}) = H^{2r}(X, \mathbb{Q}) \oplus E_t^{2r}. \quad (1.2)$$

Пусть H – гиперплоское сечение X . Имеем $\mathcal{O}_X(X_t) = \mathcal{O}_X(mH)$. Из формулы присоединения мы получаем

$$\begin{aligned} \dim H^{d-1,0}(X_t, \mathbb{C}) &= \dim H^0(X_t, \mathcal{O}_{X_t}(K_{X_t})) \\ &\geq \dim H^0(X, \mathcal{O}_X(K_X + mH)) - \dim H^0(X, \mathcal{O}_X(K_X)) \rightarrow +\infty, \\ m &\rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

В частности, для достаточно большого m

$$\dim E_t^{2r} \geq 3 \quad \text{и} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \dim E_t^{2r} = \infty. \quad (1.3)$$

Обозначим через $\text{Aut}(E_t^{2r})$ группу автоморфизмов E_t^{2r} , сохраняющих билинейную форму на E_t^{2r} , индуцированную $\cup$ -произведением в когомологиях. Пусть $S \hookrightarrow \mathbb{P}^1$ – (конечный) исключительный локус пучка, $\rho: \pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus S, t) \rightarrow \text{Aut}(E_t^{2r})$ – глобальная монодромия, и пусть $M(E_t^{2r})$ – замыкание $\text{Im}(\rho)$ в топологии Зариско-го группы $\text{Aut}(E_t^{2r})$. По теореме Делиня [27, доказательство теоремы В] для всех достаточно больших m имеем соотношение

$$\text{Lie } M(E_t^{2r}) = \text{Lie } \text{Aut}(E_t^{2r}). \quad (1.4)$$

Из общей теории групп мультипликативного типа следует, что определить разложение Ходжа $\mathbb{Q}$ -структуры Ходжа V – то же самое, что определить морфизм вещественных алгебраических групп

$$h: R_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(G_m) \rightarrow \text{GL}(V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}),$$

где $R_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(G_m)$ – вещественная алгебраическая группа, полученная из мультипликативной группы G_m ограничением поля скаляров от $\mathbb{C}$ до $\mathbb{R}$.

Пусть $V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = \bigoplus V^{p,q}$ – разложение Ходжа. Элемент $z \in \mathbb{C}^{\times} = R_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(G_m)(\mathbb{R})$ действует на $V^{p,q}$ как умножение на $z^p \bar{z}^q$. Наименьшая $\mathbb{Q}$ -подгруппа в $GL(V)$, группа $\mathbb{R}$ -точек которой содержит $h(R_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(G_m))$, называется *группой Мамфорда–Тэйта* $\mathbb{Q}$ -структуры Ходжа V и обозначается через $MT(V)$.

Пусть

$$U^1 = \{z \in \mathbb{C}^{\times} = R_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(G_m)(\mathbb{R}) \mid |z| = 1\}.$$

Наименьшая $\mathbb{Q}$ -подгруппа в $GL(V)$, группа $\mathbb{R}$ -точек которой содержит $h(U^1)$, называется *группой Ходжа* $\mathbb{Q}$ -структуры Ходжа V и обозначается через $Hg(V)$.

Очевидно, что существует каноническая точная последовательность $\mathbb{Q}$ -групп

$$1 \rightarrow Hg(V) \rightarrow MT(V) \xrightarrow{\det} G_m \rightarrow 1, \\ V \cap V^{p,p} = V^{Hg(V)},$$

$W \hookrightarrow V$ – неприводимая $\mathbb{Q}$ -подструктура Ходжа, если и только если W – неприводимый $Hg(V)$ -подмодуль [10, лемма В.53, следствие В.55, предложение В.54].

Для общей точки $t \in \text{Im}(\rho)$ содержит такую подгруппу Γ конечного индекса, что $\Gamma \hookrightarrow MT(E_t^{2r})$ [5, предложение 7.5], где $MT(E_t^{2r})$ – группа Мамфорда–Тэйта, ассоциированная с $\mathbb{Q}$ -структурой Ходжа на E_t^{2r} . Пусть $Hg(E_t^{2r})$ – группа Ходжа, ассоциированная с E_t^{2r} , и пусть G – замыкание Γ в топологии Зариского группы $\text{Aut}(E_t^{2r})$.

Ясно, что $\Gamma \hookrightarrow G \hookrightarrow Hg(E_t^{2r})$ для достаточно малой Γ , потому что $M(E_t^{2r})$ – полупростая группа [4, следствие 4.2.9], $Hg(E_t^{2r}) \hookrightarrow SL(E_t^{2r})$ [10, лемма В.53] и $\text{Lie } G = \text{Lie } M(E_t^{2r})$ [29, лемма 7.2.1]. Поэтому по соотношению (1.4) получим вложение

$$\text{Lie } \text{Aut}(E_t^{2r}) = \text{Lie } M(E_t^{2r}) = \text{Lie } G \hookrightarrow \text{Lie } Hg(E_t^{2r}).$$

С другой стороны, $\text{Lie } Hg(E_t^{2r}) \hookrightarrow \text{Lie } \text{Aut}(E_t^{2r})$, потому что $\cup$ -произведение на E_t^{2r} инвариантно под действием $U^1 = \{z \in \mathbb{C}^{\times} = R_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(G_m)(\mathbb{R}) \mid |z| = 1\}$ [4, 2.1.16]. Поэтому

$$\text{Lie } Hg(E_t^{2r}) = \text{Lie } \text{Aut}(E_t^{2r}), \quad (1.5)$$

и (1.3) показывает, что для достаточно большого m E_t^{2r} – неприводимая $\mathbb{Q}$ -структура Ходжа.

Поскольку $E_t^{2r} \cap H^{r,r}(X_t, \mathbb{C}) = (E_t^{2r})^{Hg(E_t^{2r})}$ – $\mathbb{Q}$ -подструктура Ходжа неприводимой $\mathbb{Q}$ -структуры Ходжа E_t^{2r} , получаем соотношение $E_t^{2r} \cap H^{r,r}(X_t, \mathbb{C}) = (0)$. Следовательно, по разложению (1.2) имеем

$$H^{2r}(X_t, \mathbb{Q}) \cap H^{r,r}(X_t, \mathbb{C}) = H^{2r}(X, \mathbb{Q}) \cap H^{r,r}(X_t, \mathbb{C}) = H^{2r}(X, \mathbb{Q}) \cap H^{r,r}(X, \mathbb{C}). \quad (1.6)$$

По условию теоремы $H^{2r}(X, \mathbb{Q}) \cap H^{r,r}(X, \mathbb{C})$ порождается классами алгебраических циклов коразмерности r на X , и поэтому из соотношения (1.6) видно, что $H^{2r}(X_t, \mathbb{Q}) \cap H^{r,r}(X_t, \mathbb{C})$ порождается ограничениями классов алгебраических циклов коразмерности r на X (напомним, что канонический морфизм ограничения $H^{2r}(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^{2r}(X_t, \mathbb{Q})$ инъективен). Если $2r < d - 1$, то по слабой теореме Лефшеца морфизм ограничения $H^{2r}(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^{2r}(X_t, \mathbb{Q})$ является изоморфизмом $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа [13, п. 1.4.6]. Поэтому $H^{2r}(X_t, \mathbb{Q}) \cap H^{r,r}(X_t, \mathbb{C})$ порождается ограничениями классов алгебраических циклов коразмерности r на X .

Мы видим, что для $2r \leq \dim X_t$ $\mathbb{Q}$ -пространство $H^{2r}(X_t, \mathbb{Q}) \cap H^{r,r}(X_t, \mathbb{C})$ порождается классами алгебраических циклов коразмерности r на X_t . Поэтому верна гипотеза $\text{Hodge}^r(X_t)$. Более того, для любого $q \leq r$

$$\text{Hodge}^r(X_t) \Rightarrow \text{Hodge}^{d-1-q}(X_t)$$

(см. [13, предложение 3.1]).

Если $2r = \dim X_t = d - 1$, то $\text{Hodge}^q(X_t)$ выполняется для любого $q \in \{0, 1, \dots, r, r+1, \dots, d-1\}$. Поэтому гипотеза Ходжа верна для X_t .

Если $2r = \dim X_t - 1 = d - 2$, то $\text{Hodge}^q(X_t)$ выполняется для любого $q \in \{0, 1, \dots, r, r+1, \dots, d-1\}$. Поэтому гипотеза Ходжа верна для X_t . Теорема доказана.

1.2. СЛЕДСТВИЕ. Пусть X, Y – гладкие проективные многообразия. Если существует сюръективный морфизм $f: X \rightarrow Y$, то $\text{Hodge}(X) \Rightarrow \text{Hodge}(Y)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\dim X > \dim Y$. Пусть $X_t \hookrightarrow X$ – общий член пучка Лефшеца гиперповерхностных сечений X достаточно высокой степени. По теореме 0.1 гипотеза Ходжа выполняется для X_t , и $f|_{X_t}: X_t \rightarrow Y$ – сюръективный морфизм. Поэтому можно использовать индукцию и свести задачу к случаю $\dim X = \dim Y$, который обсуждается в [30, лемма (A.2)]. Для удобства читателя мы приводим доказательство утверждения для этой ситуации.

Формула проекции показывает, что для любого элемента $z \in H^{2r}(Y, \mathbb{Q}) \cap H^{r,r}(Y, \mathbb{C})$ мы имеем

$$f_* f^*(z) = \deg f \cdot z$$

(см. [9, §2.3]). Поскольку $f^*(z) \in H^{2r}(X, \mathbb{Q}) \cap H^{r,r}(X, \mathbb{C})$ и гипотеза Ходжа выполняется для X , то элемент $f^*(z)$ является линейной комбинацией классов алгебраических циклов коразмерности r на X . Поэтому $f_* f^*(z) = \deg f \cdot z$ и z – линейные комбинации классов алгебраических циклов коразмерности r на Y . Следствие доказано.

§ 2. О гипотезе Тэйта

2.1. Предположим, что k – конечно порожденное расширение поля $\mathbb{Q}$ рациональных чисел. Пусть X – гладкое проективное d -мерное многообразие над k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 0.2. Пусть $X_t \hookrightarrow X$ – общий член k -рационального пучка Лефшеца $(X_s)_{s \in \mathbb{P}_k^1}$ гиперплоских сечений X , $d = \dim X$, $S_k \hookrightarrow \mathbb{P}_k^1$ – (конечный) исключительный локус пучка. Для любой геометрической точки $\bar{s} \rightarrow s \in \mathbb{P}_k^1 \setminus S_k$ элемент $X_{\bar{s}}$ является гладким сечением $X \otimes \bar{k}$ гиперплоскостью, и отображение $\bar{s} \rightarrow H^{d-1}(X_{\bar{s}}, \mathbb{Q}_l)$ является локальной системой для этальной топологии над $\mathbb{P}_k^1 \setminus S_k$. Эта локальная система определяет глобальную монодромию

$$\hat{\pi}_1(\mathbb{P}_k^1 \setminus S_k, \bar{s}) \rightarrow \text{GL}(H^{d-1}(X_{\bar{s}}, \mathbb{Q}_l)).$$

Существует точная последовательность

$$1 \rightarrow \hat{\pi}_1(\mathbb{P}_{\bar{k}}^1 \setminus S_{\bar{k}}, \bar{s}) \rightarrow \hat{\pi}_1(\mathbb{P}_k^1 \setminus S_k, \bar{s}) \rightarrow \text{Gal}(\bar{k}/k) \rightarrow 1,$$

где $\hat{\pi}_1(\mathbb{P}_{\bar{k}}^1 \setminus S_{\bar{k}}, \bar{s})$ – геометрическая фундаментальная группа. Ограничение глобальной монодромии на $\hat{\pi}_1(\mathbb{P}_{\bar{k}}^1 \setminus S_{\bar{k}}, \bar{s})$ называется *глобальной геометрической монодромией*.

Можно отождествить локальную систему $\bar{s} \rightarrow H^{d-1}(X \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l)$ с подсистемой локальной системы $\bar{s} \rightarrow H^{d-1}(X_{\bar{s}}, \mathbb{Q}_l)$, действие $\hat{\pi}_1(\mathbb{P}_{\bar{k}}^1 \setminus S_{\bar{k}}, \bar{s})$ на $H^{d-1}(X \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l) \hookrightarrow H^{d-1}(X_{\bar{s}}, \mathbb{Q}_l)$ определяется естественным действием $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ на пространстве $H^{d-1}(X \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l)$.

Хорошо известно, что существует разложение

$$H^{d-1}(X_{\bar{s}}, \mathbb{Q}_l) = i_{\bar{s}}^*(H^{d-1}(X \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l)) \oplus E_{\bar{s}l}^{d-1},$$

где $i_{\bar{s}}: X_{\bar{s}} \hookrightarrow X \otimes \bar{k}$ – каноническое вложение, $E_{\bar{s}l}^{d-1}$ – пространство исчезающих циклов и

$$\text{Im} \left[H^{d-1}(X \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l) \xrightarrow{i_{\bar{s}}^*} H^{d-1}(X_{\bar{s}}, \mathbb{Q}_l) \right] = H^{d-1}(X_{\bar{s}}, \mathbb{Q}_l)^{\hat{\pi}_1(\mathbb{P}_{\bar{k}}^1 \setminus S_{\bar{k}}, \bar{s})}$$

(см. [27, предложение 4.2]; доказательство содержится в [12, следствие 5.6.10]).

Пусть $\bar{t} \rightarrow t$ – общая геометрическая точка $\mathbb{P}_{\bar{k}}^1$, определенная вложением $k(t) \hookrightarrow \bar{k}(t)$. Если d – нечетное число, то $d = 2r + 1$, и мы имеем разложение

$$H^{2r}(X_{\bar{t}}, \mathbb{Q}_l) = i_{\bar{t}}^*(H^{2r}(X \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l)) \oplus E_{\bar{t}l}^{2r}. \quad (2.1)$$

Напомним, что группу $\hat{\pi}_1(\mathbb{P}_{\bar{k}}^1 \setminus S_{\bar{k}}, \bar{t})$ можно отождествить с группой Галуа $\text{Gal}(k(t)_{S_{\bar{k}}}^{\text{un}}/k(t))$, где $k(t)_{S_{\bar{k}}}^{\text{un}}/k(t)$ – максимальное алгебраическое расширение, неразветвленное вне $S_{\bar{k}}$ [15, гл. I, § 5, пример 5.2(b)]. Легко видеть, что действие $\text{Gal}(\bar{k}(t)/k(t))$ на $H^{2r}(X \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l(r)) \hookrightarrow H^{2r}(X_{\bar{t}}, \mathbb{Q}_l(r))$ пропускается через канонические сюръективные морфизмы

$$\text{Gal}(\bar{k}(t)/k(t)) \rightarrow \text{Gal}(k(t)_{S_{\bar{k}}}^{\text{un}}/k(t)) \simeq \hat{\pi}_1(\mathbb{P}_{\bar{k}}^1 \setminus S_{\bar{k}}, \bar{t}) \rightarrow \text{Gal}(\bar{k}/k)$$

и определяется естественным действием $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ на $H^{2r}(X \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l(r))$.

С другой стороны,

$$i_{\bar{t}}^*(H^{2r}(X \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l(r))) = H^{2r}(X_{\bar{t}}, \mathbb{Q}_l(r))^{\hat{\pi}_1(\mathbb{P}_{\bar{k}}^1 \setminus S_{\bar{k}}, \bar{t})}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} [i_{\bar{t}}^*(H^{2r}(X \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l(r)))]^{\text{Gal}(\bar{k}/k)} &= H^{2r}(X_{\bar{t}}, \mathbb{Q}_l(r))^{\hat{\pi}_1(\mathbb{P}_{\bar{k}}^1 \setminus S_{\bar{k}}, \bar{t})} \\ &= H^{2r}(X_{\bar{t}}, \mathbb{Q}_l(r))^{\text{Gal}(\bar{k}(t)/k(t))}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Если гипотеза Тэйта Tate^r(X) выполняется для алгебраических циклов коразмерности r на X , то (2.2) показывает, что $H^{2r}(X_{\bar{t}}, \mathbb{Q}_l(r))^{\text{Gal}(\bar{k}(t)/k(t))}$ порождается ограничениями классов алгебраических циклов с X на X_t , и гипотеза Tate^r(X_t) верна.

Наоборот, если гипотеза Tate^r(X_t) верна, то $H^{2r}(X_{\bar{t}}, \mathbb{Q}_l(r))^{\text{Gal}(\bar{k}(t)/k(t))}$ порождается классами $k(t)$ -рациональных алгебраических циклов коразмерности r

на общем члене X_t пучка Лефшеца. Если $Z_t - k(t)$ -рациональный цикл коразмерности r на X_t , то замыкание такого цикла в топологии Зариского X дает алгебраический k -рациональный цикл Z коразмерности r на X , и

$$Z \cdot_X X_t = Z_t$$

(см. [21]). Следовательно, (2.2) показывает, что $[i_t^*(H^{2r}(X \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l(r)))]^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}$ порождается классами алгебраических циклов, и гипотеза $\text{Tate}^r(X)$ верна.

Следовательно, для $2r = d - 1$ имеем

$$\text{Tate}^r(X) \Leftrightarrow \text{Tate}^r(X_t).$$

Если $2r < d - 1$, то по слабой теореме Лефшеца морфизм ограничения

$$H^{2r}(X \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l(r)) \rightarrow H^{2r}(X_t, \mathbb{Q}_l(r))$$

является изоморфизмом $\text{Gal}(\bar{k}(t)/k(t))$ -модулей [13, п. 1.4]. Поэтому

$$\begin{aligned} [i_t^*(H^{2r}(X \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l(r)))]^{\text{Gal}(\bar{k}/k)} &= [i_t^*(H^{2r}(X \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l(r)))]^{\text{Gal}(\bar{k}(t)/k(t))} \\ &= [H^{2r}(X_t, \mathbb{Q}_l(r))]^{\text{Gal}(\bar{k}(t)/k(t))}, \end{aligned}$$

и, используя замыкание (в топологии Зариского) алгебраического цикла на общем члене пучка Лефшеца, приходим к следующему соотношению:

$$\text{Tate}^r(X) \Leftrightarrow \text{Tate}^r(X_t), \quad 2r \leq d - 1. \quad (2.3)$$

Пусть y – класс k -рационального гиперплоского сечения X и L – оператор, определенный формулой $La = a \cup y$; для $0 \leq 2r \leq d$ отображение

$$L^{d-2r}: H^{2r}(X \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l(r)) \rightarrow H^{2d-2r}(X \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l(d-r))$$

является изоморфизмом $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ -модулей (сильная теорема Лефшеца). Он индуцирует изоморфизм

$$H^{2r}(X \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l(r))^{\text{Gal}(\bar{k}/k)} \simeq H^{2d-2r}(X \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l(d-r))^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}.$$

Поскольку L преобразует алгебраические классы в алгебраические классы, мы получаем следующее соотношение:

$$\text{Tate}^r(X) \Rightarrow \text{Tate}^{d-r}(X), \quad 2r \leq d. \quad (2.4)$$

В частности, имеем

$$\text{Tate}^r(X_t) \Rightarrow \text{Tate}^{d-1-r}(X_t), \quad 2r \leq d - 1. \quad (2.5)$$

Предположим, что d – нечетное число и гипотеза $\text{Tate}(X_t)$ верна. В силу (2.3), (2.4) для любого $q \leq r < d/2$ гипотезы $\text{Tate}^q(X)$ и $\text{Tate}^{d-q}(X)$ верны. Если

$2r = d - 1$, то $\text{Tate}^q(X)$ выполняется для любого $q \in \{0, 1, \dots, r, r + 1, \dots, d\}$. Поэтому гипотеза $\text{Tate}(X)$ верна.

Предположим, что d четно и гипотеза $\text{Tate}(X_t)$ верна. В силу (2.3), (2.4) для любого $q \leq r < d/2$ гипотезы $\text{Tate}^q(X)$ и $\text{Tate}^{d-q}(X)$ верны. Если $2r = d - 2$, то $\text{Tate}^q(X)$ выполняется для любого $q \in \{0, 1, \dots, r, r + 2, \dots, d\}$. Поэтому гипотеза $\text{Tate}^r(X)$ выполняется для любого $r \neq d/2$.

Предположим, что $\text{Tate}(X)$ верна. Из (2.3) следует, что для $2r \leq d - 1$ гипотеза $\text{Tate}^r(X_t)$ верна.

Если $2r = \dim X_t = d - 1$, то в силу (2.5) гипотеза $\text{Tate}^q(X_t)$ выполняется для любого $q \in \{0, 1, \dots, r, r + 1, \dots, d - 1\}$. Поэтому гипотеза Тэйта верна для X_t .

Если $2r = \dim X_t - 1 = d - 2$, то в силу (2.5) гипотеза $\text{Tate}^q(X_t)$ выполняется для любого $q \in \{0, 1, \dots, r, r + 1, \dots, d - 1\}$. Поэтому гипотеза Тэйта верна для X_t . Теорема доказана.

2.2. СЛЕДСТВИЕ. *Предположим, что k – конечно порожденное расширение поля $\mathbb{Q}$ рациональных чисел. Пусть X, Y – гладкие проективные многообразия над k . Если существует сюръективный k -морфизм $f: X \rightarrow Y$, то $\text{Tate}(X) \Rightarrow \text{Tate}(Y)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\dim X > \dim Y$. Пусть $X_t \hookrightarrow X$ – общий член k -рационального пучка Лефшеца гиперплоских сечений X . По теореме 0.2 гипотеза Тэйта выполняется для X_t . С другой стороны, $f|_{X_t}: X_t \rightarrow Y \otimes_k k(t)$ – сюръективный морфизм, определенный над $k(t)$.

Очевидно, что $Y \otimes_k k(t)$ – общий слой постоянного пучка $Y \times \mathbb{P}_k^1 \rightarrow \mathbb{P}_k^1$. Поэтому существует канонический изоморфизм $\text{Gal}(\overline{k(t)}/k(t))$ -модулей

$$H^{2r}(Y \otimes_k \overline{k(t)}, \mathbb{Q}_l(r)) \simeq H^{2r}(Y \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Q}_l(r)),$$

где действие $\text{Gal}(\overline{k(t)}/k(t))$ на $H^{2r}(Y \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Q}_l(r))$ пропускается через канонический сюръективный морфизм

$$\text{Gal}(\overline{k(t)}/k(t)) \rightarrow \hat{\pi}_1(\mathbb{P}_k^1, \bar{t}) \simeq \text{Gal}(\bar{k}/k)$$

и определяется естественным действием $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ на $H^{2r}(Y \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Q}_l(r))$. Следовательно,

$$[H^{2r}(Y \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Q}_l(r))]^{\text{Gal}(\bar{k}/k)} = [H^{2r}(Y \otimes_k \overline{k(t)}, \mathbb{Q}_l(r))]^{\text{Gal}(\overline{k(t)}/k(t))},$$

и теория редукции алгебраических циклов [21] дает следующее соотношение:

$$\text{Tate}^r(Y \otimes_k k(t)) \Rightarrow \text{Tate}^r(Y).$$

Поэтому мы можем использовать индукцию и свести задачу к случаю $\dim X = \dim Y$.

В последнем случае можно воспользоваться формулой проекции. Она показывает, что для любого элемента $z \in H^{2r}(Y, \mathbb{Q}_l(r))^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}$

$$f_* f^*(z) = \deg f \cdot z$$

(см. [9, § 2.3]). Поскольку $f^*(z) \in H^{2r}(X, \mathbb{Q}_l(r))^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}$ и гипотеза Тэйта выполняется для X , то элемент $f^*(z)$ является линейной комбинацией классов k -рациональных алгебраических циклов коразмерности r на многообразии X . Поэтому $f_* f^*(z) = \deg f \cdot z$ и z – линейные комбинации классов k -рациональных алгебраических циклов коразмерности r на Y . Следствие доказано.

§ 3. Исчезающие циклы и глобальная геометрическая монодромия

3.1. Пусть X – гладкое проективное d -мерное многообразие над полем k характеристики нуль, $(X_s)_{s \in \mathbb{P}_k^1}$ – k -рациональный пучок Лефшеца гиперповерхностных сечений X степени m , $S_k \hookrightarrow \mathbb{P}_k^1$ – (конечный) исключительный локус пучка. Для любой геометрической точки $\bar{s} \rightarrow s \in \mathbb{P}_k^1 \setminus S_k$ элемент $X_{\bar{s}}$ является гладким сечением $X \otimes \bar{k}$ гиперповерхностью, и отображение $\bar{s} \rightarrow H^{d-1}(X_{\bar{s}}, \mathbb{Q}_l)$ является локальной системой для этальной топологии над $\mathbb{P}_k^1 \setminus S_k$.

Напомним, что существует разложение

$$H^{d-1}(X_{\bar{s}}, \mathbb{Q}_l) = i_{\bar{s}}^*(H^{d-1}(X \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l)) \oplus E_{\bar{s}l}^{d-1},$$

где $i_{\bar{s}}: X_{\bar{s}} \hookrightarrow X \otimes \bar{k}$ – каноническое вложение, $E_{\bar{s}l}^{d-1}$ – $\mathbb{Q}_l$ -пространство исчезающих циклов и

$$\mathrm{Im} \left[H^{d-1}(X \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l) \xrightarrow{i_{\bar{s}}^*} H^{d-1}(X_{\bar{s}}, \mathbb{Q}_l) \right] = H^{d-1}(X_{\bar{s}}, \mathbb{Q}_l)^{\hat{\pi}_1(\mathbb{P}_k^1 \setminus S_k, \bar{s})}.$$

Пусть $\mathrm{Aut}(E_{\bar{s}l}^{d-1})(\mathbb{Q}_l)$ – группа автоморфизмов $E_{\bar{s}l}^{d-1}$, сохраняющих невырожденную билинейную форму на $E_{\bar{s}l}^{d-1}$, индуцированную $\cup$ -произведением, и пусть $\mathrm{Sim}(E_{\bar{s}l}^{d-1})(\mathbb{Q}_l)$ – группа подобий $E_{\bar{s}l}^{d-1}$. Существуют такие алгебраические $\mathbb{Q}_l$ -группы $\mathrm{Sim}(E_{\bar{s}l}^{d-1})$ и $\mathrm{Aut}(E_{\bar{s}l}^{d-1})$, что группы $\mathrm{Sim}(E_{\bar{s}l}^{d-1})(\mathbb{Q}_l)$ и $\mathrm{Aut}(E_{\bar{s}l}^{d-1})(\mathbb{Q}_l)$ изоморфны соответствующим группам $\mathbb{Q}_l$ -точек. Существует точная последовательность

$$1 \rightarrow \mathrm{Aut}(E_{\bar{s}l}^{d-1}) \rightarrow \mathrm{Sim}(E_{\bar{s}l}^{d-1}) \rightarrow G_m \rightarrow 1,$$

индуцирующая точную последовательность

$$1 \rightarrow \mathrm{Aut}(E_{\bar{s}l}^{d-1})(\mathbb{Q}_l) \rightarrow \mathrm{Sim}(E_{\bar{s}l}^{d-1})(\mathbb{Q}_l) \rightarrow \mathbb{Q}_l^\times.$$

Пусть $\chi: \mathrm{Gal}(\bar{k}/k) \rightarrow \mathbb{Q}_l^\times$ – циклотомический характер, определенный действием группы Галуа $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ на $\mathbb{Q}_l(1) = T_l(\mu) \otimes \mathbb{Q}_l$. Имеем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \rightarrow & \hat{\pi}_1(\mathbb{P}_k^1 \setminus S_k, \bar{s}) & \rightarrow & \hat{\pi}_1(\mathbb{P}_k^1 \setminus S_k, \bar{s}) & \rightarrow & \mathrm{Gal}(\bar{k}/k) \rightarrow 1 \\ & & \downarrow \bar{\rho}_{\bar{s}} & & \downarrow \rho_{\bar{s}} & & \downarrow \chi^{-d+1} \\ 1 & \rightarrow & \mathrm{Aut}(E_{\bar{s}l}^{d-1})(\mathbb{Q}_l) & \rightarrow & \mathrm{Sim}(E_{\bar{s}l}^{d-1})(\mathbb{Q}_l) & \rightarrow & \mathbb{Q}_l^\times \end{array} \quad (3.1)$$

где $\rho_{\bar{s}}$ – монодромия и $\bar{\rho}_{\bar{s}}$ – глобальная геометрическая монодромия [27, (4.3)].

Если d четное, то по теореме Каждана–Маргулиса $\mathrm{Lie} \mathrm{Im}(\bar{\rho}_{\bar{s}}) \simeq \mathrm{sp}(E_{\bar{s}l}^{d-1})$ [6, теорема 5.10].

Если d – нечетное число и m – достаточно большое, то по теореме Делиня [27, § 4, теорема В] образ $\bar{\rho}_{\bar{s}}$ в (3.1) плотен в топологии Зариского группы $\mathrm{Aut}(E_{\bar{s}l}^{d-1})$.

3.2. В этом пункте докажем теорему 0.3, которая дает более точное описание $\mathrm{Im}(\bar{\rho}_{\bar{s}})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 0.3. В силу принципа Лефшеца можно считать, что $\bar{k} = \mathbb{C}$. Пусть $\pi_1(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \setminus S_{\mathbb{C}}, \bar{s}) \rightarrow \hat{\pi}_1(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \setminus S_{\mathbb{C}}, \bar{s})$ – канонический морфизм группы гомотопий петель в ее проконечное пополнение. Обозначим через $E_{\bar{s}}^{d-1}$ пространство исчезающих циклов с коэффициентами из $\mathbb{Q}$. Пусть

$$\rho_{\text{tr}}: \pi_1(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \setminus S_{\mathbb{C}}, \bar{s}) \rightarrow \text{Aut}(E_{\bar{s}}^{d-1})(\mathbb{Q})$$

– трансцендентное представление монодромии. Из теоремы сравнения следует существование изоморфизма

$$E_{\bar{s}}^{d-1} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_l \simeq E_{sl}^{d-1}, \quad (3.2)$$

совместимого с представлениями монодромии.

Пусть $M(E_{\bar{s}}^{d-1})$ – замыкание (в топологии Зариского) образа $\pi_1(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \setminus S_{\mathbb{C}}, \bar{s})$ в алгебраической $\mathbb{Q}$ -группе $\text{Aut}(E_{\bar{s}}^{d-1})$. Для достаточно большого m известно, что

$$\text{Lie } M(E_{\bar{s}}^{d-1}) = \text{Lie } \text{Aut}(E_{\bar{s}}^{d-1}) = \text{so}(E_{\bar{s}}^{d-1})$$

(см. [27, § 6.7]), и существует такой элемент $\sigma \in \pi_1(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \setminus S_{\mathbb{C}}, \bar{s})$, что

$$(\rho_{\text{tr}}(\sigma) - \text{id})^2 = 0 \quad \text{и} \quad \dim \text{Im}(\rho_{\text{tr}}(\sigma) - \text{id}) = 2 \quad (3.3)$$

(см. [27, лемма 6.7.1]).

С другой стороны, $E_{\bar{s}}^{d-1} \otimes \mathbb{C} = V$ – неприводимый $\text{Lie } M(E_{\bar{s}}^{d-1}) \otimes \mathbb{C}$ -модуль [27, § 6.7]. Выбор изоморфизма $\overline{\mathbb{Q}}_l \simeq \mathbb{C}$ позволяет отождествить $V \subset E_{\bar{s}}^{d-1} \otimes \overline{\mathbb{Q}}_l = E_{sl}^{d-1} \otimes \overline{\mathbb{Q}}_l$.

Напомним, что имеется канонический морфизм $\pi_1(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \setminus S_{\mathbb{C}}, \bar{s}) \rightarrow \hat{\pi}_1(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \setminus S_{\mathbb{C}}, \bar{s})$. В силу (3.2) и (3.3) существует такой элемент $\tau \in \hat{\pi}_1(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \setminus S_{\mathbb{C}}, \bar{s})$, что

$$(\bar{\rho}_{\bar{s}}(\tau) - \text{id})^2 = 0 \quad \text{и} \quad \dim \text{Im}(\bar{\rho}_{\bar{s}}(\tau) - \text{id}) = 2. \quad (3.4)$$

Пусть $U = \bar{\rho}_{\bar{s}}(\tau) - \text{id}$. Поскольку $U^2 = 0$, то мы имеем соотношение $U \in \text{Lie } \text{Im}(\bar{\rho}_{\bar{s}})$. Действительно, l -адический логарифм $\log(\bar{\rho}_{\bar{s}}(\tau)) \in \text{Lie } \text{Im}(\bar{\rho}_{\bar{s}})$ определяется формулой

$$\log(\bar{\rho}_{\bar{s}}(\tau)) = \log(\text{id} + \bar{\rho}_{\bar{s}}(\tau) - \text{id}) = \log(\text{id} + U) = U - U^2/2 + \dots = U.$$

В силу (3.4) имеем

$$\exists U \in \text{Lie } \text{Im}(\bar{\rho}_{\bar{s}}) \quad \text{такой, что} \quad U^2 = 0 \quad \text{и} \quad \dim \text{Im}(U) = 2. \quad (3.5)$$

Следуя [29, п. 7.0], напомним некоторые общие и хорошо известные свойства глобальной монодромии. Пусть $p: Y \rightarrow T$ – гладкий проективный морфизм связных алгебраических схем над $\mathbb{C}$. Для любой замкнутой точки $\tau \in T$ фундаментальная группа $\pi_1(T, \tau)$ действует на $H^i(Y_{\tau}, \mathbb{Q})$. Образ Γ_{τ} фундаментальной группы в $\text{GL}(H^i(Y_{\tau}, \mathbb{Q}))$ называется *глобальной группой монодромии*. Пусть G – замыкание Γ_{τ} в топологии Зариского группы

$$\text{GL}(H^i(Y_{\tau}, \mathbb{C})) = \text{GL}(H^i(Y_{\tau}, \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{C}).$$

По определению имеются следующие соотношения:

$$H^i(Y_\tau, \mathbb{C})^G = H^i(Y_\tau, \mathbb{C})^{\Gamma_\tau} = H^i(Y_\tau, \mathbb{Q})^{\Gamma_\tau} \otimes \mathbb{C} = H^i(Y_\tau, \mathbb{Q})^{\pi_1(T, \tau)} \otimes \mathbb{C}.$$

Более того, для любого $W = H^i(Y_\tau, \mathbb{Q})^{\otimes m}$

$$(W \otimes \mathbb{C})^G = (W \otimes \mathbb{C})^{\Gamma_\tau} = W^{\Gamma_\tau} \otimes \mathbb{C}.$$

Ясно, что существует такая алгебраическая $\mathbb{Q}$ -подгруппа $G_{\mathbb{Q}}$ в $\mathrm{GL}(H^i(Y_\tau, \mathbb{Q}))$, что $G = G_{\mathbb{Q}}(\mathbb{C})$,

$$H^i(Y_\tau, \mathbb{Q})^{G_{\mathbb{Q}}} = H^i(Y_\tau, \mathbb{Q})^{\Gamma_\tau} = H^i(Y_\tau, \mathbb{Q})^{\pi_1(T, \tau)}$$

и

$$W^{G_{\mathbb{Q}}} = W^{\Gamma_\tau} \quad \text{для любого } W = H^i(Y_\tau, \mathbb{Q})^{\otimes m}$$

(см. [29, п. 7.0]). В частности,

$$[H^i(Y_\tau, \mathbb{Q}) \otimes H^i(Y_\tau, \mathbb{Q})]^{G_{\mathbb{Q}}} = [H^i(Y_\tau, \mathbb{Q}) \otimes H^i(Y_\tau, \mathbb{Q})]^{\Gamma_\tau}; \quad (3.6)$$

поляризации $\mathbb{Q}$ -структуры Ходжа $H^i(Y_\tau, \mathbb{Q})$ определяет изоморфизм $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа и $\pi_1(T, \tau)$ -модулей

$$H^i(Y_\tau, \mathbb{Q})^* \simeq H^i(Y_\tau, \mathbb{Q})(i)$$

(см. [4, п. 4.2.3]); следовательно, из (3.6) получим следующее соотношение:

$$\mathrm{End}_{G_{\mathbb{Q}}}(H^i(Y_\tau, \mathbb{Q})) = \mathrm{End}_{\Gamma_\tau}(H^i(Y_\tau, \mathbb{Q})). \quad (3.7)$$

Для любой подгруппы $\Gamma \hookrightarrow \rho_{\mathrm{tr}}(\pi_1(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \setminus S_{\mathbb{C}}, \bar{s}))$ конечного индекса замыкание (в топологии Зариского) $\overline{\Gamma_{\mathrm{Zariski}}}$ группы Γ в $\mathrm{Aut}(E_{\bar{s}}^{d-1})$ содержит $M(E_{\bar{s}}^{d-1})^0$ [29, лемма 7.2.1]. Действительно, для некоторых элементов $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \rho_{\mathrm{tr}}(\pi_1(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \setminus S_{\mathbb{C}}, \bar{s}))$ имеем

$$\rho_{\mathrm{tr}}(\pi_1(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \setminus S_{\mathbb{C}}, \bar{s})) = \gamma_1 \Gamma \cup \dots \cup \gamma_n \Gamma,$$

$M(E_{\bar{s}}^{d-1}) = \gamma_1 \overline{\Gamma_{\mathrm{Zariski}}} \cup \dots \cup \gamma_n \overline{\Gamma_{\mathrm{Zariski}}}$; поэтому $\dim M(E_{\bar{s}}^{d-1}) = \dim \overline{\Gamma_{\mathrm{Zariski}}}$ и $M(E_{\bar{s}}^{d-1})^0 \hookrightarrow \overline{\Gamma_{\mathrm{Zariski}}}$.

Утверждаем, что $\rho_{\mathrm{tr}}^{-1}(\Gamma) \hookrightarrow \pi_1(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \setminus S_{\mathbb{C}}, \bar{s})$ – подгруппа конечного индекса. Действительно, имеем

$$\pi_1(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \setminus S_{\mathbb{C}}, \bar{s}) = \rho_{\mathrm{tr}}^{-1}(\rho_{\mathrm{tr}}(\pi_1(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \setminus S_{\mathbb{C}}, \bar{s}))) = \rho_{\mathrm{tr}}^{-1}(\gamma_1) \rho_{\mathrm{tr}}^{-1}(\Gamma) \cup \dots \cup \rho_{\mathrm{tr}}^{-1}(\gamma_n) \rho_{\mathrm{tr}}^{-1}(\Gamma).$$

Остается показать, что для любого i существует такой элемент $g_i \in \pi_1(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \setminus S_{\mathbb{C}}, \bar{s})$, что

$$\rho_{\mathrm{tr}}^{-1}(\gamma_i) \rho_{\mathrm{tr}}^{-1}(\Gamma) = g_i \rho_{\mathrm{tr}}^{-1}(\Gamma).$$

Пусть $g_i^{(1)}, g_i^{(2)}$ – произвольные элементы в $\rho_{\mathrm{tr}}^{-1}(\gamma_i)$. Тогда

$$\begin{aligned} \rho_{\mathrm{tr}}(g_i^{(1)}) &= \rho_{\mathrm{tr}}(g_i^{(2)}) = \gamma_i, \\ \rho_{\mathrm{tr}}((g_i^{(1)})^{-1} g_i^{(2)}) &= 1, \quad (g_i^{(1)})^{-1} g_i^{(2)} \in \rho_{\mathrm{tr}}^{-1}(\Gamma), \quad g_i^{(2)} \rho_{\mathrm{tr}}^{-1}(\Gamma) = g_i^{(1)} \rho_{\mathrm{tr}}^{-1}(\Gamma), \end{aligned}$$

и утверждение доказано.

Можно построить такое конечное этальное накрытие $\varphi: T \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \setminus S_{\mathbb{C}}$ алгебраических $\mathbb{C}$ -схем, что для некоторой геометрической точки $\tau \in T$ над $\bar{s}$ канонический инъективный морфизм

$$\varphi_*: \pi_1(T, \tau) \hookrightarrow \pi_1(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \setminus S_{\mathbb{C}}, \bar{s}) \quad (3.8)$$

даёт отождествление

$$\rho_{\text{tr}}^{-1}(\Gamma) = \varphi_*(\pi_1(T, \tau)) \quad (3.9)$$

(см. [8, гл. I, § 5]; [15, гл. I, § 5, теорема 5.3]).

Пучок Лефшеца $(X_{\bar{s}})_{\bar{s} \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1}$ определяет такой гладкий проективный морфизм $p: Y \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \setminus S_{\mathbb{C}}$, что $Y_{\bar{s}} = X_{\bar{s}}$ для любой точки $\bar{s} \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \setminus S_{\mathbb{C}}$. Пусть

$$\begin{array}{ccc} Z = Y \times_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \setminus S_{\mathbb{C}}} T & \xrightarrow{\Phi} & Y \\ \downarrow q & & \downarrow p \\ T & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \setminus S_{\mathbb{C}} \end{array}$$

– диаграмма расслоенного произведения.

По теореме о собственной замене базы существует канонический изоморфизм

$$\varphi^*(R^{d-1}p_*(\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z})) \simeq R^{d-1}q_*(\Phi^*(\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z})) = R^{d-1}q_*(\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z})$$

(см. [15, гл. VI, § 2, следствие 2.3]). Ясно, что существует классический вариант этого изоморфизма:

$$\varphi^*(R^{d-1}p_*\mathbb{Q}) \simeq R^{d-1}q_*(\Phi^*(\mathbb{Q})) = R^{d-1}q_*\mathbb{Q}. \quad (3.10)$$

Действительно, локальная система $R^{d-1}p_*\mathbb{Q}$ полностью определена действием $\pi_1(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \setminus S_{\mathbb{C}}, \bar{s})$ на слое

$$\begin{aligned} (R^{d-1}p_*\mathbb{Q})_{\bar{s}} &= H^{d-1}(X_{\bar{s}}, \mathbb{Q}) = i_{\bar{s}}^*(H^{d-1}(X \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q})) \oplus E_{\bar{s}}^{d-1} \\ &\simeq H^{d-1}(X \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q}) \oplus E_{\bar{s}}^{d-1} \end{aligned}$$

(с тривиальным действием $\pi_1(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \setminus S_{\mathbb{C}}, \bar{s})$ на $i_{\bar{s}}^*(H^{d-1}(X \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q})) \simeq H^{d-1}(X \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q})$); с другой стороны, $R^{d-1}q_*\mathbb{Q}$ полностью определяется действием $\pi_1(T, \tau)$ на

$$(R^{d-1}q_*\mathbb{Q})_{\tau} = H^{d-1}(Z_{\tau}, \mathbb{Q}) \simeq H^{d-1}(X_{\bar{s}}, \mathbb{Q}) = H^{d-1}(X \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q}) \oplus E_{\bar{s}}^{d-1}.$$

Поэтому соотношение (3.10) является выражением того, что действие $\pi_1(T, \tau)$ на $\mathbb{Q}$ -пространстве $H^{d-1}(X \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q}) \oplus E_{\bar{s}}^{d-1}$ возникает из действия $\pi_1(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \setminus S_{\mathbb{C}}, \bar{s})$ на этом пространстве через каноническое вложение (3.8).

С другой стороны, (3.7) даёт следующее соотношение:

$$\text{End}_{\Gamma_{\text{Zariski}}}(E_{\bar{s}}^{d-1}) = \text{End}_{\Gamma}(E_{\bar{s}}^{d-1}).$$

Поскольку $M(E_{\bar{s}}^{d-1})^0$ – связная алгебраическая $\mathbb{Q}$ -группа с алгеброй Ли (см. [29]) $\text{Lie } M(E_{\bar{s}}^{d-1})^0 = \text{so}(E_{\bar{s}}^{d-1})$, то имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{Q} \hookrightarrow \text{End}_{\Gamma}(E_{\bar{s}}^{d-1}) &= \text{End}_{\Gamma_{\text{Zariski}}}(E_{\bar{s}}^{d-1}) \hookrightarrow \text{End}_{M(E_{\bar{s}}^{d-1})^0}(E_{\bar{s}}^{d-1}) \\ &= \text{End}_{\text{so}(E_{\bar{s}}^{d-1})}(E_{\bar{s}}^{d-1}) = \mathbb{Q}. \end{aligned}$$

В частности, для любой подгруппы $\Gamma \hookrightarrow \rho_{\text{tr}}(\pi_1(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \setminus S_{\mathbb{C}}, \bar{s}))$ конечного индекса

$$\text{End}_{\Gamma}(E_{\bar{s}}^{d-1}) = \mathbb{Q}. \quad (3.11)$$

По хорошо известной теореме Делиня каноническое представление $\pi_1(T, \tau)$ на слое

$$(R^{d-1}q_*\mathbb{Q})_{\tau} = H^{d-1}(Z_{\tau}, \mathbb{Q}) \simeq H^{d-1}(X_{\bar{s}}, \mathbb{Q}) = H^{d-1}(X \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q}) \oplus E_{\bar{s}}^{d-1}$$

полупросто [4, теорема 4.2.6]. Следовательно, (3.9) показывает, что каноническое представление $\Gamma = \rho_{\text{tr}}(\varphi_*(\pi_1(T, \tau)))$ на $E_{\bar{s}}^{d-1}$ полупросто. Более того, из леммы Шура и из (3.11) следует, что $E_{\bar{s}}^{d-1}$ – абсолютно неприводимый Γ -модуль. Поэтому $V = E_{\bar{s}l}^{d-1} \otimes \mathbb{Q}_l$ – неприводимый Γ -модуль.

Очевидно, что $\Gamma \hookrightarrow \text{GL}(E_{\bar{s}}^{d-1})(\mathbb{Q}) \hookrightarrow \text{GL}(E_{\bar{s}l}^{d-1})(\mathbb{Q}_l)$. С другой стороны,

$$\Gamma \hookrightarrow \text{Im}(\rho_{\text{tr}}) \hookrightarrow \text{Im}(\bar{\rho}_{\bar{s}}) \hookrightarrow \text{GL}(E_{\bar{s}l}^{d-1})(\mathbb{Q}_l).$$

Пусть $\overline{\Gamma_{\text{analytic}, l}}$ – замыкание Γ в l -адической группе Ли $\text{GL}(E_{\bar{s}l}^{d-1})(\mathbb{Q}_l)$. Поскольку $\text{Im}(\bar{\rho}_{\bar{s}})$ – компактная l -адическая группа Ли, то получаем инъективный морфизм компактных l -адических групп Ли $\overline{\Gamma_{\text{analytic}, l}} \hookrightarrow \text{Im}(\bar{\rho}_{\bar{s}})$ и существует $\overline{\Gamma_{\text{analytic}, l}}$ -инвариантная $\mathbb{Z}_l$ -решетка $V_{\mathbb{Z}_l} \hookrightarrow E_{\bar{s}l}^{d-1}$ [20, ч. II, гл. IV, добавление 1, теорема 1]. Из точной последовательности

$$1 \rightarrow 1 + l^2 \cdot \text{End}(V_{\mathbb{Z}_l}) \rightarrow [\text{End}(V_{\mathbb{Z}_l})]^{\times} \rightarrow [\text{End}(V_{\mathbb{Z}_l}/l^2 \cdot V_{\mathbb{Z}_l})]^{\times} \rightarrow 1$$

получаем, что

$$\Gamma \cap (1 + l^2 \cdot \text{End}(V_{\mathbb{Z}_l})) = \text{Ker}[\Gamma \rightarrow [\text{End}(V_{\mathbb{Z}_l}/l^2 \cdot V_{\mathbb{Z}_l})]^{\times}]$$

– подгруппа в Γ конечного индекса. Поэтому можно считать Γ настолько малой, что

$$\overline{\Gamma_{\text{Zariski}}} = M(E_{\bar{s}}^{d-1})^0, \\ \Gamma \hookrightarrow \overline{\Gamma_{\text{analytic}, l}} \hookrightarrow 1 + l^2 \cdot \text{End}(V_{\mathbb{Z}_l}).$$

В частности, для любого $\gamma \in \overline{\Gamma_{\text{analytic}, l}}$ l -адический логарифм $\log \gamma$ хорошо определен как элемент $\text{End}(E_{\bar{s}l}^{d-1})$, так как для любого $\gamma \in 1 + l^2 \cdot \text{End}(V_{\mathbb{Z}_l})$

$$\log \gamma = \log(1 + (\gamma - 1)) = (\gamma - 1) - (\gamma - 1)^2/2 + (\gamma - 1)^3/3 - \dots$$

– сумма сходящегося ряда (в l -адической топологии $\text{End}(E_{\bar{s}l}^{d-1})$). Легко видеть, что $\log \gamma \in l^2 \cdot \text{End}(V_{\mathbb{Z}_l})$. С другой стороны, $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ сходится для любого $x \in l^2 \cdot \text{End}(V_{\mathbb{Z}_l})$ [3, гл. VI, § 1.4]. Поэтому $\gamma = \exp(\log \gamma)$.

Пусть $W \hookrightarrow V$ – неприводимый $\text{Lie } \overline{\Gamma_{\text{analytic}, l}}$ -подмодуль. Видим, что для любого $\gamma \in \Gamma$ W инвариантно при действии $\log \gamma \in \text{Lie } \overline{\Gamma_{\text{analytic}, l}}$. Поэтому W инвариантно при действии $\gamma = \exp(\log \gamma)$. Поскольку V – неприводимый Γ -модуль, получаем равенство $W = V$. Следовательно, V – неприводимый $\text{Lie } \overline{\Gamma_{\text{analytic}, l}}$ -подмодуль. В частности, V – неприводимый $\text{Lie } \text{Im}(\bar{\rho}_{\bar{s}})$ -модуль.

Видно, что каноническое представление $\text{Lie Im}(\bar{\rho}_{\bar{s}}) \otimes \bar{\mathbb{Q}}_l$ в $E_{\bar{s}l}^{d-1} \otimes \bar{\mathbb{Q}}_l = V$ неприводимо. Поскольку оно точное, то $g = \text{Lie Im}(\bar{\rho}_{\bar{s}}) \otimes \bar{\mathbb{Q}}_l$ редуктивна и радикал $\mathfrak{r}$ этой алгебры Ли совпадает с $\text{Cent}(g)$ [2, гл. I, § 6, предложение 5]. Поскольку g редуктивна и $\text{Cent}(g) = \mathfrak{r}$ – идеал, имеем разложение

$$g = \text{Cent}(g) \times h$$

(см. [2, гл. I, § 6, п. 4, следствие]),

$$g / \text{Cent}(g) = g / \mathfrak{r} \simeq h = g^{\text{ss}}$$

– полупростая алгебра Ли [2, гл. I, § 5, п. 2, предложение 3; § 6, п. 1, теорема 1]. Поэтому

$$g = \text{Cent}(g) \times g^{\text{ss}}.$$

Более того,

$$\dim_{\bar{\mathbb{Q}}_l} \text{Cent}(g) \leq 1 \quad (3.12)$$

(см. [2, гл. I, § 6, упражнение 20]). С другой стороны,

$$\text{Im}(\bar{\rho}_{\bar{s}}) \hookrightarrow \text{Aut}(E_{\bar{s}l}^{d-1}) \hookrightarrow \text{SL}(E_{\bar{s}l}^{d-1}),$$

поэтому

$$g \hookrightarrow \text{sl}(E_{\bar{s}l}^{d-1} \otimes \bar{\mathbb{Q}}_l). \quad (3.13)$$

Поскольку $E_{\bar{s}l}^{d-1} \otimes \bar{\mathbb{Q}}_l$ – неприводимый g -модуль, (3.12) и (3.13) показывают, что $\text{Cent}(g)$ действует на $E_{\bar{s}l}^{d-1} \otimes \bar{\mathbb{Q}}_l$ тривиально. Поэтому $\text{Cent}(g) = (0)$ и $g = g^{\text{ss}}$ – полупростая алгебра Ли.

В частности, мы имеем точное неприводимое *ортогональное* представление полупростой алгебры Ли

$$w: \text{Lie Im}(\bar{\rho}_{\bar{s}}) \otimes \bar{\mathbb{Q}}_l \rightarrow \text{End}(V)$$

со свойством (3.5):

$$\exists U \in \text{Lie Im}(\bar{\rho}_{\bar{s}}) \text{ такое, что } w(U)^2 = 0 \text{ и } \dim \text{Im}(w(U)) = 2.$$

Поэтому мы получаем из [27, § 6, лемма 6.5.1] следующие варианты:

- а) $\text{Lie Im}(\bar{\rho}_{\bar{s}}) \otimes \bar{\mathbb{Q}}_l = \text{so}(V)$ и соответствующее представление $\text{so}(V)$ стандартно;
- б) $\text{Lie Im}(\bar{\rho}_{\bar{s}}) \otimes \bar{\mathbb{Q}}_l = g_2$ – исключительная алгебра Ли ранга 2, и соответствующее представление g_2 является фундаментальным представлением $E(\omega_1)$ степени 7.

Если m достаточно большое, то можно исключить случай б), потому что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \dim V = \infty$$

в силу (1.3). Поэтому получаем следующие соотношения:

$$\text{Lie Im}(\bar{\rho}_{\bar{s}}) \otimes \bar{\mathbb{Q}}_l = \text{so}(V) = \text{so}(E_{\bar{s}l}^{d-1} \otimes \bar{\mathbb{Q}}_l).$$

Теорема 0.3 доказана.

3.3. Следствие 0.4 получается из теоремы Каждана–Маргулиса и теоремы 0.3.

3.4. Для удобства читателя мы напомним некоторые основные идеи доказательства теоремы Каждана–Маргулиса [6, теорема 5.10], сравнивая их с идеями доказательства теоремы 0.3.

Обозначим через

$$\hat{\rho}_{\text{tr}}: \hat{\pi}_1(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \setminus S_{\mathbb{C}}, \bar{t}) \rightarrow \text{Aut}(E_{\ell}^{d-1})$$

каноническое представление проконечного пополнения $\pi_1(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \setminus S_{\mathbb{C}}, \bar{t})$. Пусть $E = E_{\ell}^{d-1}$. Хорошо известно, что

$$E^{\perp} = H^{d-1}(X_{\bar{t}}, \mathbb{Q}_{\ell})^{\hat{\pi}_1(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \setminus S_{\mathbb{C}}, \bar{t})}$$

и

$$E \cap E^{\perp} = (0)$$

(трудная теорема Лефшеца) [7, § 4.1]. Более того, представление $\hat{\pi}_1(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \setminus S_{\mathbb{C}}, \bar{t})$ на E абсолютно неприводимо и образ $\hat{\pi}_1(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \setminus S_{\mathbb{C}}, \bar{t})$ в $\text{GL}(E)$ топологически порождается преобразованиями Пикара–Лефшеца

$$x \xrightarrow{T_s} x \pm (x, \delta_s) \delta_s,$$

где δ_s ($s \in S_{\mathbb{C}}$) – исчезающие циклы [6, (5.8)].

Ограничение формы пересечения $\text{tr}(x \cup y)$ на E невырождено и определяет невырожденную билинейную форму

$$\psi: E \otimes E \rightarrow \mathbb{Q}_{\ell}(-d+1),$$

кососимметрическую в случае нечетного $n = d - 1$ и симметрическую для четного n .

Для нечетного n представление монодромии индуцирует

$$\rho: \hat{\pi}_1(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \setminus S_{\mathbb{C}}, \bar{t}) \rightarrow \text{Sp}(E, \psi).$$

Образ ρ является компактной l -адической группой Ли. Пусть $L = \text{Lie Im}(\rho)$. В рассматриваемом случае имеем

$$\begin{aligned} (\delta_s, \delta_s) &= 0, \\ T_s(x) &= \begin{cases} x - (x, \delta_s) \delta_s & \text{для } n \equiv 1 \pmod{4}, \\ x + (x, \delta_s) \delta_s & \text{для } n \equiv 3 \pmod{4}, \end{cases} \\ T_s(\delta_s) &= \delta_s \end{aligned}$$

(см. [6, (4.1)]). В частности, $(T_s - 1)^2(x) = (T_s - 1)(\pm(x, \delta_s) \delta_s) = \pm(x, \delta_s)(T_s - 1)(\delta_s) = 0$. Поэтому L порождается

$$\log T_s = \log(1 + (T_s - 1)) = T_s - 1 = \pm N(\delta_s),$$

где $N(\delta_s): x \rightarrow (x, \delta_s) \delta_s$, $s \in S_{\mathbb{C}}$, и $N(\delta_s)^2 = 0$.

Пусть $F \hookrightarrow E \otimes \overline{\mathbb{Q}}_l$ – подпространство, инвариантное при действии L . Если $F \neq (0)$, то существуют такие $x \in F$ и $s \in S_{\mathbb{C}}$, что $(x, \delta_s) \neq 0$. Поэтому

$$(T_s - 1)(x) = \pm(x, \delta_s)\delta_s \in F$$

и $\delta_s \in F$. Для любого $t \in S_{\mathbb{C}}$ имеем $(T_t - 1)(\delta_s) \in F$. Поэтому $T_t(\delta_s) \in F$. Поскольку исчезающие циклы сопряжены при действии $\pi_1(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \setminus S_{\mathbb{C}}, \bar{t})$ [6, теорема 5.4] и эта группа порождается элементами типа T_t , $t \in S_{\mathbb{C}}$, то видно, что для любого $t \in S_{\mathbb{C}}$ имеем $\delta_t \in F$. Следовательно, $F = E \otimes \overline{\mathbb{Q}}_l$ и L -модуль E абсолютно неприводим.

Можно считать, что $E \neq (0)$. Пусть

$$W = \{\delta \in E \mid N(\delta) \in L, \text{ где } N(\delta): x \rightarrow (x, \delta)\delta\}.$$

Поскольку L – подпространство в $\mathfrak{gl}(E)$, то W стабильно относительно гомотетий.

Если $\delta \in W$, то $\exp(\lambda N(\delta))$ – автоморфизм (E, ψ, L) и он преобразует W в W . С другой стороны,

$$N(\delta)^2 x = N(\delta)(x, \delta)\delta = (x, \delta)N(\delta)\delta = (x, \delta)(\delta, \delta)\delta = 0,$$

потому что форма ψ кососимметрическая. Поэтому $N(\delta)^2 = 0$, и для любого $w \in W$

$$(\exp(\lambda N(\delta)))w = w + \lambda N(\delta)w = w + \lambda(w, \delta)\delta \in W;$$

в частности, если $(w, \delta) \neq 0$, то подпространство, порожденное δ и w , содержится в W . Следовательно, W – объединение максимальных линейных подпространств W_{α} , которые взаимно ортогональны. Любое W_{α} стабильно под действием $N(\delta)$, $\delta \in W$, потому что

$$N(\delta)w_{\alpha} = (w_{\alpha}, \delta)\delta = \begin{cases} 0, & \text{если } \delta \notin W_{\alpha}, \\ (w_{\alpha}, \delta)\delta \in W_{\alpha}, & \text{если } \delta \in W_{\alpha}, \end{cases}$$

следовательно, W_{α} стабильно при действии L (напомним, что $N(\delta_s) \in L \ \forall s \in S_{\mathbb{C}}$, $\delta_s \in W$ и L порождается элементами типа $N(\delta_s)$, $s \in S_{\mathbb{C}}$). В результате имеем равенство $W_{\alpha} = E$. Следовательно, L содержит $N(\delta)$ для любого $\delta \in E$. Остается заметить, что $\text{sp}(E, \psi)$ порождается $N(\delta)$, $\delta \in E$. Поэтому мы приходим к теореме Каждана–Маргулиса: $L = \text{sp}(E, \psi)$ [6, теорема 5.10].

Если n четно, то

$$\begin{aligned} (\delta_s, \delta_s) &= \begin{cases} 2 & \text{для } n = 0 \pmod{4}, \\ -2 & \text{для } n = 2 \pmod{4}, \end{cases} \\ T_s(x) &= \begin{cases} x - (x, \delta_s)\delta_s & \text{для } n = 0 \pmod{4}, \\ x + (x, \delta_s)\delta_s & \text{для } n = 2 \pmod{4}, \end{cases} \\ T_s(\delta_s) &= -\delta_s \end{aligned}$$

(см. [6, (4.1)]). Следовательно,

$$(T_s - 1) - (T_s - 1)^2/2 + (T_s - 1)^3/3 - \dots$$

– *расходящийся* ряд (в l -адической топологии $\text{End}(E_{\bar{s}l}^{d-1})$, $l \neq 2$), потому что

$$\begin{aligned} ((T_s - 1) - (T_s - 1)^2/2 + (T_s - 1)^3/3 - \dots)(\delta_s) = \\ = -2\delta_s - 2^2\delta_s/2 - 2^3\delta_s/3 - \dots \end{aligned}$$

– *расходящийся* ряд. В частности, l -адические логарифмы преобразований Пикара–Лефшеца T_s не определены ($s \in S_{\mathbb{C}}$). По этой причине в доказательстве теоремы 0.3 мы используем подходящую подгруппу $\rho_{\text{tr}}^{-1}(\Gamma) \hookrightarrow \pi_1(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \setminus S_{\mathbb{C}}, \bar{s})$ конечного индекса вместо $\pi_1(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \setminus S_{\mathbb{C}}, \bar{s})$.

§ 4. О гипотезе Мамфорда–Тэйта

4.1. Предположим, что k – конечно порожденное расширение поля $\mathbb{Q}$ рациональных чисел. Пусть X – гладкое проективное d -мерное многообразие над k , и пусть $X_t \hookrightarrow X$ – общий член k -рационального пучка Лефшеца $(X_s)_{s \in \mathbb{P}_k^1}$ гиперповерхностных сечений X степени m , $S_k \hookrightarrow \mathbb{P}_k^1$ – (конечный) исключительный локус пучка.

Пусть $\bar{t}: \text{Spec } \overline{k(t)} \rightarrow t$ – общая геометрическая точка $\mathbb{P}_k^1$, определенная вложением $k(t) \hookrightarrow \overline{k(t)}$, и пусть $\bar{t}_{\mathbb{C}}: \text{Spec } \mathbb{C} \rightarrow \bar{t}$ – геометрическая точка, определенная вложением $\overline{k(t)} \hookrightarrow \mathbb{C}$.

Если m достаточно большое, то по методу п. 1.1 мы получаем равенство (аналогичное равенству (1.5))

$$\text{Lie Hg}(E_{\bar{t}_{\mathbb{C}}}^{d-1}) = \text{Lie Aut}(E_{\bar{t}_{\mathbb{C}}}^{d-1}). \quad (4.1)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \text{Lie MT}(E_{\bar{t}_{\mathbb{C}}}^{d-1}) &= \mathbb{Q} \oplus \text{Lie Hg}(E_{\bar{t}_{\mathbb{C}}}^{d-1}) \\ &= \mathbb{Q} \oplus \text{Lie Aut}(E_{\bar{t}_{\mathbb{C}}}^{d-1}) = \text{Lie Sim}(E_{\bar{t}_{\mathbb{C}}}^{d-1}), \end{aligned} \quad (4.2)$$

где $\text{Sim}(E_{\bar{t}_{\mathbb{C}}}^{d-1})$ – группа подобий $E_{\bar{t}_{\mathbb{C}}}^{d-1}$.

4.2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 0.6. Легко видеть, что для $s = t$ можно продолжить диаграмму (3.1) до коммутативной диаграммы с точными строками

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \text{Gal}(\overline{k(t)}/\bar{k}(t)) & \longrightarrow & \text{Gal}(\overline{k(t)}/k(t)) & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & \hat{\pi}_1(\mathbb{P}_k^1 \setminus S_{\bar{k}}, \bar{t}) & \longrightarrow & \hat{\pi}_1(\mathbb{P}_k^1 \setminus S_k, \bar{t}) & \longrightarrow & \text{Gal}(\bar{k}/k) \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow \bar{\rho}_{\bar{t}} & & \downarrow \rho_{\bar{t}} & & \downarrow \chi^{-d+1} \\ 1 & \longrightarrow & \text{Aut}(E_{\bar{t}l}^{d-1})(\mathbb{Q}_l) & \longrightarrow & \text{Sim}(E_{\bar{t}l}^{d-1})(\mathbb{Q}_l) & \longrightarrow & \mathbb{Q}_l^{\times} \end{array} \quad (4.3)$$

где канонические морфизмы

$$\text{Gal}(\overline{k(t)}/\bar{k}(t)) \rightarrow \hat{\pi}_1(\mathbb{P}_k^1 \setminus S_{\bar{k}}, \bar{t})$$

и

$$\mathrm{Gal}(\overline{k(t)}/k(t)) \rightarrow \hat{\pi}_1(\mathbb{P}_k^1 \setminus S_k, \bar{t})$$

сюръективны [15, гл. I, § 5, пример 5.2(b)]. Поэтому из (4.2) видно, что достаточно доказать соотношение

$$\mathrm{Lie} \, \mathrm{Im}(\bar{\rho}_{\bar{t}}) \simeq \mathrm{Lie} \, \mathrm{Hg}(E_{\bar{t}\mathbb{C}}^{d-1})(\mathbb{Q}_l).$$

В силу (4.1) остается показать, что

$$\mathrm{Lie} \, \mathrm{Im}(\bar{\rho}_{\bar{t}}) \simeq \mathrm{Lie} \, \mathrm{Aut}(E_{\bar{t}\mathbb{C}}^{d-1})(\mathbb{Q}_l).$$

С другой стороны, последнее соотношение вытекает из следствия 0.4. Теорема 0.6 доказана.

4.3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 0.7. Пусть $k(t)_{S_k}^{\mathrm{un}}/k(t)$ – максимальное алгебраическое расширение, неразветвленное вне S_k . Известно, что действие $\mathrm{Gal}(\overline{k(t)}/k(t))$ на $H^{d-1}(X \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l) \hookrightarrow H^{d-1}(X_{\bar{t}}, \mathbb{Q}_l)$ пропускается через канонические сюръективные морфизмы

$$\mathrm{Gal}(\overline{k(t)}/k(t)) \rightarrow \mathrm{Gal}(k(t)_{S_k}^{\mathrm{un}}/k(t)) \simeq \hat{\pi}_1(\mathbb{P}_k^1 \setminus S_k, \bar{t}) \rightarrow \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$$

и определяется естественным действием $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ на пространстве $H^{d-1}(X \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l)$ [15, гл. I, § 5, пример 5.2(b)].

Вложение $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа

$$H^{d-1}(X \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q}) \hookrightarrow H^{d-1}(X_t \otimes_{k(t)} \mathbb{C}, \mathbb{Q}) = H^{d-1}(X_{\bar{t}\mathbb{C}}, \mathbb{Q})$$

дает сюръективный морфизм групп Мамфорда–Тэйта

$$\mathrm{MT}(H^{d-1}(X_{\bar{t}\mathbb{C}}, \mathbb{Q})) \rightarrow \mathrm{MT}(H^{d-1}(X \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q})),$$

определенный формулой

$$\Phi \in \mathrm{MT}(H^{d-1}(X_{\bar{t}\mathbb{C}}, \mathbb{Q})) \rightarrow \Phi|_{H^{d-1}(X \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q})} \in \mathrm{MT}(H^{d-1}(X \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q}))$$

(см. [10, предложение B.54]). По построению l -адические представления $\rho_{l, X_t}^{(d-1)}$, $\rho_{l, X}^{(d-1)}$ группы Галуа $\mathrm{Gal}(\overline{k(t)}/k(t))$ в пространствах $H^{d-1}(X_{\bar{t}}, \mathbb{Q}_l)$ и $H^{d-1}(X \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l)$ согласованы; в частности, существует канонический сюръективный морфизм алгебр Ли $\mathrm{Lie} \, \mathrm{Im}(\rho_{l, X_t}^{(d-1)}) \rightarrow \mathrm{Lie} \, \mathrm{Im}(\rho_{l, X}^{(d-1)})$, определенный сюръективным морфизмом

$$\mathrm{Im}(\rho_{l, X_t}^{(d-1)}) \rightarrow \mathrm{Im}(\rho_{l, X}^{(d-1)}),$$

где $\varphi \in \mathrm{Im}(\rho_{l, X_t}^{(d-1)}) \rightarrow \varphi|_{H^{d-1}(X \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l)} \in \mathrm{Im}(\rho_{l, X}^{(d-1)})$.

Если гипотеза Mumford–Tate $^{d-1}(X_t)$ верна, то существует коммутативная диаграмма морфизмов алгебр Ли

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Lie} \, \mathrm{Im}(\rho_{l, X_t}^{(d-1)}) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Lie} \, \mathrm{MT}(H^{d-1}(X_{\bar{t}\mathbb{C}}, \mathbb{Q}))(\mathbb{Q}_l) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Lie} \, \mathrm{Im}(\rho_{l, X}^{(d-1)}) & \hookrightarrow & \mathrm{Lie} \, \mathrm{MT}(H^{d-1}(X \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q}))(\mathbb{Q}_l) \end{array}$$

в которой вертикальные стрелки обозначают сюръективные морфизмы. Здесь нижняя стрелка $\hookrightarrow$ есть изоморфизм, и гипотеза Mumford–Tate $^{d-1}(X)$ верна.

Предположим, что m достаточно большое и гипотеза Mumford–Tate $^{d-1}(X)$ верна. В силу (1.3) можно выбрать m настолько большим, что

$$\dim \operatorname{Aut}(E_{\bar{c}l}^{d-1}) > \dim \operatorname{GL}(H^{d-1}(X \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q}_l)), \quad \dim E_{\bar{c}l}^{d-1} \geq 3. \quad (4.4)$$

Канонические вложения $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа

$$H^{d-1}(X \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q}) \hookrightarrow H^{d-1}(X_{\bar{\mathbb{C}}}, \mathbb{Q}) \hookrightarrow E_{\bar{\mathbb{C}}}^{d-1}$$

и равенство (4.1) дают канонические сюръективные морфизмы

$$\begin{array}{ccc} & \operatorname{Lie} \operatorname{Hg}(H^{d-1}(X_{\bar{\mathbb{C}}}, \mathbb{Q})) & \\ & \downarrow & \\ \operatorname{Lie} \operatorname{Hg}(H^{d-1}(X \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q})) & \swarrow & \operatorname{Lie} \operatorname{Hg}(E_{\bar{\mathbb{C}}}^{d-1}) = \operatorname{Lie} \operatorname{Aut}(E_{\bar{\mathbb{C}}}^{d-1}) \end{array}$$

(см. [10, предложение В.54]). Напомним, что группа Ходжа любой поляризуемой рациональной структуры Ходжа редуктивна [10, предложение В.57], поэтому абсолютно простая алгебра Ли $\operatorname{Lie} \operatorname{Hg}(E_{\bar{\mathbb{C}}}^{d-1}) = \operatorname{Lie} \operatorname{Aut}(E_{\bar{\mathbb{C}}}^{d-1})$ является прямым слагаемым редуктивной алгебры Ли $\operatorname{Lie} \operatorname{Hg}(H^{d-1}(X_{\bar{\mathbb{C}}}, \mathbb{Q}))$ [2, гл. I, § 6, следствие предложения 5]:

$$\operatorname{Lie} \operatorname{Hg}(H^{d-1}(X_{\bar{\mathbb{C}}}, \mathbb{Q})) = K \oplus \operatorname{Lie} \operatorname{Hg}(E_{\bar{\mathbb{C}}}^{d-1}).$$

В силу (4.4) действие этого слагаемого на $H^{d-1}(X \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q})$ тривиально. Поскольку канонический морфизм

$$\operatorname{Lie} \operatorname{Hg}(H^{d-1}(X_{\bar{\mathbb{C}}}, \mathbb{Q})) \rightarrow \operatorname{Lie} \operatorname{Hg}(H^{d-1}(X \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q}))$$

сюръективен, то $\operatorname{Lie} \operatorname{Hg}(H^{d-1}(X \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q}))$ является прямым слагаемым K :

$$K = K' \oplus \operatorname{Lie} \operatorname{Hg}(H^{d-1}(X \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q})).$$

Следовательно,

$$\operatorname{Lie} \operatorname{Hg}(H^{d-1}(X_{\bar{\mathbb{C}}}, \mathbb{Q})) \simeq K' \oplus \operatorname{Lie} \operatorname{Hg}(H^{d-1}(X \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q})) \oplus \operatorname{Lie} \operatorname{Hg}(E_{\bar{\mathbb{C}}}^{d-1}).$$

С другой стороны, по определению группы Ходжа

$$\operatorname{Lie} \operatorname{Hg}(H^{d-1}(X_{\bar{\mathbb{C}}}, \mathbb{Q})) \hookrightarrow \operatorname{Lie} \operatorname{Hg}(H^{d-1}(X \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q})) \oplus \operatorname{Lie} \operatorname{Hg}(E_{\bar{\mathbb{C}}}^{d-1}).$$

Значит, $K' = (0)$ и

$$\operatorname{Lie} \operatorname{Hg}(H^{d-1}(X_{\bar{\mathbb{C}}}, \mathbb{Q})) \simeq \operatorname{Lie} \operatorname{Hg}(H^{d-1}(X \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q})) \oplus \operatorname{Lie} \operatorname{Hg}(E_{\bar{\mathbb{C}}}^{d-1}).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \mathrm{Lie\,MT}(H^{d-1}(X_{\bar{t}_\mathbb{C}}, \mathbb{Q})) &\simeq \mathbb{Q} \oplus \mathrm{Lie\,Hg}(H^{d-1}(X \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q})) \oplus \mathrm{Lie\,Hg}(E_{\bar{t}_\mathbb{C}}^{d-1}) \\ &= \mathrm{Lie\,MT}(H^{d-1}(X \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q})) \oplus \mathrm{Lie\,Hg}(E_{\bar{t}_\mathbb{C}}^{d-1}). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Напомним, что существует естественный изоморфизм $\mathrm{Gal}(\overline{k(t)}/k(t))$ -модулей

$$\mathrm{tr}: H^{2d-2}(X_{\bar{t}}, \mathbb{Q}_l) \simeq \mathbb{Q}_l(-d+1)$$

(см. [15, гл. VI, § 11, лемма 1.3]), где $\mathrm{Gal}(\overline{k(t)}/k(t))$ действует на $\mathbb{Q}_l(1) = T_l(\mu) \otimes \mathbb{Q}_l$ посредством циклотомического характера

$$\chi: \mathrm{Gal}(\overline{k(t)}/k(t)) \rightarrow \mathbb{Q}_l^\times.$$

Следовательно, для любых $x, y \in H^{d-1}(X_{\bar{t}}, \mathbb{Q}_l)$, $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{k(t)}/k(t))$ имеем

$$\mathrm{tr}(\sigma x \cup \sigma y) = \chi^{-d+1}(\sigma) \mathrm{tr}(x \cup y).$$

В силу двойственности Пуанкаре билинейная форма

$$\mathrm{tr}(x \cup y): H^{d-1}(X_{\bar{t}}, \mathbb{Q}_l) \times H^{d-1}(X_{\bar{t}}, \mathbb{Q}_l) \rightarrow \mathbb{Q}_l(-d+1)$$

невырождена [6, теорема 2.3]. Пусть $\mathrm{Aut}(H^{d-1}(X_{\bar{t}}, \mathbb{Q}_l))$ – группа автоморфизмов $H^{d-1}(X_{\bar{t}}, \mathbb{Q}_l)$, сохраняющих эту форму, и пусть $\mathrm{Sim}(H^{d-1}(X_{\bar{t}}, \mathbb{Q}_l))$ – соответствующая группа подобий.

Мы получаем коммутативную диаграмму с точными строками

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathrm{Gal}(\overline{k(t)}/\bar{k}(t)) & \longrightarrow & \mathrm{Gal}(\overline{k(t)}/k(t)) & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & \hat{\pi}_1(\mathbb{P}_k^1 \setminus S_{\bar{k}}, \bar{t}) & \longrightarrow & \hat{\pi}_1(\mathbb{P}_k^1 \setminus S_k, \bar{t}) & \longrightarrow & \mathrm{Gal}(\bar{k}/k) \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow \bar{\rho}_{X_{\bar{t}}} & & \downarrow \rho_{X_{\bar{t}}} & & \downarrow \chi^{-d+1} \\ 1 & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(H^{d-1}(X_{\bar{t}}, \mathbb{Q}_l)) & \longrightarrow & \mathrm{Sim}(H^{d-1}(X_{\bar{t}}, \mathbb{Q}_l)) & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{Q}_l^\times \end{array} \quad (4.6)$$

где ψ определяется формулой

$$\mathrm{tr}(\gamma x \cup \gamma y) = \psi(\gamma) \cdot \mathrm{tr}(x \cup y), \quad x, y \in H^{d-1}(X_{\bar{t}}, \mathbb{Q}_l),$$

и канонические морфизмы $\mathrm{Gal}(\overline{k(t)}/\bar{k}(t)) \rightarrow \hat{\pi}_1(\mathbb{P}_k^1 \setminus S_{\bar{k}}, \bar{t})$, $\mathrm{Gal}(\overline{k(t)}/k(t)) \rightarrow \hat{\pi}_1(\mathbb{P}_k^1 \setminus S_k, \bar{t})$ сюръективны (напомним, что можно отождествить $\hat{\pi}_1(\mathbb{P}_k^1 \setminus S_k, \bar{t})$ с группой Галуа максимального алгебраического расширения $k(t)$, неразветвленного вне S_k ; аналогично, $\hat{\pi}_1(\mathbb{P}_k^1 \setminus S_{\bar{k}}, \bar{t})$ – группа Галуа максимального алгебраического расширения $\bar{k}(t)$, неразветвленного вне $S_{\bar{k}}$ [15, гл. I, § 5, пример 5.2(b)]).

Пусть $k(t)_l \hookrightarrow \bar{k}(t)$ – неподвижное поле подгруппы

$$\mathrm{Ker}[\chi: \mathrm{Gal}(\overline{k(t)}/k(t)) \rightarrow \mathbb{Q}_l^\times] \hookrightarrow \mathrm{Gal}(\bar{k}(t)/k(t)).$$

Поскольку $k(t)_l \hookrightarrow \bar{k}(t)$, то из следствия 0.4 и диаграммы (4.3) видно, что

$$\begin{aligned} \mathrm{Lie\,Aut}(E_{\bar{t}l}^{d-1})(\mathbb{Q}_l) &\simeq \mathrm{Lie\,Im}[(\mathrm{Gal}(\overline{k(t)})/\bar{k}(t)) \rightarrow \mathrm{Aut}(E_{\bar{t}l}^{d-1})(\mathbb{Q}_l)] \\ &= \mathrm{Lie\,Im}[(\mathrm{Gal}(\overline{k(t)})/\bar{k}(t)) \rightarrow \mathrm{Sim}(E_{\bar{t}l}^{d-1})(\mathbb{Q}_l)] \\ &\hookrightarrow \mathrm{Lie\,Im}[(\mathrm{Gal}(\overline{k(t)})/k(t)_l) \rightarrow \mathrm{Sim}(E_{\bar{t}l}^{d-1})(\mathbb{Q}_l)] \\ &\hookrightarrow \mathrm{Lie\,Aut}(E_{\bar{t}l}^{d-1})(\mathbb{Q}_l) \simeq \mathrm{Lie\,Hg}(E_{\bar{t}_c}^{d-1})(\mathbb{Q}_l). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \mathrm{Lie\,Im}[(\mathrm{Gal}(\overline{k(t)})/k(t)_l) \rightarrow \mathrm{Sim}(E_{\bar{t}l}^{d-1})(\mathbb{Q}_l)] &= \mathrm{Lie\,Aut}(E_{\bar{t}l}^{d-1})(\mathbb{Q}_l) \\ &\simeq \mathrm{Lie\,Hg}(E_{\bar{t}_c}^{d-1})(\mathbb{Q}_l). \end{aligned}$$

Напомним, что $\cup$ -произведение

$$H^{d-1}(X_{\bar{t}}, \mathbb{Q}_l) \times H^{d-1}(X_{\bar{t}}, \mathbb{Q}_l) \rightarrow H^{2d-2}(X_{\bar{t}}, \mathbb{Q}_l) \simeq \mathbb{Q}_l(-d+1)$$

индуцирует невырожденную билинейную форму на подпространстве $H^{d-1}(X \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l) \hookrightarrow H^{d-1}(X_{\bar{t}}, \mathbb{Q}_l)$ [12, лемма 5.2.4]. Поэтому мы получаем коммутативную диаграмму с точными строками

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathrm{Gal}(\overline{k(t)})/k(t) & & \\ & & \downarrow & & \\ & & \hat{\pi}_1(\mathbb{P}_k^1 \setminus S_k, \bar{t}) & \longrightarrow & \mathrm{Gal}(\bar{k}/k) \rightarrow 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow \chi^{-d+1} \\ \mathrm{Aut}(H^{d-1}(X \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l)) & \hookrightarrow & \mathrm{Sim}(H^{d-1}(X \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l)) & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{Q}_l^\times \end{array} \quad (4.7)$$

где ψ определена формулой

$$\mathrm{tr}(\gamma x \cup \gamma y) = \psi(\gamma) \cdot \mathrm{tr}(x \cup y), \quad x, y \in H^{d-1}(X \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l).$$

С другой стороны, из гипотезы Mumford–Tate $^{d-1}(X)$ получим существование изоморфизма

$$\begin{aligned} \mathrm{Lie\,Im}[(\mathrm{Gal}(\overline{k(t)})/k(t)) \rightarrow \mathrm{Sim}(H^{d-1}(X \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l))] &\simeq \\ &\simeq \mathrm{Lie\,MT}(H^{d-1}(X \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q}))(\mathbb{Q}_l) \\ &= \mathbb{Q}_l \cdot \mathrm{id} \oplus \mathrm{Lie\,Hg}(H^{d-1}(X \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q}))(\mathbb{Q}_l). \end{aligned}$$

Из диаграммы (4.7) видно, что

$$\begin{aligned} \mathrm{Lie\,Im}[(\mathrm{Gal}(\overline{k(t)})/k(t)_l) \rightarrow \mathrm{Sim}(H^{d-1}(X \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l))] &\hookrightarrow \\ &\hookrightarrow \mathrm{Lie\,Hg}(H^{d-1}(X \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q}))(\mathbb{Q}_l), \end{aligned}$$

и $\text{Lie Im}[\text{Gal}(\overline{k(t)}/k(t)_l) \rightarrow \text{Sim}(H^{d-1}(X \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l))]$ – идеал коразмерности 1 в $\text{Lie Im}[\text{Gal}(\overline{k(t)}/k(t)) \rightarrow \text{Sim}(H^{d-1}(X \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l))]$. Поэтому

$$\begin{aligned} & \text{Lie Im}[\text{Gal}(\overline{k(t)}/k(t)_l) \rightarrow \text{Sim}(H^{d-1}(X \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l))] \\ &= \text{Lie Im}[\text{Gal}(\overline{k(t)}/k(t)_l) \rightarrow \text{Aut}(H^{d-1}(X \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l))] \\ &\simeq \text{Lie Hg}(H^{d-1}(X \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q}))(\mathbb{Q}_l). \end{aligned}$$

С другой стороны, имеется каноническое разложение l -адических представлений группы $\text{Gal}(\overline{k(t)}/k(t)_l)$:

$$H^{d-1}(X_{\bar{t}}, \mathbb{Q}_l) \simeq H^{d-1}(X \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l) \oplus E_{\bar{t}l}^{d-1}.$$

Следовательно, существует каноническое вложение

$$\begin{aligned} & \text{Lie Im}[\text{Gal}(\overline{k(t)}/k(t)_l) \rightarrow \text{Aut}(H^{d-1}(X_{\bar{t}}, \mathbb{Q}_l))] \hookrightarrow \\ & \hookrightarrow \text{Lie Im}[\text{Gal}(\overline{k(t)}/k(t)_l) \rightarrow \text{Aut}(H^{d-1}(X \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l))] \oplus \\ & \oplus \text{Lie Im}[\text{Gal}(\overline{k(t)}/k(t)_l) \rightarrow \text{Aut}(E_{\bar{t}l}^{d-1})] \\ & \simeq \text{Lie Hg}(H^{d-1}(X \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q}))(\mathbb{Q}_l) \oplus \text{Lie Hg}(E_{\bar{t}c}^{d-1})(\mathbb{Q}_l) \end{aligned} \quad (4.8)$$

с сюръективными проекциями $\text{Lie Im}[\text{Gal}(\overline{k(t)}/k(t)_l) \rightarrow \text{Aut}(H^{d-1}(X_{\bar{t}}, \mathbb{Q}_l))]$ на каждое слагаемое.

Напомним, что $\text{Hg}(H^{d-1}(X \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q}))$ и $\text{Hg}(E_{\bar{t}c}^{d-1})$ – алгебраические редуктивные $\mathbb{Q}$ -группы [10, предложение В.57]. Другими словами, группа Ходжа является произведением двух связанных по Зарискому нормальных подгрупп T и S , где T – алгебраический тор и S полупроста, а $T \cap S$ конечна.

Фиксируем изоморфизм полей $\overline{\mathbb{Q}}_l \simeq \mathbb{C}$. Хорошо известно, что линейное представление редуктивной комплексной алгебраической группы вполне приводимо [19, гл. 5, § 2, теорема 13, следствие 1]. Поэтому $\text{Lie Hg}(H^{d-1}(X \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q}))(\overline{\mathbb{Q}}_l)$ и $\text{Lie Hg}(E_{\bar{t}c}^{d-1})(\overline{\mathbb{Q}}_l)$ – редуктивные алгебры Ли (по определению комплексная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется *редуктивной*, если $\mathfrak{g} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{g}^{\text{ss}}$, где $\mathfrak{z}$ – диагоналируемая подалгебра Ли и $\mathfrak{g}^{\text{ss}}$ – полупростой идеал [19, гл. 4, § 1]), и канонические точные представления

$$\begin{aligned} & \text{Lie Hg}(H^{d-1}(X \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q}))(\overline{\mathbb{Q}}_l) \hookrightarrow \text{End}(H^{d-1}(X \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q}_l) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_l) \\ &= \text{End}(H^{d-1}(X \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_l), \\ & \text{Lie Hg}(E_{\bar{t}c}^{d-1})(\overline{\mathbb{Q}}_l) \hookrightarrow \text{End}(E_{\bar{t}c}^{d-1}(\overline{\mathbb{Q}}_l)) = \text{End}(E_{\bar{t}l}^{d-1} \otimes \overline{\mathbb{Q}}_l) \end{aligned}$$

вполне приводимы [19, гл. 5, § 2, задача 29]. В частности, каноническое точное представление $(\text{Lie Im}[\text{Gal}(\overline{k(t)}/k(t)_l) \rightarrow \text{Aut}(H^{d-1}(X_{\bar{t}}, \mathbb{Q}_l))]) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_l$ в

$$H^{d-1}(X_{\bar{t}}, \mathbb{Q}_l) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_l = (H^{d-1}(X \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_l) \oplus (E_{\bar{t}l}^{d-1} \otimes \overline{\mathbb{Q}}_l)$$

вполне приводимо. Поэтому $(\text{Lie Im}[\text{Gal}(\overline{k(t)}/k(t)_l) \rightarrow \text{Aut}(H^{d-1}(X_{\bar{t}}, \mathbb{Q}_l))]) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_l$ – редуктивная алгебра Ли [2, гл. I, § 6, п. 4, предложение 5].

Напомним, что канонический морфизм

$$\begin{aligned} & (\text{Lie Im} [\text{Gal}(\overline{k(t)}/k(t)_l) \rightarrow \text{Aut}(H^{d-1}(X_{\bar{t}}, \mathbb{Q}_l))]) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_l \rightarrow \\ & \rightarrow \text{Lie Hg}(E_{\bar{t}\mathbb{C}}^{d-1})(\overline{\mathbb{Q}}_l) = \text{Lie Aut}(E_{\bar{t}l}^{d-1} \otimes \overline{\mathbb{Q}}_l) \end{aligned}$$

сюръективен. Поэтому простая алгебра Ли $\text{Lie Hg}(E_{\bar{t}\mathbb{C}}^{d-1})(\overline{\mathbb{Q}}_l)$ является прямым слагаемым редуктивной алгебры Ли

$$(\text{Lie Im} [\text{Gal}(\overline{k(t)}/k(t)_l) \rightarrow \text{Aut}(H^{d-1}(X_{\bar{t}}, \mathbb{Q}_l))]) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_l$$

(см. [2, гл. I, § 6, следствие предложения 5]):

$$(\text{Lie Im} [\text{Gal}(\overline{k(t)}/k(t)_l) \rightarrow \text{Aut}(H^{d-1}(X_{\bar{t}}, \mathbb{Q}_l))]) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_l = L \oplus \text{Lie Hg}(E_{\bar{t}\mathbb{C}}^{d-1})(\overline{\mathbb{Q}}_l).$$

В силу (4.4) действие этого слагаемого на $H^{d-1}(X \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_l = H^{d-1}(X \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q}) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_l$ тривиально. Поскольку канонический морфизм

$$\begin{aligned} & (\text{Lie Im} [\text{Gal}(\overline{k(t)}/k(t)_l) \rightarrow \text{Aut}(H^{d-1}(X_{\bar{t}}, \mathbb{Q}_l))]) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_l \rightarrow \\ & \rightarrow \text{Lie Hg}(H^{d-1}(X \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q}))(\overline{\mathbb{Q}}_l) \end{aligned}$$

является сюръективным морфизмом редуктивных алгебр Ли, получаем разложение

$$\begin{aligned} L &= L' \oplus \text{Lie Hg}(H^{d-1}(X \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q}))(\overline{\mathbb{Q}}_l), \\ (\text{Lie Im} [\text{Gal}(\overline{k(t)}/k(t)_l) \rightarrow \text{Aut}(H^{d-1}(X_{\bar{t}}, \mathbb{Q}_l))]) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_l &= \\ &= L' \oplus \text{Lie Hg}(H^{d-1}(X \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q}))(\overline{\mathbb{Q}}_l) \oplus \text{Lie Hg}(E_{\bar{t}\mathbb{C}}^{d-1})(\overline{\mathbb{Q}}_l). \end{aligned}$$

Из (4.8) следует, что $L' = (0)$, и мы получаем следующий изоморфизм:

$$\begin{aligned} & \text{Lie Im} [\text{Gal}(\overline{k(t)}/k(t)_l) \rightarrow \text{Aut}(H^{d-1}(X_{\bar{t}}, \mathbb{Q}_l))] \simeq \\ & \simeq \text{Lie Hg}(H^{d-1}(X \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q}))(\mathbb{Q}_l) \oplus \text{Lie Hg}(E_{\bar{t}\mathbb{C}}^{d-1})(\mathbb{Q}_l). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Из диаграммы (4.6) видно, что

$$\text{Lie Im} [\text{Gal}(\overline{k(t)}/k(t)_l) \rightarrow \text{Sim}(H^{d-1}(X_{\bar{t}}, \mathbb{Q}_l))]$$

– идеал коразмерности 1 в $\text{Lie Im} [\text{Gal}(\overline{k(t)}/k(t)_l) \rightarrow \text{Sim}(H^{d-1}(X_{\bar{t}}, \mathbb{Q}_l))]$. Поэтому гипотеза Mumford–Tate $^{d-1}(X_t)$ следует из гипотезы Mumford–Tate $^{d-1}(X)$ и из соотношений (4.5) и (4.9).

Для достаточно большого m приходим к следующему соотношению:

$$\text{Mumford–Tate}^{d-1}(X) \Leftrightarrow \text{Mumford–Tate}^{d-1}(X_t). \quad (4.10)$$

Если $r < d - 1$, то по слабой теореме Лефшеца морфизм ограничения $H^r(X \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l) \rightarrow H^r(X_{\bar{t}}, \mathbb{Q}_l)$ является изоморфизмом $\text{Gal}(\overline{k(t)}/k(t))$ -модулей [13, 1.4.6],

и существует канонический изоморфизм $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа $H^r(X \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q}) \simeq H^r(X_{\bar{t}_{\mathbb{C}}}, \mathbb{Q})$.

Если гипотеза Mumford–Tate^r(X) верна, то из коммутативной диаграммы морфизмов алгебр Ли

$$\begin{array}{ccc} \text{Lie Im}(\rho_{l, X_t}^{(r)}) & & \text{Lie MT}(H^r(X_{\bar{t}_{\mathbb{C}}}, \mathbb{Q}))(\mathbb{Q}_l) \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ \text{Lie Im}(\rho_{l, X}^{(r)}) & \xrightarrow{\sim} & \text{Lie MT}(H^r(X \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q}))(\mathbb{Q}_l) \end{array}$$

получим, что

$$\text{Lie Im}(\rho_{l, X_t}^{(r)}) \xrightarrow{\sim} \text{Lie MT}(H^r(X_{\bar{t}_{\mathbb{C}}}, \mathbb{Q}))(\mathbb{Q}_l),$$

и гипотеза Mumford–Tate^r(X_t) верна.

Обратно, если гипотеза Mumford–Tate^r(X_t) верна, то из коммутативной диаграммы морфизмов алгебр Ли

$$\begin{array}{ccc} \text{Lie Im}(\rho_{l, X_t}^{(r)}) & \xrightarrow{\sim} & \text{Lie MT}(H^r(X_{\bar{t}_{\mathbb{C}}}, \mathbb{Q}))(\mathbb{Q}_l) \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ \text{Lie Im}(\rho_{l, X}^{(r)}) & & \text{Lie MT}(H^r(X \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q}))(\mathbb{Q}_l) \end{array}$$

получим, что $\text{Lie Im}(\rho_{l, X}^{(r)}) \xrightarrow{\sim} \text{Lie MT}(H^r(X \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q}))(\mathbb{Q}_l)$, и Mumford–Tate^r(X) верна.

Используя (4.10), получаем следующее соотношение:

$$\text{Mumford–Tate}^r(X_t) \Leftrightarrow \text{Mumford–Tate}^r(X), \quad r \leq d-1. \quad (4.11)$$

Пусть y_t – класс $k(t)$ -рационального гиперплоского сечения $X_{\bar{t}}$ и L_t – оператор, определенный формулой $L_t a = a \cup y_t$; для $0 \leq i \leq d-1$ отображение

$$L_t^{d-1-i}: H^i(X_{\bar{t}}, \mathbb{Q}_l) \rightarrow H^{2d-2-i}(X_{\bar{t}}, \mathbb{Q}_l(d-1-i))$$

является изоморфизмом $\text{Gal}(\overline{k(t)}/k(t))$ -модулей и отображение

$$L_t^{d-1-i}: H^i(X_{\bar{t}_{\mathbb{C}}}, \mathbb{Q}) \rightarrow H^{2d-2-i}(X_{\bar{t}_{\mathbb{C}}}, \mathbb{Q}(d-1-i))$$

– изоморфизм $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа (сильная теорема Лефшеца); поэтому мы имеем следующее соотношение:

$$\text{Mumford–Tate}^r(X_t) \Leftrightarrow \text{Mumford–Tate}^{2d-2-r}(X_t), \quad r \leq d-1. \quad (4.12)$$

Если $r \leq \dim X_t = d-1$, то из (4.11) и (4.12) получаем

$$\text{Mumford–Tate}^r(X) \Leftrightarrow \text{Mumford–Tate}^r(X_t) \Leftrightarrow \text{Mumford–Tate}^{2d-2-r}(X_t).$$

Поэтому

$$\text{Mumford–Tate}(X) \Rightarrow \text{Mumford–Tate}(X_t).$$

Теорема 0.7 доказана.

4.4. СЛЕДСТВИЕ. *Предположим, что k – конечно порожденное расширение поля $\mathbb{Q}$ рациональных чисел. Пусть X, Y – гладкие проективные многообразия над k . Если существует сюръективный k -морфизм $f: X \rightarrow Y$, то $\text{Mumford–Tate}(X) \Rightarrow \text{Mumford–Tate}(Y)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\dim X > \dim Y$ и $\text{Mumford–Tate}(X)$ верна. Пусть $X_t \hookrightarrow X$ – общий член k -рационального пучка Лефшеца гиперповерхностных сечений X достаточно высокой степени. По теореме 0.7 гипотеза Мамфорда–Тэйта выполняется для X_t . С другой стороны, $f|_{X_t}: X_t \rightarrow Y \otimes_k k(t)$ – сюръективный морфизм, определенный над $k(t)$.

Очевидно, что $Y \otimes_k k(t)$ – общий слой постоянного пучка $Y \times \mathbb{P}_k^1 \rightarrow \mathbb{P}_k^1$. Поэтому существует канонический изоморфизм $\text{Gal}(\bar{k}(t)/k(t))$ -модулей

$$H^r(Y \otimes_k \bar{k}(t), \mathbb{Q}_l) \simeq H^r(Y \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Q}_l),$$

где действие $\text{Gal}(\bar{k}(t)/k(t))$ на $H^r(Y \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Q}_l)$ пропускается через канонический сюръективный морфизм

$$\text{Gal}(\bar{k}(t)/k(t)) \rightarrow \hat{\pi}_1(\mathbb{P}_k^1, \bar{t}) \simeq \text{Gal}(\bar{k}/k)$$

и определяется естественным действием $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ на пространстве $H^r(Y \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Q}_l)$.

Для данных вложений $k \hookrightarrow k(t) \hookrightarrow \bar{k}(t) \hookrightarrow \mathbb{C}$ имеем естественный изоморфизм $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа

$$H^r(Y \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q}) \simeq H^r(Y \otimes_k k(t) \otimes_{k(t)} \mathbb{C}, \mathbb{Q});$$

поэтому легко видеть, что

$$\text{Mumford–Tate}^r(Y \otimes_k k(t)) \Rightarrow \text{Mumford–Tate}^r(Y).$$

Следовательно, можно использовать индукцию и свести задачу к случаю $\dim X = \dim Y$. Тогда можно воспользоваться формулой проекции:

$$f_* f^*(z) = \deg f \cdot z$$

(см. [9, § 2.3]), которая показывает, что f^* определяет следующие вложения $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа $H^r(Y \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q}) \hookrightarrow H^r(X \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q})$ и $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ -модулей $H^r(Y \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Q}_l) \hookrightarrow H^r(X \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Q}_l)$. Пусть

$$\begin{aligned} \rho_{l,X}^{(r)}: \text{Gal}(\bar{k}/k) &\rightarrow \text{GL}(H^r(X \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Q}_l)), \\ \rho_{l,Y}^{(r)}: \text{Gal}(\bar{k}/k) &\rightarrow \text{GL}(H^r(Y \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Q}_l)) \end{aligned}$$

– канонические l -адические представления. Вложение $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа

$$H^r(Y \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q}) \hookrightarrow H^r(X \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q})$$

дает сюръективный морфизм групп Мамфорда–Тэйта

$$\text{MT}(H^r(X \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q})) \rightarrow \text{MT}(H^r(Y \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q})),$$

определенный формулой

$$\Phi \in \mathrm{MT}(H^r(X \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q})) \rightarrow \Phi|_{H^r(Y \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q})} \in \mathrm{MT}(H^r(Y \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q}))$$

(см. [10, предложение B.54]). Следовательно, существует канонический сюръективный морфизм алгебр Ли

$$\mathrm{Lie} \, \mathrm{MT}(H^r(X \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q}))(\mathbb{Q}_l) \rightarrow \mathrm{Lie} \, \mathrm{MT}(H^r(Y \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q}))(\mathbb{Q}_l).$$

С другой стороны, вложение $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ -модулей $H^r(Y \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Q}_l) \hookrightarrow H^r(X \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Q}_l)$ дает канонический сюръективный морфизм алгебр Ли

$$\mathrm{Lie} \, \mathrm{Im}(\rho_{l,X}^{(r)}) \rightarrow \mathrm{Lie} \, \mathrm{Im}(\rho_{l,Y}^{(r)}),$$

определенный сюръективным морфизмом

$$\mathrm{Im}(\rho_{l,X}^{(r)}) \rightarrow \mathrm{Im}(\rho_{l,Y}^{(r)}),$$

где $\varphi \in \mathrm{Im}(\rho_{l,X}^{(r)}) \rightarrow \varphi|_{H^r(Y \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Q}_l)} \in \mathrm{Im}(\rho_{l,Y}^{(r)})$.

По построению существует коммутативная диаграмма морфизмов алгебр Ли

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Lie} \, \mathrm{Im}(\rho_{l,X}^{(r)}) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Lie} \, \mathrm{MT}(H^r(X \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q}))(\mathbb{Q}_l) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Lie} \, \mathrm{Im}(\rho_{l,Y}^{(r)}) & \hookrightarrow & \mathrm{Lie} \, \mathrm{MT}(H^r(Y \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q}))(\mathbb{Q}_l) \end{array}$$

с сюръективными вертикальными стрелками. Здесь нижняя горизонтальная стрелка является изоморфизмом, и гипотеза Mumford–Tate^r(Y) верна. Следствие доказано.

§ 5. Об арифметике и геометрии некоторых гиперкэлеровых четырехмерных многообразий

5.1. Четномерное односвязное гладкое проективное многообразие V над полем характеристики нуль называется *гиперкэлеровым*, если $H^0(V, \Omega_V^2)$ одномерно и порождается формой ω , невырожденной во всех точках. Следуя работе [1, § 6], напомним, что существует некоторая простая конструкция гиперкэлеровых многообразий V в любой размерности $2n \geq 2$: для любой поверхности S типа КЗ возьмем в качестве V точечную схему Гильберта $V = \mathrm{Hilb}^n(S)$, которая параметризует такие конечные замкнутые подсхемы $Z \hookrightarrow S$, что $\mathrm{length}(\mathcal{O}_Z) = n$.

Имеем равенство

$$b_2(V) = 23$$

(см. [1, § 6, предложение 6]).

5.2. ЛЕММА [18, следствие 2.5]. Пусть S и S' – гладкие комплексные проективные поверхности с $q(S) = q(S') = 0$, $p_g(S') = \dim H^0(S', \Omega_{S'}^2) \geq 1$. Если $f: S \rightarrow S'$ – сюръективный морфизм, то график Γ_f морфизма f не гомологичен сумме пересечений дивизоров с коэффициентами из $\mathbb{Q}$.

5.3. ЛЕММА [14, следствие 2.8]. Пусть X_1, X_2 – бирационально эквивалентные гладкие проективные комплексные четырехмерные многообразия. Тогда

$$\text{Hodge}(X_1) \Leftrightarrow \text{Hodge}(X_2).$$

5.4. Пусть S – гладкая проективная комплексная поверхность типа КЗ. По теореме Лефшеца $\text{NS}(S) \cong [H^2(S, \mathbb{Z}) \cap H^{1,1}(S, \mathbb{C})]$ – канонический изоморфизм. Пусть $\text{NS}_{\mathbb{Q}}(S) = \text{NS}(S) \otimes \mathbb{Q}$. Обозначим через $T_{\mathbb{Q}}(S)$ пространство трансцендентных классов (ортогональное дополнение $\text{NS}_{\mathbb{Q}}(S) \hookrightarrow H^2(S, \mathbb{Q})$ относительно $\cup$ -произведения), и пусть

$$d = \dim_{\mathbb{Q}} T_{\mathbb{Q}}(S) = 22 - \text{rank NS}(S).$$

Напомним, что $\cup$ -произведение определяет билинейную форму ψ на $H^2(S, \mathbb{Q})$ сигнатуры $(3+, 19-)$. По теореме об индексе [16, лекция 18] ограничение ψ_0 формы ψ на $T_{\mathbb{Q}}(S)$ имеет сигнатуру $(2+, (d-2)-)$.

Описание группы Ходжа $\text{Hg}(S)$ поверхности S типа КЗ принадлежит Ю. Г. Зархину [28]: $\mathbb{Q}$ -алгебра $K = \text{End}_{\text{Hg}(S)} T_{\mathbb{Q}}(S)$ является вполне вещественным полем алгебраических чисел или чисто мнимым квадратичным расширением вполне вещественного поля K_0 . В первом случае $\text{Hg}(S) = R_{K/\mathbb{Q}} \text{SO}(T_{\mathbb{Q}}(S), \Phi)$, где $T_{\mathbb{Q}}(S)$ рассматривается как векторное пространство над K , и форма

$$\Phi: T_{\mathbb{Q}}(S) \times T_{\mathbb{Q}}(S) \rightarrow K, \quad (x, y) \rightarrow \alpha,$$

определена соотношением $\psi_0(ex, y) = \text{tr}_{K/\mathbb{Q}}(e\alpha)$ для всех $e \in K$. Во втором случае $\text{Hg}(S) = R_{K_0/\mathbb{Q}} \text{U}(T_{\mathbb{Q}}(S), \Phi)$, где $\text{U}(T_{\mathbb{Q}}(S), \Phi)$ – унитарная группа над K_0 , ассоциированная с K -векторным пространством $T_{\mathbb{Q}}(S)$ и формой Φ на нем (линейной по одному аргументу и полулинейной по другому аргументу).

5.5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 0.8. Утверждение а) доказано в [23, гл. III, замечание 3.7]. Действительно, по теореме Зархина имеем $\text{Hg}(S) = \text{SO}(T_{\mathbb{Q}}(S), \psi_0)$. Из разложения

$$H^2(S, \mathbb{Q}) = T_{\mathbb{Q}}(S) \oplus \text{NS}_{\mathbb{Q}}(S),$$

формулы Кюннета и теоремы Лефшеца

$$H^2(S, \mathbb{Q})^{\text{Hg}(S)} = H^2(S, \mathbb{Q}) \cap H^{1,1}(S, \mathbb{C}) = \text{NS}_{\mathbb{Q}}(S)$$

(эквивалентной соотношению $[T_{\mathbb{Q}}(S)]^{\text{Hg}(S)} = (0)$) получаем

$$\begin{aligned} H^4(S \times S, \mathbb{Q}) \cap H^{2,2}(S \times S, \mathbb{C}) &= H^4(S \times S, \mathbb{Q})^{\text{Hg}(S \times S)} = H^4(S \times S, \mathbb{Q})^{\text{Hg}(S)} \\ &= [H^0(S, \mathbb{Q}) \otimes H^4(S, \mathbb{Q})] \oplus [H^4(S, \mathbb{Q}) \otimes H^0(S, \mathbb{Q})] \oplus \\ &\quad \oplus [H^2(S, \mathbb{Q}) \otimes H^2(S, \mathbb{Q})]^{\text{Hg}(S)}. \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$[H^0(S, \mathbb{Q}) \otimes H^4(S, \mathbb{Q})] \oplus [H^4(S, \mathbb{Q}) \otimes H^0(S, \mathbb{Q})]$$

порождается классами пересечений дивизоров. С другой стороны,

$$\begin{aligned} [H^2(S, \mathbb{Q}) \otimes H^2(S, \mathbb{Q})]^{\mathrm{Hg}(S)} &= \\ &= [(T_{\mathbb{Q}}(S) \oplus \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(S)) \otimes (T_{\mathbb{Q}}(S) \oplus \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(S))]^{\mathrm{Hg}(S)} \\ &= [T_{\mathbb{Q}}(S) \otimes T_{\mathbb{Q}}(S)]^{\mathrm{Hg}(S)} \oplus [T_{\mathbb{Q}}(S) \otimes \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(S)]^{\mathrm{Hg}(S)} \oplus \\ &\quad \oplus [\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(S) \otimes T_{\mathbb{Q}}(S)]^{\mathrm{Hg}(S)} \oplus [\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(S) \otimes \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(S)] \\ &= [T_{\mathbb{Q}}(S) \otimes T_{\mathbb{Q}}(S)]^{\mathrm{Hg}(S)} \oplus [\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(S) \otimes \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(S)] \end{aligned}$$

порождается классами пересечений дивизоров и 1-мерным подпространством (в силу леммы Шура)

$$[T_{\mathbb{Q}}(S) \otimes T_{\mathbb{Q}}(S)]^{\mathrm{Hg}(S)} = [T_{\mathbb{Q}}(S) \otimes T_{\mathbb{Q}}(S)]^{\mathrm{SO}(T_{\mathbb{Q}}(S), \psi_0)} = \mathrm{End}_{\mathrm{SO}(T_{\mathbb{Q}}(S), \psi_0)} T_{\mathbb{Q}}(S).$$

Остается показать, что $\delta_S = \mathrm{cl}_{S \times S}(\Delta_S)$ не является линейной комбинацией пересечений дивизоров. Поскольку δ_S – класс графика Γ_{id_S} тождественного морфизма $\mathrm{id}_S: S \rightarrow S$, $q(S) = 0$ и $p_g(S) = 1$, то результат следует из леммы п. 5.2.

Пусть $(S \times S)'$ – раздутие $S \times S$ вдоль диагонали Δ_S . Тогда $\mathrm{Hilb}^2(S)$ является фактором $(S \times S)'$ по инволюции, определенной перестановкой множителей (см. [1, § 6]; [9, пример 9.3.14]). Следовательно, существует естественный сюръективный морфизм $(S \times S)' \rightarrow \mathrm{Hilb}^2(S)$. Имеем коммутативную диаграмму естественных сюръективных морфизмов

$$\begin{array}{ccc} (S \times S)' & \longrightarrow & S \times S \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hilb}^2(S) & \longrightarrow & \mathrm{Sym}^2(S) \end{array}$$

где $\mathrm{Sym}^2(S)$ – симметрический квадрат S и $\mathrm{Hilb}^2(S) \rightarrow \mathrm{Sym}^2(S)$ – разрешение особенностей $\mathrm{Sym}^2(S)$ [1, § 6].

В силу леммы п. 5.3 и следствия п. 1.2 гипотеза Ходжа для $S \times S$ влечет гипотезу Ходжа для $(S \times S)'$ и для $\mathrm{Hilb}^2(S)$. Теорема 0.8 доказана.

5.6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 0.9. В рассматриваемой ситуации $p = 22 - \mathrm{rank} \mathrm{NS}(S)$ – нечетное простое число. По теореме Зархина $T_{\mathbb{Q}}(S)$ – неприводимый $\mathrm{Hg}(S)$ -модуль,

$$E = \mathrm{End}_{\mathrm{Hg}(S)} T_{\mathbb{Q}}(S)$$

– поле [28, теорема 1.6], $\mathrm{Hg}(S)$ – полупростая $\mathbb{Q}$ -группа [28, теорема 2.2.1]. Поэтому по лемме Шура и соотношению

$$E \otimes \overline{\mathbb{Q}} = \mathrm{End}_{\mathrm{Hg}(S) \otimes \overline{\mathbb{Q}}} (T_{\mathbb{Q}}(S) \otimes \overline{\mathbb{Q}})$$

получим разложение

$$T_{\mathbb{Q}}(S) \otimes \overline{\mathbb{Q}} = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r,$$

где $r = [E : \mathbb{Q}]$, V_i – неприводимые попарно неизоморфные $\mathrm{Hg}(S) \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ -модули. Группа Галуа $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ транзитивно переставляет $V_1, \dots, V_r$. Поэтому

$$p = r \cdot \dim V_i, \quad r \in \{1, p\}.$$

Если $r = 1$, то $T_{\mathbb{Q}}(S) \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ – неприводимый $\mathrm{Hg}(S) \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ -модуль, и утверждение следует из теоремы 0.8. Если $r = p$, то $V_i \simeq \overline{\mathbb{Q}}$ – *изоморфные* тривиальные 1-мерные $\mathrm{Hg}(S) \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ -модули, что противоречит установленной ранее неизоморфности $\mathrm{Hg}(S) \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ -модулей V_i , $i = 1, \dots, p$. Следствие 0.9 доказано.

5.7. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 0.10. Известно, что гипотеза Мамфорда–Тэйта верна для любой гладкой проективной поверхности типа КЗ над числовым полем [24]. Другими словами, для канонического l -адического представления

$$\rho_l^{(2)}: \text{Gal}(\bar{k}/k) \rightarrow \text{GL}(H^2(S \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Q}_l))$$

имеется изоморфизм алгебр Ли

$$\text{Lie Im}(\rho_l^{(2)}) \simeq \text{Lie MT}(S \otimes_k \mathbb{C})(\mathbb{Q}_l).$$

Пусть $(S \times S)'$ – раздутие $S \times S$ вдоль диагонали Δ_S , и пусть $\pi: (S \times S)' \rightarrow \text{Hilb}^2(S)$ – канонический сюръективный морфизм конечной степени.

Существует аддитивный изоморфизм $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа

$$H^p((S \times S)', \mathbb{Q}) \simeq H^p(S \times S, \mathbb{Q}) \oplus H^{p-2}(\Delta_S, \mathbb{Q}(-1)) \quad (5.1)$$

(см. [12, теорема 2.2]). С другой стороны, существует аддитивный изоморфизм $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ -модулей

$$H^p((S \times S)' \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l) \simeq H^p((S \times S) \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l) \oplus H^{p-2}(\Delta_S \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l(-1)) \quad (5.2)$$

(см. [12, теорема 2.2]). В силу формулы Кюннета и (5.1), (5.2) гипотеза Мамфорда–Тэйта для S влечет гипотезу Мамфорда–Тэйта для $(S \times S)'$. Применяя утверждение следствия п. 4.4 к сюръективному k -морфизму $\pi: (S \times S)' \rightarrow \text{Hilb}^2(S)$, видим, что гипотеза Мамфорда–Тэйта верна для $\text{Hilb}^2(S)$.

Предположим, что $T_{\mathbb{Q}}(S \otimes_k \mathbb{C})$ – абсолютно неприводимый $\text{Hg}(S \otimes_k \mathbb{C})$ -модуль. В силу теоремы 0.8 гипотеза Ходжа верна для $\text{Hilb}^2(S) \otimes_k \mathbb{C}$. С другой стороны, гипотеза Мамфорда–Тэйта для $\text{Hilb}^2(S)$ показывает, что гипотеза Ходжа для $\text{Hilb}^2(S) \otimes_k \mathbb{C}$ эквивалентна гипотезе Тэйта для $\text{Hilb}^2(S)$. Теорема 0.10 доказана.

5.8. СЛЕДСТВИЕ. Пусть S – гладкая проективная поверхность типа КЗ над числовым полем $k \hookrightarrow \mathbb{C}$, $[k : \mathbb{Q}] < \infty$. Предположим, что $\text{rank NS}(S \otimes_k \bar{k}) \in \{3, 5, 9, 11, 15, 17, 19\}$. Тогда гипотеза Тэйта и гипотеза Мамфорда–Тэйта верны для $S \times S$ и для $\text{Hilb}^2(S)$.

Это вытекает из следствия 0.9 и теоремы 0.10.

Список литературы

1. Beauville A. Variétés kähleriennes dont la première classe de Chern est nulle // J. Diff. Geom. 1983. V. 18. P. 755–782.
2. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. М.: Мир, 1978.
3. Касселс Дж., Фрелих А. Алгебраическая теория чисел. М.: Мир, 1969.
4. Deligne P. Théorie de Hodge. II // Publ. Math. IHES. 1971. V. 40. P. 5–57.
5. Deligne P. La conjecture de Weil pour les surfaces K3 // Invent. Math. 1972. V. 15. P. 206–226.

6. *Deligne P.* La conjecture de Weil. I // Publ. Math. IHES. 1974. V. 43. P. 273–307.
7. *Deligne P.* La conjecture de Weil. II // Publ. Math. IHES. 1980. V. 52. P. 137–252.
8. *Фукс Д. Б., Фоменко А. Т., Гутенмахер В. Л.* Гомотопическая топология. М.: Изд-во МГУ, 1969.
9. *Фултон У.* Теория пересечений. М.: Мир, 1989.
10. *Gordon B. B.* A survey of the Hodge conjecture for Abelian varieties // J. D. Lewis. A survey of the Hodge conjecture. CRM Monograph Series, Centre de Recherches Mathématiques Université de Montréal. 1999. V. 10. P. 297–356.
11. *Hodge W. V. D.* The topological invariants of algebraic varieties // Proc. Int. Congr. Math. 1952. V. 1. P. 182–192.
12. *Katz N.* Etude cohomologique des pincesaux de Lefschetz // Lect. Notes Math. 1969. V. 340. P. Exposé XVIII. P. 1–73.
13. *Kleiman S. L.* Algebraic cycles and the Weil conjectures // Dix exposés sur la cohomologie des schémas. Amsterdam: North-Holland, 1968. P. 359–386.
14. *Lewis J. D.* The Hodge conjecture for a certain class of fourfolds // Math. Ann. 1984. V. 268. P. 85–90.
15. *Милн Дж.* Этальные когомологии. М.: Мир, 1983.
16. *Мамфорд Д.* Лекции о кривых на алгебраической поверхности. М.: Мир, 1968.
17. *Mumford D.* Families of Abelian varieties // Proc. Sympos. Pure Math. 1966. V. 9. P. 347–352.
18. *Okamoto M.* On a certain decomposition of 2-dimensional cycles on a product of two algebraic surfaces // Proc. Japan Acad. 1981. V. 57. Ser. A. № 6. P. 321–325.
19. *Onishchik A. L., Vinberg E. B.* Lie groups and algebraic groups. Berlin–Heidelberg–New York–London–Paris–Tokyo–Hong Kong: Springer-Verlag, 1990.
20. *Серп Ж.-П.* Алгебры Ли и группы Ли. М.: Мир, 1969.
21. *Shimura G.* Reduction of algebraic varieties with respect to a discrete valuation of the basic field // Amer. J. Math. 1955. V. 77. № 1. P. 134–176.
22. *Steenbrink J. H. M.* Some remarks about the Hodge conjecture // Lect. Notes Math. 1987. V. 1246. P. 165–175.
23. *Танкеев С. Г.* Об алгебраических циклах на поверхностях и абелевых многообразиях. Дис. . . . докт. физ.-матем. наук. М.: МГУ, 1985.
24. *Танкеев С. Г.* Поверхности типа K3 над числовыми полями и гипотеза Мамфорда–Тэйта. II // Изв. РАН. Сер. матем. 1995. Т. 59. № 3. С. 179–206.
25. *Tankeev S. G.* Some remarks about the general Hodge conjecture // Algebraic cycles and related topics. Proceedings of the conference held in Kitasakado, Saitama, Japan, May 25–27, 1994 / Eds. Hazama, Fumio. Singapore: World Scientific, 1995. P. 77–81.
26. *Tate J.* Algebraic cycles and poles of zeta functions // Arithmetical Algebraic Geometry. N.-Y.: Harper and Row, 1965. P. 93–110.
27. *Вердье Ж.-Л.* Независимость от l характеристического полинома эндоморфизма Фробениуса в l -адических когомологиях (по работе Делиня) // Математика. 1974. Т. 18. № 2. С. 150–161.
28. *Zarhin Yu. G.* Hodge group of K3 surface // J. für die reine und angew. Math. 1983. V. 341. P. 193–220.
29. *Зархин Ю. Г.* Веса простых алгебр Ли в когомологиях алгебраических многообразий // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1984. Т. 48. № 2. С. 264–304.
30. *Zucker S.* The Hodge conjecture for cubic fourfolds // Compos. Math. 1977. V. 34. № 2. P. 199–209.