Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Тюрин, Решеточные калибровочные теории и гипотеза Флорентино, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2002, том 66, выпуск 2, 205–224

DOI: <https://doi.org/10.4213/im384>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 11:24:06

УДК 512.7

А. Н. Тюрин

Решеточные калибровочные теории и гипотеза Флорентино

Исследуются пространства классов $SU(2)$ -представлений фундаментальной группы римановой поверхности Σ_Γ с тринионным разложением, соответствующим 3-валентному графу Γ , и связанные с ними $SU(2)$ -калибровочные теории на Γ . Строится сечение стандартного отображения пространства орбит калибровочной теории на римановой поверхности с тринионным разложением на пространство орбит калибровочной теории на соответствующем тривалентном графе. Как приложение этой конструкции доказывается гипотеза Флорентино.

Библиография: 9 наименований.

§ 1. Введение

Изучение двух пограничных случаев калибровочных теорий: калибровочной теории с дискретной группой (Д. Фрид и Ф. Кин) и калибровочной теории над дискретным пространством, называемой обычно “решеточной моделью”, – чрезвычайно полезно для понимания их сути. Прагматически решеточные модели нужны как тесты при проверке новых концепций. Однако в этой статье мы разрабатываем второй случай – калибровочную теорию на графах – чисто теоретически, связывая теорию на 3-валентных графах с геометрией и анализом многообразий модулей стабильных расслоений на римановых поверхностях.

В последних абзацах семинара 6 из сборника [1] Майкл Атия набросал программу, как придать строгий математический смысл функциональному интегралу теории Черна–Саймонса для конечного уровня k . Поскольку прямой подход, использующий математический анализ, предельно труден, он предложил понимать связности чисто комбинаторно. В частности, используя дискретный аналог калибровочной теории, мы могли бы представить функционал Черна–Саймонса как чисто комбинаторное выражение.

Для реализации этой программы были исследованы геометрические свойства отображения фазы [2]. Кроме того, все конструкции TQFT, касающиеся вильсоновских петель (узлов), были обобщены на спиновые сети (spin networks). Это дало возможность частично реализовать программу Атия, используя 3-валентные графы вместо петель.

К сожалению, мы не имеем достаточно места для изложения всех деталей этого подхода и отсылаем читателя к содержанию и ссылкам работ [3] и [4], из которых настоящая работа берет свое начало.

Конечно, отправная точка настоящей работы та же самая, как и в многочисленных работах по CFT, квантовой гравитации и спиновым сетям. В предыдущей

работе [5] содержится краткий обзор математических аспектов теории $SU(2)$ -спиновых сетей рода g в нужном нам ракурсе. В настоящей работе мы продолжаем исследование геометрии “pumping trick”, чтобы накрепко увязать калибровочную теорию на графах с калибровочной теорией на римановых поверхностях.

Конструкции и результаты работы могут быть кратко описаны следующим образом: любой граф Γ определяет тело с ручками $\tilde{\Gamma}$, т. е. 3-многообразие с границей $\partial\tilde{\Gamma} = \Sigma_\Gamma$ – римановой поверхностью, при помощи раздутия ребер графа Γ до трубок и вершин до 2-сфер с тремя дырками, называемых *тринионами* (или *парой иштанов*). Фундаментальная группа тела с ручками, совпадающая с фундаментальной группой графа, и фундаментальная группа римановой поверхности связаны естественным эпиморфизмом (4.3). Этот эпиморфизм определяет отображение пространства орбит калибровочной теории на графе Γ в пространство орбит калибровочной теории на Σ_Γ . С другой стороны, мы строим конечное множество “трансверсальных” отображений в обратную сторону (см. (4.16)) и доказываем, что среди них существует хотя бы одно, для которого первое отображение является сечением. (Я благодарен рецензенту за объяснение, почему этот факт нельзя называть частичной фиксацией калибровки в решеточной модели.) В силу существования такого сечения мы доказываем гипотезу Флорентино.

Настоящая работа также является одним из камушков мозаики аналитической теории неабелевых тэта-функций (см. [9]) и затрагивает интересы как математиков, так и физиков. Пока что эти группы специалистов имеют различные культурные базисы, поэтому разные части работы привычны для одних и требуют объяснения для других. Эта работа написана для математиков: наша цель – привлечь как можно больше специалистов VBAC для работы со спиновыми сетками (см. введение к [6]). Поэтому мы вынуждены посвятить первые два параграфа напоминанию основ теории 3-валентных графов и калибровочных теорий на них, привычных (если не сказать банальных) для специалистов по квантовой теории гравитации и решеточным моделям.

Автор выражает глубокую благодарность своим соавторам и сотрудникам семинара IST (Лисабон, 2000) Карлушу Флорентино, Жоао Нуньесу и Жозе Моурао, а также рецензенту этой статьи.

§ 2. Геометрия 3-валентных графов

Для простоты мы рассматриваем здесь только 3-валентные графы и начинаем с напоминания основ теории графов в удобной для нас форме.

Пусть $E(\Gamma)$ – множество ребер графа Γ , $V(\Gamma)$ – множество вершин, $E(\Gamma)_v$ – множество ребер, содержащих вершину v , $F(\Gamma) = \{v \in e\}$ – множество флагов, где каждый флаг есть ребро с фиксированным концом, и $L(\Gamma)$ – множество петель, т. е. ребер только с одной вершиной. Конечно, последнее множество является подмножеством множества ребер, $L(\Gamma) \subset E(\Gamma)$, и, сопоставляя каждой петле ее вершину, получим отображение $v: L(\Gamma) \rightarrow V(\Gamma)$, которое тоже является вложением:

$$L(\Gamma) = v(L(\Gamma)) \subset V(\Gamma), \quad (2.1)$$

так как мы ограничиваемся только 3-валентными графами.

Две проекции $e: F(\Gamma) \rightarrow E(\Gamma)$ и $v: F(\Gamma) \rightarrow V(\Gamma)$ являются разветвленными накрытиями степеней 2 и 3 с тем же самым множеством точек ветвления $W_e = W_v \subset F(\Gamma)$, состоящим из пар $v \in e$, в которых e является петлей. Точки, над которыми эти проекции разветвлены, описываются формулами

$$R_e = L(\Gamma) \subset E(\Gamma), \quad R_v = v(L(\Gamma)) \subset V(\Gamma). \quad (2.2)$$

Пусть $|\cdot|$ – число элементов конечного множества; тогда

$$2 \cdot |E(\Gamma)| - |L(\Gamma)| = |F(\Gamma)| = 3 \cdot |V(\Gamma)| - |L(\Gamma)|. \quad (2.3)$$

Следовательно, $|V(\Gamma)| = 2g - 2$ и $|E(\Gamma)| = 3g - 3$, где $g > 1$ – некоторое целое число, называемое *родом графа* Γ .

Путь длины 1 в графе Γ есть ориентированное ребро $\vec{e}$. Пусть $P_1(\Gamma)$ – множество путей длины 1 в Γ . Смена ориентации ребра e определяет инволюцию

$$i_e: P_1(\Gamma) \rightarrow P_1(\Gamma). \quad (2.4)$$

Все такие инволюции порождают группу $O(\Gamma) = \mathbb{Z}_2^{3g-3}$, действующую на множестве путей $P_1(\Gamma)$ и индуцирующую факторпространство

$$P_1(\Gamma)/O(\Gamma) = E(\Gamma) \quad (2.5)$$

и соответствующее отображение $O: P_1(\Gamma) \rightarrow E(\Gamma)$. Любое сечение этого отображения $o: E(\Gamma) \rightarrow P_1(\Gamma)$ называется *ориентацией графа* Γ .

Далее, группа $O(\Gamma)$ содержит диагональную инволюцию

$$i_\Delta: P_1(\Gamma) \rightarrow P_1(\Gamma),$$

меняющую ориентацию всех 1-путей одновременно.

Вокруг каждой вершины $v \in V(\Gamma)$ лежат три локальных ребра e_1, e_2, e_3 или три локальных пути $\vec{e}(v)_1, \vec{e}(v)_2, \vec{e}(v)_3$ (локальных потому, что а priori два из них могут быть частями петли) или локальных флага. Пусть P_1^v будет множеством 1-путей с вершиной $v \in V(\Gamma)$. “Забывающая” ориентацию проекция f отображает P_1^v на $E(\Gamma)_v$.

Каждый путь $\vec{e} \in P_1(\Gamma)$ определяет две вершины

$$v_s(\vec{e}), v_t(\vec{e}) \in V(\Gamma)$$

– начало и конец пути.

Конечно, из того, что $e \in L(\Gamma)$, следует равенство $v_s(\vec{e}) = v_t(\vec{e})$, но даже в этом случае такая вершина допускает два локальных флага $\vec{e}_s \neq \vec{e}_t$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Сечение o называется *ориентацией распада*, если каждая вершина $v \in V(\Gamma)$ является началом для некоторого локального флага и концом для другого.

Иными словами, каждая ориентация o определяет сечение проекции $f: P_1^v \rightarrow E(\Gamma)_v$ для любой вершины v , и это сечение содержит две стрелки противоположной ориентации.

Получаются два отображения

$$\begin{aligned} v_s: P_1(\Gamma) &\rightarrow V(\Gamma), & v_t: P_1(\Gamma) &\rightarrow V(\Gamma), \\ (v_s \times v_t): P_1(\Gamma) &\rightarrow V(\Gamma) \times V(\Gamma), \end{aligned}$$

и пересечение образов с диагональю есть

$$(v_s \times v_t)(P_1(\Gamma)) \cap V(\Gamma)_\Delta = v(L(\Gamma)).$$

Путь длины d в графе Γ – это упорядоченная последовательность $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_d)$ ориентированных ребер такая, что для каждого номера i

$$v_t(\vec{e}_i) = v_s(\vec{e}_{i+1}).$$

Пусть $P_d(\Gamma)$ – множество путей длины d в Γ . Каждый путь $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_d) \in P_d(\Gamma)$ определяет две вершины

$$v_s((\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_d)), v_t((\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_d)) \in V(\Gamma)$$

– начало и конец пути и отображения

$$\begin{aligned} v_s: P_d(\Gamma) &\rightarrow V(\Gamma), & v_t: P_d(\Gamma) &\rightarrow V(\Gamma), \\ (v_s \times v_t): P_d(\Gamma) &\rightarrow V(\Gamma) \times V(\Gamma). \end{aligned}$$

Прообраз пересечения с диагональю $L_d(\Gamma) = (v_s \times v_t)^{-1}(V(\Gamma)_\Delta)$ – множество петель длины d . В частности, $L_1(\Gamma) = L(\Gamma)$.

Для каждой вершины $v \in V(\Gamma)$ имеется множество петель

$$L_d(\Gamma)_v = (v_s \times v_t)^{-1}(v)$$

и объединение

$$L_\infty(\Gamma)_v = \bigcup_{d=1}^{\infty} L_d(\Gamma)_v$$

допускает структуру группы. Это – комбинаторная фундаментальная группа графа $\pi_1^C(\Gamma)_v = L_\infty(\Gamma)_v$.

Легко проверить следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. 1) Комбинаторная фундаментальная группа $\pi_1^C(\Gamma, v_0)$ совпадает с обычной фундаментальной группой $\pi_1(\Gamma, v_0)$.

2) Фундаментальная группа $\pi_1(\Gamma)$ – свободная группа с g образующими, где g – род графа Γ .

В самом деле, сжимая одно за другим свободные ребра графа Γ , придем рано или поздно к букету g окружностей.

Наконец, рассмотрим $\mathbb{Z}$ -модуль $V^{\mathbb{Z}}$ всех формальных линейных комбинаций вершин из $V(\Gamma)$ с коэффициентами из $\mathbb{Z}$. Тогда любой граф Γ рода g может быть задан матрицей $q_{\Gamma}: V^{\mathbb{Z}} \rightarrow V^{\mathbb{Z}}$ с коэффициентами α_{v_i, v_j} , равными числу ребер, соединяющих вершины v_i и v_j . Например,

$$q_{\Theta} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

для беспетлевого графа Θ рода 2,

$$q_{\Gamma_2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

для 2-петлевого графа рода 2 и

$$q_{\Theta_3} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

для графа мульти-тэта рода 3 (см. рис. 1). Все коэффициенты неотрицательны и для 3-валентного графа сумма коэффициентов по каждой строке и каждому столбцу равна 3.

Рис. 1

Таким образом, каждый граф Γ определяет целую квадратичную форму q_{Γ} на $\mathbb{Z}$ -модуле $V^{\mathbb{Z}}$.

Конечно, группа перестановок S_{2g-2} действует на V_{2g-2} и преобразует матрицы квадратичных форм обычным образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Как обычно, назовем граф Γ *гиперболическим*, если существуют два подмножества $V_+, V_- \subset V_{2g-2}$ таких, что подпространства $V_{\pm}^{\mathbb{Z}}$ изотропны относительно q_{Γ} , не пересекаются и имеют дополнительные размерности.

Для таких графов матрицы q_{Γ} имеют специальную блочную форму:

$$q_{\Gamma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ * & * & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

где блок

$$\frac{1}{2}q_{\Gamma} = \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix} \subset \text{Hom}(V_+^{\mathbb{Z}}, V_-^{\mathbb{Z}})$$

удовлетворяет тем же условиям на строки и столбцы, как и раньше. В этом случае множество ребер $E(\Gamma)$ разбивается на тройки:

$$E(\Gamma) = \bigcup_{v \in V_+} E(\Gamma)_v,$$

и имеет место отображение $v_+ : E(\Gamma) \rightarrow V_+$, определяющее ориентацию $ov_+ : E(\Gamma) \rightarrow P_1(\Gamma)$. Если граф Γ связан, то это – ориентация распада (см. определение 2.1).

Напомним, что $\mathbb{Z}$ -модуль формальных линейных комбинаций над $\mathbb{Z}$ 3-валентных графов допускает структуру алгебры относительно умножения, задаваемого свободным объединением графов. Например,

$$q_{\Theta^2} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

§ 3. SU(2)-калибровочная теория на 3-валентных графах

3.1. Пространство связностей. Связность a на тривиализованном SU(2)-расслоении над Γ задается отображением

$$a : P_1(\Gamma) \rightarrow \text{SU}(2) \quad (3.1)$$

таким, что для инволюции (2.5) имеем

$$a(i_e(\vec{e})) = a^{-1}(\vec{e}). \quad (3.2)$$

Тогда “интеграл по пути” есть

$$a((\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_d)) = a(\vec{e}_1) \dots a(\vec{e}_d) \in \text{SU}(2),$$

т. е. отображение $a: P_d(\Gamma) \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ такое, что для инволюции смены ориентации i_Δ имеем

$$a(i((\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_d))) = a^{-1}((\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_d)).$$

Естественным образом определяется и монодромия для петель $a: L_d(\Gamma) \rightarrow \mathrm{SU}(2)$. Очевидно, что каждая такая связность является *плоской*.

Пусть $\mathcal{A}(\Gamma)$ – пространство всех связностей, т. е. пространство функций (3.1), удовлетворяющих условиям (3.2):

$$\mathcal{A}(\Gamma) = \{a \in \mathrm{SU}(2)^{P_1(\Gamma)} \mid a(i_e(\vec{e})) = a^{-1}(\vec{e})\}.$$

3.2. Группа калибровочных преобразований. Каждый элемент $\tilde{g}$ группы калибровочных преобразований $\mathcal{G}(\Gamma)$ есть функция

$$\tilde{g}: V(\Gamma) \rightarrow \mathrm{SU}(2), \quad (3.3)$$

поэтому группа $\mathcal{G}(\Gamma) = \mathrm{SU}(2)^{V(\Gamma)}$ с покомпонентным умножением. Эта группа действует на пространстве связностей $\mathcal{A}(\Gamma)$ по следующему правилу:

$$\tilde{g}(a(\vec{e})) = \tilde{g}(v_s(\vec{e})) \cdot a(\vec{e}) \cdot \tilde{g}(v_t(i(\vec{e}))).$$

Напомним, что $\tilde{g}(v_t(i(\vec{e}))) = \tilde{g}^{-1}(v_t(\vec{e}))$.

Пространство орбит $\mathcal{B}(\Gamma) = \mathcal{A}(\Gamma)/\mathcal{G}(\Gamma)$ есть пространство классов представлений фундаментальной группы графа Γ , что неудивительно, поскольку все наши связности плоские:

$$\mathcal{A}(\Gamma)/\mathcal{G}(\Gamma) = \mathrm{CLRep}(\pi_1(\Gamma)), \quad (3.4)$$

где, как обычно, для группы G

$$\mathrm{Rep}(G) = \mathrm{Hom}(G, \mathrm{SU}(2))$$

есть пространство представлений, и факторпространство по присоединенному действию

$$\mathrm{CLRep}(G) = \mathrm{Hom}(G, \mathrm{SU}(2)) / \mathrm{Ad} \mathrm{SU}(2)$$

есть пространство классов представлений этой группы.

Группа калибровочных преобразований $\mathcal{G}(\Gamma)$ содержит диагональную подгруппу $\mathrm{SU}(2)_\Delta \subset \mathcal{G}(\Gamma)$ постоянных функций (3.3). Действие этой подгруппы определяет пространство постоянных орбит

$$\mathrm{CL} \mathcal{A}(\Gamma) = \mathcal{A}(\Gamma) / \mathrm{SU}(2)_\Delta. \quad (3.5)$$

Для каждой вершины $v \in V(\Gamma)$ имеем подгруппу

$$\mathcal{G}(\Gamma)_v = \{\tilde{g} \in \mathcal{G}(\Gamma) \mid \tilde{g}(v) = \mathrm{id}\}$$

калибровочных преобразований, сохраняющих базис над точкой v . Это – нормальная подгруппа и

$$\mathcal{G}(\Gamma)/\mathcal{G}(\Gamma)_v = \mathrm{SU}(2)_\Delta.$$

Таким образом, группа калибровочных преобразований есть полупрямое произведение своих подгрупп $\mathcal{G}(\Gamma)_v$ и $\mathrm{SU}(2)_\Delta$.

Фактор $\mathcal{A}(\Gamma)/\mathcal{G}(\Gamma)_v = \mathrm{Rep}(\pi_1(\Gamma), v)$ есть пространство орбит оснащенных (над v) связностей. Это пространство зависит от выбора точки v .

Таким образом, факторотображение $P: \mathcal{A}(\Gamma) \rightarrow \mathrm{CLRep}(\pi_1(\Gamma))$ может быть разложено следующим образом:

$$\mathcal{A}(\Gamma) \xrightarrow{P} \mathrm{Rep}(\pi_1(\Gamma)) \xrightarrow{/\mathrm{SU}(2)_\Delta} \mathrm{CLRep}(\pi_1(\Gamma))$$

или

$$\mathcal{A}(\Gamma) \xrightarrow{/\mathrm{SU}(2)_\Delta} \mathrm{CL} \mathcal{A}(\Gamma) \xrightarrow{P_{\mathrm{cl}}} \mathrm{CLRep}(\pi_1(\Gamma)). \quad (3.6)$$

Инволюция i_Δ действует на пространстве связностей $\mathcal{A}(\Gamma)$:

$$i_\Delta^*: \mathcal{A}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{A}(\Gamma), \quad (3.7)$$

и существует специальный элемент

$$\tilde{g}_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

в $\mathrm{SU}(2)_\Delta \subset \mathcal{G}(\Gamma)$ такой, что $i_\Delta^* = \tilde{g}_i$. (Здесь $i = \sqrt{-1}$.) Следовательно, инволюция i_Δ^* (3.7) действует на пространство $\mathrm{CL} \mathcal{A}(\Gamma)$ тривиальным образом.

3.3. Отображение conj . Напомним, что множество $\mathrm{Conj}(\mathrm{SU}(2))$ классов сопряженности элементов группы $\mathrm{SU}(2)$ может быть отождествлено с отрезком $[0, 1]$ при помощи отображения

$$\mathrm{conj}: \mathrm{SU}(2) \rightarrow \mathrm{Conj}(\mathrm{SU}(2)) = [0, 1],$$

сопоставляющего матрице $g \in \mathrm{SU}(2)$ число

$$\mathrm{conj}(g) = \frac{1}{\pi} \cos^{-1} \left(\frac{1}{2} \mathrm{Tr} g \right) \in [0, 1].$$

Пользуясь этим отображением, получаем следующее отображение:

$$\mathrm{conj}: \mathrm{CL} \mathcal{A}(\Gamma) \rightarrow [0, 1]^{3g-3} = \prod_{e \in E(\Gamma)} [0, 1]_e. \quad (3.8)$$

Очевидно, что это отображение сюръективно.

Более того, отображение conj раскладывается в композицию:

$$\mathcal{A}(\Gamma) \xrightarrow{\mathrm{SU}(2)_\Delta} \mathrm{CL} \mathcal{A}(\Gamma) \rightarrow [0, 1]^{3g-3} = \prod_{e \in E(\Gamma)} [0, 1]_e,$$

и инволюция i_e сохраняет слои этого отображения.

3.4. Абелева калибровочная теория. Абелева калибровочная теория на графе Γ – отличный образец для неабелевой теории. Любая $U(1)$ -связность a есть отображение $a: P_1(\Gamma) \rightarrow U(1)$ такое, что

$$a(i_e(\vec{e})) = a^{-1}(\vec{e}).$$

“Интеграл по пути” в этом случае равен

$$a((\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_d)) = \prod_{\vec{e} \in P_1(\Gamma)} a(\vec{e}) \in U(1).$$

Пусть

$$\mathcal{A}_{U(1)}(\Gamma) = \{a \in U(1)^{P_1(\Gamma)} \mid a(i_e(\vec{e})) = a^{-1}(\vec{e})\}$$

будет пространством $U(1)$ -связностей. На нем действуют те же инволюции

$$\mathcal{A}_{U(1)}(\Gamma) \xrightarrow{i_e^*} \mathcal{A}_{U(1)}(\Gamma).$$

Каждый элемент $\tilde{u}$ группы калибровочных преобразований $\mathcal{G}_{U(1)}(\Gamma)$ есть просто функция:

$$\tilde{u}: V(\Gamma) \rightarrow U(1).$$

Эта группа действует на пространстве связностей $\mathcal{A}_{U(1)}(\Gamma)$ по тем же самым правилам:

$$\tilde{u}(a(\vec{e})) = \tilde{u}(v_s(\vec{e})) \cdot a(\vec{e}) \cdot \tilde{u}(v_t(i(\vec{e}))).$$

Однако существует одно важное отличие между абелевой и неабелевой теориями. А именно, диагональная группа $U(1)_\Delta \subset \mathcal{G}_{U(1)}(\Gamma)$ действует тривиально. Следовательно,

$$\mathcal{B}_{U(1)}(\Gamma) = \mathcal{A}_{U(1)}(\Gamma) / \mathcal{G}_{U(1)}(\Gamma) = \text{Hom}(\pi_1(\Gamma), U(1)) = U(1)^g.$$

Пусть

$$P_a: \mathcal{A}_{U(1)}(\Gamma) \rightarrow U(1)^g \tag{3.9}$$

– проекция этой факторизации.

Абелева и неабелева теории связаны следующим отображением:

$$\begin{aligned} d: \mathcal{A}_{U(1)}(\Gamma) &\rightarrow \mathcal{A}(\Gamma), \\ d(a(\vec{e})) &= \begin{pmatrix} e^{i\phi} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Это отображение эквивариантно относительно инволюций i_e^* . Очевидно, что образ $d(\mathcal{A}_{U(1)}(\Gamma)) \subset \mathcal{A}(\Gamma)$ есть 2-сечение проекции $\text{con}j$, т. е. композиция

$$\text{con}j \circ d: \mathcal{A}_{U(1)}(\Gamma) \rightarrow \prod_{e \in E(\Gamma)} [0, 1]_e$$

есть факторизация по инволюции i_Δ^* .

Легко проверить следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *В цепочке отображений*

$$\mathcal{A}_{U(1)}(\Gamma) \xrightarrow{d} \mathcal{A}(\Gamma) \xrightarrow{P} U(1)^g \in \text{CLRep}(\pi_1(\Gamma))$$

композиция $d \circ P$ совпадает с проекцией P_a (3.9).

§ 4. От 3-валентного графа к телу с ручками

4.1. Раздутие. Любой 3-валентный граф Γ определяет тело с ручками $\tilde{\Gamma}$, т. е. 3-многообразие с границей $\partial\tilde{\Gamma} = \Sigma_\Gamma$ при помощи метода, именуемого “pinching trick” [5]: раздуваем ребра графа Γ до трубок, а вершины – до 2-сфер с тремя дырками. Получаем риманову поверхность Σ_Γ рода g с цилиндром $\tilde{e}$ для каждого $e \in E(\Gamma)$ и с *тринионом* $\tilde{v}$ для каждой $v \in V(\Gamma)$, где всякий тринион есть 2-сфера с тремя различными дырками. Изотопические классы меридианов цилиндров определяют $3g - 3$ не пересекающихся, не стягиваемых, попарно не изотопных окружностей $\{C_e\}$, $e \in E(\Gamma)$, на Σ_Γ . Дополнение их объединения

$$\Sigma_\Gamma \setminus \bigcup_{e \in E(\Gamma)} C_e = \bigcup_{i=1}^{2g-2} \tilde{v}_i \quad (4.1)$$

есть объединение $2g - 2$ тринионов (пар штанов), соответствующих вершинам графа Γ . Очевидно, что каждый 3-валентный граф Γ геометрически эквивалентен телу с ручками $\tilde{\Gamma}$ или римановой поверхности Σ_Γ с фиксированным тринионным разложением (4.1).

Более того, мы имеем отождествление $\pi_1(\tilde{\Gamma}) = \pi_1(\Gamma)$ и эпиморфизм

$$r: \pi_1(\Sigma_\Gamma) \rightarrow \pi_1(\tilde{\Gamma}) = \pi_1(\Gamma). \quad (4.2)$$

Рассмотрим наш граф Γ как остов тела с ручками $\tilde{\Gamma}$. Тогда для каждого ребра e внутри заполненного цилиндра с границей $\tilde{e}$ существует трансверсальный диск Δ в теле с ручками, имеющем границей $\tilde{e}$, пересекающий ребро e трансверсально в одной точке так, что $\partial\Delta = C_e$, и можно сдвинуть этот остов Γ на границу тела, получив вложение $j: \Gamma \rightarrow \Sigma_\Gamma$, которое определено с точностью до изотопии.

Фиксируем теперь на каждой окружности C_e точку $p_e \in C_e$ и одну вершину $v_0 \in V(\Gamma)$. Можно идентифицировать ее с точкой $j(v_0) \in \Sigma_\Gamma$. Тогда эпиморфизм (4.2) может быть рассмотрен как эпиморфизм точной тройки

$$1 \rightarrow \ker r \rightarrow \pi_1(\Sigma_\Gamma, v_0) \xrightarrow{r} \pi_1(\Gamma, v_0) \rightarrow 1,$$

если мы фиксируем пути из точки v_0 в каждую точку p_e .

Ориентация каждого пути $\vec{e} \in P_1(\Gamma)$ длины 1 и нормальный вектор раздувающего поля определяют ориентацию цилиндра $\tilde{e}$ и тем самым ориентацию меридиана C_e из (4.1), т. е. получаем цикл $C_{\vec{e}}$, соединенный путем с точкой v_0 . Вся совокупность таких циклов дает нам набор гомотопических классов, которые мы будем трактовать как элементы фундаментальной группы $\pi_1(\Sigma_\Gamma, v_0)$:

$$\{C_{\vec{e}} \mid e \in E(\Gamma)\} \subset \pi_1(\Sigma_\Gamma, v_0).$$

Более точно, $\{C_{\vec{e}}\} \subset \ker r$.

Теперь можно сопоставить пути $\vec{e}$ цикл $C_{\vec{e}}$, а петле длины d в Γ , заданной последовательностью $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_d)$, элемент

$$p((\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_d)) = C_{\vec{e}_d} \circ \dots \circ C_{\vec{e}_1} \in \pi_1(\Sigma_\Gamma, v_0).$$

Получаем отображение набора петель через v_0 в $\pi_1(\Sigma_\Gamma, v_0)$. Тем самым получаем гомоморфизм

$$q: \pi_1(\Gamma, v_0) \rightarrow \ker r \subset \pi_1(\Sigma_\Gamma, v_0). \quad (4.3)$$

Композиция $r \circ q$ определяет “комплекс” групп

$$\begin{aligned} \cdots \xrightarrow{r \circ q} \pi_1(\Sigma_\Gamma, v_0) \xrightarrow{r \circ q} \pi_1(\Sigma_\Gamma, v_0) \xrightarrow{r \circ q} \cdots, \\ (r \circ q)^2 = \text{id}, \end{aligned}$$

с группой когомологий $\ker(r \circ q) / \text{im}(r \circ q) = \ker r / \text{im } q = H(\Gamma)$.

4.2. От калибровочной теории на Σ_Γ к калибровочной теории на Γ .

Пусть $\mathcal{A}_F(\Sigma_\Gamma)$ – пространство $\text{SU}(2)$ -связностей на тривиальном векторном расслоении ранга 2 над Σ_Γ , $\mathcal{G}$ – группа калибровочных преобразований и

$$\text{Rep}(\pi_1(\Sigma_\Gamma, v_0)) = \mathcal{A}_F(\Sigma_\Gamma) / \mathcal{G}_{v_0}$$

– пространство орбит калибровочной группы оснащенных плоских связностей.

Основная конструкция, связывающая калибровочные теории на римановой поверхности Σ_Γ и на графе Γ , есть отображение

$$\begin{aligned} m: \text{Rep}(\pi_1(\Sigma_\Gamma, v_0)) &\rightarrow \mathcal{A}(\Gamma), \\ m(\rho)(\vec{e}) &= \rho(C_{\vec{e}}). \end{aligned}$$

На пространство представлений группа $\text{SU}(2)$ действует присоединенным образом, а на пространство образа этого отображения группа $\text{SU}(2)$ действует как диагональная подгруппа $\text{SU}(2)_\Delta$ полной группы калибровочных преобразований $\mathcal{G}$. Само отображение эквивариантно относительно этих действий. Таким образом, можно профакторизовать это отображение до отображения факторов

$$m: \text{CLRep}(\pi_1(\Sigma_\Gamma)) \rightarrow \text{CL } \mathcal{A}(\Gamma) \quad (4.4)$$

(см. (3.5)). Для любой последовательности ребер $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ получаем отображение

$$m_{(e_1, e_2, \dots, e_n)} = \prod_{i=1}^n i_{e_i} \circ m, \quad (4.5)$$

где i_{e_i} – инволюции (2.4) и (3.2).

Композиция этих отображений с факторизующим отображением калибровочной теории на Γ дает нам важные расслоения пространства $\text{CLRep}(\pi_1(\Sigma_\Gamma))$.

Первое из них – композиция

$$\text{conj} \circ m = \pi_\Gamma: \text{CLRep}(\pi_1(\Sigma_\Gamma)) \rightarrow \Delta_\Gamma \subset \prod_{e \in E(\Gamma)} [0, 1]_e \quad (4.6)$$

(см. (3.8)), которая есть не что иное, как вещественная поляризация (см. [6], [7] и ниже) пространства связностей. Это расслоение задается как отображение моментов для действия $(3g - 3)$ -мерного тора и имеет исчерпывающее описание.

Второе задается проекцией факторизации

$$P \circ m: \text{Rep}(\pi_1(\Sigma_\Gamma)) \rightarrow \text{Rep}(\pi_1(\Gamma)). \quad (4.7)$$

Прямое описание входящих в композицию отображений влечет следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Отображение (4.7) есть не что иное, как композиция*

$$\mathrm{Rep}(\pi_1(\Sigma_\Gamma, v_0)) \xrightarrow{\mathrm{res}} \mathrm{Rep}(\ker r, v_0) \xrightarrow{q^*} \mathrm{Rep}(\pi_1(\Gamma), v_0),$$

где первое отображение есть просто ограничение представления на подгруппу, а второе индуцировано гомоморфизмом групп q (4.3).

Напомним, что пространство $\mathrm{CLRep}(\pi_1(\Gamma))$ называется *унитарным пространством Шоттки рода g* и обозначается символом uS_g [5]. Оно может быть представлено как однородное пространство

$$uS_g = \mathrm{SU}(2)^g / \mathrm{Ad}_{\mathrm{diag}} \mathrm{SU}(2),$$

где $\mathrm{Ad}_{\mathrm{diag}} \mathrm{SU}(2)$ есть диагональное присоединенное действие на прямом произведении групп (см. [5]). Отображение r^* (4.2) вкладывает унитарное пространство Шоттки:

$$r^*: uS_g \hookrightarrow \mathrm{CLRep}(\pi_1(\Sigma_\Gamma)),$$

а с другой стороны, композиция (4.7) дает сюръективное отображение

$$P_{\mathrm{cl}} \circ m: \mathrm{CLRep}(\pi_1(\Sigma_\Gamma)) \rightarrow uS_g.$$

Таким образом, мы имеем отображение

$$P_{\mathrm{cl}} \circ m \circ r^*: \mathrm{CLRep}(\pi_1(\Sigma_\Gamma)) \rightarrow \mathrm{CLRep}(\pi_1(\Sigma_\Gamma)),$$

индуцирующее гомоморфизм когомологий

$$(P_{\mathrm{cl}} \circ m \circ r^*)^*: H^*(\mathrm{CLRep}(\pi_1(\Sigma_\Gamma)), \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(\mathrm{CLRep}(\pi_1(\Sigma_\Gamma)), \mathbb{Z}).$$

Гипотеза Флорентино сравнивает образы двух проекций $P \circ m$ и $\mathrm{conj} \circ m = \pi_\Gamma$, т. е. пространства uS_g и Δ_Γ .

ГИПОТЕЗА 4.1 (К. Флорентино). *Существует естественное вложение*

$$f: \Delta_\Gamma \rightarrow uS_g,$$

гладкое внутри Δ_Γ и на гладкой части uS_g и непрерывное всюду.

Для случая рода 2 имеются отождествления $\Delta_\Theta = \mathrm{CLRep}(\pi_1(\tilde{v}_i)) = uS_2$ (см. [6, §3]).

В настоящей работе мы:

- 1) снабдим пространство uS_g структурой полиэдра, являющейся прямым произведением $g - 1$ копии 3-мерного тетраэдра;
- 2) построим естественное полиэдральное вложение Δ_Γ в uS_g .

4.3. От калибровочной теории на Σ_Γ к калибровочной теории на тринионе. Для каждого триниона $\tilde{v}$ имеем отображение

$$\begin{aligned} m_v: \text{CLRep}(\pi_1(\tilde{v})) &\rightarrow \text{CL}\mathcal{A}(\Gamma), \\ m_v(\rho)(\vec{e}) &= \rho(C_{\vec{e}}), \quad e \in E(\Gamma)_v. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Каждая вершина v имеет три локальных ребра $(e_1, e_2, e_3) = E(\Gamma)_v$, определяющих трехмерный куб

$$[0, 1]_v^3 = \prod_{e \in E(\Gamma)_v} [0, 1]_e.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. 1) *Образ композиции отображений*

$$m_v \circ \text{conj}: \text{CLRep}(\pi_1(\tilde{v})) \rightarrow [0, 1]^{3g-3} = \prod_{e \in E(\Gamma)} [0, 1]_e$$

содержится в $[0, 1]_v^3 = \prod_{e \in E(\Gamma)_v} [0, 1]_e$.

2) *Образ $m(\text{CLRep}(\pi_1(\tilde{v})))$ есть сечение проекции conj (3.8):*

$$m_v \circ \text{conj}: \text{CLRep}(\pi_1(\tilde{v})) \rightarrow \prod_{v \in E(\Gamma)_v} [0, 1]_e.$$

3) *Образ $\text{conj}(\text{CLRep}(\pi_1(\tilde{v}))) = \Delta_v$ является тетраэдром, вписанным в куб и задаваемым “неравенствами треугольника”*

$$0 \leq t_i \leq 1, \quad |t_1 - t_2| \leq t_3 \leq \min(t_1 + t_2, 2 - t_1 - t_2),$$

где t_i – координата на отрезке $[0, 1]_{e_i}$, $e_i \in E(\Gamma)_v$.

4) *Как следствие п. 3) выполнено равенство*

$$\text{CLRep}(\pi_1(\tilde{v})) = \Delta_v = \Delta_\Theta = uS_2.$$

Для доказательства этого предложения см. [6, предложение 3.1].

Для каждой вершины $v \in V(\Gamma)$ и соответствующего триниона $\tilde{v}$ имеется отображение ограничения

$$\text{res}_v: \text{CLRep}(\pi_1(\Sigma_\Gamma)) \rightarrow \text{CLRep}(\pi_1(\tilde{v})).$$

Это отображение индуцировано естественным гомоморфизмом

$$r_v: \pi_1(\tilde{v}) \rightarrow \pi_1(\Sigma_\Gamma).$$

Группа $\pi_1(\tilde{v})$ – свободная группа с двумя образующими. Пусть $I_v \subset \pi_1(\Sigma_\Gamma)$ – образ отображения r_v . Тогда

$$\text{im res}_v = \text{CLRep}(I_v) \subset \text{CLRep}(\pi_1(\tilde{v})) = \Delta_v$$

(см. п. 4) предложения 4.2). Например, если $v \in v(L(\Gamma))$ – вершина петли $e \in L(\Gamma)$, то $I_v = \mathbb{Z}$ и $\text{im res}_v = [0, 1]_e$.

4.4. Половинка римановой поверхности Σ_Γ . Снабдим гиперболический граф (2.9) взаимно однозначным отображением $h: V_+ \rightarrow V_-$. Тогда:

- 1) $V_+ \cap h(V_+) = \emptyset$, $V_+ \cup V_- = V(\Gamma)$, $|V_\pm| = g - 1$;
- 2) для каждой пары вершин $v_i, v_j \in V_+$, $v_i \neq v_j$,

$$E(\Gamma)_{v_i} \cap E(\Gamma)_{v_j} = \emptyset$$

в точности, как на рис. 1, где $g = 3$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Объединение $\Sigma_\Gamma^+ = \cup_{v \in V_+} \tilde{v}$ называется *половинкой римановой поверхности Σ_Γ* .

Иными словами, половинка римановой поверхности Σ_Γ^+ есть свободное объединение тринионов, и существует его зеркальное отражение $\Sigma_\Gamma^- = h(\Sigma_\Gamma^+)$, причем

$$\Sigma_\Gamma^+ \cup \Sigma_\Gamma^- = \Sigma_\Gamma.$$

Такое разложение является аналогом разложения Хеёра для двумерного случая, и мы можем применить к нему все конструкции семинара 4 из [1] (раздел “Свойства Верлинде”). Две половинки Σ_Γ^+ и Σ_Γ^- абсолютно симметричны и склеиваются при помощи матрицы q_Γ (см. конец § 2). Таким образом, эти матрицы можно понимать как аналог модулярной группы в 3-мерном случае.

Далее, фундаментальная группа имеет вид

$$\pi_1(\Sigma_\Gamma^+) = \prod_{v \in V_+} \pi_1(\tilde{v}),$$

откуда

$$\text{CLRep}(\pi_1(\Sigma_\Gamma^+)) = \prod_{v \in V_+} \text{CLRep}(\pi_1(\tilde{v})).$$

Таким образом, мы имеем естественный гомоморфизм $r_+(\Gamma): \pi_1(\Sigma_\Gamma^+) \rightarrow \pi_1(\Sigma_\Gamma)$ и индуцированное отображение

$$r_+^*(\Gamma): \text{CLRep}(\pi_1(\Sigma_\Gamma)) \rightarrow \text{CLRep}(\pi_1(\Sigma_\Gamma^+)) = \prod_{v \in V_+} \text{CLRep}(\pi_1(\tilde{v})). \quad (4.9)$$

Граница половинки римановой поверхности Σ_Γ^+

$$\partial \Sigma_\Gamma^+ = \{C_e\}, \quad e \in E(\Gamma),$$

есть свободное объединение циклов (4.1) с естественной ориентацией, определяемой ориентацией тринионов.

4.5. Половинка римановой поверхности $\Sigma_{\Theta^{g-1}}$. Для рода 2 существует только один 3-валентный граф без петель Θ (обозначаемый этим символом за его форму). Этот граф порождает несвязный граф рода g

$$\Theta^{g-1} = \Theta \cup \dots \cup \Theta$$

– свободное объединение $g - 1$ копии графа Θ .

В частности, фундаментальная группа является прямым произведением:

$$\pi_1(\Theta^{g-1}) = \prod_{g-1 \text{ раз}} \pi_1(\Theta).$$

Мы можем применить все конструкции п. 3.1 и к несвязным графам, чтобы получить пространство связностей $\mathcal{A}(\Theta^{g-1})$ с действием калибровочной группы $\mathcal{G}(\Theta^{g-1})$ и пространство орбит из п. 3.3

$$\mathcal{A}(\Theta^{g-1})/\mathcal{G}(\Theta^{g-1}) = \text{CLRep}(\pi_1(\Theta^{g-1})),$$

снабженное отображением conj из п. 3.4.

Рис. 2

Рис. 3

Более того, раздувая граф Θ , мы получаем компактную риманову поверхность Σ_{Θ} рода 2 с тринионным разложением (как на рис. 3). Таким образом, риманова поверхность $\Sigma_{\Theta^{g-1}}$ есть свободное объединение

$$\Sigma_{\Theta^{g-1}} = \Sigma_{\Theta} \cup \dots \cup \Sigma_{\Theta}$$

$g - 1$ копии римановой поверхности рода 2 с тринионным разложением (4.1).

Небольшая разница между случаями связных и несвязных римановых поверхностей заключается в том, что в несвязном случае мы не можем фиксировать точку v_0 . Значит, мы должны рассматривать пространства классов представлений.

Имеем отображение (см. (4.4))

$$m: \text{CLRep}(\pi_1(\Sigma_{\Theta^{g-1}})) \rightarrow \text{CL } \mathcal{A}(\Theta^{g-1}) \quad (4.10)$$

и композицию (см. (4.6))

$$\text{conj} \circ m = \pi_{\Theta^{g-1}}: \text{CLRep}(\pi_1(\Sigma_{\Theta^{g-1}})) \rightarrow \Delta_{\Theta^{g-1}} \subset \prod_{e \in E(\Theta^{g-1})} [0, 1]_e.$$

Можно рассмотреть разложение поверхности Σ_Γ на тринионы как на фрагменты, так называемые “puzzle” (как на рис. 2), и переставить эти фрагменты так, чтобы получить новую картинку $\Sigma_{\Theta^{g-1}}$ (как на рис. 3). Таким образом, половинка нашей римановой поверхности Σ_Γ является одновременно и половинкой другой римановой поверхности $\Sigma_{\Theta^{g-1}}$ с разложением

$$V_+ \cap h(V_+) = \emptyset, \quad V_+ \cup h(V_+) = V(\Theta^{g-1}), \quad |V_\pm| = g - 1,$$

т. е. объединение Σ_Γ^+ является половинкой сразу двух алгебраических кривых

$$\Sigma_\Gamma \supset \Sigma_\Gamma^+ \subset \Sigma_{\Theta^{g-1}},$$

и наряду с гомоморфизмом $r_+(\Gamma)$ (4.9) существует и другой гомоморфизм

$$r_+(\Theta^{g-1}): \pi_1(\Sigma_\Gamma^+) = \pi_1(\Sigma_{\Theta^{g-1}}^+) \rightarrow \pi_1(\Sigma_{\Theta^{g-1}}),$$

который покомпонентно совпадает со стандартным отображением для римановых поверхностей рода 2.

§ 5. Отображение калибровочной факторизации

5.1. Сечение отображения conj . Имеем отождествления

$$E(\Gamma) = E(\Theta^{g-1}), \quad V(\Gamma) = V(\Theta^{g-1}), \quad P_1(\Gamma) = P_1(\Theta^{g-1}),$$

и, следовательно,

$$\mathcal{A}(\Gamma) = \mathcal{A}(\Theta^{g-1}), \quad \text{CL } \mathcal{A}(\Gamma) = \text{CL } \mathcal{A}(\Theta^{g-1}). \quad (5.1)$$

Но группы калибровочных преобразований $\mathcal{G}(\Gamma)$ и $\mathcal{G}(\Theta^{g-1})$ действуют по-разному. В частности, отображение факторизации по группе $\mathcal{G}(\Theta^{g-1})$ может быть разложено следующим образом:

$$\text{CL } \mathcal{A}(\Gamma) \xrightarrow{p_\Theta^{g-1}} \prod_{g-1 \text{ раз}} \text{CL } \mathcal{A}(\Theta) \xrightarrow{\prod_{g-1 \text{ раз}} p_\Theta} \prod_{g-1 \text{ раз}} \text{CLRep}(\pi_1(\Theta)).$$

Все компоненты последнего отображения одинаковы:

$$p_\Theta: \text{CL } \mathcal{A}(\Theta) \rightarrow \text{CLRep}(\pi_1(\Theta)).$$

Будем исследовать это отображение немного позже. Но отображения conj абсолютно одинаковы и имеют образом пространство $\prod_{e \in E(\Gamma)} [0, 1]_e$.

Более того, произведение отображений m_v (4.8) дает отображение

$$m_+ = \prod_{v \in V_+} m_v: \prod_{v \in V_+} \text{CLRep}(\pi_1(\tilde{v})) \rightarrow \text{CL } \mathcal{A}(\Gamma).$$

Пусть

$$W = m_+ \left(\prod_{v \in V_+} \text{CLRep}(\pi_1(\tilde{v})) \right) \subset \text{CL } \mathcal{A}(\Gamma)$$

– образ этого отображения. Рассматривая композицию

$$\text{CLRep}(\pi_1(\Sigma_\Gamma)) \xrightarrow{r_+^*(\Gamma)} \prod_{v \in V_+} \text{CLRep}(\pi_1(\tilde{v})) \xrightarrow{m_+} \text{CL } \mathcal{A}(\Gamma),$$

получаем следующую прямую интерпретацию.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. 1) Имеем $r_+^*(\Gamma) \circ m_+(\text{CLRep}(\pi_1(\Sigma_\Gamma))) \subset W$.
2) Отображение (4.6)

$$\text{conj} \circ m: \text{CLRep}(\pi_1(\Sigma_\Gamma)) \rightarrow \Delta_\Gamma \subset \prod_{e \in E(\Gamma)} [0, 1]_e$$

есть композиция отображения $r_+^*(\Gamma)$ и отображения

$$\text{conj} \circ m_+: \prod_{v \in V_+} \text{CLRep}(\pi_1(\tilde{v})) \rightarrow \prod_{v \in V_+} \Delta_v \subset \prod_{e \in E(\Gamma)} [0, 1]_e.$$

3) Как следствие п. 2) выполнено $\Delta_\Gamma \subset \prod_{v \in V_+} \Delta_v \subset \prod_{e \in E(\Gamma)} [0, 1]_e$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. Образ W есть сечение проекции conj , т. е. ограничение отображения conj

$$\text{conj}|_W: W \rightarrow \prod_{v \in V_+} \Delta_v \subset \prod_{e \in E(\Gamma)} [0, 1]_e$$

взаимно однозначно.

Для доказательства этого утверждения используем отображение conj для Θ^{g-1} . Напомним, что тринионные компоненты прямого произведения W не имеют общих границ и координаты куба делятся на тройки, соответствующие ребрам вершин $v \in V_+(\Gamma) = V_+(\Theta^{g-1})$. Тогда утверждение 3) предложения 4.2, используемое покомпонентно, влечет требуемое утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 5.1. Идентификация $W = \prod_{v \in V_+} \Delta_v$ определяет сечение

$$s: \prod_{v \in V_+} \Delta_v \rightarrow \text{CL} \mathcal{A}(\Gamma),$$

и ограничение этого сечения на $\Delta_\Gamma \subset \prod_{v \in V_+} \Delta_v$ определяет вложение

$$s|_{\Delta_\Gamma}: \Delta_\Gamma \rightarrow \text{CL} \mathcal{A}(\Gamma).$$

К. Флорентино дал красивое описание подполиэдра $\Delta_\Gamma \subset \Delta_\Theta^{g^{-1}}$ в терминах симметрий графа Γ .

Теперь ограничение $s|_{\Delta_\Gamma}(\Delta_\Gamma)$ отображения факторизации по $\mathcal{G}(\Gamma)$ -действию переводит Δ_Γ в uS_g . Это и будет необходимое нам естественное отображение $f: \Delta_\Gamma \rightarrow uS_g$, о существовании которого говорится в гипотезе Флорентино.

Ключевым действием является ограничение отображения факторизации для $\mathcal{G}(\Gamma)$ -действия на W , т. е. сравнение калибровочных теорий на Γ и на $\Theta^{g^{-1}}$:

$$s \circ P_{\text{cl}}: W \rightarrow \text{CLRep}(\pi_1(\Gamma)),$$

где P_{cl} – проекция из (3.6).

5.2. Частный случай $\Gamma = \Theta$. В этом случае тело с ручками $\tilde{\Theta}$ есть крендель. Мы получаем риманову поверхность Σ_Θ рода 2, отмеченную цилиндрами $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3$ для каждого ребра из тройки $E(\Gamma)$ и тринионами $\tilde{v}_+$ и $\tilde{v}_-$ из пары $V(\Theta)$. Изотопические классы меридианов цилиндров дают три не пересекающихся, не стягиваемых, попарно не изотопных цикла c_i вокруг e_i . Дополнение к ним – это объединение

$$\Sigma_\Theta \setminus \{c_1, c_2, c_3\} = \tilde{v}_+ \cup \tilde{v}_-$$

двух тринионов. Фиксируем точку $p \in \tilde{v}_+$ и естественную ориентацию так, что имеет место равенство

$$c_1 \cdot c_2 \cdot c_3 = 1 \tag{5.2}$$

как для классов отмеченных петель.

Далее, калибровочная группа представлена следующим образом:

$$\mathcal{G}(\Theta) = \text{SU}(2)^{V(\Gamma)} = \text{SU}(2)_+ \times \text{SU}(2)_-$$

с действием $g_+ \cdot * \cdot g_-^{-1}$, если $v_+ = v_s$. Наконец, рассмотрим отображение

$$P_{\text{cl}}: \text{CLRep}(\pi_1(\Sigma_\Theta)) \rightarrow \text{CLRep}(\pi_1(\Theta)).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3. *Образ $i_{e_3}(W)$ является сечением проекции P_{cl} (3.6).*

Компоненты границы $\partial\tilde{v} = c_1, c_2, c_3$ как элементы фундаментальной группы триниона $\tilde{v}$ удовлетворяют уравнению (5.2). Рассмотрим отображение

$$m_{e_3}: \text{CLRep}(\pi_1(\tilde{v})) \rightarrow \text{CL}\mathcal{A}(\Theta).$$

Тогда компонента g_v элемента калибровочной группы действует на монодромии этих циклов как $g(\rho(c_i)) = \rho(c_i) \circ g$, $i = 1, 2$, и $g(\rho(c_3)) = g^{-1}\rho(c_3)$. Чтобы сохранить уравнение (5.2), эти элементы должны удовлетворять равенству

$$\rho(c_1) \circ g \circ \rho(c_2) \circ g \circ g^{-1}\rho(c_3) = 1. \quad (5.3)$$

Но тогда $g = 1$, и утверждение доказано.

СЛЕДСТВИЕ 5.2. *Отождествление $W = \text{CLRep}(\pi_1(\Theta)) = uS_2$ определяет:*

- 1) *структуру полиэдра на uS_2 ;*
- 2) *полиэдральную эквивалентность $f: \Delta_\Theta \rightarrow uS_2$.*

Таким образом, для случая $g = 2$ гипотеза Флорентино верна.

Эта идентификация была использована для построения неабелевых тэта-функций в первом нетривиальном случае $g = 2$, рассмотренном в [9].

5.3. Общий случай. Приведем доказательство предложения 5.3 для графов мульти-тэта (как на рис. 1) любого рода. Принцип доказательства в точности такой же, как и раньше. А именно, в равенстве (5.3) элемент g , стоящий после члена $\rho(c_1)$, не обязан совпадать с элементом, стоящим после члена $\rho(c_2)$. Но все равно он должен быть равен 1.

Чтобы использовать этот подход, заметим, что множество вершин $V(\Gamma)$ разбито на пары (v_i^+, v_i^-) , где $v_i^- = h(v_i^+)$. Рассмотрим сначала пару (v_1^+, v_1^-) . Используя присоединенное действие, можно предположить, что $g_{v_1}^- = 1$.

Далее, предположим, что $\partial\widetilde{v_1^+} \cap \partial\widetilde{v_1^-} = c_2 \cup c_3$ и $c_1 = \partial\widetilde{v_1^+} \cap \partial\widetilde{v_2^-}$. Теперь выберем отображение $m_{\{e\}}$ (4.5) так, чтобы ребра e_2 и e_3 имели бы противоположные ориентации. Тогда получим уравнение

$$c_1 \circ c_2 \circ c_3 = 1$$

и как следствие

$$\rho(c_1) \circ g_2^- \circ \rho(c_2) \circ g_1^+ \circ (g_1^+)^{-1} \circ \rho(c_3) = 1.$$

Следовательно, $g_2^- = 1$. Применяя тот же прием к $\widetilde{v_1^-}$, получаем $g_2^+ = 1$. Таким образом, доказательство проведено для рода 3.

Итерируя этот процесс и повторяя приведенные рассуждения, завершаем доказательство для любого гиперболического графа произвольного рода.

Список литературы

1. *Atiyah M.* The path integral formulation // Oxford Seminar on Jones–Witten Theory. Michaelmas Term. Seminar 6. 1988. P. 106.
2. *Tyurin A. N.* Special lagrangian geometry and slightly deformed algebraic geometry (Splag and Sdag). Preprint/Warwich Univ., 1998. № 22/1998. AG/9806006.
3. *Hitchin N., Sawon J.* Curvature and characteristic numbers of hyperkahler manifolds. DG/9908114.
4. *Donaldson S.* Gluing technique in the cohomology of moduli spaces // Topological methods in modern mathematics. Stony Brook, 1991. Houston: Publish or Perish, 1993. P. 137–170.
5. *Tyurin A.* Three mathematical faces of spin networks. DG/0011038.
6. *Jeffrey L. C., Weitsman J.* Bohr–Sommerfeld orbits in the moduli space of flat connections and the Verlinde dimension formula // Commun. Math. Phys. 1992. V. 150. P. 593–630.
7. *Тюрин А. Н.* О базисах Бора–Зоммерфельда // Изв. РАН. Сер. матем. 2000. Т. 64. № 5. С. 163–196.
8. *Ramadas T. R., Singer L. M., Weitsman J.* Some comments on Chern–Simons gauge theory // Commun. Math. Phys. 1989. V. 126. P. 409–420.
9. *Florentino C., Mourao J., Nunes J., Tyurin A.* Analytical aspects of the theory non abelian theta functions. Preprint. Lisboa: IST, 2000.

Поступило в редакцию
20.II.2001