Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М.-М. Деза, М. И. Штогрин, Мозаики и их изометрические вложения, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2002, том 66, выпуск 3, 3–22

DOI: <https://doi.org/10.4213/im385>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 12:19:58

УДК 514.17+519.17

М. Деза, М. И. Штогрин

Мозаики и их изометрические вложения

Основной результат настоящей работы – классификация, данная в таблице, всех таких мозаик T среди 165 мозаик, представленных в каталоге Чавея [2], включающем все важнейшие классификации мозаик, что либо сама мозаика T , либо дуальная мозаика T^* вложима изометрически или же со шкалой $\lambda = 2$ в многомерную кубическую решетку. Попутно исследованы некоторые интересные бесконечные гиперметрические пространства.

Библиография: 19 наименований.

1. О ℓ_1 -вложениях произвольных графов. Нас будут интересовать вложения произвольного графа в другие графы, а именно в одномерный остов многомерного куба или кубической решетки, причем с сохранением графической метрики или же с умножением всех расстояний на одно и то же число λ (изометрическое вложение со шкалой λ). При этом как шкала λ , так и размерность куба или кубической решетки всегда выбираются наименьшими среди возможных.

Остановимся на этом более подробно.

Вложения в гиперкубы. Рассмотрим произвольный граф G с множеством вершин V и множеством ребер E . Будем полагать, что каждый замкнутый реберный путь в графе G содержит не менее трех ребер (т.е. граф $G = (V, E)$ не имеет петель и кратных ребер), и тем самым каждому ребру из E соответствует вполне определенная пара вершин из V . На множестве вершин V графа G введем естественную метрику $d_G(a, b)$, считая расстоянием между вершинами a и b из V число звеньев кратчайшего реберного пути в графе G , соединяющего a с b (предполагается, что граф G является связным). Таким образом, с произвольным графом $G = (V, E)$ можно однозначно связать некоторое метрическое пространство (V, d_G) . Нас будет интересовать, является ли это метрическое пространство (или подобное ему метрическое пространство $(V, \lambda d_G)$ при некотором $\lambda \in \mathbb{N}$) подпространством метрического пространства $\mathcal{H}^n$ (см. ниже п. 2). В частном случае, когда $(V, d_G) \subset \mathcal{H}^n$, граф G является изометрическим подграфом графа H_n – реберного остова n -мерного куба γ_n . (В топологии n -мерный куб как прямое произведение n единичных отрезков обычно обозначают через I^n .) В таком случае мы говорим об *изометрическом вложении* графа G в граф H_n и записываем это в виде $G \rightarrow H_n$. В общем случае, когда $(V, \lambda d_G) \subset \mathcal{H}^n$, где $\lambda \neq 1$, имеется отображение вершин графа G в вершины графа H_n , при котором длина каждого кратчайшего реберного пути из G увеличивается в λ раз (в частности, каждое ребро графа G отображается в путь длины λ). Это отображение, обозначаемое через $G \rightarrow \frac{1}{\lambda} H_n$, мы называем *изометрическим со шкалой λ* . Ограничение этого отображения на множестве вершин

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00803) и Фонда поддержки ведущих научных школ (грант № 00-15-96011).

всегда является вложением, однако это отображение в целом не всегда сопряжено с вложением одного топологического графа в другой. Так, например, изометрическое отображение со шкалой $\lambda = 2$

$$\alpha_3 \rightarrow \frac{1}{2}H_3$$

(здесь вершины тетраэдра отображаются в вершины трехмерного куба, взятые через одну), получаемое в случае альтернированных зон, не является вложением остова тетраэдра в остов куба.

Вложения в кубические решетки. Аналогично сказанному, в случае бесконечного графа G нас будет интересовать, является ли метрическое пространство (V, d_G) (или подобное ему метрическое пространство $(V, \lambda d_G)$ при некотором $\lambda \in \mathbb{N}$) подпространством метрического пространства $\mathcal{X}^n$ (см. ниже п. 2). В частном случае, когда $(V, d_G) \subset \mathcal{X}^n$, граф G является изометрическим подграфом графа Z_n – реберного остова примитивной n -мерной кубической решетки. В таком случае мы говорим об изометрическом вложении графа G в граф Z_n и записываем это в виде $G \rightarrow Z_n$. В общем случае, когда $(V, \lambda d_G) \subset \mathcal{X}^n$, где $\lambda \neq 1$, имеется отображение вершин графа G в вершины графа Z_n , при котором длина каждого кратчайшего реберного пути из G увеличивается в λ раз (в частности, каждое ребро графа G отображается в путь длины λ). Это отображение, обозначаемое через $G \rightarrow \frac{1}{\lambda}Z_n$, мы называем *изометрическим со шкалой λ* . Ограничение этого отображения на множество вершин всегда является вложением, однако это отображение в целом не всегда является вложением одного топологического графа в другой. Так, например, изометрическое отображение королевского графа (в королевском графе каждый узел квадратной решетки соединен ребрами со всеми восемью ближайшими его соседями ходом короля в шахматах) в стандартную квадратную решетку со шкалой $\lambda = 2$ (полагаем, что сумма и разность координат образа вершины при отображении королевского графа является четной) не является вложением королевского графа в реберный остов решетки (каждый узел остова квадратной решетки имеет степень 4, а не 8; королевский граф не планарен).

Как в случае $(V, \lambda d_G) \subset \mathcal{H}^n$, так и в случае $(V, \lambda d_G) \subset \mathcal{X}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{N}$, метрическое пространство (V, d_G) мы называем ℓ_1 -*вложимым* (что связано с понятием ℓ_1 -метрики; см. ниже п. 2) или коротко говорим: *граф G вложим*.

Заметим, что иногда нас будут интересовать изометрические отображения со шкалой λ , где $\lambda \in \mathbb{N}$, в многомерную кубическую решетку не только в случае бесконечных графов, но и в случае конечных графов. Так, например, известное изометрическое вложение со шкалой $\lambda = 2$ тетраэдра в четырехмерный куб, получающееся в случае неальтернированных зон и обозначаемое через $\alpha_3 \rightarrow \frac{1}{2}H_4$, можно превратить во вложение в решетку меньшей размерности $\alpha_3 \rightarrow \frac{1}{2}Z_3$ или даже в отображение в решетку еще меньшей размерности $\alpha_3 \rightarrow \frac{1}{2}Z_2$.

Приведем примеры, иллюстрирующие данные выше понятия. *Путь P_n* (простая цепь из n вершин и $n - 1$ ребер) изометрически вложим в гиперкуб H_{n-1} , т.е. $P_n \rightarrow H_{n-1}$, и не вложим изометрически в гиперкуб меньшей размерности. Он также вложим изометрически в одномерную решетку, т.е. $P_n \rightarrow Z_1$. Бесконечный путь P_∞ (реберный луч $P_{|\mathbb{N}|}$ или реберная прямая $P_{|\mathbb{Z}|}$) вложим в H_∞ , а также в Z_1 . Конечная *гусеница*, т.е. путь P_n с висячими ребрами во всех его внутренних вершинах, вложима в H_{2n-3} , а также вложима в $Z_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ (так как не более двух висячих ребер принадлежат одной зоне, т.е. одному измерению решетки). Наконец,

бесконечная гусеница изометрически вложима в H_∞ и в Z_∞ , но не вложима изометрически в гиперкуб или кубическую решетку конечной размерности. Далее, простой цикл C_n вложим в $H_{\frac{n}{2}}$ (и, конечно, $C_n \rightarrow Z_{\frac{n}{2}}$), если n четно; при нечетном n цикл C_n вложим изометрически в *полукуб* $\frac{1}{2}H_n$ (т.е. вложим в H_n со шкалой $\lambda = 2$) и тем самым вложим со шкалой $\lambda = 2$ в Z_n , т.е. $C_n \rightarrow \frac{1}{2}Z_n$.

Важное необходимое условие вложимости графа состоит в том [5], что его графическая метрика представляет собою гиперметрическое пространство [6], о чем более подробно будет сказано далее.

2. О некоторых гиперметрических пространствах. Рассмотрим стандартное разбиение n -мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ на единичные кубы, смежные по целым граням. Нульмерный остов этого разбиения есть широко известная примитивная кубическая решетка. Одномерный остов этого разбиения представляет собою некоторый граф с бесконечным числом вершин, в каждой вершине которого сходится $2n$ ребер. С помощью этого графа на точечной кубической решетке вводится графическая метрика. Графическая метрика не совпадает с той метрикой, которая индуцируется метрикой евклидова пространства. Она совпадает с так называемой ℓ_1 -метрикой, которая определяется формулой

$$d_{\ell_1}(y, z) = \sum_{k=1}^n |y_k - z_k|$$

и представляет собою частный случай ℓ_p -метрики

$$d_{\ell_p}(y, z) = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^n |y_k - z_k|^p}$$

при $p = 1$. В самом деле, в силу параллельной переносности решетки можно полагать, что точка z находится в начале координат, т.е. все ее координаты относительно ортонормированного репера $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ равны нулю, а все координаты y_i точки y неотрицательны (в противном случае направление соответствующего базисного вектора, координата вдоль которого отрицательна, поменяем на обратное). Рассмотрим реберный путь $y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + \dots + y_n\mathbf{e}_n$, соединяющий начало координат O с точкой y , звеньями которого служат ребра $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$, взятые целое число раз $y_1, y_2, \dots, y_n$ соответственно. (Порядок следования друг за другом звеньев в ломаном реберном пути может быть выбран совершенно произвольно. Мы всегда выбираем какой-либо конкретный из них.) Этот реберный путь содержит минимальное число звеньев $y_1 + y_2 + \dots + y_n$ (среди всех возможных реберных путей, соединяющих O с y). Докажем это от противного. Пусть существует реберный путь $t_1\mathbf{e}_1 + t_2\mathbf{e}_2 + \dots + t_n\mathbf{e}_n$, соединяющий O с y , содержащий меньшее число звеньев, т.е. $|t_1| + |t_2| + \dots + |t_n| < y_1 + y_2 + \dots + y_n$. Тогда, очевидно, $|t_i| < y_i$ при хотя бы одном $i = 1, 2, \dots, n$. Выходя из O в y по одному реберному пути и возвращаясь обратно по другому, получим замкнутый реберный путь. Для него имеем

$$\sum_{i=1}^n (y_i - t_i)\mathbf{e}_i = 0,$$

где $y_i - t_i \neq 0$ при хотя бы одном $i = 1, 2, \dots, n$. Получено противоречие с тем, что векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ составляют базис. Следовательно, кратчайший реберный путь, соединяющий начало координат O с точкой y , содержит в точности $y_1 + y_2 + \dots + y_n$ звеньев. С другой стороны, расстояние от точки y до начала координат O , вычисленное в ℓ_1 -метрике, также равно $y_1 + y_2 + \dots + y_n$. Итак, на множестве вершин кубической решетки мы имеем совпадение двух метрик: графической метрики и ℓ_1 -метрики.

Следует отметить, что на множестве узлов примитивной точечной кубической решетки различным значениям числа $p \in \mathbb{Z}$ соответствуют различные метрики $d_{\ell_p}(y, z)$. В самом деле, возьмем два произвольных целых числа p и q . Для определенности будем полагать, что $1 \leq p < q$. Им соответствуют метрики $d_{\ell_p}(y, z)$ и $d_{\ell_q}(y, z)$. Возьмем произвольное положительное число $r \geq 2$, взаимно простое с q . Рассмотрим узел кубической решетки, у которого первая координата равна 1, вторая координата равна r , а все остальные координаты равны 0. Расстояния от этого узла до начала координат в метриках $d_{\ell_p}(y, z)$ и $d_{\ell_q}(y, z)$ принимают различные значения: $\sqrt[p]{1+r^p} \neq \sqrt[q]{1+r^q}$. Докажем это от противного. Пусть $\sqrt[p]{1+r^p} = \sqrt[q]{1+r^q}$. Тогда из $(1+r^p)^q = (1+r^q)^p$ следует

$$q r^p + \binom{q}{2} (r^p)^2 + \dots = p r^q + \binom{p}{2} (r^q)^2 + \dots$$

Так как $(r, q) = 1$ и $r \geq 2$, то первое слагаемое $q r^p$ не делится на r^{p+1} . А так как $1 \leq p < q$, то все остальные слагаемые как в левой части равенства, так и в правой делятся на r^{p+1} . Противоречие.

Отметим также, что на множестве узлов примитивной кубической решетки при разных значениях p различны не только метрики $d_{\ell_p}(y, z)$, но и p -е степени этих метрик $d_{\ell_p}^p(y, z)$. В самом деле, из равенства $1+r^p = 1+r^q$ при $1 \leq p \leq q$ следует $r^{q-p} = 1$, а так как $r \neq 1$, то $q = p$. Если же $q \neq p$, то $1+r^p \neq 1+r^q$.

Множество точек n -мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ со всевозможными целочисленными координатами в некотором ортонормированном репере и с ℓ_1 -метрикой на нем будем обозначать через $\mathcal{Z}^n$. Оно представляет собою некоторое бесконечное дискретное метрическое пространство (множество узлов примитивной кубической решетки с графической метрикой ее реберного остова). Множество точек n -мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, координаты которых в некотором ортонормированном репере независимо друг от друга пробегает значения 0 и 1, с ℓ_1 -метрикой на нем будем обозначать через $\mathcal{H}^n$. Оно представляет собою некоторое конечное дискретное метрическое пространство (множество вершин n -мерного куба I^n с графической метрикой его реберного остова). Ясно, что $\mathcal{H}^n \subset \mathcal{Z}^n$. Ниже покажем, что $\mathcal{H}^n$ и $\mathcal{Z}^n$ суть гиперметрические пространства.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множество точек X называется *гиперметрическим пространством* (см. [5], [6]), если для каждой пары точек x_i, x_j из X определено действительное число $\rho(x_i, x_j)$ такое¹, что:

- 1) $\rho(x_i, x_j) = 0$ тогда и только тогда, когда $x_j = x_i \in X$;
- 2) $\rho(x_j, x_i) = \rho(x_i, x_j)$ для любой пары x_i, x_j из X ;

¹ $\rho(x_i, x_j)$ называется *расстоянием между точками x_i и x_j* в гиперметрическом пространстве (X, ρ) или *гиперметрикой*.

3) для любых m чисел $b_t \in \mathbb{Z}$, где $\sum_{t=1}^m b_t = 1$, и соответствующих им m точек x_t из X , $t = 1, 2, \dots, m$, справедливо неравенство

$$\sum_{1 \leq i < j \leq m} b_i b_j \rho(x_i, x_j) \leq 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Последнее неравенство называется *гиперметрическим*. Ввиду условий 1) и 2) гиперметрическое неравенство 3) можно записать в виде эквивалентного ему неравенства

$$\sum_{1 \leq i \neq j \leq m} b_i b_j \rho(x_i, x_j) \leq 0 \quad \text{или} \quad \sum_{i,j=1}^m b_i b_j \rho(x_i, x_j) \leq 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При $(b_1, b_2, b_3, \dots, b_t, \dots, b_m) = (1, 1, -1, 0, \dots, 0)$ гиперметрическое неравенство 3) является обычным *неравенством треугольника*. Из неравенств треугольника следует положительность расстояния между любыми двумя различными точками пространства. При $(b_1, b_2, b_3, \dots, b_t, \dots, b_m) = (1, 1, 1, -1, -1, 0, \dots, 0)$ гиперметрическое неравенство 3) называется *5-гональным неравенством*. В отличие от треугольного неравенства 5-гональное неравенство имеет место не для любой метрики. Именно 5-гональное неравенство оказалось наиболее широко применяемым на практике при выявлении графов, не вложимых в куб или кубическую решетку.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Метрическое пространство $\mathcal{H}^n$ является гиперметрическим.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество вершин n -мерного куба I^n определяется как множество всех точек $x_t = (x_{t1}, x_{t2}, \dots, x_{tn})$, $t = 1, 2, \dots, 2^n$, координаты которых пробегает значения 0 и 1. Рассматривая пространство $\mathcal{H}^n$, мы полагаем, что расстояния между вершинами куба I^n вычисляются по ℓ_1 -метрике, т.е.

$$\rho(x_i, x_j) = d_{\ell_1}(x_i, x_j) \equiv \sum_{k=1}^n |x_{ik} - x_{jk}|.$$

При этих предположениях для любых m чисел $b_t \in \mathbb{Z}$, где $\sum_{t=1}^m b_t = 1$, и соответствующих им m вершин куба x_t , $t = 1, 2, \dots, m$, нам потребуется проверка выполнения гиперметрического неравенства

$$\sum_{i,j=1}^m b_i b_j \left(\sum_{k=1}^n |x_{ik} - x_{jk}| \right) \leq 0$$

или эквивалентного ему неравенства

$$\sum_{k=1}^n \left(\sum_{i,j=1}^m b_i b_j |x_{ik} - x_{jk}| \right) \leq 0.$$

Для реальной проверки выполнения этого неравенства достаточно показать, что при любом фиксированном k имеет место неравенство

$$\sum_{i,j=1}^m b_i b_j |x_{ik} - x_{jk}| \leq 0.$$

Каждая из заданных m вершин куба I^n имеет свой номер, взятый из множества $M = \{1, 2, \dots, m\}$. Множество номеров этих вершин, для которых k -я координата равна 1, обозначим через E_k . Множество тех номеров вершин, для которых k -я координата равна 0, обозначим через N_k . Никаких других значений k -я координата данных m вершин не принимает, и поэтому мы имеем

$$\{1, 2, \dots, m\} = M = E_k \cup N_k, \quad E_k \cap N_k = \emptyset.$$

Так как $|x_{ik} - x_{jk}| = 0$ при $i, j \in E_k$ или $i, j \in N_k$ и $|x_{ik} - x_{jk}| = 1$ при $i \in E_k$, $j \in N_k$ или $i \in N_k$, $j \in E_k$, то

$$\sum_{i,j=1}^m b_i b_j |x_{ik} - x_{jk}| = \sum_{i \in E_k, j \in N_k} b_i b_j + \sum_{i \in N_k, j \in E_k} b_i b_j = 2 \left(\sum_{i \in E_k} b_i \right) \left(\sum_{j \in N_k} b_j \right).$$

Введя еще одно обозначение $q = \sum_{t \in E_k} b_t$, из соотношений $1 = \sum_{t=1}^m b_t \equiv \sum_{t \in M} b_t = (\sum_{t \in E_k} b_t) + (\sum_{t \in N_k} b_t)$ получаем $\sum_{t \in N_k} b_t = 1 - q$. Следовательно,

$$\sum_{i,j=1}^m b_i b_j |x_{ik} - x_{jk}| = 2q(1 - q).$$

Легко непосредственно проверить, что при любом $q \in \mathbb{Z}$ имеет место неравенство $q(1 - q) \leq 0$. Предложение доказано.

ПРИМЕЧАНИЕ 1. Для любых двух вершин y и z куба I^n , очевидно, справедливы равенства $d_{\ell_1}^1(y, z) = d_{\ell_2}^2(y, z) = d_{\ell_3}^3(y, z) = \dots$, и поэтому на вершинах куба I^n метрика $\rho(y, z) = d_{\ell_p}^p(y, z)$ остается гиперметрической при каждом $p \in \mathbb{N}$.

ПРИМЕЧАНИЕ 2. Условие $\sum_{t=1}^m b_t = 1$, фигурирующее в определении гиперметрического неравенства, может быть заменено² на эквивалентное ему условие $\sum_{t=1}^m b_t = -1$.

В работе [18] С. П. Новиков предложил исследовать кубические комплексы. Простейшим примером кубического комплекса служит евклидов куб произвольной размерности (вместе с гранями всех измерений). Другим примером кубического комплекса может служить стандартная кубическая решетка – нормальное разбиение евклидова пространства произвольной размерности на кубы той же размерности, смежные по целым граням. Этот комплекс состоит из счетного числа кубов конечной размерности; каждая точка комплекса принадлежит лишь одному кубу, как внутренняя точка, и только конечному числу кубов, как граничная точка.

Построим третий пример кубического комплекса.

Обозначим через $\mathcal{E}_\infty = (O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k, \dots)$ предел ортонормированного репера $\mathcal{E}_n = (O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ при $n \rightarrow \infty$.

Произвольно выберем k разных натуральных чисел $i_1 < i_2 < \dots < i_k$, $k \in \mathbb{N}$, и на соответствующих k векторах $\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \dots, \mathbf{e}_{i_k}$ из базиса $\mathcal{E}_\infty$ построим замкнутый куб $I^k(O, \mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \dots, \mathbf{e}_{i_k})$ с вершиной O . Возьмем объединение всех таких кубов

$$\bigcup_{i_1 < i_2 < \dots < i_k \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}} I^k(O, \mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \dots, \mathbf{e}_{i_k}).$$

² Для ℓ_1 -метрики на вершинах куба I^n (более общо, для любой гиперметрики) неравенства 3) из определения выполняются также и при условии $\sum_{t=1}^m b_t = 0$.

Совокупность кубов этого объединения, включая их грани всевозможных размерностей, представляет собою некоторый бесконечномерный кубический комплекс. В самом деле, во-первых, каждый куб совокупности есть либо куб вида $I^k(O, \mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \dots, \mathbf{e}_{i_k})$, либо его грань, и поэтому любая грань этого куба также есть куб из этой совокупности; во-вторых, любые два куба из совокупности, очевидно, суть грани куба вида $I^k(O, \mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \dots, \mathbf{e}_{i_k})$, и поэтому их пересечение опять есть куб из этой совокупности. Так как каждый куб вида $I^k(O, \mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \dots, \mathbf{e}_{i_k})$ является k -мерной гранью n -мерного куба $I^n(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$, где n совпадает с наибольшим индексом i_k , то рассматриваемое объединение допускает более простую запись

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I^n,$$

где через I^n коротко обозначен куб

$$I^n(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n).$$

Теперь в силу вложений $I^1 \subset I^2 \subset \dots \subset I^n \subset \dots$ рассматриваемый кубический комплекс можно трактовать как совокупность граней всевозможных размерностей бесконечно расширяющегося куба I^n в процессе стремления числа n к бесконечности. Размерности всех кубов, составляющих комплекс, конечны, но они не ограничены в своей совокупности, поэтому комплекс не является конечномерным.

Рассматриваемый кубический комплекс задает некоторый абстрактный бесконечномерный полиэдр W . Тело полиэдра W не замкнуто. В самом деле, бесконечная последовательность точек

$$M_i = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2^i}, 0, 0, \dots \right), \quad i \in \mathbb{N},$$

принадлежащих полиэдру W , при $i \rightarrow \infty$ имеет предельную точку

$$M_\infty = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2^j}, \frac{1}{2^{j+1}}, \dots \right),$$

которая полиэдру W не принадлежит, так как она не принадлежит ни одному конечномерному кубу $I^n(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ из рассматриваемого объединения³.

Рассмотрим множество точек, координаты которых в репере $\mathcal{E}_\infty$ равны только 0 и 1, причем число нулей бесконечно, а число единиц конечно. Это не все точки с координатами 0 и 1, а только те из них, которые достижимы из начала O (или из любой другой точки этого множества) посредством конечнозвенных реберных путей, звеньями которых служат единичные векторы из репера $\mathcal{E}_\infty$. (Если такой путь кратчайший, то он состоит из конечного числа разноименных векторов репера $\mathcal{E}_\infty$.) Именно эти (и только эти) точки являются вершинами полиэдра W . Расстояние между точками (в частности, вершинами) $y = (y_1, y_2, \dots, y_k, \dots)$ и $z = (z_1, z_2, \dots, z_k, \dots)$ полиэдра W будем вычислять по формуле

$$\rho(y, z) = \sum_{k=1}^{\infty} |y_k - z_k|$$

³Полиэдр W является собственным подмножеством тихоновского куба I^τ , $\tau = \aleph_0$, гомеоморфного гильбертовому кирпичу. Как граф, реберный остов полиэдра W является максимальной связной компонентой реберного остова счетномерного куба I^∞ .

(это частный случай ℓ_p -метрики $d_{\ell_p}(y, z) = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{\infty} |y_k - z_k|^p}$ при $p = 1$). В этой формуле записано бесконечно много слагаемых, однако в ней для каждой пары точек (y, z) из полиэдра W всегда имеется лишь конечное число ненулевых слагаемых (равных 1 в случае вершин), и поэтому расстояние фактически вычисляется по конечной формуле. Множество вершин (нульмерный остов) полиэдра W с данной метрикой на нем будем обозначать⁴ через $\mathcal{H}^{\infty}$.

Так как любое конечное число вершин бесконечномерного куба, среди координат которых имеется лишь конечное число единиц и бесконечное число нулей, принадлежит некоторому конечномерному кубу, то для них выполняется гиперметрическое неравенство. Поэтому мы получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Метрическое пространство $\mathcal{H}^{\infty}$ является гиперметрическим.*

Ближайшая наша цель – показать, что метрическое пространство $\mathcal{L}^n$ также является гиперметрическим.

Простой реберный путь длины n , очевидно, вкладывается изометрически в n -мерный остов n -мерного куба.

Любое вложение простого реберного пути длины n в куб меньшей размерности не может быть изометрическим. В самом деле, на пути длины n , вложенном в куб размерности меньше n , всегда найдутся два параллельных ребра. Два ближайших друг к другу параллельных ребра вместе со всеми ребрами пути, заключенными между ними, составляют (под)путь вида $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \dots + \mathbf{e}_k - \mathbf{e}_1$. В нем коллинеарны лишь крайние слагаемые, причем они противоположно направлены, так как в случае одинаковой направленности реберный путь не мог бы принадлежать одному кубу. Кратчайшая ломаная между концами этого (под)пути в остове куба, очевидно, имеет вид $\mathbf{e}_2 + \dots + \mathbf{e}_k$, а она на две единицы короче (под)пути, и поэтому вложение не является изометрическим.

Однако если реберный путь длины n можно вложить изометрически в реберный остов n -мерного куба, то реберный луч (как реберный путь, содержащий бесконечно много звеньев) нельзя вложить изометрически в куб конечной размерности. Реберный луч вкладывается изометрически в бесконечномерный куб.

Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ ортонормированный репер $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$, на котором построена n -мерная кубическая решетка, и достроим его до счетного ортонормированного базиса $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_{n+1}, \dots)$, на котором будет построен бесконечномерный куб.

В n -мерной решетке имеются $2n$ лучей, выходящих из начала координат O в направлении векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n, -\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2, \dots, -\mathbf{e}_n$. Каждый из этих лучей может быть отображен в реберный остов полиэдра W (являющегося собственным подмножеством счетномерного куба).

Более конкретно, прямолинейный реберный луч в остове n -мерной кубической решетки, выходящий из O в направлении $\mathbf{e}_i$, т.е. в положительном направлении i -ой координатной оси, $1 \leq i \leq n$, позвенно отобразим в ломаный реберный луч

$$\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_{i+1 \cdot 2n} + \mathbf{e}_{i+2 \cdot 2n} + \dots + \mathbf{e}_{i+k \cdot 2n} + \dots$$

⁴Метрическое пространство $\mathcal{H}^{\infty}$ является своеобразным пределом бесконечной последовательности метрических пространств $\mathcal{H}^n$ при $n \rightarrow \infty$, содержащим все $\mathcal{H}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Как оказалось, оно является универсальным носителем графических метрик всех графов, вложенных в гиперкубы или кубические решетки (см. предложения 3 и 4).

в реберном остове полиэдра W , для которого начало первого звена $\mathbf{e}_i$ находится в точке O , а начало каждого последующего звена $\mathbf{e}_{i+j \cdot 2n}$ находится в конце предыдущего звена $\mathbf{e}_{i+(j-1) \cdot 2n}$, где $j = 1, 2, 3, \dots$.

Точно так же прямолинейный реберный луч в остове n -мерной кубической решетки, выходящий из O в направлении $-\mathbf{e}_i$, т.е. в отрицательном направлении i -ой координатной оси, $1 \leq i \leq n$, мы позвенно отобразим в ломаный реберный луч

$$\mathbf{e}_{i+n} + \mathbf{e}_{i+n+1 \cdot 2n} + \mathbf{e}_{i+n+2 \cdot 2n} + \dots + \mathbf{e}_{i+n+k \cdot 2n} + \dots$$

в реберном остове полиэдра W , для которого начало первого звена $\mathbf{e}_{i+n}$ находится в точке O , а начало каждого последующего звена $\mathbf{e}_{i+n+j \cdot 2n}$ находится в конце предыдущего звена $\mathbf{e}_{i+n+(j-1) \cdot 2n}$, где $j = 1, 2, 3, \dots$.

Возьмем любое ребро из одномерного остова стандартной кубической решетки. Через середину этого ребра проведем перпендикулярную ему гиперплоскость, которая осуществляет *срединное сечение*⁵ разбиения (т.е. n -мерной кубической решетки). Все ребра разбиения, которые пересекает эта гиперплоскость, принадлежат одному *классу эквивалентности* [19]. Все ребра одного класса эквивалентности попарно параллельны и одинаково направлены. В классе эквивалентности всегда имеется ребро прямолинейного луча, выпущенного из O вдоль соответствующей координатной оси (в положительном или отрицательном направлении). Это ребро, как уже говорилось выше, отображено в некоторый вектор базиса $\mathcal{E}_\infty$. Наименование вектора примем в качестве имени ребра. Это же имя припишем всем остальным ребрам класса эквивалентности. При этом ребра разных классов получают разные имена. Различным срединным сечениям соответствуют различные классы, даже если срединные сечения параллельны. Придав всем ребрам одномерного остова стандартной кубической решетки наименования векторов базиса $\mathcal{E}_\infty$, мы, тем самым, построили отображение одномерного остова примитивной кубической решетки в одномерный остов полиэдра W (и в одномерный остов бесконечномерного куба). При этом отображении, как показывают приведенные выше рассуждения, каждый кратчайший реберный путь (конечной длины) опять остается кратчайшим. Следовательно, построенное отображение⁶ является вложением, причем изометрическим.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Имеет место изометрическое вложение $\mathcal{Z}^n \rightarrow \mathcal{H}^\infty$.*

Так как вложение $\mathcal{Z}^n \rightarrow \mathcal{H}^\infty$ является изометрическим, а любое метрическое подпространство гиперметрического пространства само является гиперметрическим, то имеет место

СЛЕДСТВИЕ. *Метрическое пространство $\mathcal{Z}^n$ является гиперметрическим.*

Ясно, что метрическое пространство $\mathcal{H}^\infty$ не вкладывается в метрическое пространство $\mathcal{Z}^n$ ни при каком n .

⁵Понятие срединного сечения было введено в [19]. Как пересечение гиперплоскости с разбиением пространства на кубы, наше срединное сечение представляет собою разбиение $(n-1)$ -мерной плоскости на $(n-1)$ -мерные кубы, смежные по целым граням. Более того, оно представляет собою некоторый $(n-1)$ -мерный кубический комплекс; это $(n-1)$ -мерный цикл по модулю 2 в подразделении n -мерного пространства, и он гомологичен 0 по mod 2.

⁶Это отображение продолжается [19] до непрерывного локально изометрического клеточного отображения нормального разбиения n -мерного евклидова пространства на кубы в n -мерный остов полиэдра W . С подробными исследованиями *кубильяжей* и их отображений в кубическую решетку можно ознакомиться в работе [19].

Рассмотрим множество всех точек, достижимых из начала O посредством реберных путей, звеньями которых служат векторы из репера $\mathcal{E}_\infty$. Координаты любой точки из этого множества относительно репера $\mathcal{E}_\infty$ являются целыми, более того, у каждой точки этого множества имеется лишь конечное число ненулевых координат. Это множество с ℓ_1 -метрикой на нем будем обозначать через $\mathcal{Z}^\infty$. Ясно, что любое конечное число точек из $\mathcal{Z}^\infty$ содержится в некотором $\mathcal{Z}^n \subset \mathcal{Z}^\infty$, $n \in \mathbb{N}$, а так как $\mathcal{Z}^n$ является гиперметрическим пространством, то метрическое пространство $\mathcal{Z}^\infty$ также является гиперметрическим.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Имеет место изометрическое вложение $\mathcal{Z}^\infty \rightarrow \mathcal{H}^\infty \subset \mathcal{Z}^\infty$.*

Наличие вложения $\mathcal{Z}^\infty \rightarrow \mathcal{H}^\infty$ доказывается дословно так же, как вложение $\mathcal{Z}^n \rightarrow \mathcal{H}^\infty$ в предложении 3. Единственное имеющееся отличие состоит в том, что в данном случае из начала O в направлении векторов из репера $\mathcal{E}_\infty$ и им обратных векторов выходит счетное число прямолинейных реберных лучей. Однако и теперь каждому ребру (звену) каждого из этих реберных лучей можно приписать свой натуральный номер (имя), что следует из того, что счетное число счетных множеств опять является счетным.

3. Вложение мозаик. Рассмотрим такие *мозаики* T (т.е. разбиения евклидовой плоскости на правильные многоугольники), взятые из каталога [2], что реберный остов разбиения T (или же дуального разбиения T^*) вложим изометрически со шкалой λ (т.е. все расстояния умножаются на λ) в n -мерную кубическую решетку для некоторого $n \leq \infty$. Такая вложимость (см. далее таблицу и приложение к таблице) обозначается через $T \rightarrow \frac{1}{\lambda} Z_n$. Для вложимого плоского графа, как оказалось, $\lambda = 1$ или $\lambda = 2$, и такое вложение единственно (с точностью до конгруэнтности решетки), если граф не содержит K_4 (см. [3]).

Напомним, что через Z_n обозначен реберный остов n -мерной кубической решетки, в котором множество вершин совпадает с множеством всех целочисленных точек пространства $\mathbb{R}^n$ в некотором ортонормированном репере и вершины считаются смежными (они соединяются ребром), когда они отличаются друг от друга только одной координатой, причем ровно на одну единицу. Графическая метрика (метрика кратчайшего пути в графе) реберного остова кубической решетки совпадает с ℓ_1 -метрикой, т.е.

$$d_{\ell_1}(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|.$$

Важным необходимым условием изометрической вложимости со шкалой λ произвольного графа в многомерную кубическую решетку является гиперметрическое 5-гональное неравенство (см. замечание 2)

$$ab + ac + bc + xy \leq ax + bx + cx + ay + by + cy$$

для попарных расстояний между любыми пятью различными его вершинами a, b, c, x, y , полученное первым автором настоящей работы еще в 1960 г. (см. [5]).

Любой граф, содержащий изометрический невложимый подграф, например не 5-гональный граф, невложим. Примерами не 5-гональных графов, т.е. графов, для которых нарушено 5-гональное неравенство, служат графы $K_{2,3}$ и $K_5 - K_3$.

ТАБЛИЦА. 58 вложимых мозаик T или T^*

№	Символ мозаики T	Aut T	$T \rightarrow$	$T^* \rightarrow$	v, t, e	Однородность
1	$(4^4) = \text{Vo}(Z_2) = \text{De}(Z_2)$	p4m	Z_2	Z_2	1, 1, 1	+, +, +, +
2	$(6^3) = \text{Vo}(A_2)$	p6m	Z_3	$\frac{1}{2}Z_3$	1, 1, 1	+, +, +, +
3	$(3^6) = \text{De}(A_2)$	p6m	$\frac{1}{2}Z_3$	Z_3	1, 1, 1	+, +, +, +
4	(3.6.3.6), сеть Кагоме	p6m	—	Z_3	1, 2, 1	+, +, +, +
5	(3.12^2) , усеченная сеть (6^3)	p6m	—	$\frac{1}{2}Z_\infty$	1, 2, 2	+, +, +, +
6	(4.8^2) , усеченная сеть (4^4)	p4m	Z_4	—	1, 2, 2	+, +, +, +
7	$(3^2.4.3.4)$, дуальна сети Каира	p4g	$\frac{1}{2}Z_4$	—	1, 2, 2	+, +, +, +
8	$(3^3.4^2)$	сmm	$\frac{1}{2}Z_3$	—	1, 2, 3	+, +, +, +
9	(3.4.6.4)	p6m	$\frac{1}{2}Z_3$	—	1, 3, 2	+, +, +, +
10	(4.6.12)	p6m	Z_6	—	1, 3, 3	+, +, +, +
11	$(3^4.6)$	p6	$\frac{1}{2}Z_6$	—	1, 3, 3	+, —, +, —
12	$(3^6; 3^2.6^2)$	p6m	—	Z_∞	2, 2, 3	+, +, +, +
13	$(3^4.6; 3^2.6^2)$	сmm	$\frac{1}{2}Z_5$	—	2, 2, 4	+, +, +, —
14	$(3^3.4^2; 4^4)_1$	сmm	$\frac{1}{2}Z_3$	—	2, 2, 4	+, +, +, —
15	$(3^6; 3^2.4.3.4)$	p6m	$\frac{1}{2}Z_6$	—	2, 3, 3	+, —, +, —
16	$(3^6; 3^3.4^2)_1$	pmm	$\frac{1}{2}Z_3$	—	2, 3, 4	+, —, +, —
17	$(3.4^2.6; 3.6.3.6)_2$	сmm	—	Z_3	2, 3, 4	+, +, +, +
18	$(3^3.4^2; 4^4)_2$	сmm	$\frac{1}{2}Z_3$	—	2, 3, 5	+, —, —, —
19	$(3^3.4^2; 3.4.6.4)$	p6m	$\frac{1}{2}Z_3$	—	2, 4, 4	+, —, +, +
20	$(3^6; 3^3.4^2)_2$	сmm	$\frac{1}{2}Z_3$	—	2, 4, 5	+, —, —, —
21	$(3^3.4^2; 3^2.4.3.4)_1$	p4g	$\frac{1}{2}Z_6$	—	2, 4, 5	+, —, +, —
22	$(3^6; 3^4.6)_2$	p6	$\frac{1}{2}Z_6$	—	2, 5, 7	+, —, —, —
23	$(3^3.4^2; 3^2.4.3.4)_2$	pgg	$\frac{1}{2}Z_4$	—	2, 6, 6	+, —, +, —
24	$(3^6; 3^2.6^2; 6^3)$	p6m	$\frac{1}{2}Z_6$	—	3, 2, 3	+, +, +, +
25	$(3^4.6; 3^2.6^2; 6^3)$	pmg	$\frac{1}{2}Z_5$	—	3, 2, 5	+, +, +, —
26	$(3.4^2.6; 3.4.6.4; 4^4)$	p4g	—	Z_4	3, 3, 4	+, +, +, +
27	$(3^6; 3^3.4^2; 4^4)_1$	pmm	$\frac{1}{2}Z_3$	—	3, 3, 5	+, —, +, —
28	$(3^6; 3^4.6; 3^2.6^2)_2$	сmm	$\frac{1}{2}Z_5$	—	3, 3, 6	+, —, +, —
29	$(3^3.4^2; 4^4; 4^4)_1$	сmm	$\frac{1}{2}Z_3$	—	3, 3, 6	—, —, —, —
30	$(3^6; 3^3.4^2; 3^2.4.3.4)$	p6m	$\frac{1}{2}Z_6$	—	3, 4, 5	+, —, +, —

ТАБЛИЦА (продолжение)

31	$(3.4^2.6; 3.6.3.6; 4^4)_2$	cmm	—	Z_3	3, 4, 5	+, −, +, −
32	$(3^3.4^2; 3^2.4.3.4; 4^4)$	p4	$\frac{1}{2}Z_4$	—	3, 4, 6	+, −, +, −
33	$(3^6; 3^3.4^2; 4^4)_2$	cmm	$\frac{1}{2}Z_3$	—	3, 4, 6	+, −, −, −
34	$(3^6; 3^3.4^2; 4^4)_3$	pmm	$\frac{1}{2}Z_3$	—	3, 4, 6	+, −, −, −
35	$(3^6; 3^3.4^2; 3^3.4^2)_1$	cmm	$\frac{1}{2}Z_3$	—	3, 4, 6	−, −, −, −
36	$(3^3.4^2; 3^3.4^2; 4^4)_1$	pmm	$\frac{1}{2}Z_3$	—	3, 4, 6	−, −, −, −
37	$(3.4^2.6; 3.6.3.6; 3.6.3.6)_1$	pmg	—	Z_3	3, 4, 6	−, −, −, −
38	$(3^3.4^2; 4^4; 4^4)_2$	cmm	$\frac{1}{2}Z_3$	—	3, 4, 7	−, −, −, −
39	$(3^6; 3^6; 3^3.4^2)_1$	pmm	$\frac{1}{2}Z_3$	—	3, 5, 6	−, −, −, −
40	$(3^6; 3^3.4^2; 4^4)_4$	cmm	$\frac{1}{2}Z_3$	—	3, 5, 7	+, −, −, −
41	$(3.4^2.6; 3.6.3.6; 4^4)_4$	cmm	—	Z_3	3, 5, 7	+, −, −, −
42	$(3^3.4^2; 3^3.4^2; 4^4)_2$	pmm	$\frac{1}{2}Z_3$	—	3, 5, 7	−, −, −, −
43	$(3^6; 3^3.4^2; 3^3.4^2)_2$	pmg	$\frac{1}{2}Z_3$	—	3, 5, 7	−, −, −, −
44	$(3^3.4^2; 3^3.4^2; 3^2.4.3.4)$	pgg	$\frac{1}{2}Z_4$	—	3, 5, 8	−, −, −, −
45	$(3^6; 3^3.4^2; 3.4.6.4)$	p6m	$\frac{1}{2}Z_3$	—	3, 6, 6	+, −, +, −
46	$(3^6; 3^6; 3^3.4^2)_2$	cmm	$\frac{1}{2}Z_3$	—	3, 6, 7	−, −, −, −
47	$(3^3.4^2; 3^2.4.3.4; 3^2.4.3.4)$	p2	$\frac{1}{2}Z_4$	—	3, 6, 9	−, −, −, −
48	$(3^6; 3^6; 3^4.6)_3$	p6	$\frac{1}{2}Z_6$	—	3, 7, 9	−, −, −, −
49	$(3^6; 3^2.4.3.4; 3^2.4.3.4)$	p6m	$\frac{1}{2}Z_6$	—	3, 8, 5	−, −, +, −
50	$(3^6; 3^2.6^2; 6^3; 6^3)_1$	p6	—	$\frac{1}{2}Z_\infty$	4, 2, 5	−, +, −, −
51	$(3^6; 3^2.6^2; 6^3; 6^3)_2$	p6m	$\frac{1}{2}Z_6$	—	4, 3, 5	−, −, −, −
52	$(3^4.6; 3^2.6^2; 6^3; 6^3)$	cmm	$\frac{1}{2}Z_5$	—	4, 3, 6	−, −, −, −
53	$(3^6; 3^4.6; 3^2.6^2; 6^3)_4$	pmg	$\frac{1}{2}Z_5$	—	4, 3, 7	+, −, +, −
54	$(3^6; 3^3.4^2; 3^2.4.3.4; 4^4)$	p4g	$\frac{1}{2}Z_4$	—	4, 4, 6	+, −, +, −
55	$(3^6; 3^2.4.3.4; 3.4^2.6; 3.4.6.4)$	p6m	$\frac{1}{2}Z_6$	—	4, 6, 7	+, −, +, −
56	$(3^4.6; 3^2.6^2; 6^3; 6^3; 6^3)$	pmg	$\frac{1}{2}Z_5$	—	5, 3, 7	−, −, −, −
57	$(3^2.4.3.4; 3^2.6^2; 3.4^2.6;$ $3.4.6.4; 6^3)$	p3m1	$\frac{1}{2}Z_6$	—	5, 6, 8	+, −, +, −
58	$(3^4.6; 3^3.4^2; 3^2.4.3.4;$ $3^2.6^2; 3.4^2.6; 3.4.6.4)$	cmm	$\frac{1}{2}Z_5$	—	6, 9, 13	+, −, +, −

ПРИЛОЖЕНИЕ К ТАБЛИЦЕ

Все невложимые мозаики T и T^* списка из 165 мозаик T , рассмотренных в этой статье, оказались не 5-гональными; в таблице невложимым T и T^* соответствует прочерк в четвертой и пятой колонке соответственно. Все вложения были найдены тем же методом построения полной системы альтернирующих зон, как и в [8], [9], [3] (см. также полиномиальный алгоритм вложения графов в статье [7] и общую теорию вложения метрик в книге [6]).

Любая мозаика T обозначается стандартным вектором (см. [13]), перечисляющим *звезды* (т.е. список граней, окружающих вершину) для вершин каждого типа. Обозначим через v, t, e число типов (т.е. число орбит относительно группы симметрии мозаики, которую мы обозначаем через $\text{Aut } T$) вершин, граней и ребер соответственно. Мозаика называется *вершинно-однородной*, если любые две вершины с конгруэнтными звездами принадлежат одной и той же орбите. Мозаика называется *гране-однородной*, если любые две конгруэнтные грани принадлежат одной и

Приложение к таблице (продолжение)

той же орбите. Мозаика называется *реберно-однородной* (или *сильно реберно-однородной*), если любые две конгруэнтные реберные фигуры (слабые реберные фигуры) принадлежат одной и той же орбите. *Реберной фигурой* называется ребро со всеми инцидентными с ним ребрами, *слабой реберной фигурой* называется ребро с двумя примыкающими к нему гранями.

165 мозаик из [2] включают следующие классификации мозаик: 135 вершинно-однородных мозаик (и 20 с $v = 2$) [14]–[16], 22 гране-однородных (и 13 с $t = 2$) [4], 22 сильно реберно-однородных [1], а также все 11, 20, 61 мозаик с $v = 1, 2, 3$; все 3, 13, 26 с $t = 1, 2, 3$; все 4, 4, 10 с $e = 1, 2, 3$. Заметим, что в табл. 1 и табл. 2 работы [2] ошибочно указаны 25 и 26 мозаик с $t = 3$, а должны быть соответственно числа 26 и 27.

Все 58 мозаик T среди этих 165, такие, что T или T^* вложимы, указаны в таблице и упорядочены лексикографически по вектору (v, t, e) . Рисунки этих 58 мозаик

ПРИЛОЖЕНИЕ К ТАБЛИЦЕ (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

(в этом же порядке) приводятся в приложении; черными точками обозначаются представители всех v орбит вершин. Справа знаками + указана соответственно их вершинная, гранная, реберная или сильно реберная однородность. Для каждой мозаики T указана ее группа симметрии $\text{Aut } T$ в стандартных кристаллографических обозначениях; напомним, что отсутствие букв m и g означает отсутствие зеркальных отображений (зеркального отражения и скользящего отражения).

Заметим, что при вложении мозаики T и/или T^* в Z_n или $\frac{1}{2}Z_n$ для *любой* мозаики T размерность n должна делиться на 3 (или на 2), если группа $\text{Aut } T$ содержит тройную (или четверную) поворотную ось, т.е. если $\text{Aut } T = p6m, p6, p31m, p3m1, p3$ (или $p4m, p4g, p4$). Порядок группы поворотных частей $\text{Aut } T/N$ (где

Приложение к таблице (продолжение)

N – максимальный абелев нормальный делитель группы $\text{Aut } T$) равен 12, 6, 3 для пяти групп $\text{Aut } T$ с тройной осью, равен 8, 4 для трех групп с четверной осью и равен 4, 2, 1 для остальных девяти федоровских групп. Кстати, $p4$ – единственная федоровская группа G с $|G/N| = 4$, имеющая четверную ось.

Интересно, что для мозаик T из таблицы оказалось:

- 1) все номера 4, 17, 31, 37, 41 с вершиной $(3.6.3.6)$ имеют $T^* \rightarrow Z_3$ и наоборот;
- 2) все номера 7, 15, 21, 23, 30, 32, 44, 47, 49, 54, 55, 57, 58 с вершиной $(3^2.4.3.4)$ имеют $T \rightarrow \frac{1}{2}Z_4$ или $T \rightarrow \frac{1}{2}Z_6$, за исключением номера 58, имеющего также вершину $(3^4.6)$, и все шесть вложимых в $\frac{1}{2}Z_4$ мозаик находятся среди них;
- 3) все номера 11, 13, 22, 25, 28, 48, 52, 53, 56, 58 с вершиной $(3^4.6)$ имеют $T \rightarrow \frac{1}{2}Z_5$ или $T \rightarrow \frac{1}{2}Z_6$ и все семь вложимых в $\frac{1}{2}Z_5$ мозаик находятся среди них.

ПРИЛОЖЕНИЕ К ТАБЛИЦЕ (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

Следующие группы мозаик в таблице имеют одинаковый символ: номера 14, 18; 21, 23; 27, 33, 34, 40; 29, 38; 31, 41; 35, 43; 36, 42; 50, 51. В каждой из этих групп, кроме третьей и последней, вложимость одинакова. Отметим также схожести номеров в парх: 12, 50; 24, 51; 19, 45.

Заметим, что для символов $(3^6; 3^4.6)$ и $(3^6; 3^3.4^2)$ индексы 1 и 2 переставлены в [2] по отношению к рис. 2.2.1 из [13]. Для удобства мы взяли нумерацию из статьи [2], но в [8] нумерация была взята из работы [13].

В таблице оказались 41 из 135 вершинно-однородных, 18 из 22 гране-однородных и 15 из 22 сильно реберно-однородных мозаик, а также все 11, 3, 4 мозаики с $v = 1, t = 1, e = 1$; 12 из 20 с $v = 2$; 11 из 13 с $t = 2$; 4 из 4 с $e = 2$; 26 из 61 с $v = 3$; 15 из 26 с $t = 3$; 6 из 10 с $e = 3$.

В таблицу не вошли только следующие три мозаики с однородностью $+, +, +, +$: $(3^2.6^2; 3.6.3.6)$, $(3.4.3.12; 3.12^2)$, $(3.4.6.4; 4.6.12)$ с $(v, t, e) = (2, 2, 3)$, $(2, 3, 3)$, $(2, 4, 4)$ соответственно. Также не вошли только две мозаики с $t = 2$: упомянутая выше $(3^2.6^2; 3.6.3.6)$ и $(3^2.6^2; 3.6.3.6; 6^3)_1$ с $(v, t, e) = (3, 2, 4)$ и однородностью $+, +, +, -$.

Настоящая работа является завершением анализа вложимости мозаик, начатого в [8]⁷, [9]⁸, где вопрос вложимости T и T^* был решен, соответственно, для всех 31 мозаик T с $v \leq 2$ и для всех 22 грани-однородных мозаик T . Мы сделали аналогичные исследования для планарных графов в [11] и для размерности больше 2 в [10] и [12].

Рис. 1

Рис. 2

⁷Здесь на с. 199 нужно убрать фразу в строках 20, 21, а в 8-ой строке снизу K_n нужно заменить на K_4 . На с. 200 в строке 19 следует требовать отсутствия конечных замкнутых зон в случае евклидовой плоскости.

⁸Здесь на с. 156 в 9-ой строке сверху (4^3) нужно заменить на (4^4) .

Рис. 3

В [9] рассматривались вложения других интересных разбиений плоскости; например, зонотопальное разбиение Пенроуза $\mathbb{R}^2$ (и его аналог в $\mathbb{R}^3$) двумя золотыми ромбами (ромбоэдрами, соответственно) вложимо в Z_5 (Z_6 , соответственно), но его подразделение Робинсона и 10-гональная тьюбингенская триангуляция (см. рис. 1, а), б)) не 5-гональны: пять вершин, нарушающих 5-гональное неравенство, отмечены на отдельном графе с семью вершинами – изометрическом подграфе обеих триангуляций (см. рис. 1, с)), причем три вершины, отмеченные кружочками, берутся со знаком $+$, а две вершины, отмеченные квадратиками, берутся со знаком $-$ (см. замечание 2 в п. 2). Вложимость разбиения Пенроуза (на рис. 2, б) изображена его часть) в Z_5 видна на из рис. 2, а), показывающего его пять зон. Интересно, что разбиение Вороного для вершин разбиения Пенроуза оказалось не 5-гональным, но мы не нашли в этом разбиении 5 точек, которые бы нарушали 5-гональное неравенство и имели максимальное расстояние меньше 17. Это разбиение Вороного получается как дуальное к триангуляции Делоне, соответствующей вершинам разбиения Пенроуза, т.е. разбиению Пенроуза, в котором все ромбы разделены короткими диагоналями на остроугольные треугольники. Это разбиение Вороного составлено из 5-, 6- и 7-угольников (трех, двух и двух типов соответственно). Наличие пяти точек, нарушающих 5-гональное неравенство, объясняется присутствием пентагонов, так как любое разбиение плоскости без 3-, 4- и 5-угольников имеет вложимый остов (см. [11, теорема 3]).

Не 5-гональны также следующие два разбиения (см. [17, с. 104, 89], а также рис. 3, а), б)): дюреровское разбиение (регулярными пентагонами и ромбами) и разбиение на греческие кресты (комбинаторно эквивалентное (4^4) с двумя новыми вершинами на каждом ребре). Следует отметить, что изображенный на рис. 3, а) фрагмент продолжается до разбиения всей плоскости на конгруэнтные ромбы и пентагоны. Как оказалось, такое продолжение является единственным. Сам же этот фрагмент без добавленного нами 32-го пентагона (или же исходный фрагмент из [17]) вложим со шкалой $\lambda = 2$ в куб H_{45} (размерность куба равна периметру фрагмента).

Разбиение Cham(4^4) (дуальное разбиению (4^4) , рассматриваемому как бесконечная шахматная доска с пирамидами на всех черных клетках) вложимо в Z_4 .

Наконец, граф части вложимой мозаики T или T^* , ограниченной простым циклом длины n и имеющей k замкнутых зон, состоящих из внутренних ребер, явля-

ется при $k = 0$ изометрическим подграфом $\frac{1}{2}H_n$ (см. [3, теорема 4]). Заметим, что если все внутренние грани этого графа имеют четное число сторон, то он вложим в $H_{\frac{n}{2}+k}$.

Список литературы

1. *Chavey D.* Periodic tilings and tilings by regular polygons: Ph.D. Thesis. Univ. of Wisconsin-Madison, 1984.
2. *Chavey D.* Tilings by regular polygons. II: A catalog of tilings // *Computers Math. Applic.* 1989. V. 17. P. 147–165.
3. *Chepoi V., Deza M., Grishukhin V. P.* Clin d’oeil on l_1 -embeddable planar graphs // *Discrete Applied Math.* 1997. V. 80. P. 3–19.
4. *Debrøey I., Landuyt F.* Equitransitive edge-to-edge tilings by regular convex polygons // *Geom. Dedicata.* 1981. V. 11. P. 47–60.
5. *Тылькин М. Е.* О геометрии Хэмминга единичных кубов // *ДАН.* 1960. Т. 134. № 5. С. 1037–1040.
6. *Деца М. М., Лоран М.* Геометрия разрезов и метрик. М.: Изд-во МЦНМО, 2001.
7. *Deza M., Shpectorov S.* Recognition of l_1 -graphs with complexity $O(nm)$, or Football in a Hypercube // *European J. of Combinatorics.* 1996. V. 17. № 2,3. P. 279–289.
8. *Деца М., Штогрин М. И.* Изометрические вложения полуправильных многогранников, разбиений и им дуальных в гиперкубы и кубические решетки // *УМН.* 1996. Т. 51. № 6. С. 199–200.
9. *Деца М., Штогрин М. И.* Вложение графов в гиперкубы и кубические решетки // *УМН.* 1997. Т. 52. № 6. С. 155–156.
10. *Deza M., Shtogrin M. I.* Uniform Partitions of 3-space, their Relatives and Embedding // *European J. of Combinatorics.* 2000. V. 21. P. 807–814.
11. *Деца М., Штогрин М. И.* Вложение химических графов в гиперкубы // *Матем. заметки.* 2000. Т. 68. № 3. С. 339–352.
12. *Deza M., Shtogrin M. I.* Embedding the graphs of regular tilings and star-honeycombs into the graphs of hypercubes and cubic lattices // *Advanced Studies in Pure Mathematics.* V. 27. Tokyo: Kinokuniya company LTD, 2000. P. 73–92.
13. *Grünbaum B., Shephard G. C.* Tilings and patterns. N. Y.: W. H. Freeman and Company, 1987.
14. *Krötenheerdt O.* Die homogenen Mosaik n -ter Ordnung in der euklidischen Ebene. 1 // *Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg. Math.-natur. Reihe.* 1969. V. 18. P. 273–290.
15. *Krötenheerdt O.* Die homogenen Mosaik n -ter Ordnung in der euklidischen Ebene. 2 // *Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg. Math.-natur. Reihe.* 1970. V. 19. P. 19–38.
16. *Krötenheerdt O.* Die homogenen Mosaik n -ter Ordnung in der euklidischen Ebene. 3 // *Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg. Math.-natur. Reihe.* 1970. V. 19. P. 97–122.
17. *Wells D.* The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Geometry. London – N. Y.: Penguin Books, 1991.
18. *Новиков С. П.* Топология // *Итоги науки и техники. Серия “Современные проблемы математики”. Фундаментальные направления.* Т. 12. Топология – I. М.: ВИНТИ, 1986. С. 5–252.
19. *Долбильин Н. П., Штанько М. А., Штогрин М. И.* Кубические многообразия в решетках // *Изв. РАН. Сер. матем.* 1994. Т. 58. № 2. С. 93–107.

Ecole Normale Supérieure et CNRS, Paris,
 Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: Michel.Deza@ens.fr
stogrin@mi.ras.ru

Поступило в редакцию
 13.V.1999
 24.I.2002