Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Зудилин, Об иррациональности значений дзета-функции Римана, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2002, том 66, выпуск 3, 49–102

DOI: <https://doi.org/10.4213/im387>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 15:48:09

УДК 511.3

В. В. Зудилин

Об иррациональности значений дзета-функции Римана

Обобщается конструкция Ривоаля, позволяющая строить линейные приближающие формы от 1 и значений дзета-функции $\zeta(s)$ только в нечетных точках. Доказываются теоремы об иррациональности числа $\zeta(s)$ для некоторого нечетного s из заданного отрезка натурального ряда; с помощью усовершенствования арифметических оценок усиливаются оригинальные результаты Ривоаля о линейной независимости чисел $\zeta(s)$.

Библиография: 28 наименований.

Введение

Изучение арифметической природы значений дзета-функции Римана

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

в целых точках $s > 1$ является одним из самых притягательных направлений современной теории чисел. Несмотря на обманчивую простоту и более чем двухвековую историю этой проблемы, полученные результаты немногочисленны. Первым продвижением в этом направлении бесспорно является формула Эйлера

$$\zeta(s) = -\frac{(2\pi i)^s B_s}{2s!}, \quad s = 2, 4, 6, \dots,$$

выражающая значения дзета-функции в четных точках в терминах $\pi \approx 3.1415926$ и чисел Бернулли $B_s \in \mathbb{Q}$, которые задаются производящей функцией

$$\frac{t}{e^t - 1} = 1 - \frac{t}{2} + \sum_{s=2}^{\infty} B_s \frac{t^s}{s!}, \quad B_s = 0 \text{ для нечетных } s \geq 3.$$

В 1882 г. Линдемман доказал трансцендентность числа π и, тем самым, трансцендентность $\zeta(s)$ для четных s .

Проблема иррациональности значений дзета-функции в нечетных точках казалась непреступной вплоть до 1978 г., когда Апери [1] предъявил последовательность рациональных приближений, доказывающих иррациональность числа $\zeta(3)$.

Работа выполнена при частичной поддержке фонда INTAS и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № IR-97-1904).

ТЕОРЕМА АПЕРИ. *Число $\zeta(3)$ иррационально.*

История этого открытия и строгое математическое обоснование наблюдений АперИ изложены в [2]. В последующие годы феномен последовательности АперИ был неоднократно переосмыслен с точки зрения различных аналитических методов теории чисел (см. [3]–[8]); новые подходы позволили усилить результат АперИ *количественно* – получить “хорошую” меру иррациональности числа $\zeta(3)$ (последние этапы соревнования в этом направлении – работы [9], [10]).

К сожалению, естественные обобщения конструкции АперИ приводят к линейным формам, содержащим значения дзета-функции как в нечетных, так и в четных точках (интерес к которым заметно угас после результата Эйлера–Линдемманна); это обстоятельство не позволяло получить результаты об иррациональности $\zeta(s)$ для нечетных $s \geq 5$. Интересные попытки подступить к этой проблеме содержатся в препринтах [11] и [12].

Наконец, в 2000 г. Ривоаль [13] наделил вспомогательную рациональную функцию симметрией и построил линейные формы, содержащие значения дзета-функции только в нечетных точках $s > 1$.

ТЕОРЕМА РИВОАЛЯ. *Среди чисел $\zeta(3), \zeta(5), \zeta(7), \dots$ имеется бесконечно много иррациональных. Более точно, для размерности $\delta(a)$ пространств, натянутых над $\mathbb{Q}$ на числа $1, \zeta(3), \zeta(5), \dots, \zeta(a-2), \zeta(a)$, где a нечетно, справедлива оценка*

$$\delta(a) \geq \frac{\log a}{1 + \log 2} (1 + o(1)), \quad a \rightarrow \infty.$$

В настоящей работе мы обобщаем конструкцию Ривоаля [13] и доказываем следующие результаты.

ТЕОРЕМА 0.1. *В каждом числовом наборе*

$$\begin{aligned} &\{\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11), \zeta(13), \zeta(15), \zeta(17), \zeta(19), \zeta(21)\}, \\ &\{\zeta(7), \zeta(9), \dots, \zeta(35), \zeta(37)\}, \quad \{\zeta(9), \zeta(11), \dots, \zeta(51), \zeta(53)\} \end{aligned} \quad (0.1)$$

имеется по крайней мере одно иррациональное число¹.

ТЕОРЕМА 0.2. *Для каждого нечетного $b \geq 1$ среди чисел*

$$\zeta(b+2), \zeta(b+4), \dots, \zeta(8b-3), \zeta(8b-1)$$

имеется по крайней мере одно иррациональное.

ТЕОРЕМА 0.3. *Существуют нечетные $a_1 \leq 145$ и $a_2 \leq 1971$ такие, что числа $1, \zeta(3), \zeta(a_1), \zeta(a_2)$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$.*

Теорема 0.3 усиливает соответствующий результат работы [15], где установлена линейная независимость чисел $1, \zeta(3), \zeta(a)$ для некоторого нечетного $a \leq 169$.

¹После завершения работы над статьей автору стало известно, что Ривоаль [14] независимо получил утверждение теоремы 0.1 для первого из наборов в (0.1), используя иное обобщение конструкции из [13].

Замечание при корректуре. Недавно автор получил ряд уточнений теоремы 0.1 и, в частности, доказал [28], что по крайней мере одно из четырех чисел $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)$ иррационально.

ТЕОРЕМА 0.4. *Для каждого нечетного $a \geq 3$ справедлива абсолютная оценка*

$$\delta(a) > 0.395 \log a > \frac{2}{3} \cdot \frac{\log a}{1 + \log 2}. \quad (0.2)$$

Дальнейшее изложение устроено следующим образом. В § 1 описана аналитическая конструкция линейных форм от значений дзета-функции в нечетных точках; в § 2–4 исследуется асимптотика линейных форм, их коэффициентов и знаменателей соответственно. Наконец, в § 5 приводятся подробные доказательства результатов; основным ингредиентом в доказательстве теорем 0.3, 0.4 (так же, как и в работе [13]) является следующий частный случай теоремы Нестеренко из [16].

КРИТЕРИЙ ЛИНЕЙНОЙ НЕЗАВИСИМОСТИ. *Пусть для заданного набора вещественных чисел $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_m$, $m \geq 1$, существуют последовательность линейных форм*

$$I_n = A_{0,n}\theta_0 + A_{1,n}\theta_1 + \dots + A_{m,n}\theta_m, \quad n = 1, 2, \dots,$$

с целыми коэффициентами и числа $\alpha > 0$, $\beta > 0$ такие, что

$$\log |I_n| = -n\alpha + o(n), \quad \log \max_{0 \leq j \leq m} \{|A_{j,n}|\} \leq n\beta + o(n)$$

при $n \rightarrow \infty$. Тогда

$$\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}\theta_0 + \mathbb{Q}\theta_1 + \dots + \mathbb{Q}\theta_m) \geq 1 + \frac{\alpha}{\beta}.$$

Отметим, что обоснование теорем 0.1–0.4 опирается на метод перевала и следует схеме доказательства теоремы Апері из [8]. Мы также считаем необходимым указать на диссертацию [17], в которой с помощью метода перевала были получены арифметические результаты для значений полилогарифмов; работа [17] послужила связующим звеном между нашими эмпирическими наблюдениями и строгим обоснованием результатов в § 2. Усовершенствование арифметических оценок (знаменателей числовых линейных форм) в духе [18], [9], [10], приводимое в § 4, позволило уточнить оценку снизу для $\delta(a)$ в теоремах 0.3, 0.4 при малых значениях a . Наконец, в § 3 для коэффициентов линейных форм получена не только оценка сверху, но и асимптотика их роста.

Основные результаты настоящей работы анонсированы в сообщении [19].

Автор искренне благодарен профессору Ю. В. Нестеренко за постоянное внимание к работе и ряд ценных указаний по ее усовершенствованию.

§ 1. Аналитическая конструкция

В этом параграфе мы изложим аналитическую конструкцию, позволяющую строить “хорошие” линейные формы с рациональными коэффициентами от значений дзета-функции в нечетных точках.

Зафиксируем целые положительные параметры a, b, r , $2rb \leq a + b$ четно, и для каждого целого положительного n рассмотрим рациональную функцию

$$R(t) = R_n(t) := \frac{((t \pm (n+1)) \cdots (t \pm (n+2rn)))^b}{(t(t \pm 1) \cdots (t \pm n))^a} \cdot (2n)!^{a-2rb}. \quad (1.1)$$

Здесь и далее запись $(t \pm l)$ означает, что в произведении (сумме или множестве) участвуют одновременно множители (слагаемые или элементы соответственно) $t - l$ и $t + l$. Функции (1.1) поставим в соответствие число – бесконечную сумму

$$I = I_n := \sum_{t=n+1}^{\infty} \frac{1}{(b-1)!} \frac{d^{b-1} R(t)}{dt^{b-1}}. \quad (1.2)$$

Как несложно заметить, суммирование в (1.2) происходит только по целым $t > n + 2rn$. Ряд в правой части (1.2) сходится абсолютно, так как степени числителя и знаменателя рациональной функции (1.1) равны соответственно $4rbn$ и $a(2n+1) \geq 4rbn + a \geq 4rbn + 2$, значит,

$$R(t) = O\left(\frac{1}{t^2}\right) \quad \text{и} \quad \frac{d^{b-1} R(t)}{dt^{b-1}} = O\left(\frac{1}{t^2}\right), \quad t \rightarrow \infty. \quad (1.3)$$

Интегральное представление суммы (1.2) и применение метода Лапласа позволяют вычислить величину

$$\varkappa = \varlimsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |I_n|}{n} > -\infty \quad (1.4)$$

(подробности см. далее, в § 2) подобно тому, как это проделалось в работах [8], [17].

ЛЕММА 1.1. *Для каждого $n = 1, 2, \dots$ число (1.2) является линейной формой от 1 и значений дзета-функции в нечетных точках s , $b < s < a + b$:*

$$I = \sum_{\substack{s \text{ нечетно} \\ b < s < a+b}} \bar{A}_s \zeta(s) - \bar{A}_0. \quad (1.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представляя функцию (1.1) в виде суммы простейших дробей:

$$R(t) = \sum_{k=-n}^n \left(\frac{A_{k,a}}{(t+k)^a} + \cdots + \frac{A_{k,2}}{(t+k)^2} + \frac{A_{k,1}}{t+k} \right), \quad (1.6)$$

отметим, что

$$\sum_{k=-n}^n A_{k,1} = -\operatorname{Res}_{t=\infty} R(t) = 0 \quad (1.7)$$

согласно (1.3). Из (не)четности функции (1.1), именно

$$R(-t) = (-1)^a R(t), \quad (1.8)$$

и единственности разложения (1.6) следуют соотношения

$$A_{k,j} = (-1)^{a-j} A_{-k,j}, \quad k = 0, \pm 1, \dots, \pm n, \quad j = 1, 2, \dots, a;$$

поэтому

$$\sum_{k=-n}^n A_{k,j} = (-1)^{a-j} \sum_{k=-n}^n A_{k,j} = 0, \quad \text{если } a-j \text{ нечетно,} \quad j = 2, \dots, a. \quad (1.9)$$

Подставляя разложение (1.6) в (1.2), находим

$$\begin{aligned} (-1)^{b-1} I = & \sum_{t=n+1}^{\infty} \sum_{k=-n}^n \left(\binom{a+b-2}{b-1} \frac{A_{k,a}}{(t+k)^{a+b-1}} \right. \\ & \left. + \binom{a+b-3}{b-1} \frac{A_{k,a-1}}{(t+k)^{a+b-2}} + \dots + \binom{b}{b-1} \frac{A_{k,2}}{(t+k)^{b+1}} + \frac{A_{k,1}}{(t+k)^b} \right), \end{aligned}$$

откуда после несложных преобразований получаем

$$I = \bar{A}_{a+b-1} \zeta(a+b-1) + \bar{A}_{a+b-2} \zeta(a+b-2) + \dots + \bar{A}_b \zeta(b) - \bar{A}_0, \quad (1.10)$$

где

$$\bar{A}_j = (-1)^{b-1} \binom{j-1}{b-1} \sum_{k=-n}^n A_{k,j-b+1}, \quad j = b, b+1, \dots, a+b-1, \quad (1.11)$$

$$\bar{A}_0 = (-1)^{b-1} \sum_{k=-n}^n \sum_{l=1}^{k+n} \left(\binom{a+b-2}{b-1} \frac{A_{k,a}}{l^{a+b-1}} + \dots + \binom{b}{b-1} \frac{A_{k,2}}{l^{b+1}} + \frac{A_{k,1}}{l^b} \right). \quad (1.12)$$

Согласно (1.7) выполнено $\bar{A}_b = 0$, так что выражение в правой части (1.10) определено корректно даже в случае $b = 1$; кроме того, согласно (1.9) и четности числа $a+b$ имеет место равенство $\bar{A}_j = 0$, если $j \geq b$ четно. Таким образом, формула (1.10) означает, что I является линейной формой от 1 и значений дзета-функции в нечетных точках s , $b+1 \leq s \leq a+b-1$, что и требовалось доказать.

Для нахождения знаменателей линейных форм (1.2) воспользуемся следующим утверждением.

ЛЕММА 1.2 (ср. с [20], [13]). *Пусть для некоторого многочлена $P(t)$ степени не выше n рациональная функция*

$$R(t) = \frac{P(t)}{(t+s)(t+s+1) \dots (t+s+n)} \quad (1.13)$$

(в необязательно несократимом представлении) удовлетворяет условиям

$$(R(t)(t+k)) \Big|_{t=-k} \in \mathbb{Z}, \quad k = s, s+1, \dots, s+n. \quad (1.14)$$

Тогда для всех целых неотрицательных j выполнено

$$\frac{D_n^j}{j!} \frac{d^j}{dt^j} (R(t)(t+k)) \Big|_{t=-k} \in \mathbb{Z}, \quad k = s, s+1, \dots, s+n,$$

где D_n – наименьшее общее кратное чисел $1, 2, \dots, n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Раскладывая рациональную функцию (1.13) на простейшие дроби, получаем

$$R(t) = \sum_{l=s}^{s+n} \frac{B_l}{t+l},$$

где

$$B_l = (R(t)(t+l))|_{t=-l} \in \mathbb{Z}, \quad l = s, s+1, \dots, s+n.$$

Тогда

$$R(t)(t+k) = B_k + \sum_{\substack{l=s \\ l \neq k}}^{s+n} B_l \frac{t+k}{t+l} = B_k + \sum_{\substack{l=s \\ l \neq k}}^{s+n} B_l \left(1 + \frac{k-l}{t+l}\right)$$

и, значит,

$$\frac{1}{j!} \frac{d^j}{dt^j} (R(t)(t+k)) \Big|_{t=-k} = (-1)^j \sum_{\substack{l=s \\ l \neq k}}^{s+n} \frac{B_l(k-l)}{(t+l)^{j+1}} \Big|_{t=-k} = - \sum_{\substack{l=s \\ l \neq k}}^{s+n} \frac{B_l}{(k-l)^j}.$$

Отсюда следует требуемое утверждение.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Формулировка леммы 1.2 принадлежит Нестеренко [21]. В работе Никишина [20] доказанная лемма применялась к многочлену

$$P(t) = (t+p+1) \cdots (t+p+n)$$

для $p-s \in \mathbb{Z}$ и $p+n < s$ или $p \geq s+n$; Ривоаль заметил [13], что условиям (1.14) удовлетворяет также многочлен $P(t) = n!$. В каждом из этих случаев числа B_k , $k = s, s+1, \dots, s+n$, являются биномиальными коэффициентами, так что проверка включений (1.14) не составляет труда.

Как несложно заметить, рациональная функция (1.1) может быть представлена в виде произведения функций

$$F(t) = F_{n,m}(t) := \frac{(t \pm (m+1)) \cdots (t \pm (m+2n))}{(t(t \pm 1) \cdots (t \pm n))^2}, \quad n \leq m, \quad (1.15)$$

$$H(t) = H_n(t) := \frac{(2n)!}{t(t \pm 1) \cdots (t \pm n)} \quad (1.16)$$

(см. формулу (1.22) далее).

ЛЕММА 1.3. Для функций (1.15), (1.16) выполнены включения

$$\frac{D_{2n}^j}{j!} \frac{d^j}{dt^j} (F(t)(t+k)^2) \Big|_{t=-k} \in \mathbb{Z}, \quad k = 0, \pm 1, \dots, \pm n, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.17)$$

$$\frac{D_{2n}^j}{j!} \frac{d^j}{dt^j} (H(t)(t+k)) \Big|_{t=-k} \in \mathbb{Z}, \quad k = 0, \pm 1, \dots, \pm n, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.18)$$

где D_{2n} – наименьшее общее кратное чисел $1, 2, \dots, 2n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Включения (1.18) следуют из леммы 1.2, примененной к рациональной функции (1.16). Чтобы доказать включения (1.17), необходимо воспользоваться леммой 1.2 для рациональных функций

$$\begin{aligned} R_-(t) &= \frac{(t - (m + 1)) \cdots (t - (m + 2n))}{t(t \pm 1) \cdots (t \pm n)}, \\ R_+(t) &= \frac{(t + (m + 1)) \cdots (t + (m + 2n))}{t(t \pm 1) \cdots (t \pm n)} \end{aligned} \quad (1.19)$$

и правилом Лейбница для j -й производной произведения $R_-(t)R_+(t) = F(t)$. При этом условия (1.14) для каждой из рациональных функций в (1.16), (1.19) действительно выполнены, так как

$$\begin{aligned} (H(t)(t + k))|_{t=-k} &= (-1)^{n+k} \frac{(2n)!}{(n+k)!(n-k)!} = (-1)^{n+k} \binom{2n}{n+k} \in \mathbb{Z}, \\ (R_-(t)(t + k))|_{t=-k} &= \binom{m+2n+k}{2n} \cdot (-1)^{n+k} \binom{2n}{n+k} \in \mathbb{Z}, \\ (R_+(t)(t + k))|_{t=-k} &= \binom{m+2n-k}{2n} \cdot (-1)^{n+k} \binom{2n}{n+k} \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

для всех $k = 0, \pm 1, \dots, \pm n$. Тем самым лемма доказана.

Всюду в дальнейшем под *знаменателем* $\text{den}(I)$ линейной формы $I = A_0 + A_1\theta_1 + \dots + A_m\theta_m$ понимаем наименьшее *рациональное* (не обязательно целое) $D > 0$ такое, что каждое из чисел $DA_0, DA_1, \dots, DA_m$ является целым.

ЛЕММА 1.4. *Коэффициенты линейной формы (1.5) удовлетворяют включениям*

$$D_{2n}^{a+b-1-s} \bar{A}_s \in \mathbb{Z}, \quad (1.20)$$

где $s = 0$ или s нечетно, $b < s < a + b$; поэтому $\text{den}(I_n)$ является делителем D_{2n}^{a+b-1} и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \text{den}(I_n)}{n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log D_{2n}^{a+b-1}}{n} = 2(a + b - 1). \quad (1.21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для определения коэффициентов в разложении (1.6) воспользуемся формулой

$$A_{k,j} = \frac{1}{(a-j)!} \frac{d^{a-j}}{dt^{a-j}} (R(t)(t+k)^a) \Big|_{t=-k}, \quad k = 0, \pm 1, \dots, \pm n, \quad j = 1, 2, \dots, a,$$

и представлением

$$R(t) = (H_n(t))^{a-2rb} (F_{n,n}(t))^b (F_{n,3n}(t))^b \cdots (F_{(2r-1)n,n}(t))^b \quad (1.22)$$

рациональной функции (1.1). Тогда включения

$$D_{2n}^{a-j} A_{k,j} \in \mathbb{Z}, \quad k = 0, \pm 1, \dots, \pm n, \quad j = 1, 2, \dots, a, \quad (1.23)$$

следуют из леммы 1.3 и правила Лейбница для дифференцирования произведения. В свою очередь, включения (1.20) получаются согласно формулам (1.11), (1.12) и соотношениям (1.23). Предельное соотношение (1.21) вытекает из формулы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log D_n}{n} = 1 \quad (1.24)$$

(согласно асимптотическому закону распределения простых чисел). Лемма доказана полностью.

Таким образом, мы построили последовательность линейных форм I_n , $n = 1, 2, \dots$, из которой (согласно предельному соотношению (1.4)) можно выделить бесконечную подпоследовательность ненулевых форм; при этом формы $D_{2n}^{a+b-1} I_n$, $n = 1, 2, \dots$, имеют целочисленные коэффициенты. Это означает, что при

$$\varkappa + 2(a + b - 1) < 0 \quad (1.25)$$

среди чисел $\zeta(s)$, где s нечетно и $b < s < a + b$, имеется по крайней мере одно иррациональное. Более того, верхние оценки для коэффициентов линейных форм (1.10) в случае (1.25) позволяют получить оценку снизу для количества иррациональных чисел в указанном наборе значений дзета-функции. Поэтому следующий этап наших рассуждений посвящен вычислению величины (1.4) и асимптотики коэффициентов линейных форм (1.10) при $n \rightarrow \infty$.

§ 2. Асимптотическая оценка линейных форм

Нам понадобятся некоторые дополнительные свойства функции $\operatorname{ctg} z$.

ЛЕММА 2.1. *Максимальное значение вещественнозначной неотрицательной функции $h(y) = |\operatorname{ctg}(x + iy)|$, $y \in \mathbb{R}$, зависит только от $x \pmod{\pi\mathbb{Z}} \in \mathbb{R}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $x = \pi k$ для некоторого целого k , то точка $z = x$ является (единственным) полюсом функции $\operatorname{ctg} z$ на прямой $\operatorname{Im} z = x$ (см. (2.6) далее). Следовательно, в этом случае абсолютный максимум функции $h(y)$, равный бесконечности, достигается при $y = 0$. Поэтому считаем далее, что $x \notin \pi\mathbb{Z}$ и, значит, $\cos 2x < 1$. Имеем

$$\begin{aligned} h(y)^2 &= \left| \frac{\cos(x + iy)}{\sin(x + iy)} \right|^2 = \left| \frac{(e^{-y} + e^y) \cos x + i(e^{-y} - e^y) \sin x}{(e^{-y} - e^y) \cos x + i(e^{-y} + e^y) \sin x} \right|^2 \\ &= \frac{e^{-2y} + e^{2y} + 2 \cos 2x}{e^{-2y} + e^{2y} - 2 \cos 2x} = 1 + \frac{4 \cos 2x}{e^{-2y} + e^{2y} - 2 \cos 2x} \\ &\leq 1 + \frac{4 |\cos 2x|}{2 - 2 \cos 2x}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где мы воспользовались неравенством $Y + 1/Y \geq 2$ при $Y = e^{-2y} > 0$, которое становится равенством лишь в случае $Y = 1$. Оценка в правой части (2.1) зависит только от $x \pmod{\pi\mathbb{Z}}$, что и завершает доказательство леммы.

Определим теперь “дифференциальные итерации” котангенса:

$$\operatorname{ctg}_b z = \frac{(-1)^{b-1}}{(b-1)!} \frac{d^{b-1} \operatorname{ctg} z}{dz^{b-1}}, \quad b = 1, 2, \dots \quad (2.2)$$

ЛЕММА 2.2. Для каждого $b = 1, 2, \dots$

а) функция $\operatorname{ctg}_b z$ является многочленом от $\operatorname{ctg} z$ с рациональными коэффициентами:

$$\operatorname{ctg}_b z = U_b(\operatorname{ctg} z), \quad U_b(-y) = (-1)^b U_b(y), \quad \deg U_b = b;$$

б) функция $\sin^b z \cdot \operatorname{ctg}_b z$ является многочленом от $\cos z$ с рациональными коэффициентами:

$$\sin^b z \cdot \operatorname{ctg}_b z = V_b(\cos z), \quad V_b(-y) = (-1)^b V_b(y), \quad \deg V_b = \max\{1, b-2\}. \quad (2.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся методом математической индукции. При $b = 1$ имеем $\operatorname{ctg}_1 z = \operatorname{ctg} z$ и $\sin z \cdot \operatorname{ctg}_1 z = \cos z$, так что $U_1(y) = V_1(y) = y$.

а) Согласно дифференциальному уравнению

$$\frac{dy}{dz} = -(y^2 + 1), \quad y = \operatorname{ctg} z,$$

и определению (2.2) для многочленов $U_b(y)$, $b = 1, 2, \dots$, справедливо рекуррентное соотношение

$$U_{b+1}(y) = \frac{1}{b}(y^2 + 1)U'_b(y), \quad b = 2, 3, \dots$$

Индукционный переход от b к $b + 1$ показывает, что $U_{b+1}(-y) = (-1)^{b+1}U_{b+1}(y)$ и степень многочлена U_{b+1} на единицу больше степени U_b .

б) Пусть представление (2.3) доказано для некоторого целого $b \geq 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \sin z \cdot \frac{d}{dz} V_b(\cos z) &= \sin z \cdot \frac{d}{dz} (\sin^b z \cdot \operatorname{ctg}_b z) \\ &= b \cos z \cdot \sin^b z \cdot \operatorname{ctg}_b z + \sin^{b+1} z \cdot \frac{d}{dz} \operatorname{ctg}_b z \\ &= b \cos z \cdot V_b(\cos z) - b \sin^{b+1} z \cdot \operatorname{ctg}_{b+1} z, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \sin^{b+1} z \cdot \operatorname{ctg}_{b+1} z &= \cos z \cdot V_b(\cos z) - \frac{1}{b} \sin z \cdot \frac{d}{dz} V_b(\cos z) \\ &= \cos z \cdot V_b(\cos z) + \frac{1}{b} \sin^2 z \cdot V'_b(\cos z) \\ &= V_{b+1}(\cos z), \end{aligned}$$

где

$$V_{b+1}(y) = yV_b(y) + \frac{1}{b}(1 - y^2)V'_b(y). \quad (2.4)$$

Согласно формуле (2.4) и индукционному предположению функция $V_{b+1}(y)$ является многочленом, степень которого не более чем на единицу превосходит степень $V_b(y)$; кроме того, $U_{b+1}(-y) = (-1)^{b+1}U_{b+1}(y)$. Поскольку $V_2(y) = 1$ (вновь согласно (2.4)), получаем оценку $\deg V_{b+1} \leq b - 1$. В то же время индукционный переход от b к $b + 1$ и соотношение (2.4) показывают, что коэффициент при y^{b-1} в многочлене $V_{b+1}(y)$ ненулевой и равен $2^{b-1}/b!$. Тем самым представление (2.3) доказано для всех $b = 1, 2, \dots$. Лемма доказана полностью.

ЛЕММА 2.3. Для каждого $b = 1, 2, \dots$ и любого целого k в окрестности точки $t = k$ справедливо представление

$$\pi^b \operatorname{ctg}_b \pi t = \frac{1}{(t-k)^b} + O(1), \quad (2.5)$$

где функция в $O(1)$ аналитична в окрестности точки $t = k$. В окрестности точки $t \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ функция $\operatorname{ctg}_b \pi t$ аналитична.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Второе утверждение леммы следует из определения (2.2) функции $\operatorname{ctg}_b z$ и разложения котангенса в сумму простейших дробей:

$$\pi \operatorname{ctg} \pi t = \frac{1}{t} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{t-m} + \frac{1}{t+m} \right) \quad (2.6)$$

(см., например, [22, гл. X, § 3, формула (3)]).

В окрестности точки $t = k \in \mathbb{Z}$ имеем

$$\pi \operatorname{ctg} \pi t = \pi \operatorname{ctg} \pi(t-k) = \frac{1}{t-k} \cdot \left(1 + \sum_{s=2}^{\infty} B_s \frac{(2\pi i)^s (t-k)^s}{s!} \right), \quad (2.7)$$

где $B_s, s = 2, 3, \dots$, — числа Бернулли (см., например, [22, гл. X, § 3, формула (2)]). Дифференцируя $b-1$ раз тождество (2.7), получаем представление (2.5) и первое утверждение леммы. Лемма доказана полностью.

ЛЕММА 2.4. Для суммы (1.2) справедливы интегральное представление

$$I = \frac{\pi^{b-1} i}{2} \int_{M-i\infty}^{M+i\infty} \operatorname{ctg}_b \pi t \cdot R(t) dt, \quad (2.8)$$

где $M \in \mathbb{R}$ — произвольная постоянная из интервала $n < M < (2r+1)n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим подынтегральную функцию в (2.8) на контуре прямоугольника с вершинами $M \pm iN, N + 1/2 \pm iN$ (см. рис. 1), где целое число N достаточно велико, $N > (2r+1)n$. Согласно формуле Коши, лемме 2.3 и аналитичности функции $R(t)$ внутри и на границе прямоугольника интеграл

$$\frac{\pi^b}{2\pi i} \left(\int_{M+iN}^{M-iN} + \int_{M-iN}^{N+1/2-iN} + \int_{N+1/2-iN}^{N+1/2+iN} + \int_{N+1/2+iN}^{M+iN} \right) \operatorname{ctg}_b \pi t \cdot R(t) dt \quad (2.9)$$

равен сумме вычетов подынтегральной функции в точках $t \in \mathbb{Z}, M < t \leq N$. Пользуясь теперь представлением (2.5) и разложением

$$R(t) = R(k) + R'(k) \cdot (t-k) + \dots + \frac{R^{(b-1)}(k)}{(b-1)!} \cdot (t-k)^{b-1} + O((t-k)^b)$$

в окрестности точки $t = k \in \mathbb{Z}, M < k \leq N$, получаем, что интеграл (2.9) равен

$$\sum_{M < k \leq N} \operatorname{Res}_{t=k} (\pi^b \operatorname{ctg}_b \pi t \cdot R(t)) = \sum_{\substack{M < k \leq N \\ M-iN}} \frac{R^{(b-1)}(k)}{(b-1)!} = \sum_{\substack{k=n+1 \\ N + \frac{1}{2} - iN}}^N \frac{R^{(b-1)}(k)}{(b-1)!}. \quad (2.10)$$

Рис. 1

Отметим теперь, что на сторонах $[N+1/2-iN, N+1/2+iN]$, $[M-iN, N+1/2-iN]$ и $[N+1/2+iN, M+iN]$ прямоугольника выполнено $R(t) = O(N^{-2})$ согласно (1.3), а функция $\operatorname{ctg}_b \pi t$ ограничена. Последнее утверждение следует из утверждения а) леммы 2.2 и ограниченности функции $\operatorname{ctg} \pi t$ на рассматриваемых сторонах: для отрезка $[N+1/2-iN, N+1/2+iN]$ пользуемся леммой 2.1, а для двух других отрезков – тривиальной оценкой

$$|\operatorname{ctg} \pi(x+iy)| = \left| \frac{1 + e^{\pm 2\pi i x} \cdot e^{-2\pi|y|}}{1 - e^{\pm 2\pi i x} \cdot e^{-2\pi|y|}} \right| \leq \frac{1 + e^{-2\pi|y|}}{1 - e^{-2\pi|y|}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

при $y = \pm N$. Поэтому

$$\left(\int_{M-iN}^{N+1/2-iN} + \int_{N+1/2-iN}^{N+1/2+iN} + \int_{N+1/2+iN}^{M+iN} \right) \operatorname{ctg}_b \pi t \cdot R(t) dt = O(N^{-1}),$$

и после перехода к пределу при $N \rightarrow \infty$ в (2.9) получаем правую часть (2.8), в то время как предельный переход в (2.10) дает искомую сумму (1.2). Лемма доказана.

ЛЕММА 2.5. *При $n \rightarrow \infty$ для суммы (1.2) выполнено*

$$I = \tilde{I} \frac{(-1)^{bn} (2\sqrt{\pi n})^{a-2rb} (2\pi)^b}{n^{a-1}} (1 + O(n^{-1})),$$

где

$$\tilde{I} = \tilde{I}_n := -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty} \sin^b \pi n \tau \cdot \operatorname{ctg}_b \pi n \tau \cdot e^{nf(\tau)} \cdot g(\tau) d\tau, \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} f(\tau) = & b(\tau+2r+1) \log(\tau+2r+1) + b(-\tau+2r+1) \log(-\tau+2r+1) \\ & + (a+b)(\tau-1) \log(\tau-1) - (a+b)(\tau+1) \log(\tau+1) + (a-2rb)2 \log 2, \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$g(\tau) = \frac{(\tau+2r+1)^{b/2} (-\tau+2r+1)^{b/2}}{(\tau+1)^{(a+b)/2} (\tau-1)^{(a+b)/2}}, \quad (2.13)$$

$a, \mu \in \mathbb{R}$ – произвольная постоянная из интервала $1 < \mu < 2r+1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Для однозначного определения функций $f(\tau)$ и $g(\tau)$ рассматриваем их в τ -плоскости с разрезами вдоль лучей $(-\infty, 1]$ и $[2r+1, +\infty)$, фиксируя ветви логарифмов, принимающие действительные значения на интервале $(1, 2r+1)$ вещественной оси. Такой выбор ветвей обусловлен следующим далее доказательством леммы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь формулой понижения $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, перепишем рациональную функцию (1.1) в терминах гамма-функции:

$$R(t) = (-1)^{an} \left(\frac{\Gamma(\pm t + (2r+1)n+1)}{\Gamma(\pm t + n+1)} \right)^b \left(\frac{\Gamma(t)\Gamma(1-t)}{\Gamma(\pm t + n+1)} \right)^a (2n)!^{a-2rb}, \quad (2.14)$$

где, как и раньше, знак $\pm$ отвечает двум множителям в произведении. Преобразуем подынтегральную функцию в (2.8), пользуясь представлением (2.14) функции $R(t)$ и тождеством

$$\Gamma(t)\Gamma(1-t) = \frac{\pi}{\sin \pi t} = (-1)^n \Gamma(-t+n+1)\Gamma(t-n).$$

Имеем

$$R(t) = \frac{(-1)^{bn} \cdot \sin^b \pi t}{\pi^b} \frac{\Gamma(\pm t + (2r+1)n+1)^b \Gamma(t-n)^{a+b}}{\Gamma(t+n+1)^{a+b}} (2n)!^{a-2rb}. \quad (2.15)$$

Подставив это выражение в (2.8), получим

$$\begin{aligned} I &= \frac{(-1)^{bn} i}{2\pi} \int_{M-i\infty}^{M+i\infty} \sin^b \pi t \cdot \operatorname{ctg}_b \pi t \\ &\quad \times \frac{\Gamma(\pm t + (2r+1)n+1)^b \Gamma(t-n)^{a+b} (2n)!^{a-2rb}}{\Gamma(t+n+1)^{a+b}} dt \\ &= \frac{(-1)^{bn} (2n)^{a-2rb} i}{2\pi} \int_{M-i\infty}^{M+i\infty} \sin^b \pi t \cdot \operatorname{ctg}_b \pi t \cdot \frac{(-t + (2r+1)n)^b (t + (2r+1)n)^b}{(t+n)^{a+b}} \\ &\quad \times \frac{\Gamma(\pm t + (2r+1)n)^b \Gamma(t-n)^{a+b} \Gamma(2n)^{a-2rb}}{\Gamma(t+n)^{a+b}} dt, \end{aligned} \quad (2.16)$$

где $M \in \mathbb{R}$ – произвольная постоянная из интервала $n < M < (2r+1)n$. Положим $M = \mu n$ для постоянной $\mu \in \mathbb{R}$ из интервала $1 < \mu < 2r+1$.

Согласно асимптотике Γ -функции

$$\log \Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2} \right) \log z - z + \log \sqrt{2\pi} + O(|z|^{-1}) \quad (2.17)$$

(см., например, [23, § 3.10]) на контуре интегрирования в (2.16) имеем

$$\begin{aligned} \log \Gamma(\pm t + (2r+1)n) &= \left(\pm t + (2r+1)n - \frac{1}{2} \right) \log(\pm t + (2r+1)n) \\ &\quad - (\pm t + (2r+1)n) + \log \sqrt{2\pi} + O(n^{-1}), \\ \log \Gamma(t+n) &= \left(t+n - \frac{1}{2} \right) \log(t+n) - (t+n) + \log \sqrt{2\pi} + O(n^{-1}), \\ \log \Gamma(t-n) &= \left(t-n - \frac{1}{2} \right) \log(t-n) - (t-n) + \log \sqrt{2\pi} + O(n^{-1}), \\ \log \Gamma(2n) &= \left(2n - \frac{1}{2} \right) \log(2n) - 2n + \log \sqrt{2\pi} + O(n^{-1}). \end{aligned}$$

Таким образом, после замены $t = n\tau$ в интегралах в (2.16) получим

$$\begin{aligned} I &= \frac{(-1)^{bn} (2\sqrt{\pi n})^{a-2rb} (2\pi)^{b-1} i}{n^{a-1}} \int_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty} \sin^b \pi n\tau \cdot \operatorname{ctg}_b \pi n\tau \cdot e^{nf(\tau)} \\ &\quad \times \frac{(\tau + 2r+1)^{b/2} (-\tau + 2r+1)^{b/2}}{(\tau+1)^{(a+b)/2} (\tau-1)^{(a+b)/2}} (1 + O(n^{-1})) d\tau, \end{aligned}$$

где функция $f(\tau)$ определена в (2.12) и $\mu = M/n \in \mathbb{R}$ – произвольная постоянная из интервала $1 < \mu < 2r + 1$. Лемма доказана.

Согласно утверждению б) леммы 2.2 интеграл (2.11) можно представить в виде

$$\tilde{I} = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{k=-b}^b c_k \int_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty} e^{n(f(\tau)-k\pi i\tau)} g(\tau) d\tau, \quad c_k = c_{-k}, \quad (2.18)$$

где суммирование происходит только по k , имеющим ту же четность, что и число b , причем $c_{-b} = c_b = 0$ в случае $b > 1$.

ЛЕММА 2.6. Для $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$, $1 < \mu < 2r + 1$, и целого положительного n определим величину

$$J_{n,\lambda} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty} e^{n(f(\tau)-\lambda\pi i\tau)} g(\tau) d\tau. \quad (2.19)$$

Тогда

$$J_{n,-\lambda} = \overline{J_{n,\lambda}},$$

где черта сверху означает комплексное сопряжение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для аналитических в $\mathbb{C} \setminus ((-\infty, 1] \cup [2r+1, +\infty))$ функций $f(\tau), g(\tau)$, принимающих вещественные значения на интервале $(1, 2r+1)$, воспользуемся принципом симметрии Шварца (см., например, [24, гл. III, § 7, предложение 7.1]). Тогда после замены $\tau \mapsto \bar{\tau}$ в интеграле (2.19) получим

$$\begin{aligned} J_{n,\lambda} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty} e^{n(f(\bar{\tau})-\lambda\pi i\bar{\tau})} g(\bar{\tau}) d\bar{\tau} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty} e^{n(f(\bar{\tau})-\lambda\pi i\bar{\tau})} g(\bar{\tau}) d\bar{\tau} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty} e^{n(\overline{f(\tau)+\lambda\pi i\tau})} \overline{g(\tau)} d\tau = \overline{J_{n,-\lambda}}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Интеграл (2.11) представим в виде

$$\tilde{I} = -2 \sum_{\substack{k=0 \\ k \equiv b \pmod{2}}}^b c_k \operatorname{Re} J_{n,k}, \quad (2.20)$$

где c_k – некоторые (рациональные) постоянные, причем $c_1 = 1$ для $b = 1$ и $c_b = 0$, $c_{b-2} \neq 0$ для $b > 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуемое представление (2.20) непосредственно следует из утверждения б) леммы 2.2, формулы (2.18) и леммы 2.6.

Займемся вычислением асимптотики каждого из интегралов в правой части (2.18) с помощью метода перевала. Для этого нам понадобятся седловые точки подынтегральных функций – нули производных функций $f(\tau) - k\pi i\tau$, $k = 0, \pm 1, \dots, \pm b$, $k \equiv b \pmod{2}$. Как несложно убедиться, все корни производной

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}(f(\tau) - k\pi i\tau) &= b \log(\tau + 2r + 1) - b \log(-\tau + 2r + 1) \\ &\quad + (a + b) \log(\tau - 1) - (a + b) \log(\tau + 1) - k\pi i, \\ k &= 0, \pm 1, \dots, \pm b, \quad k \equiv b \pmod{2}, \end{aligned}$$

одновременно являются корнями многочлена

$$(\tau + 2r + 1)^b (\tau - 1)^{a+b} - (\tau - 2r - 1)^b (\tau + 1)^{a+b}, \quad (2.21)$$

общее количество которых равно его степени $a + 2b - 1$.

ЛЕММА 2.7. Пусть a, b, r – целые положительные числа, $a + b$ четно, $a \geq 3rb$, и функция $f(\tau)$ определена в (2.12), где соответствующие ветви логарифмов в разрезанной плоскости $\mathbb{C} \setminus ((-\infty, 1] \cup [2r + 1, +\infty))$ принимают вещественные значения на интервале $(1, 2r + 1)$. Тогда уравнение

$$f'(\tau) - \lambda\pi i = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (2.22)$$

имеет:

а) пару симметричных относительно мнимой оси вещественных решений $-\mu_0 \pm i0$ и μ_0 для $\lambda = 0$, где $\mu_0 \in (1, 2r + 1)$ и знак $+$ (знак $-$) в записи $\pm i0$ отвечает верхнему (нижнему) берегу разреза $(-\infty, 1]$;

б) пару симметричных относительно мнимой оси вещественных решений $-\mu_1 \pm i0$ и $\mu_1 \pm i0$ для $\lambda = \pm b$, где $\mu_1 \in (2r + 1, +\infty)$ и знак $+$ (знак $-$) в записи $\pm i0$ совпадает со знаком λ и отвечает верхним (нижним) берегам разрезов $(-\infty, 1], [2r + 1, +\infty)$;

в) вещественное решение $\pm i0$ для $\lambda = \pm(a + b)$, где знак $+$ (знак $-$) в записи $\pm i0$ совпадает со знаком λ и отвечает верхнему (нижнему) берегу разреза $(-\infty, 1]$;

г) одно решение на мнимой оси для вещественных λ , удовлетворяющих неравенству $b < |\lambda| < a + b$;

д) пару симметричных относительно мнимой оси комплексных решений для вещественных λ , удовлетворяющих неравенству $0 < |\lambda| < b$.

При этом все решения уравнения (2.22), отвечающие положительным λ , лежат в полуплоскости $\operatorname{Im} \tau > 0$, а отвечающие отрицательным λ – в полуплоскости $\operatorname{Im} \tau < 0$. Все решения уравнения (2.22) исчерпываются набором а)–д).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку

$$\begin{aligned} f'(\tau) &= b \log(\tau + 2r + 1) - b \log(-\tau + 2r + 1) \\ &\quad + (a + b) \log(\tau - 1) - (a + b) \log(\tau + 1) \end{aligned} \quad (2.23)$$

и $\log z = \log |z| + i \arg z$, $-\pi < \arg z < \pi$, для главной ветви логарифма с разрезом $(-\infty, 0]$ в z -плоскости, имеем

$$\operatorname{Re} f'(\tau) = \log \frac{|\tau + 2r + 1|^b |\tau - 1|^{a+b}}{|-\tau + 2r + 1|^b |\tau + 1|^{a+b}}, \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f'(\tau) &= b \arg(\tau + 2r + 1) - b \arg(-\tau + 2r + 1) \\ &\quad + (a + b) \arg(\tau - 1) - (a + b) \arg(\tau + 1), \end{aligned} \quad (2.25)$$

причем все аргументы $\arg(\cdot)$ принимают нулевые значения на интервале $(1, 2r + 1)$. Геометрическая интерпретация формулы (2.25) в обозначениях рис. 2 имеет вид

$$\operatorname{Im} f'(\tau) = b(\beta_- + \beta_+) + (a + b)(\alpha_- - \alpha_+) = b(\pi - \beta) + (a + b)\alpha, \quad (2.26)$$

откуда, в частности, следует, что $\operatorname{Im} f'(\tau) > 0$ в полуплоскости $\operatorname{Im} \tau > 0$ и $\operatorname{Im} f'(\tau) < 0$ в полуплоскости $\operatorname{Im} \tau < 0$. Кроме того, согласно (2.24), (2.26) множество решений уравнения (2.22) для каждого λ симметрично относительно мнимой оси, а симметрия $\tau \mapsto \bar{\tau}$ переводит его в множество решений уравнения (2.22) с заменой λ на $-\lambda$. Поэтому наши дальнейшие рассуждения относятся к случаю $\lambda > 0$ и верхней полуплоскости, а симметрия относительно действительной оси переносит их на случай $\lambda \leq 0$.

Рис. 2

Отметим также, что любое решение уравнения (2.22) согласно (2.23) является корнем многочлена

$$(\tau + 2r + 1)^b (\tau - 1)^{a+b} - e^{\lambda \pi i} (-\tau + 2r + 1)^b (\tau + 1)^{a+b} \quad (2.27)$$

степени $a + 2b - 1$, если λ – целое число, имеющее ту же четность, что и b , и степени $a + 2b$ в противном случае; при $\lambda \equiv b \pmod{2}$ этот многочлен совпадает с (2.21).

а), в) При $\lambda = 0$ (или, что то же самое, при $\lambda = a + b$) многочлен (2.27) является нечетной функцией, поэтому имеет корень 0; соответствующее решение $+i0$ уравнения (2.22) отвечает $\lambda = a + b$, так как $\alpha = \beta = \pi$ в (2.26) для $\tau = 0$. Вычисляя значения многочлена в точках $1, 2r + 1$ и пользуясь его нечетностью, получаем, что этот многочлен обладает парой вещественных корней $\pm \mu_0$, где $\mu_0 \in (1, 2r + 1)$. В дальнейшем покажем, что μ_0 – единственный вещественный корень на интервале $(1, 2r + 1)$, но до тех пор мы будем считать μ_0 ближайшим к точке $2r + 1$ вещественным корнем многочлена (2.27) при $\lambda = 0$ на указанном интервале. Согласно (2.26) решения $-\mu_0 + i0$ и μ_0 отвечают $\lambda = 0$ в уравнении (2.22).

б) Аналогично, вычисляя значения многочлена (2.27) при $\lambda = b$ в точках $2r + 1, +\infty$, получаем, что этот многочлен обладает парой вещественных корней $\pm \mu_1$,

причем корень $\mu_1 \in (2r+1, +\infty)$ мы (временно) считаем ближайшим к точке $2r+1$ среди остальных корней из интервала $(2r+1, +\infty)$. Согласно (2.26) решения $-\mu_1 + i0$ и $\mu_1 + i0$ отвечают $\lambda = b$ в уравнении (2.22).

В случае $a \geq 3rb$ можно указать лучшую локализацию корня μ_1 , именно $\mu_1 \in (2r+1, 4r+1)$. Действительно, значение многочлена (2.27) в точке $4r+1$ равно

$$(6r+2)^b(4r)^{a+b} - (2r)^b(4r+2)^{a+b} = (2r)^b(4r)^{a+b} \left(\left(3 + \frac{1}{r}\right)^b - \left(1 + \frac{1}{2r}\right)^{a+b} \right) < 0,$$

так как

$$\begin{aligned} (3r+1) \log \left(1 + \frac{1}{2r}\right) &= 4 \log \frac{3}{2} > 2 \log 2 = \log \left(3 + \frac{1}{r}\right) \quad \text{при } r = 1, \\ (3r+1) \log \left(1 + \frac{1}{2r}\right) &> \frac{3r+1}{2r+1} \geq \frac{7}{5} > 2 \log 2 > \log \left(3 + \frac{1}{r}\right) \quad \text{при } r \geq 2 \end{aligned}$$

(мы воспользовались элементарным неравенством

$$\frac{1}{n+1} < \log \left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}, \quad (2.28)$$

справедливым для всех целых положительных n) и, значит,

$$(a+b) \log \left(1 + \frac{1}{2r}\right) \geq (3r+1)b \log \left(1 + \frac{1}{2r}\right) > b \log \left(3 + \frac{1}{r}\right).$$

г) На мнимой оси согласно (2.24) выполнено $\operatorname{Re} f'(\tau) = 0$. Когда точка τ пробегает луч iy , $y > 0$, углы α, β непрерывно убывают от π до 0. Поэтому функция $\operatorname{Im} f'(\tau) = b(\pi - \beta) + (a+b)\alpha$ принимает все промежуточные значения на интервале $(b\pi, (a+b)\pi)$; в частности, для каждого вещественного λ , $b < \lambda < a+b$, мы получаем по крайней мере одно решение уравнения (2.22), лежащее на мнимой оси.

д) Займемся теперь локализацией комплексных решений (2.22), отвечающих вещественным λ , $0 < |\lambda| < b$.

Проведем в верхней полуплоскости полуокружность с центром в точке $2r+1$ радиуса 2ρ , где $\rho < r$. Для точек $\tau = x + iy$ на этой полуокружности выполнено

$$\begin{aligned} |-\tau + 2r + 1|^2 &= 4\rho^2, \quad |\tau + 2r + 1|^2 = 4\rho^2 + 4(2r+1)x, \\ |\tau - 1|^2 &= 4\rho^2 + 4rx - 4r(r+1), \quad |\tau + 1|^2 = 4\rho^2 + 4(r+1)x - 4r(r+1), \end{aligned} \quad (2.29)$$

значит, ввиду (2.24)

$$2 \operatorname{Re} f'(\tau) = \log \frac{(\rho^2 + (2r+1)x)^b (\rho^2 + rx - r(r+1))^{a+b}}{\rho^{2b} (\rho^2 + (r+1)x - r(r+1))^{a+b}}. \quad (2.30)$$

Обозначим функцию в (2.30) через $\tilde{f}(x)$, $2r+1-2\rho < x < 2r+1+2\rho$; как функция от переменной x она монотонно возрастает, поскольку

$$\begin{aligned} \tilde{f}'(x) &= \frac{b(2r+1)}{\rho^2 + (2r+1)x} + \frac{(a+b)r}{\rho^2 + rx - r(r+1)} - \frac{(a+b)(r+1)}{\rho^2 + (r+1)x - r(r+1)} \\ &= \frac{b(2r+1)}{\rho^2 + (2r+1)x} + \frac{(a+b)(r(r+1) - \rho^2)}{(\rho^2 + rx - r(r+1))(\rho^2 + (r+1)x - r(r+1))} \\ &= \frac{4b(2r+1)}{|\tau + 2r + 1|^2} + \frac{16(a+b)(r(r+1) - \rho^2)}{|\tau - 1|^2 |\tau + 1|^2} > 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\tilde{f}(2r+1-2\rho) < \tilde{f}(x) < \tilde{f}(2r+1+2\rho), \quad x \in (2r+1-2\rho, 2r+1+2\rho), \quad (2.31)$$

и на нашей полуокружности выполнено

$$\operatorname{Re} f'(2r+1-2\rho) < \operatorname{Re} f'(\tau) < \operatorname{Re} f'(2r+1+2\rho+i0). \quad (2.32)$$

Выберем $\rho = (\mu_1 - 2r - 1)/2$, где $\mu_1 \in (2r+1, +\infty)$ – вещественный корень многочлена (2.27) при $\lambda = b$; как было показано выше, $2r+1 < \mu_1 < 4r+1$ в случае $a \geq 3rb$, т.е. условие $\rho < r$ выполняется. Поэтому согласно (2.32) для точек полуокружности имеем

$$\operatorname{Re} f'(\tau) < \operatorname{Re} f'(\mu_1 + i0) = 0. \quad (2.33)$$

Кроме того,

$$\lim_{\tau \rightarrow 2r+1} \operatorname{Re} f'(\tau) = +\infty. \quad (2.34)$$

Выпустим из точки $2r+1$ в верхнюю полуплоскость лучи; на каждом таком луче в области, ограниченной построенной полуокружностью и действительной осью, согласно (2.33) и (2.34) содержится точка τ , в которой $\operatorname{Re} f'(\tau) = 0$. Таким образом, в указанной области заключена часть непрерывно дифференцируемой кривой

$$\operatorname{Re} f'(\tau) = \log \frac{|\tau + 2r + 1|^b |\tau - 1|^{a+b}}{|-\tau + 2r + 1|^b |\tau + 1|^{a+b}} = 0 \quad (2.35)$$

(см. рис. 3, где указанная часть кривой локализована согласно (2.31) между двумя полуокружностями, отвечающими $\rho = (\mu_1 - 2r - 1)/2$ и $\rho = (2r+1 - \mu_0)/2$). Согласно (2.26) значения $\operatorname{Im} f'(\tau)$ на этой кривой при подходе к действительной оси равны 0 (в точке μ_0) и $b\pi$ (в точке μ_1). Следовательно, $\operatorname{Im} f'(\tau)$ принимает на кривой все промежуточные значения между 0 и $b\pi$, т.е. значения $\lambda\pi$, где $0 < \lambda < b$. Тем самым мы указали решения уравнения (2.22) для таких λ ; симметричные относительно мнимой оси точки также являются решениями.

$$0 \quad 1 \quad \mu_0 \quad 2r+1 \quad \mu_1 \quad 4r+1 \quad \operatorname{Re} \tau$$

Рис. 3

Таким образом, мы указали все решения уравнения (2.22) из набора а)–д), и для завершения доказательства необходимо показать, что других решений не существует. Предположим, что это не так, т.е. для некоторого $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ существует еще одно не учтенное в наборе а)–д) решение уравнения (2.22). Как было отмечено, это решение является корнем многочлена (2.27) с $\lambda = \lambda_0$. Покажем, что набор а)–д) содержит корни многочлена (2.27) в количестве, равном его степени, что вступит в противоречие с наличием дополнительного неучтенного решения.

Если число λ_0 не является целым, то имеем a мнимых решений из г), отвечающих $\lambda \equiv \lambda_0 \pmod{2}$, $b < |\lambda| < a+b$, и b пар комплексных решений из д), отвечающих $\lambda \equiv \lambda_0 \pmod{2}$, $|\lambda| < b$. Следовательно, общее количество содержащихся в наборе г), д) корней многочлена (2.27) с $\lambda = \lambda_0$ равно степени многочлена $a + 2b$.

Для целого (как четного, так и нечетного) λ_0 решение уравнения (2.22) с $\lambda = \lambda_0$ одновременно является корнем многочлена

$$(\tau + 2r + 1)^{2b}(\tau - 1)^{2(a+b)} - (\tau - 2r - 1)^{2b}(\tau + 1)^{2(a+b)}. \quad (2.36)$$

Для этого многочлена найдены два вещественных корня $\pm\mu_0$ из а), два вещественных корня $\pm\mu_1$ из б), один вещественный корень 0 из в), $2(a-1)$ мнимых корней из г) и $4(b-1)$ комплексных корней из д); общее количество корней многочлена (2.36), содержащихся в наборе а)–д), равно его степени $2a + 4b - 1$.

Таким образом, любое решение уравнения (2.22) обязательно содержится в наборе а)–д). Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Замена исходного ограничения $a \geq 2rb$ на более сильное $a \geq 3rb$ в лемме 2.7 потребовалось только для локализации корня μ_1 . Поэтому лемма 2.7 остается справедливой и в случае $a \geq 2rb$, если выполнено условие

$$\mu_1^{\operatorname{Im} \tau} \operatorname{Re} f'(\tau) < 0 \quad (2.37)$$

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Множество точек $\tau \in \mathbb{C}$, для которых выполнено (2.35), представляет собой мнимую ось и пару замкнутых кривых, симметричных относительно мнимой оси (см. рис. 4). Указанные кривые делят комплексную плоскость на четыре части, в каждой из которых знак $\operatorname{Re} f'(\tau)$ постоянен.

$$\operatorname{Re} f'(\tau) > 0$$

Рис. 4

СЛЕДСТВИЕ 2.3. Любая полуокружность в верхней полуплоскости с центром в точке $2r + 1$ радиуса ρ , $2r + 1 - \mu_0 < 2\rho < \mu_1 - 2r - 1$, пересекает кривую (2.35) (см. рис. 3) в точности в одной точке.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это утверждение следует из неравенств (2.32) и монотонности функции $\operatorname{Re} f'(\tau)$ на любой такой полуокружности.

ЛЕММА 2.8. Пусть a, b, r, n – целые положительные числа, $a \geq 2rb$, функции $f(\tau), g(\tau)$ определены в (2.12), (2.13) и $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$, $1 < \mu < 2r + 1$, $|\lambda| \leq b$. Тогда контур интегрирования $\operatorname{Re} \tau = \mu$ в интеграле

$$\int_{\mu - i\infty}^{\mu + i\infty} e^{n(f(\tau) - \lambda \pi i \tau)} g(\tau) d\tau \quad (2.38)$$

может быть заменен на любой другой контур $\mathcal{L}$, соединяющий бесконечно удаленные точки в областях $\operatorname{Re} \tau \geq \mu, \operatorname{Im} \tau < 0$ и $\operatorname{Re} \tau \geq \mu, \operatorname{Im} \tau > 0$ и пересекающий действительную ось в единственной точке $\tau = \mu$. В частности, контур $\mathcal{L}$ может проходить по верхнему и (или) нижнему берегу разреза $[2r + 1, +\infty)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого вещественного $N > \mu$ соединим точки исходного контура $\operatorname{Re} \tau = \mu$ и нового контура $\mathcal{L}$ двумя дугами радиуса N с центром в начале координат; соответствующие точки пересечения с контурами обозначим через $M_{\pm}$ и $L_{\pm}$ (см. рис. 5).

Рис. 5

Криволинейные треугольники $\mu L_+ M_+$ и $\mu M_- L_-$ не содержат внутри особых точек подынтегральной функции в (2.38). Поэтому для доказательства леммы достаточно показать, что при $N \rightarrow \infty$

$$\int_{L_+ M_+} e^{n(f(\tau) - \lambda \pi i \tau)} g(\tau) d\tau \rightarrow 0, \quad \int_{M_- L_-} e^{n(f(\tau) - \lambda \pi i \tau)} g(\tau) d\tau \rightarrow 0, \quad (2.39)$$

где $L_+ M_+$ и $M_- L_-$ – дуги окружности радиуса N с центром в начале координат.

На дугах $L_+ M_+$ и $M_- L_-$ окружности $\tau = Ne^{it}$ выполнены неравенства $0 \leq t < \pi/2$ и $-\pi/2 < t \leq 0$ соответственно (значение $t = 0$ принимается на верхнем и нижнем берегах разреза $[2r + 1, +\infty)$). Пользуясь формулой Тейлора, находим

$$\begin{aligned} \log(\tau + 1) &= \log(Ne^{it} + 1) = \log(Ne^{it}) + \log\left(1 + \frac{e^{-it}}{N}\right) \\ &= \log N + it + \frac{e^{-it}}{N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right), \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$\log(\tau - 1) = \log N + it - \frac{e^{-it}}{N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right), \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} \log(\tau + 2r + 1) &= \log(Ne^{it} + 2r + 1) = \log(Ne^{it}) + \log\left(1 + \frac{(2r + 1)e^{-it}}{N}\right) \\ &= \log N + it + \frac{(2r + 1)e^{-it}}{N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right), \end{aligned} \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} \log(-\tau + 2r + 1) &= \mp \pi i + \log(Ne^{it} - (2r + 1)) \\ &= \mp \pi i + \log N + it - \frac{(2r + 1)e^{-it}}{N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right), \end{aligned} \quad (2.43)$$

где знак $-$ (знак $+$) в записи $\mp \pi i$ в (2.43) отвечает дуге $L_+ M_+$ (дуге $M_- L_-$) согласно выбору ветвей логарифма. Постоянная в $O(1/N^2)$ в формулах (2.40)–(2.43) является абсолютной, так как $|e^{-it}| = 1$ для вещественных t . Подставляя найденные разложения в (2.12), получаем

$$\begin{aligned} f(\tau) &= f(Ne^{it}) \\ &= (\log N + it)(b(\tau + 2r + 1) + b(-\tau + 2r + 1) + (a + b)(\tau - 1) - (a + b)(\tau + 1)) \\ &\quad + \frac{e^{-it}}{N}(b(2r + 1)(\tau + 2r + 1) - b(2r + 1)(-\tau + 2r + 1) \\ &\quad - (a + b)(\tau - 1) - (a + b)(\tau + 1)) \\ &\quad \mp \pi i \cdot b(-\tau + 2r + 1) + (a - 2rb)2 \log 2 + O\left(\frac{|\tau|}{N^2}\right) \\ &= -2(a - 2rb)\left(\log \frac{Ne}{2} + it\right) \pm b\pi i(Ne^{it} - 2r - 1) + O\left(\frac{1}{N}\right), \end{aligned}$$

где знак $\pm b\pi$ совпадает со знаком t (и $\sin t$). Следовательно, на дугах $L_+ M_+$ и $M_- L_-$ при $N \rightarrow \infty$ выполнено

$$\operatorname{Re}(f(\tau) - \lambda \pi i \tau) = -2(a - 2rb) \log \frac{Ne}{2} - (b \mp \lambda) \pi N |\sin t| + O\left(\frac{1}{N}\right) \leq \frac{1}{n},$$

где мы воспользовались неравенствами $a \geq 2rb$ и $|\lambda| \leq b$. Таким образом, для всех достаточно больших N справедлива оценка

$$|e^{n(f(\tau) - \lambda \pi i \tau)}| = e^{n \operatorname{Re}(f(\tau) - \lambda \pi i \tau)} \leq e. \quad (2.44)$$

Для функции (2.13) на дугах L_+M_+ и M_-L_- воспользуемся тривиальной оценкой

$$|g(\tau)| = O\left(\frac{N^{b/2} N^{b/2}}{N^{(a+b)/2} N^{(a+b)/2}}\right) = O\left(\frac{1}{N^a}\right) = O\left(\frac{1}{N^2}\right) \quad \text{при } N \rightarrow \infty, \quad (2.45)$$

так как $a \geq 2rb \geq 2$. Поскольку длина каждой из дуг L_+M_+ и M_-L_- не превосходит $\pi N/2$, согласно оценкам (2.44), (2.45) каждый из интегралов в (2.39) имеет порядок $O(1/N)$. Это доказывает предельные соотношения (2.39) и завершает доказательство леммы.

ЛЕММА 2.9. Пусть a, b, r – целые положительные числа, $a \geq 2rb$, функции $f(\tau), g(\tau)$ определены в (2.12), (2.13) и $\lambda \in \mathbb{R}$, $|\lambda| \leq b$. Предположим дополнительно, что вещественные корни $\mu_0 \in (1, 2r+1)$ и $\mu_1 \in (2r+1, +\infty)$ многочлена (2.36) удовлетворяют условию (2.37) и условию

$$\mu_0 + \sqrt{\mu_0^2 - 1} \geq \mu_1. \quad (2.46)$$

Тогда асимптотическое поведение интеграла (2.38) с $\mu = \mu_0$ при $n \rightarrow \infty$ определяется единственной точкой перевала τ_0 – решением уравнения (2.22) – в области $\operatorname{Im} \tau > 0$. Более точно, справедлива асимптотическая формула

$$\begin{aligned} J_{n,\lambda} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mu_0 - i\infty}^{\mu_0 + i\infty} e^{n(f(\tau) - \lambda \pi i \tau)} g(\tau) d\tau \\ &= (2\pi)^{-1/2} |f''(\tau_0)|^{-1/2} e^{n \operatorname{Re} f_0(\tau_0)} |g(\tau_0)| \cdot e^{-\frac{i}{2} \arg f''(\tau_0) + i \arg g(\tau_0) + i n \operatorname{Im} f_0(\tau_0)} \\ &\quad \times n^{-1/2} (1 + O(n^{-1})) \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (2.47)$$

где

$$\begin{aligned} f_0(\tau) &= f(\tau) - f'(\tau)\tau \\ &= b(2r+1) \log(\tau + 2r+1) + b(2r+1) \log(-\tau + 2r+1) \\ &\quad - (a+b) \log(\tau + 1) - (a+b) \log(\tau - 1) + (a - 2rb) 2 \log 2. \end{aligned} \quad (2.48)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ограничимся доказательством леммы для $\lambda \geq 0$, так как все дальнейшие вычисления переносятся на случай $\lambda < 0$ зеркальным отображением относительно вещественной оси.

Согласно лемме 2.8 заменим контур интегрирования в (2.38) с $\mu = \mu_0$ на контур, состоящий из прямолинейных лучей и отрезков. Отметим сразу, что производная функции $\operatorname{Re} f(\tau)$ на каждом таком прямолинейном участке $\tau = \tau_1 + e^{i\varphi} t$, $t \in \mathbb{R}$, задается формулой

$$\frac{d}{dt} \operatorname{Re} f(\tau) = \operatorname{Re} \frac{df(\tau)}{dt} = \operatorname{Re} \left(\frac{d\tau}{dt} \cdot \frac{df(\tau)}{d\tau} \right) = \operatorname{Re} f'(\tau) \cos \varphi - \operatorname{Im} f'(\tau) \sin \varphi. \quad (2.49)$$

Если $\lambda = 0$, то точка μ_0 является единственной точкой максимума функции $\operatorname{Re} f(\tau)$ на прямой $\tau = \mu_0 + it$, $-\infty < t < +\infty$, поскольку

$$\frac{d}{dt} \operatorname{Re} f(\tau) = -\operatorname{Im} f'(\tau)$$

и функция $\operatorname{Im} f'(\tau)$ принимает отрицательные значения в области $\operatorname{Im} \tau < 0$ и положительные – в области $\operatorname{Im} \tau > 0$. Таким образом, в случае $\lambda = 0$ пользуемся исходным контуром $\operatorname{Re} \tau = \mu_0$.

Если $\lambda = b$, то для контура интегрирования в (2.38) с $\mu = \mu_0$ заменим луч, идущий из точки μ_0 в $\mu_0 + i\infty$, на луч, уходящий из μ_0 в $+\infty$ вдоль верхнего берега разреза $[2r + 1, +\infty)$. На участке $\tau = \mu_0 + it$, $-\infty < t \leq 0$, функция

$$\operatorname{Im} \tau \quad \operatorname{Re}(f(\tau) - \lambda \pi i \tau) \quad (2.50)$$

возрастает, поскольку

$$\frac{d}{dt} \operatorname{Re}(f(\tau) - \lambda \pi i \tau) = \operatorname{Re} f'(\tau) - \lambda \pi \quad (2.51)$$

На участке $\tau = t$, $\mu_0 \leq t < +\infty$, функция $\operatorname{Re}(f(\tau) - \lambda \pi i \tau) = \operatorname{Re} f(\tau)$ имеет единственную точку максимума при $t = \mu_1$ согласно лемме 2.7 и следствию 2.2.

Рис. 6

Осталось рассмотреть случай $\lambda \in (0, b)$. Заменим луч от μ_0 к $\mu_0 + i\infty$ на отрезок $\tau = \mu_0 + e^{i\varphi} t$, $0 \leq t \leq \sqrt{\mu_0^2 - 1}$, проходящий через точку перевала τ_0 (единственное решение уравнения (2.22) в области $\operatorname{Re} \tau > 0$) и луч $\tau = e^{i\varphi} \sqrt{\mu_0^2 - 1} + t$, $\mu_0 \leq t < +\infty$. Согласно следствию 2.3 луч $\tau = \mu_0 + e^{i\varphi} t$, $t > 0$, пересекает кривую $\operatorname{Re} f'(\tau) = 0$ в точности в одной точке (именно τ_0) и $0 < \varphi < \pi/2$. Кроме того, согласно условию (2.46) точка τ_0 является внутренней точкой указанного отрезка (см. рис. 6). На луче $\tau = \mu_0 + it$, $t \leq 0$, функция (2.50) возрастает согласно (2.51); на луче $\tau = e^{i\varphi} \sqrt{\mu_0^2 - 1} + t$, $t \geq \mu_0$, функция (2.50) убывает, поскольку

$$\frac{d}{dt} \operatorname{Re}(f(\tau) - \lambda \pi i \tau) = \operatorname{Re}(f'(\tau) - \lambda \pi i) = \operatorname{Re} f'(\tau) < 0$$

согласно следствию 2.2. Таким образом, достаточно показать, что точка τ_0 – единственная точка максимума функции (2.50) на отрезке $\tau = \mu_0 + e^{i\varphi} t$, $0 \leq t \leq t_1$, где $t_1 = \sqrt{\mu_0^2 - 1}$. Пусть t_0 отвечает точке $\tau_0 = \mu_0 + e^{i\varphi} t_0$ на рассматриваемом отрезке. Согласно следствию 2.3 имеем

$$\operatorname{Re} f'(\mu_0 + e^{i\varphi} t) < 0 \quad \text{для } 0 < t < t_0, \quad \operatorname{Re} f'(\mu_0 + e^{i\varphi} t) > 0 \quad \text{для } t_0 < t \leq t_1. \quad (2.52)$$

Покажем, что на рассматриваемом отрезке функция $\operatorname{Im} f'(\tau)$ монотонно возрастает. Для этого снова воспользуемся геометрической интерпретацией (2.26) функции $\operatorname{Im} f'(\tau)$. При возрастании $t \geq 0$ на луче $\tau = \mu_0 + e^{i\varphi} t$ угол β монотонно

$$i \operatorname{ctg} \alpha \quad \alpha$$

$$\alpha$$

70

В. В. ЗУДИЛИН

$$-1 \quad 0 \quad 1 \quad \operatorname{Re} \tau$$

Рис. 7

убывает от π до 0, а угол α сначала возрастает от 0 до некоторого α_0 , а потом убывает от α_0 до 0. Покажем, что максимальное значение α_0 достигается на луче при $t = t_1$, откуда и будет следовать монотонное возрастание функции

$$\operatorname{Im} f'(\tau) = b(\pi - \beta) + (a + b)\alpha$$

на отрезке $\tau = \mu_0 + e^{i\varphi}t$, $0 \leq t \leq t_1$.

Все точки $\tau = x + iy$ в верхней полуплоскости, из которых вещественный отрезок $[-1, 1]$ виден под заданным углом α , располагаются на дуге окружности с центром в точке $i \operatorname{ctg} \alpha$ радиуса $1/\sin \alpha$ (геометрическая интерпретация этого факта для острого угла α приведена на рис. 7):

$$x^2 + y^2 - 2y \operatorname{ctg} \alpha = 1,$$

откуда

$$\alpha = \operatorname{arccctg} \frac{x^2 + y^2 - 1}{2y}.$$

На заданном луче $x = \mu_0 + t \cos \varphi$, $y = t \sin \varphi$ для $t \geq 0$; поэтому

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= - \frac{(2x \cos \varphi + 2y \sin \varphi) \cdot 2y - 2 \sin \varphi \cdot (x^2 + y^2 - 1)}{(x^2 + y^2 - 1)^2 + (2y)^2} \\ &= -2 \sin \varphi \cdot \frac{t^2 - (\mu_0^2 - 1)}{(x^2 + y^2 - 1)^2 + 4y^2}, \end{aligned}$$

так что максимальное значение угол α принимает при $t = \sqrt{\mu_0^2 - 1}$.

Из монотонного возрастания функции $\operatorname{Im} f'(\tau)$ на отрезке $\tau = \mu_0 + e^{i\varphi}t$, $0 \leq t \leq t_1$, следует, что

$$\operatorname{Im} f'(\mu_0 + e^{i\varphi}t) < \lambda\pi \quad \text{для } 0 \leq t < t_0, \quad \operatorname{Im} f'(\mu_0 + e^{i\varphi}t) > \lambda\pi \quad \text{для } t_0 < t \leq t_1. \quad (2.53)$$

Собирая оценки (2.52), (2.53) и пользуясь (2.49), получаем, что функция

$$\frac{d}{dt} \operatorname{Re}(f(\tau) - \lambda\pi i\tau) = \operatorname{Re} f'(\tau) \cos \varphi - (\operatorname{Im} f'(\tau) - \lambda\pi) \sin \varphi$$

на отрезке $\tau = \mu_0 + e^{i\varphi}t$, $0 \leq t \leq t_1$, меняет знак с плюса на минус только при переходе через точку $\tau_0 = \mu_0 + e^{i\varphi}t_0$. Следовательно, точка τ_0 действительно является единственной точкой максимума на отрезке и всем контуре интегрирования, состоящем из этого отрезка и двух лучей.

Для доказательства асимптотической формулы (2.47) выпишем вклад точки перелома τ_0 :

$$(2\pi)^{1/2} e^{\frac{\pi i}{2} - \frac{i}{2} \arg f''(\tau_0)} |f''(\tau_0)|^{-1/2} e^{n(f(\tau_0) - \lambda\pi i\tau_0)} g(\tau_0) n^{-1/2} (1 + O(n^{-1})) \quad (2.54)$$

(см., например, [23, § 5.7, формула (5.7.2)]); при этом

$$\begin{aligned} f''(\tau) &= \frac{b}{\tau + 2r + 1} + \frac{b}{-\tau + 2r + 1} + \frac{a + b}{\tau - 1} - \frac{a + b}{\tau + 1} \\ &= 2 \frac{(a - 2rb)\tau^2 - (2r + 1)(a - 2rb + 2ra)}{(\tau^2 - 1)(\tau^2 - (2r + 1)^2)} \neq 0 \end{aligned}$$

в точках τ , для которых $\operatorname{Re} f'(\tau) = 0$ (и, в частности, в точке τ_0). Пользуясь равенством

$$f(\tau_0) - \lambda \pi i \tau_0 = f(\tau_0) - f'(\tau_0) \tau_0 = f_0(\tau_0)$$

и выделяя в (2.54) модуль и аргумент, получаем (2.47). Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2.4. Пусть выполнены условия леммы 2.9 и, кроме того,

$$-\frac{1}{2} \arg f''(\tau_0) + \arg g(\tau_0) \not\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi \mathbb{Z}} \quad \text{или} \quad \operatorname{Im} f_0(\tau_0) \not\equiv 0 \pmod{\pi \mathbb{Z}}. \quad (2.55)$$

Тогда для интеграла

$$\operatorname{Re} J_{n,\lambda} = \frac{1}{2}(J_{n,\lambda} + J_{n,-\lambda}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mu_0 - i\infty}^{\mu_0 + i\infty} e^{nf(\tau)} \cos(\lambda \pi n \tau) g(\tau) d\tau$$

выполняется предельное соотношение

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |\operatorname{Re} J_{n,\lambda}|}{n} &= \operatorname{Re} f_0(\tau_0) \\ &= \log \frac{2^{2(a-2rb)} |\tau_0 + 2r + 1|^{b(2r+1)} - \tau_0 + 2r + 1|^{b(2r+1)}}{|\tau_0 + 1|^{a+b} |\tau_0 - 1|^{a+b}}. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Более того, в случае

$$-\frac{1}{2} \arg f''(\tau_0) + \arg g(\tau_0) \equiv 0 \pmod{\pi \mathbb{Z}} \quad \text{и} \quad \operatorname{Im} f_0(\tau_0) \equiv 0 \pmod{\pi \mathbb{Z}} \quad (2.57)$$

интеграл $J_{n,\lambda}$ имеет вещественную асимптотику (2.47) и, значит, верхний предел в (2.56) можно заменить на обычный.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие (2.55) обеспечивает ненулевую действительную часть коэффициента при $n^{-1/2}$ в асимптотической формуле (2.47) для бесконечной последовательности номеров n ; именно на этой последовательности и достигается предельное соотношение (2.56). В случае (2.57) главный член в асимптотике (2.47) является вещественным числом, так что соотношение (2.56) с заменой верхнего предела на обычный следует непосредственно из (2.47).

Приступим к формулировке окончательных результатов о величине

$$\varkappa = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |I_n|}{n} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |\tilde{I}_n|}{n} \quad (2.58)$$

(см. лемму 2.5). В случаях $b = 1$ и $b = 2$ результаты принимают простой вид, а верхние пределы в (2.58) меняются на обычные; поэтому мы выделяем эти случаи в отдельные утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть $b = 1$, r положительное целое, $a > 2r$ нечетно и $\mu_1 \in (2r + 1, +\infty)$ – вещественный корень многочлена (2.21). Тогда

$$\varkappa = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |I_n|}{n} = \log \frac{2^{2(a-2r)}(\mu_1 + 2r + 1)^{2r+1}(\mu_1 - 2r - 1)^{2r+1}}{(\mu_1 + 1)^{a+1}(\mu_1 - 1)^{a+1}}. \quad (2.59)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае $b = 1$ на контуре интегрирования для вычисления асимптотики интеграла $J_{n,1}$ в доказательстве леммы 2.9 (луч $\tau = \mu_0 + it$, $t \leq 0$, и луч $\tau = t$, $t \geq \mu_0$, идущий по верхнему берегу разреза $[2r + 1, +\infty)$) точка $\tau = \mu_1$ является единственным максимумом функции $\operatorname{Re} f(\tau)$. Отсюда, в частности, следует, что $f''(\mu_1) < 0$ и, значит,

$$-\frac{1}{2} \arg f''(\mu_1) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi\mathbb{Z}}.$$

Кроме того, при $b = 1$ для функции (2.13) имеем

$$\arg g(\mu_1) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad \operatorname{Im} f_0(\mu_1) = -(2r + 1)\pi.$$

Применяя теперь следствие 2.4 с $\lambda = 1$ и $\tau_0 = \mu_1$, получаем, что выполнено условие (2.57) и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |\operatorname{Re} J_{n,1}|}{n} = \operatorname{Re} f_0(\mu_1),$$

откуда согласно формуле $\tilde{I}_n = -\operatorname{Re} J_{n,1}$ (см. следствие 2.1) и лемме 2.5 получаем предельное соотношение (2.59).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Пусть $b = 2$, r положительное целое, $a \geq 4r$ четно и $\mu_0 \in (1, 2r + 1)$ – вещественный корень многочлена (2.21). Тогда

$$\varkappa = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |I_n|}{n} = \log \frac{2^{2(a-4r)}(\mu_0 + 2r + 1)^{2(2r+1)}(-\mu_0 + 2r + 1)^{2(2r+1)}}{(\mu_0 + 1)^{a+2}(\mu_0 - 1)^{a+2}}. \quad (2.60)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае $b = 2$ имеем $\tilde{I}_n = -J_{n,0}$, а точка $\tau = \mu_0$ является единственным максимумом на контуре интегрирования $\tau = \mu_0 + it$, $t \in \mathbb{R}$, для вычисления асимптотики интеграла $J_{n,0}$ в доказательстве леммы 2.9. Поэтому $f''(\mu_0) > 0$ и, значит,

$$-\frac{1}{2} \arg f''(\mu_0) \equiv 0 \pmod{\pi\mathbb{Z}}.$$

Как легко заметить,

$$\arg g(\mu_1) = 0, \quad \operatorname{Im} f_0(\mu_1) = 0.$$

Применяя теперь следствие 2.4 с $\lambda = 0$ и $\tau_0 = \mu_0$, получаем, что выполнено условие (2.57) и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |J_{n,0}|}{n} = \operatorname{Re} f_0(\mu_0) = f_0(\mu_0),$$

откуда согласно лемме 2.5 получаем предельное соотношение (2.60).

ЛЕММА 2.10. Пусть вещественный корень $\mu_1 \in (2r + 1, +\infty)$ многочлена (2.21) удовлетворяет неравенству

$$\mu_1 \leq 2r + 1 + \min \left\{ \frac{br(r+1)}{2(a+b)}, \frac{r(r+1)}{3(2r+1)} \right\}. \quad (2.61)$$

Тогда в области $\operatorname{Re} \tau > 0$, $\operatorname{Im} \tau \geq 0$ на кривой (2.35) функция $\operatorname{Re} f_0(\tau)$ возрастает как функция от $\operatorname{Re} \tau$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как было показано в доказательстве леммы 2.7 (см. также следствие 2.3), на гладкой кривой (2.35) в области $\operatorname{Re} \tau > 0$, $\operatorname{Im} \tau \geq 0$ величина $\rho = |\tau - (2r + 1)|/2$, $\tau = x + iy$, может быть представлена как неявно заданная функция от x , $\mu_0 \leq x \leq \mu_1$, которая непрерывно дифференцируема и возрастает. Пользуясь формулами (2.29), (2.30), на кривой (2.35) после дифференцирования по x получаем

$$\begin{aligned} 2\rho\rho' & \left(\frac{b}{\rho^2 + (2r+1)x} - \frac{b}{\rho^2} + \frac{a+b}{\rho^2 + rx - r(r+1)} - \frac{a+b}{\rho^2 + (r+1)x - r(r+1)} \right) \\ & + \left(\frac{b(2r+1)}{\rho^2 + (2r+1)x} + \frac{(a+b)r}{\rho^2 + rx - r(r+1)} - \frac{(a+b)(r+1)}{\rho^2 + (r+1)x - r(r+1)} \right) = 0 \end{aligned}$$

или после несложных преобразований

$$2\rho\rho'x \left(\frac{b(2r+1)}{|\tau \pm (2r+1)|^2} - \frac{a+b}{|\tau \pm 1|^2} \right) = \frac{b(2r+1)\rho^2}{|\tau \pm (2r+1)|^2} + \frac{(a+b)(r(r+1) - \rho^2)}{|\tau \pm 1|^2}. \quad (2.62)$$

Таким образом, на кривой (2.35) функцию $\operatorname{Re} f_0(\tau)$ можно рассматривать как функцию от x , $\mu_0 \leq x \leq \mu_1$; в соответствии с формулами (2.29)

$$\tilde{f}_0(x) := 2 \operatorname{Re} f_0(\tau) = \log \frac{\rho^{2b(2r+1)}(\rho^2 + (2r+1)x)^{b(2r+1)}}{(\rho^2 + rx - r(r+1))^{a+b}(\rho^2 + (r+1)x - r(r+1))^{a+b}},$$

откуда с помощью (2.29) и (2.62) находим

$$\begin{aligned} \tilde{f}_0'(x) & = 2\rho\rho' \left(\frac{b(2r+1)}{\rho^2} + \frac{b(2r+1)}{\rho^2 + (2r+1)x} \right. \\ & \quad \left. - \frac{a+b}{\rho^2 + rx - r(r+1)} - \frac{a+b}{\rho^2 + (r+1)x - r(r+1)} \right) \\ & + \left(\frac{b(2r+1)^2}{\rho^2 + (2r+1)x} - \frac{(a+b)r}{\rho^2 + rx - r(r+1)} - \frac{(a+b)(r+1)}{\rho^2 + (r+1)x - r(r+1)} \right) \\ & = 32\rho\rho'(2\rho^2 + (2r+1)x) \left(\frac{b(2r+1)}{|\tau \pm (2r+1)|^2} - \frac{a+b}{|\tau \pm 1|^2} \right) \\ & + 16(2r+1) \left(\frac{b(2r+1)\rho^2}{|\tau \pm (2r+1)|^2} + \frac{(a+b)(r(r+1) - \rho^2)}{|\tau \pm 1|^2} \right) \\ & + \frac{64\rho\rho'(a+b)r(r+1)}{|\tau \pm 1|^2} - \frac{32(a+b)r(r+1)x}{|\tau \pm 1|^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{32(\rho^2 + (2r+1)x)}{x} \left(\frac{b(2r+1)\rho^2}{|\tau \pm (2r+1)|^2} + \frac{(a+b)(r(r+1) - \rho^2)}{|\tau \pm 1|^2} \right) \\
&+ \frac{32(a+b)r(r+1)}{|\tau \pm 1|^2} (2\rho\rho' - x). \tag{2.63}
\end{aligned}$$

На кривой (2.35) функция $\rho = \rho(x)$ возрастает, так что $\rho' \geq 0$. Следовательно, продолжая цепочку (2.63), получаем

$$\begin{aligned}
\tilde{f}'_0(x) &\geq \frac{32(\rho^2 + (2r+1)x)}{x} \frac{b(2r+1)\rho^2}{|\tau \pm (2r+1)|^2} + 32(2r+1) \frac{(a+b)(r(r+1) - \rho^2)}{|\tau \pm 1|^2} \\
&- \frac{32(a+b)r(r+1)x}{|\tau \pm 1|^2} \\
&= \frac{2b(2r+1)}{x} - \frac{2(a+b)((2r+1)\rho^2 + r(r+1)x - r(r+1)(2r+1))}{(\rho^2 + rx - r(r+1))(\rho^2 + (r+1)x - r(r+1))}.
\end{aligned}$$

Выберем

$$\varepsilon = \min \left\{ \frac{br(r+1)}{2(a+b)}, \frac{r(r+1)}{3(2r+1)} \right\}; \tag{2.64}$$

по условию $\varepsilon \geq \mu_1 - 2r - 1$. Согласно локализации кривой (2.35) (см. следствие 2.3) имеем

$$2r+1-\varepsilon \leq x \leq 2r+1+\varepsilon, \quad 0 < \rho \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

откуда

$$\begin{aligned}
\tilde{f}'_0(x) &> \frac{2b(2r+1)}{2r+1+\varepsilon} - \frac{2(a+b)((2r+1)\varepsilon/4 + r(r+1)\varepsilon)}{r(r+1)(r-\varepsilon)(r+1-\varepsilon)} \\
&> 2(2r+1) \left(\frac{b}{2r+1+\varepsilon} - \frac{(a+b)(2r+1+\varepsilon)\varepsilon}{4r(r+1)(r-\varepsilon)(r+1-\varepsilon)} \right) \\
&= 2(2r+1) \cdot \frac{4br(r+1)(r-\varepsilon)(r+1-\varepsilon) - \varepsilon(a+b)(2r+1+\varepsilon)^2}{4r(r+1)(r-\varepsilon)(r+1-\varepsilon)(2r+1+\varepsilon)}. \tag{2.65}
\end{aligned}$$

Пользуясь теперь неравенствами

$$\begin{aligned}
br(r+1) &\geq \frac{\varepsilon}{2}(a+b), & \text{если } \varepsilon &\leq \frac{br(r+1)}{2(a+b)}, \\
8(r-\varepsilon)(r+1-\varepsilon) &> (2r+1+\varepsilon)^2, & \text{если } \varepsilon &\leq \frac{r(r+1)}{3(2r+1)},
\end{aligned}$$

из (2.64), (2.65) окончательно заключаем, что $\tilde{f}'_0(x) > 0$. Это означает, что функция $\operatorname{Re} f_0(\tau)$ как функция от $x = \operatorname{Re} \tau$ возрастает на кривой (2.35), что и требовалось доказать.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Пусть a, b, r – целые положительные числа, $a + b$ четно, $b \geq 3$, $a \geq 2rb$, и вещественный корень $\mu_1 \in (2r + 1, +\infty)$ многочлена (2.21) удовлетворяют условию (2.61). Положим

$$\varkappa := \log \frac{2^{2(a-2rb)} |\tau_0 + 2r + 1|^{b(2r+1)} - \tau_0 + 2r + 1|^{b(2r+1)}}{|\tau_0 + 1|^{a+b} |\tau_0 - 1|^{a+b}},$$

где τ_0 – комплексный корень многочлена (2.21) в области $\operatorname{Re} \tau > 0$, $\operatorname{Im} \tau > 0$ с максимально возможной частью $\operatorname{Re} \tau_0$. Пусть, кроме того, выполнено условие (2.55). Тогда

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |I_n|}{n} = \varkappa. \quad (2.66)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (2.61) имеем $\mu_1 - (2r + 1) < r/3$, так что условия (2.37), (2.46) выполнены. По лемме 2.10 наибольшее значение функции $\operatorname{Re} f_0(\tau)$ на корнях многочлена (2.21) достигается при $\tau = \tau_0$, для которого $\lambda = k = b - 2$. Согласно следствию 2.4 асимптотика интеграла (2.20) определяется вкладом величины $\operatorname{Re} J_{n,b-2}$, так как вклады остальных величин экспоненциально малы по сравнению с $\operatorname{Re} J_{n,b-2}$, а коэффициент c_{b-2} в представлении (2.20) ненулевой в соответствии с утверждением б) леммы 2.2. Следовательно,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |\tilde{I}_n|}{n} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |\operatorname{Re} J_{n,b-2}|}{n} = \varkappa.$$

Применяя теперь лемму 2.5, получаем требуемое предельное соотношение (2.66).

§ 3. Оценки коэффициентов линейных форм

Первым результатом будет верхняя оценка для коэффициентов линейных форм.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть a, b, r – целые положительные числа, $a + b$ четно, $a \geq 2rb$, линейные формы (1.5) определяются соотношениями (1.2), (1.1). Тогда для коэффициентов $\bar{A}_s$, $s = 0$ или $s = b + 1, \dots, a + b - 1$, справедлива оценка

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |\bar{A}_s|}{n} \leq 2b(2r + 1) \log(2r + 1) + 2(a - 2rb) \log 2, \quad (3.1)$$

$s = 0$ или $s = b + 1, \dots, a + b - 1$ нечетно.

Более того, в случае четного a оценка (3.1) точна:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |\bar{A}_s|}{n} = 2b(2r + 1) \log(2r + 1) + 2(a - 2rb) \log 2, \quad (3.2)$$

$s = b + 1, \dots, a + b - 1$ нечетно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся разложением (1.6), в котором коэффициенты могут быть вычислены с помощью формул

$$A_{k,j} = \frac{1}{(a-j)!} \frac{d^{a-j}}{dt^{a-j}} (R(t)(t+k)^a) \Big|_{t=-k}, \quad k = 0, \pm 1, \dots, \pm n, \quad j = 1, 2, \dots, a.$$

Прежде всего докажем, что

$$\max_{k=0, \pm 1, \dots, \pm n} |A_{k,a}| = |A_{0,a}| = \frac{((2r+1)n)!^{2b} (2n)!^{a-2rb}}{n!^{2(a+b)}}. \quad (3.3)$$

Поскольку $|A_{k,a}| = |A_{-k,a}|$ для $k = 0, 1, \dots, n$, достаточно показать, что величина $|A_{k,a}|$ убывает с ростом k от 0 до n . Последнее утверждение проверяется непосредственно:

$$\begin{aligned} \frac{|A_{k,a}|}{|A_{k-1,a}|} &= \frac{((2r+1)n+k)^b}{((2r+1)n-k+1)^b} \cdot \frac{(n-k+1)^{a+b}}{(n+k)^{a+b}} \\ &= \left(\frac{((2r+1)n+k) \cdot (n-k+1)}{((2r+1)n-k+1) \cdot (n+k)} \right)^b \cdot \left(\frac{n-k+1}{n+k} \right)^{a+b} \\ &= \left(\frac{(2r+1)n^2 - k(k-1) + n(-2rk+2r+1)}{(2r+1)n^2 - k(k-1) + n(2rk+1)} \right)^b \cdot \left(\frac{n-(k-1)}{n+k} \right)^{a+b} \\ &< 1, \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Зафиксируем теперь целое k , $|k| \leq n$, и обозначим через $g_k(t)$ логарифмическую производную функции $R(t)(t+k)^a$:

$$g_k(t) = b \sum_{\substack{l=-(2r+1)n \\ l \neq k}}^{(2r+1)n} \frac{1}{t+l} - (a+b) \sum_{\substack{l=-n \\ l \neq k}}^n \frac{1}{t+l}.$$

Тогда для $j = 0, 1, 2, \dots$ модуль величины

$$\begin{aligned} \frac{1}{j!} \frac{d^j g_k(t)}{dt^j} \Big|_{t=-k} &= b \sum_{l=-(2r+1)n}^{-(n+1)} \frac{(-1)^j}{(l-k)^{j+1}} + b \sum_{l=n+1}^{(2r+1)n} \frac{(-1)^j}{(l-k)^{j+1}} \\ &\quad - a \sum_{\substack{l=-n \\ l \neq k}}^n \frac{(-1)^j}{(l-k)^{j+1}} \end{aligned}$$

ограничен сверху числом $2(2rb+a)n$ (каждое слагаемое в правой части тривиально оцениваем единицей). Применяя правило Лейбница для дифференцирования произведения, находим

$$\begin{aligned} A_{k,a-j} &= \frac{1}{j!} \frac{d^{j-1}}{dt^{j-1}} (g_k(t) \cdot R(t)(t+k)^a) \Big|_{t=-k} \\ &= \frac{1}{j} \sum_{m=0}^{j-1} \frac{1}{(j-1-m)!} \frac{d^{j-1-m} g_k(t)}{dt^{j-1-m}} \Big|_{t=-k} \cdot A_{k,a-m}, \quad j = 1, \dots, a-1, \end{aligned} \quad (3.4)$$

откуда

$$\begin{aligned} |A_{k,a-j}| &\leqslant 2(2rb+a)n \cdot \frac{1}{j} \sum_{m=0}^{j-1} |A_{k,a-m}| \\ &\leqslant 2(2rb+a)n \cdot \max_{m=0,1,\dots,j-1} |A_{k,a-m}|, \quad j = 1, \dots, a-1. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Пользуясь методом математической индукции, из (3.5) получаем оценку

$$|A_{k,a-j}| \leqslant (2(2rb+a)n)^{j-1} |A_{k,a}|, \quad j = 1, \dots, a.$$

Следовательно, в соответствии с (3.3) выполнено

$$\begin{aligned} |A_{k,a-j}| &\leqslant (2(2rb+a)n)^{a-1} \frac{((2r+1)n)!^{2b} (2n)!^{a-2rb}}{n!^{2(a+b)}}, \\ k &= 0, \pm 1, \dots, \pm n, \quad j = 1, \dots, a, \end{aligned}$$

откуда согласно (1.11), (1.12)

$$\begin{aligned} |\bar{A}_s| &\leqslant 2^{a+b-2} (2n+1)^2 (2(2rb+a)n)^{a-1} \frac{((2r+1)n)!^{2b} (2n)!^{a-2rb}}{n!^{2(a+b)}}, \\ s &= 0 \text{ или } s = b+1, \dots, a+b-1. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Предельные соотношения (3.1) получаются из (3.6) с помощью формулы Стирлинга (2.17) для значений $\Gamma(z) = (z-1)!$ при целых положительных значениях $z \rightarrow \infty$.

Если параметр a является четным числом, то для четных j , $0 \leqslant j < a$, из соотношений (3.4) при $k = 0$ получаем $|A_{0,a-j}| \geqslant |A_{0,a}|$; кроме того, в случае четного a и нечетного s , $b < s < a+b$, все слагаемые в правой части (1.11) имеют одинаковый знак, значит,

$$|\bar{A}_s| \geqslant |A_{0,a}|, \quad s = b+1, \dots, a+b-1 \text{ нечетно.}$$

Таким образом, при четном a применение формулы Стирлинга дает оценку асимптотики коэффициентов линейных форм (1.5) не только сверху, но и снизу. Это доказывает предельные соотношения (3.2) и завершает доказательство предложения.

Оценка (3.1) оказывается пригодной даже для нечетных значений параметра a . Однако результаты, полученные в §2, позволяют вычислить асимптотику коэффициентов (1.11) и для нечетного a ; именно этому и посвящена оставшаяся часть этого параграфа.

Для целого положительного m в окрестности точки $t = 0$ справедливо разложение

$$\left(\frac{\sin \pi t}{\pi} \right)^{2m} = \sum_{l=m}^{\infty} d_l^{(m)} t^{2l}, \quad (3.7)$$

где $d_l^{(m)}$, $l = m, m+1, \dots$, — некоторые вещественные числа, причем $d_m^{(m)} = 1$.

ЛЕММА 3.1. Пусть a нечетно. Тогда коэффициенты линейной формы (1.5) удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$\begin{aligned} \bar{A}_{2m+b} = & -\frac{(2m+b-1)!}{(2m)!(b-1)!} \frac{(-1)^b}{\pi i} \int_{iM-\infty}^{iM+\infty} \left(\frac{\sin \pi t}{\pi} \right)^{2m} R(t) dt \\ & - \sum_{l=m+1}^{(a-1)/2} \frac{(2l)!(2m+b-1)!}{(2m)!(2l+b-1)!} d_l^{(m)} \bar{A}_{2l+b}, \quad m = 1, 2, \dots, \frac{a-1}{2}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где $M > 0$ – произвольная вещественная постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для целого положительного m согласно (3.7)

$$\left(\frac{\sin \pi t}{\pi} \right)^{2m} = \left(\frac{\sin \pi(t+k)}{\pi} \right)^{2m} = \sum_{l=m}^{\infty} d_l^{(m)} (t+k)^{2l}$$

– разложение в окрестности точки $t = -k \in \mathbb{Z}$.

Для функции (1.1) ввиду (1.6) в окрестности точки $t = -k$, где $k = 0, \pm 1, \dots, \pm n$, имеем

$$R(t) = \frac{A_{k,a}}{(t+k)^a} + \frac{A_{k,a-1}}{(t+k)^{a-1}} + \dots + \frac{A_{k,1}}{t+k} + O(1)$$

и $R(t) = O(1)$ в окрестности $t = -k \in \mathbb{Z}$, $|k| > n$. Следовательно, для $m < a/2$ и любого целого k выполнено

$$\operatorname{Res}_{t=-k} \left(\left(\frac{\sin \pi t}{\pi} \right)^{2m} R(t) \right) = \begin{cases} 0, & \text{если } |k| > n, \\ \sum_{l=m}^{(a-1)/2} d_l^{(m)} A_{k,2l+1}, & \text{если } |k| \leq n. \end{cases}$$

Поэтому если замкнутый контур $\mathcal{L}$ обходит в положительном направлении точки $0, \pm 1, \dots, \pm n$, то

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{L}} \left(\frac{\sin \pi t}{\pi} \right)^{2m} R(t) dt &= (-1)^{b-1} \sum_{l=m}^{(a-1)/2} \frac{(2l)!(b-1)!}{(2l+b-1)!} d_l^{(m)} \bar{A}_{2l+b} \\ &= (-1)^{b-1} \left(\frac{(2m)!(b-1)!}{(2m+b-1)!} \bar{A}_{2m+b} + \sum_{l=m+1}^{(a-1)/2} \frac{(2l)!(b-1)!}{(2l+b-1)!} d_l^{(m)} \bar{A}_{2l+b} \right) \end{aligned} \quad (3.9)$$

в соответствии с формулами (1.11) и соотношением $d_m^{(m)} = 1$. Из (3.9) получаем рекуррентные формулы

$$\begin{aligned} \bar{A}_{2m+b} = & \frac{(2m+b-1)!}{(2m)!(b-1)!} \frac{(-1)^b}{2\pi i} \oint_{\mathcal{L}} \left(\frac{\sin \pi t}{\pi} \right)^{2m} R(t) dt \\ & - \sum_{l=m+1}^{(a-1)/2} \frac{(2l)!(2m+b-1)!}{(2m)!(2l+b-1)!} d_l^{(m)} \bar{A}_{2l+b}, \quad m = 1, 2, \dots, \frac{\operatorname{Re} t}{2}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

$-N - iM$ $N - iM$

Рис. 8

Выберем теперь в качестве контура интегрирования $\mathcal{L}$ прямоугольник с вершинами $\pm N \pm iM$, где $M > 0$ – фиксированная вещественная постоянная, а $N > n$ достаточно велико (см. рис. 8). При $N \rightarrow \infty$ на боковых сторонах прямоугольника выполнены оценки

$$\left| \frac{\sin \pi t}{\pi} \right| \leq \frac{e^{\pi M}}{\pi}, \quad R(t) = O(N^{-2}),$$

поэтому для $m = 1, 2, \dots, (a-1)/2$ имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{L}} \left(\frac{\sin \pi t}{\pi} \right)^{2m} R(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{iM+N}^{iM-\infty} + \int_{-iM-N}^{-iM-\infty} \right) \left(\frac{\sin \pi t}{\pi} \right)^{2m} R(t) dt + O(N^{-1}) \quad \text{при } N \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (3.11)$$

где постоянная в $O(N^{-1})$ зависит только от M . Ввиду нечетности подынтегральной функции в (3.11) (см. (1.8)) и симметричности контура $\mathcal{L}$ относительно 0 достаточно провести интегрирование по одной половине контура, а затем удвоить полученный результат. Переходя теперь к пределу при $N \rightarrow \infty$, из соотношений (3.10) получаем требуемые рекуррентные формулы (3.8). Лемма доказана.

Как следует из леммы 3.1, асимптотическое поведение коэффициентов линейной формы (1.5) напрямую связано с асимптотикой интегралов

$$\begin{aligned} K_{n,m} &= \frac{1}{\pi i} \int_{iM-\infty}^{iM+\infty} \left(\frac{\sin \pi t}{\pi} \right)^{2m} R_n(t) dt \\ &= \frac{(-1)^{bn}}{\pi i} \int_{iM-\infty}^{iM+\infty} \left(\frac{\sin \pi t}{\pi} \right)^{2m+b} \\ &\quad \times \frac{\Gamma(\pm t + (2r+1)n+1)^b \Gamma(t-n)^{a+b} (2n)!^{a-2rb}}{\Gamma(t+n+1)^{a+b}} dt, \quad m = 1, 2, \dots, \frac{a-1}{2}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

при $n \rightarrow \infty$, где мы воспользовались формулой (2.15). Так же, как и в § 2, считаем, что в t -плоскости сделаны разрезы $(-\infty, n]$ и $[(2r+1)n, +\infty)$.

ЛЕММА 3.2 (ср. с [23, §6.5]). *Для любого $y_0 > 0$ в области $\operatorname{Im} z \geq y_0$ выполнено асимптотическое равенство*

$$\log \Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2} \right) \log z - z + \log \sqrt{2\pi} + O(|z|^{-1}) + O(e^{-2\pi \operatorname{Im} z}). \quad (3.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Асимптотическое соотношение (2.17) справедливо в области $|\arg z| < \pi - \varepsilon$, но тождество

$$\Gamma(z)\Gamma(-z) = -\frac{\pi}{z \sin \pi z} = \frac{2\pi i}{ze^{-\pi iz}(1 - e^{2\pi iz})} \quad (3.14)$$

позволяет выписать асимптотику и в квадранте $\operatorname{Im} z > 0$, $\operatorname{Re} z < 0$. Делая в z -плоскости разрез $(-\infty, 0]$ и фиксируя главные значения аргумента, согласно (2.17), (3.14) в указанном квадранте имеем

$$\begin{aligned} \log \Gamma(z) &= \log(2\pi i) - \log z + \pi i z - \log(1 - e^{2\pi i z}) - \log \Gamma(-z) \\ &= \left(\log(2\pi) + \pi i \left(z + \frac{1}{2} \right) - \log z - \log(1 - e^{2\pi i z}) \right) \\ &\quad - \left(\left(-z - \frac{1}{2} \right) (\log z - \pi i) + z + \log \sqrt{2\pi} + O(|z|^{-1}) \right) \\ &= \left(z - \frac{1}{2} \right) \log z - z + \log \sqrt{2\pi} + O(|z|^{-1}) + \log(1 - e^{2\pi i z}). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Остается заметить, что в области $\operatorname{Im} z \geq y_0$ выполнено $|e^{-2\pi i z}| \leq u_0 := e^{-2\pi y_0} < 1$, так что для завершения доказательства формулы (3.13) остается воспользоваться в (3.15) соотношением $|\ln(1 - u)| \leq C|u|$ для $|u| \leq u_0$ с некоторой постоянной C , зависящей только от u_0 .

ЛЕММА 3.3. Пусть μ – положительная вещественная постоянная. Тогда при $n \rightarrow \infty$ для интегралов (3.12) выполнено

$$K_{n,m} = \tilde{K}_{n,m} \cdot \frac{(-1)^{bn} (2\sqrt{\pi n})^{a-2rb} 2^b}{\pi^{2m} n^{a-1}} \cdot (1 + O(n^{-1}) + O(e^{-2\pi n \mu})),$$

где

$$\tilde{K}_{n,m} = \frac{1}{\pi i} \int_{i\mu-\infty}^{i\mu+\infty} \sin^{2m+b} \pi n \tau \cdot e^{nf(\tau)} g(\tau) d\tau, \quad m = 1, 2, \dots, \frac{a-1}{2}, \quad (3.16)$$

а функции $f(\tau), g(\tau)$ определены равенствами (2.12), (2.13) (см. также замечание 2.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство полностью повторяет доказательство леммы 2.5 с заменой асимптотики (2.17) на (3.13) для интегрирования по контуру $\operatorname{Im} t = M = \mu n$, $\mu > 0$.

ЛЕММА 3.4. Пусть вещественный корень $\mu_1 \in (2r+1, +\infty)$ многочлена (2.21) удовлетворяет условию (2.61), а минимальный по абсолютной величине мнимый корень $\eta_1 \in (0, +i\infty)$ – условию

$$|\eta_1| < \min \left\{ \sqrt{3}, \frac{\log(r^2 + r)}{\pi} \right\}. \quad (3.17)$$

Тогда при $n \rightarrow \infty$ для интегралов (3.16) выполнено

$$\begin{aligned} |\tilde{K}_{n,(a-1)/2}| &= \frac{|g(\eta_1)|}{|f''(\eta_1)|^{1/2} 2^{a+b-1/2} \pi^{1/2} n^{1/2}} e^{n \operatorname{Re} f_0(\eta_1)} (1 + O(n^{-1})), \\ |\tilde{K}_{n,m}| &= |\tilde{K}_{n,(a-1)/2}| \cdot O(e^{-2\pi n \mu}), \quad m = 1, 2, \dots, \frac{a-1}{2} - 1, \end{aligned} \quad (3.18)$$

где постоянная μ определена равенством $i\mu = \eta_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 2.7 корню $i\mu = \eta_1$ многочлена (2.21) отвечает $\lambda = a + b - 1$ в уравнении (2.22).

Воспользуемся равенством

$$\begin{aligned} \sin^{2m+b} \pi n \tau &= \left(\frac{e^{\pi i n \tau} - e^{-\pi i n \tau}}{2i} \right)^{2m+b} \\ &= \chi_m \frac{(-1)^{(a+b)/2}}{2^{a+b-1} i} e^{-\pi i (a+b-1) n \tau} + \sum_{l=1}^{a+b-1} h_{m,l} i e^{-\pi i (a+b-2l-1) n \tau}, \\ m &= 1, 2, \dots, \frac{a-1}{2}, \end{aligned}$$

где

$$\chi_m = \begin{cases} 1, & \text{если } m = \frac{a-1}{2}, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

а $h_{m,l}$, $m = 1, \dots, (a-1)/2$, $l = 1, \dots, a+b-1$, — некоторые вещественные коэффициенты, и запишем интегралы (3.16) в виде

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{n,m} &= -\chi_m \frac{(-1)^{(a+b)/2}}{2^{a+b-1} \pi} J_{n,a+b-1} + \frac{1}{\pi} \sum_{l=1}^{a+b-1} h_{m,l} J_{n,a+b-2l-1}, \\ m &= 1, 2, \dots, \frac{a-1}{2}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

где

$$J_{n,k} = \int_{i\mu-\infty}^{i\mu+\infty} e^{n(f(\tau)-k\pi i\tau)} g(\tau) d\tau, \quad k = 0, \pm 1, \dots, \pm(a+b-1). \quad (3.20)$$

Изучим сначала асимптотику интеграла $J_{n,a+b-1}$. Для этого заметим, что путь интегрирования проходит через точку перевала $\eta_1 = i\mu$, и докажем, что точка $x = 0$ является максимумом функции

$$\tilde{f}(x) = \operatorname{Re}(f(\tau) - (a+b-1)\pi i\tau) \Big|_{\tau=x+i\mu}. \quad (3.21)$$

Имеем

$$\tilde{f}'(x) = \operatorname{Re}(f'(\tau) - (a+b-1)\pi i) \Big|_{\tau=x+i\mu} = \operatorname{Re} f'(x+i\mu)$$

и, значит, единственными кандидатами в точки максимума функции (3.21), кроме $x = 0$, являются $x = \pm x_0$, где $x_0 + i\mu$ — та точка пересечения луча $\tau = x + i\mu$, $x > 0$, с кривой $\operatorname{Re} f'(\tau) = 0$ в области $\operatorname{Re} \tau > 0$ (см. рис. 4), в которой $\operatorname{Re} f'(\tau)$ меняет знак с $+$ на $-$ (если таковая существует). С другой стороны,

$$f(\tau) - (a+b-1)\pi i\tau = f_0(\tau) + f'(\tau)\tau - (a+b-1)\pi i\tau$$

для функции $f_0(\tau)$, определенной в (2.48); поэтому

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\pm x_0) &= \tilde{f}(x_0) = \operatorname{Re} f_0(x_0 + i\mu) - \mu \operatorname{Im} f'(x_0 + i\mu) + (a+b-1)\pi\mu \\ &< \operatorname{Re} f_0(\mu_1) + (a+b-1)\pi\mu \end{aligned} \quad (3.22)$$

согласно лемме 2.10 и неравенству $\operatorname{Im} f'(x_0 + i\mu) > 0$. Для оценки сверху величины $\operatorname{Re} f_0(\mu_1)$ воспользуемся неравенством

$$2r + 1 < \mu_1 \leq 2r + 1 + 2\varepsilon, \quad \varepsilon := \frac{r(r+1)}{6(2r+1)}, \quad (3.23)$$

вытекающим из (2.61). Тогда

$\operatorname{Re} f_0(\mu_1) < b(2r+1) \log((2r+1+\varepsilon)\varepsilon) - (a+b) \log((r+1)r) < -(a-2rb) \log(r^2+r)$, поскольку $(2r+1+\varepsilon)\varepsilon < r(r+1)$ согласно (3.23). Продолжая оценку (3.22) и пользуясь неравенством (3.17), получим

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\pm x_0) &< -(a-2rb) \log(r^2+r) + (a+b)\pi\mu \\ &\leq -(a-2rb) \log(r^2+r) + (a+b) \log(r^2+r) \\ &= b(2r+1) \log(r^2+r). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Теперь, чтобы оценить значение $\tilde{f}(0)$ снизу, применим неравенства

$$|i\mu \pm (2r+1)| > 2r+1, \quad |i\mu \pm 1| \leq |i\sqrt{3} \pm 1| = 2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{f}(0) = \operatorname{Re} f_0(i\mu) &> 2(a-2rb) \log 2 + 2b(2r+1) \log(2r+1) - 2(a+b) \log 2 \\ &= 2b(2r+1) \log\left(r + \frac{1}{2}\right) > b(2r+1) \log(r^2+r). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Сравнивая оценки (3.24), (3.25), получаем, что $\tilde{f}(0) > \tilde{f}(\pm x_0)$, так что точка пересечения $\tau = i\mu$ действительно является максимумом функции $\operatorname{Re}(f(\tau) - (a+b-1)\pi i\tau)$ на контуре $\operatorname{Im} \tau = \mu$. Поэтому интеграл $J_{n,a+b-1}$ равен вкладу точки пересечения $i\mu = \eta_1$:

$$\begin{aligned} J_{n,a+b-1} &= \frac{(2\pi)^{1/2} g(\eta_1)}{|f''(\eta_1)|^{1/2} n^{1/2}} e^{n \operatorname{Re}(f(\eta_1) - (a+b-1)\pi i\eta_1)} (1 + O(n^{-1})) \\ &= \frac{(2\pi)^{1/2} g(\eta_1)}{|f''(\eta_1)|^{1/2} n^{1/2}} e^{n \operatorname{Re} f_0(\eta_1)} (1 + O(n^{-1})), \end{aligned} \quad (3.26)$$

и аналогичная оценка справедлива для интеграла от модуля подынтегральной функции:

$$\int_{i\mu-\infty}^{i\mu+\infty} |e^{n(f(\tau) - (a+b-1)\pi i\tau)} g(\tau)| d\tau = \frac{(2\pi)^{1/2} |g(\eta_1)|}{|f''(\eta_1)|^{1/2} n^{1/2}} e^{n \operatorname{Re} f_0(\eta_1)} (1 + O(n^{-1})). \quad (3.27)$$

Для интегралов (3.20) с $k < a+b-1$ воспользуемся на контуре $\operatorname{Im} \tau = \mu$ соотношением

$$|e^{n(f(\tau) - k\pi i\tau)} g(\tau)| = |e^{n(f(\tau) - (a+b-1)\pi i\tau)} g(\tau)| \cdot e^{-(a+b-1-k)n\mu},$$

откуда в соответствии с (3.27), (3.26)

$$|J_{n,k}| \leq C e^{-(a+b-1-k)n\mu} |J_{n,a+b-1}|, \quad k = 0, \pm 1, \dots, \pm(a+b-1), \quad (3.28)$$

с некоторой постоянной $C > 0$, не зависящей от n, k . (Неравенство (3.28) получается при интегрировании вдоль конечного отрезка, скажем $[i\mu-1, i\mu+1]$, поскольку вклад интеграла по оставшейся бесконечной части экспоненциально мал по сравнению с вкладом точки $i\mu$.) Подставляя теперь полученные оценки (3.26), (3.28) в равенства (3.19), получаем (3.18). Лемма доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Пусть a, b, r – целые положительные числа, a, b нечетны, $a > 2rb$, и вещественный корень $\mu_1 \in (2r + 1, +\infty)$ многочлена (2.21) удовлетворяет условию (2.61), а минимальный по абсолютной величине мнимый корень $\eta_1 \in (0, +i\infty)$ – условию (3.17). Тогда для коэффициентов $\bar{A}_s$ линейных форм (1.5) справедлива асимптотическая формула

$$\varlimsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |\bar{A}_s|}{n} \leq \log \frac{2^{2(a-2rb)} |\eta_1 + 2r + 1|^{b(2r+1)} - |\eta_1 + 2r + 1|^{b(2r+1)}}{|\eta_1 + 1|^{a+b} |\eta_1 - 1|^{a+b}}, \quad (3.29)$$

где $s = 0$ или $s = b + 1, \dots, a + b - 1$ нечетно, причем в случае $s = a + b - 1$ верхний предел можно заменить на обычный и неравенство – на равенство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предельное соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |\bar{A}_{a+b-1}|}{n} = \operatorname{Re} f_0(\eta_1)$$

вытекает из формулы (3.8) при $m = (a - 1)/2$, лемм 3.3 и 3.4. Для остальных нечетных s , $b < s < a + b - 1$, оценки (3.29) следуют из лемм 3.1, 3.3, 3.4. В случае $s = 0$ согласно (1.5) имеем

$$|\bar{A}_0| \leq |I| + \sum_{\substack{s \text{ нечетно} \\ b < s < a+b}} |\bar{A}_s| \zeta(s),$$

откуда

$$\varlimsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |\bar{A}_0|}{n} \leq \max\{\operatorname{Re} f_0(\tau_0), \operatorname{Re} f_0(\eta_1)\}, \quad (3.30)$$

где корень τ_0 многочлена (2.21) определен в предложении 2.3. По лемме 2.10 выполнено $\operatorname{Re} f_0(\tau_0) < \operatorname{Re} f_0(\mu_1)$, а неравенство $\operatorname{Re} f_0(\mu_1) < \operatorname{Re} f_0(\eta_1)$ (и даже более сильное) было доказано в лемме 3.4. Поэтому максимум в правой части (3.30) равен $\operatorname{Re} f_0(\eta_1)$. Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Оценки (3.29) столь незначительно улучшают оценки (3.1), что в приложениях к доказательству теорем 0.3, 0.4 мы их не используем. Однако тот факт, что асимптотика как линейных форм, так и их коэффициентов определяется значениями одной и той же функции $\operatorname{Re} f_0(\tau)$ на разных корнях одного и того же многочлена (2.21), является ожидаемым и отражает естественную природу вещей. (В случае четного a асимптотика коэффициентов линейных форм (1.5) определяется корнем $\eta_0 = 0$ многочлена (2.21) согласно предложению 3.1.)

§ 4. Уточненные оценки знаменателей линейных форм

Асимптотика знаменателей линейных форм (1.2) при $n \rightarrow \infty$, полученная в лемме 1.4, грубовата, хотя ее хватает для доказательства теоремы Ривоаля. Уточнение знаменателей опирается на следующее обобщение леммы 1.2.

ЛЕММА 4.1. Пусть для некоторого многочлена $P(t)$, $\deg P(t) < m(n + 1)$, рациональная функция

$$R(t) = \frac{P(t)}{((t + s)(t + s + 1) \cdots (t + s + n))^m}$$

(в не обязательно несократимом представлении) удовлетворяет условиям

$$\left. \frac{D_n^j}{j!} \frac{d^j}{dt^j} (R(t)(t+k)^m) \right|_{t=-k} \in \mathbb{Z}, \quad (4.1)$$

$$k = s, s+1, \dots, s+n, \quad j = 0, 1, \dots, m-1,$$

где D_n – наименьшее общее кратное чисел $1, 2, \dots, n$. Тогда для всех целых неотрицательных j выполнено

$$\left. \frac{D_n^j}{j!} \frac{d^j}{dt^j} (R(t)(t+k)^m) \right|_{t=-k} \in \mathbb{Z}, \quad k = s, s+1, \dots, s+n. \quad (4.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для целых $j = 0, 1, \dots, m-1$ включения (4.2) вытекают непосредственно из (4.1). Поэтому далее рассматриваем целое $j \geq m$.

Разложение рациональной функции $R(t)$ на простейшие дроби имеет вид

$$R(t) = \sum_{l=s}^{s+n} \left(\frac{B_{l,0}}{(t+l)^m} + \frac{B_{l,1}}{(t+l)^{m-1}} + \dots + \frac{B_{l,m-2}}{(t+l)^2} + \frac{B_{l,m-1}}{t+l} \right), \quad (4.3)$$

где

$$B_{k,j} = \left. \frac{1}{j!} \frac{d^j}{dt^j} (R(t)(t+k)^m) \right|_{t=-k}, \quad k = s, s+1, \dots, s+n, \quad j = 0, 1, \dots, m-1.$$

Согласно линейности операции дифференцирования, представлению (4.3) и включениям (4.1) достаточно показать, что

$$\left. \frac{D_n^{j-q}}{j!} \frac{d^j}{dt^j} \left((t+k)^m \frac{1}{(t+l)^{m-q}} \right) \right|_{t=-k} \in \mathbb{Z}, \quad (4.4)$$

$$q = 0, 1, \dots, m-1, \quad k, l = 0, \pm 1, \dots, \pm n.$$

Имеем

$$\begin{aligned} (t+k)^m \frac{1}{(t+l)^{m-q}} &= \frac{((t+l) - (l-k))^m}{(t+l)^{m-q}} = \sum_{p=0}^m (-1)^p \binom{m}{p} \frac{(t+l)^{m-p} (l-k)^p}{(t+l)^{m-q}} \\ &= \sum_{p=0}^m (-1)^p \binom{m}{p} (l-k)^p (t+l)^{q-p}, \\ q &= 0, 1, \dots, m-1, \quad k, l = 0, \pm 1, \dots, \pm n, \end{aligned}$$

откуда для целого $j \geq m$

$$\begin{aligned} &\left. \frac{1}{j!} \frac{d^j}{dt^j} \left((t+k)^m \frac{1}{(t+l)^{m-q}} \right) \right|_{t=-k} \\ &= \left(\sum_{p=0}^m (-1)^p \binom{m}{p} \frac{(q-p)(q-p-1) \dots (q-p-j+1)}{j!} \right. \\ &\quad \left. \times (l-k)^p (t+l)^{q-p-j} \right) \Big|_{t=-k} \\ &= \frac{1}{(l-k)^{j-q}} \sum_{p=0}^m (-1)^{p+j} \binom{m}{p} \frac{(p-q)_j}{j!} \end{aligned} \quad (4.5)$$

в случае $l \neq k$ и

$$\frac{1}{j!} \frac{d^j}{dt^j} \left((t+k)^m \frac{1}{(t+l)^{m-q}} \right) = 0$$

в случае $l = k$. Поскольку

$$\frac{D_n^{j-q}}{(l-k)^{j-q}} \in \mathbb{Z} \quad \text{и} \quad \binom{m}{p} \frac{(p-q)_j}{j!} \in \mathbb{Z},$$

$$q = 0, 1, \dots, m-1, \quad p = 0, 1, \dots, m, \quad k, l = 0, \pm 1, \dots, \pm n, \quad k \neq l,$$

из соотношений (4.5) вытекают включения (4.4). Лемма доказана.

Следующее утверждение, предваряющее изложение общего случая, усиливает включения (1.17).

ЛЕММА 4.2. *Обозначим через $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{n,m}$ множество простых чисел, делящих каждое из чисел*

$$B_{k,0} = (F(t)(t+k)^2) \Big|_{t=-k} = \frac{(m+2n \pm k)!}{(m \pm k)!(n \pm k)!^2}, \quad k = 0, \pm 1, \dots, \pm n,$$

где функция $F(t)$ определена в (1.15). Положим

$$\Pi = \Pi_{n,m} = \prod_{\substack{p \in \mathcal{E} \\ \sqrt{m+3n} < p \leq 2n}} p. \quad (4.6)$$

Тогда для всех целых неотрицательных j выполнено

$$\Pi^{-1} \frac{D_{2n}^j}{j!} \frac{d^j}{dt^j} (F(t)(t+k)^2) \Big|_{t=-k} \in \mathbb{Z}, \quad k = 0, \pm 1, \dots, \pm n. \quad (4.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Тот факт, что $\Pi^{-1} B_{k,0} \in \mathbb{Z}$, $k = 0, \pm 1, \dots, \pm n$ (включения (4.7) при $j = 0$), следует из определения множества $\mathcal{E}$ и числа Π . Проверим включения (4.7) при $j = 1$. Имеем

$$\begin{aligned} B_{k,1} &= \frac{d}{dt} (F(t)(t+k)^2) \Big|_{t=-k} \\ &= B_{k,0} \left(\sum_{l=m+1}^{m+2n} \left(\frac{1}{t+l} + \frac{1}{t-l} \right) - 2 \sum_{\substack{l=-n \\ l \neq k}}^n \frac{1}{t+l} \right) \Big|_{t=-k} \\ &= B_{k,0} \left(\sum_{l=m+1}^{m+2n} \left(\frac{1}{l-k} - \frac{1}{l+k} \right) - 2 \sum_{\substack{l=-n \\ l \neq k}}^n \frac{1}{l-k} \right), \quad k = 0, \pm 1, \dots, \pm n. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Согласно лемме 1.3 выполнено $D_{2n} B_{k,1} \in \mathbb{Z}$, $k = 0, \pm 1, \dots, \pm n$, так что для p , взаимно простых с Π , имеем

$$\text{ord}_p(\Pi^{-1} D_{2n} B_{k,1}) = \text{ord}_p(D_{2n} B_{k,1}) \geq 0. \quad (4.9)$$

Пусть теперь простое p делит Π и, значит,

$$\text{ord}_p \Pi = 1. \quad (4.10)$$

Для $p > \sqrt{m+3n}$ имеем $\text{ord}_p(l \pm k) \leq 1$, где $(l \pm k)$ – любой из знаменателей в (4.8); поэтому

$$\text{ord}_p \left(\sum_{l=m+1}^{m+2n} \left(\frac{1}{l-k} - \frac{1}{l+k} \right) - 2 \sum_{\substack{l=-n \\ l \neq k}}^n \frac{1}{l-k} \right) \geq -1, \quad k = 0, \pm 1, \dots, \pm n. \quad (4.11)$$

Для $p \leq 2n$ выполнено

$$\text{ord}_p D_{2n} \geq 1; \quad (4.12)$$

наконец, для $p \in \mathcal{E}$

$$\text{ord}_p B_{k,0} \geq 1, \quad k = 0, \pm 1, \dots, \pm n. \quad (4.13)$$

Собирая оценки (4.10)–(4.13), с учетом (4.8) в случае p , делящего Π , получаем

$$\text{ord}_p(\Pi^{-1} D_{2n} B_{k,1}) \geq 0. \quad (4.14)$$

Согласно (4.9) и (4.14) выполнено $\Pi^{-1} D_{2n} B_{k,1} \in \mathbb{Z}$, $k = 0, \pm 1, \dots, \pm n$, что доказывает включения (4.7) при $j = 1$. В случае $j \geq 2$ остается воспользоваться леммой 4.1 с $m = 2$.

Отметим, что в условиях леммы 4.2 для любого простого $p > \sqrt{m+3n}$ имеем

$$\text{ord}_p B_{k,0} = \left\lfloor \frac{m+2n}{p} \pm \frac{k}{p} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{m}{p} \pm \frac{k}{p} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p} \pm \frac{k}{p} \right\rfloor, \quad k = 0, \pm 1, \dots, \pm n, \quad (4.15)$$

поскольку

$$\text{ord}_p q! = \left\lfloor \frac{q}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{q}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{q}{p^3} \right\rfloor + \dots, \quad q = 1, 2, \dots, \quad (4.16)$$

где $\lfloor \cdot \rfloor$ обозначает целую часть числа. Формулы (4.15) позволяют вычислять асимптотику множителя (4.6) при $n, m \rightarrow \infty$, так как

$$\{p \in \mathcal{E} : p > \sqrt{m+3n}\} = \left\{ p > \sqrt{m+3n} : \min_{k=0, \pm 1, \dots, \pm n} \{\text{ord}_p B_{k,0}\} \geq 1 \right\}. \quad (4.17)$$

В качестве примера рассмотрим самую простую версию функции (1.15) при $m = n$.

ЛЕММА 4.3. *Справедливо предельное соотношение*

$$\varpi_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \Pi_{n,n}}{n} = \psi\left(\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{3}\right) + \psi(1) - \psi\left(\frac{5}{6}\right) - 1 \approx 0.4820, \quad (4.18)$$

где $\psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$ – логарифмическая производная гамма-функции.

Рис. 10. Значения функции $\varphi_1(x, y)$ внутри единичного квадрата

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (4.15) в случае $m = n$ и $p > 2\sqrt{n}$ имеем

$$\min_{k=0, \pm 1, \dots, \pm n} \{\text{ord}_p B_{k,0}\} = \min_{|k/p| \leq |n/p|} \varphi_1\left(\frac{n}{p}, \frac{k}{p}\right), \quad (4.19)$$

где

$$\varphi_1(x, y) = [3x + y] + [3x - y] - 3[x + y] - 3[x - y]. \quad (4.20)$$

Как несложно заметить, функция (4.20) периодична (с периодом 1) по каждому аргументу:

$$\varphi_1(x, y) = \varphi_1(\{x\}, \{y\}), \quad \{x\} = x - [x];$$

поэтому достаточно вычислить значения этой функции внутри единичного квадрата. Согласно определению целой части числа слагаемые в правой части (4.20) меняют значения только при переходе через прямые $3x \pm y = \text{const} \in \mathbb{Z}$ и $x \pm y = \text{const} \in \mathbb{Z}$ (см. рис. 9), откуда получаем значения функции $\varphi_1(x, y)$ (рис. 10).

Проведем перпендикуляры к оси x через точки пересечения прямых, указанных на рис. 10. Тогда

$$\min_{|y| \leq x} \varphi_1(x, y) = \min_{0 \leq y \leq 1} \varphi_1(\{x\}, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } \{x\} \in E_1 = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{5}{6}, 1\right), \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \quad (4.21)$$

Согласно (4.17) и (4.19) из (4.21) следует, что

$$\{p \in \mathcal{E}_{n,n} : p > 2\sqrt{n}\} = \left\{p > 2\sqrt{n} : \left\{\frac{n}{p}\right\} \in E_1\right\}$$

и, следовательно,

$$\Pi_{n,n} = \prod_{\substack{p: \{n/p\} \in E_1 \\ 2\sqrt{n} < p \leq 2n}} p = \prod_{\substack{p: \{n/p\} \in E_1 \\ p > 2\sqrt{n}}} p \bigg/ \prod_{2n < p \leq 3n} p. \quad (4.22)$$

Для знаменателя в правой части (4.22) имеем

$$\prod_{2n < p \leq 3n} p = \frac{D_{3n}}{D_{2n}}; \quad (4.23)$$

асимптотика числителя находится с помощью следующего утверждения (ср. с [25, теорема 4.3 и § 6], [26, лемма 3.2]).

ЛЕММА 4.4. Для любого $C > 1$ и любого полуинтервала $[u, v) \subset (0, 1)$ имеет место предельное соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{\substack{p > \sqrt{Cn} \\ \{n/p\} \in [u, v)}} \log p = \psi(v) - \psi(u).$$

С помощью леммы 4.4 и соотношений (4.22), (4.23), (1.24) получаем требуемую асимптотику (4.18). Лемма 4.3 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. И без того несложное вычисление величины (4.21) можно вчетверо упростить. Как легко проверить, функция (4.20), помимо периодичности, инвариантна относительно преобразований

$$\vartheta_1: (x, y) \mapsto \left(x + \frac{1}{2}, y + \frac{1}{2}\right), \quad \vartheta_2: (x, y) \mapsto (x, 1 - y) \quad (4.24)$$

(последнее отображение использует нечетность $\varphi_1(x, y)$ по аргументу y и сдвиг на 1). Поэтому значения функции (4.20) достаточно найти на квадрате $0 \leq x, y < \frac{1}{2}$, а затем с помощью преобразований $\vartheta_1, \vartheta_1 \circ \vartheta_2, \vartheta_2$ распространить найденное на единичный куб и по периодичности на всю плоскость $\mathbb{R}^2$.

В качестве следующего объекта исследования рассмотрим рациональную функцию

$$G(t) = G_n(t) := \frac{(t \pm (n+1)) \cdots (t \pm (n+2rn))}{(t(t \pm 1) \cdots (t \pm n))^{2r}}, \quad (4.25)$$

которая согласно лемме 1.3 и правилу Лейбница дифференцирования произведения удовлетворяет соотношениям

$$\frac{D_{2n}^j}{j!} \frac{d^j}{dt^j} (G(t)(t+k)^{2r}) \Big|_{t=-k} \in \mathbb{Z}, \quad k = 0, \pm 1, \dots, \pm n, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (4.26)$$

ЛЕММА 4.5. Для каждого целого $r \geq 1$ существует последовательность целых $\Pi_n = \Pi_n^{(r)} \geq 1$, $n = 1, 2, \dots$, такая, что для всех целых неотрицательных j выполнено

$$\Pi_n^{-1} \frac{D_{2n}^j}{j!} \frac{d^j}{dt^j} (G(t)(t+k)^{2r}) \Big|_{t=-k} \in \mathbb{Z}, \quad k = 0, \pm 1, \dots, \pm n, \quad (4.27)$$

и справедливо предельное соотношение

$$\varpi_r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \Pi_n^{(r)}}{n} = -2 \sum_{l=1}^r \left(\psi\left(\frac{l}{r}\right) + \psi\left(\frac{l}{r+1/2}\right) \right) - (4r+1) \sum_{l=1}^r \frac{1}{l} - 4r\gamma + 4r, \quad (4.28)$$

где $\gamma \approx 0.57712$ – постоянная Эйлера.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $n \leq 2r$ положим $\Pi_n = 1$; тогда включения (4.27) следуют из (4.26), а на предел в (4.28) эта конечная часть последовательности никак не повлияет. Поэтому в дальнейшем будем считать $n > 2r$.

Для каждого простого p определим величину

$$\nu_p = \min_{k=0, \pm 1, \dots, \pm n} \left\{ \text{ord}_p \frac{((2r+1)n+k)!((2r+1)n-k)!}{(n+k)!^{2r+1}(n-k)!^{2r+1}} \right\}; \quad (4.29)$$

положим

$$\Pi_n = \prod_{p: \sqrt{(2r+2)n} < p \leq 2n} p^{\nu_p}. \quad (4.30)$$

Фиксируя целое k из интервала $|k| \leq n$, рассмотрим функцию

$$G_k(t) := G(t)(t+k)^{2r} \quad (4.31)$$

и покажем, что

$$\Pi_n^{-1} \frac{D_{2n}^j}{j!} \frac{d^j G_k(t)}{dt^j} \Big|_{t=-k} \in \mathbb{Z}, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (4.32)$$

Согласно лемме 4.1 включения (4.32) достаточно доказать для $j \leq 2r$.

Для простых p , не делящих Π_n , согласно (4.26) имеем

$$\text{ord}_p \left(\Pi_n^{-1} \frac{D_{2n}^j}{j!} \frac{d^j G_k(t)}{dt^j} \Big|_{t=-k} \right) = \text{ord}_p \left(\frac{D_{2n}^j}{j!} \frac{d^j G_k(t)}{dt^j} \Big|_{t=-k} \right) \geq 0. \quad (4.33)$$

Пусть теперь простое p делит Π_n . Докажем индукцией по $j = 0, 1, \dots, 2r$, что и в этом случае

$$\text{ord}_p \left(\Pi_n^{-1} \frac{D_{2n}^j}{j!} \frac{d^j G_k(t)}{dt^j} \Big|_{t=-k} \right) \geq 0. \quad (4.34)$$

При $j = 0$ соотношение (4.34) вытекает из определения числа Π_n , поскольку

$$G_k(t) \Big|_{t=-k} = \frac{((2r+1)n+k)!((2r+1)n-k)!}{(n+k)!^{2r+1}(n-k)!^{2r+1}}.$$

Докажем (4.34) для $j+1$, считая его доказанным для всех предыдущих j . Введем обозначение для логарифмической производной функции (4.31):

$$g_k(t) = \frac{G'_k(t)}{G_k(t)} = \sum_{\substack{l=-(2r+1)n \\ l \neq k}}^{(2r+1)n} \frac{1}{t+l} - (2r+1) \sum_{\substack{l=-n \\ l \neq k}}^n \frac{1}{t+l}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{(j+1)!} \frac{d^{j+1} G_k(t)}{dt^{j+1}} &= \frac{1}{(j+1)!} \frac{d^j}{dt^j} (g_k(t) G_k(t)) \\ &= \frac{1}{j+1} \sum_{m=0}^j \frac{1}{(j-m)!} \frac{d^{j-m} g_k(t)}{dt^{j-m}} \cdot \frac{1}{m!} \frac{d^m G_k(t)}{dt^m}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Имеем

$$\text{ord}_p \frac{1}{j+1} = 0, \quad (4.36)$$

так как $p > \sqrt{(2r+2)n} > 2r+1 \geq j+1$; далее, для $m < j$

$$\begin{aligned} & \text{ord}_p \left(\frac{1}{(j-m)!} \frac{d^{j-m} g_k(t)}{dt^{j-m}} \Big|_{t=-k} \right) \\ &= \text{ord}_p \left(\sum_{\substack{l=-(2r+1)n \\ l \neq k}}^{(2r+1)n} \frac{(-1)^{j-m}}{(l-k)^{j-m+1}} - (2r+1) \sum_{\substack{l=-n \\ l \neq k}}^n \frac{(-1)^{j-m}}{(l-k)^{j-m+1}} \right) \\ &\geq -(j-m+1), \end{aligned} \quad (4.37)$$

поскольку $p > \sqrt{(2r+2)n}$ и $|l-k| \leq (2r+2)n$ для всех знаменателей в (4.37);

$$\text{ord}_p D_{2n}^{j-m+1} \geq j-m+1, \quad (4.38)$$

так как $p \leq 2n$; наконец,

$$\text{ord}_p \left(\Pi_n^{-1} \frac{D_{2n}^m}{m!} \frac{d^m G_k(t)}{dt^m} \Big|_{t=-k} \right) \geq 0 \quad (4.39)$$

по индукционному предположению. Подставляя $t = -k$ в (4.35) и применяя оценки (4.36)–(4.39), заключаем, что соотношение (4.34) выполнено для $j+1$. Тем самым, индукционный переход обоснован.

Собирая оценки (4.33) для $p \nmid \Pi_n$ и (4.34) для $p \mid \Pi_n$, приходим к выводу, что включения (4.32) и (4.27) справедливы для $j = 0, 1, \dots, 2r$, а значит, и для всех целых неотрицательных j . Покажем, что для построенной последовательности Π_n , $n = 1, 2, \dots$, выполнено предельное соотношение (4.28).

Для каждого целого $n > 2r$ и простого $p > \sqrt{(2r+2)n}$ согласно (4.29) и (4.16) выполнено

$$\nu_p = \min_{|k/p| \leq |n/p|} \varphi_r \left(\frac{n}{p}, \frac{k}{p} \right), \quad (4.40)$$

где функция

$$\varphi_r(x, y) = \lfloor (2r+1)x + y \rfloor + \lfloor (2r+1)x - y \rfloor - (2r+1)\lfloor x + y \rfloor - (2r+1)\lfloor x - y \rfloor \quad (4.41)$$

периодична (с периодом 1) по каждому аргументу. Проверим, что

$$\min_{y \in \mathbb{R}} \varphi_r(x, y) = \nu, \quad \text{если } \{x\} \in E_\nu, \quad \nu = 0, 1, \dots, 2r-1, \quad (4.42)$$

где

$$\begin{aligned} E_{2l} &= \left[\frac{l}{2r}, \frac{l+1}{2r+1} \right) \cup \left[\frac{1}{2} + \frac{l}{2r}, \frac{1}{2} + \frac{l+1}{2r+1} \right), \quad l = 0, 1, \dots, r-1, \\ E_{2l-1} &= \left[\frac{l}{2r+1}, \frac{l}{2r} \right) \cup \left[\frac{1}{2} + \frac{l}{2r+1}, \frac{1}{2} + \frac{l}{2r} \right), \quad l = 1, 2, \dots, r. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Несложные вычисления и нечетность функции (4.41) показывают, что эта функция инвариантна относительно преобразований (4.24); поэтому для доказательства соотношений (4.42) достаточно ограничиться областью $0 \leq x, y < \frac{1}{2}$. В этой области

$$\min_{0 \leq y < 1/2} \varphi_r(x, y) = \min_{0 \leq y \leq x} \varphi_r(x, y) = \min_{0 \leq y \leq x} (\lfloor (2r+1)x + y \rfloor + \lfloor (2r+1)x - y \rfloor),$$

так как

$$-(2r+1)\lfloor x+y \rfloor - (2r+1)\lfloor x-y \rfloor = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq y \leq x < \frac{1}{2}, \\ 2r+1, & \text{если } 0 \leq x < y < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Для завершения доказательства соотношений (4.42) остается вычислить значения функции $\lfloor (2r+1)x + y \rfloor + \lfloor (2r+1)x - y \rfloor$ в области $0 \leq y \leq x < \frac{1}{2}$ (см. рис. 11) по аналогии с рассуждениями, приведенными в лемме 4.3.

$$\frac{l}{2r+1} \quad \frac{l}{2r} \quad \frac{l+1}{2r+1} \quad \frac{1}{2}$$

Рис. 11. Значения функции $\varphi_r(x, y)$ в области $0 \leq y < x < \frac{1}{2}$

Таким образом, согласно (4.30), (4.40) и (4.42), (4.43) выполнено

$$\begin{aligned} \Pi_n &= \prod_{\nu=1}^{2r-1} \prod_{\substack{p: \{n/p\} \in E_\nu \\ \sqrt{(2r+2)n} < p \leq 2n}} p^\nu \\ &= \left(\prod_{\nu=1}^{2r-1} \prod_{\substack{p: \{n/p\} \in E_\nu \\ p > \sqrt{(2r+2)n}}} p^\nu \right) / \left(\prod_{l=1}^{r-1} \prod_{\substack{2r+1 \\ l+1} n < p \leq \frac{2r}{l} n} p^{2l} \cdot \prod_{l=1}^r \prod_{\substack{2r \\ l} n < p \leq \frac{2r+1}{l} n} p^{2l-1} \right), \end{aligned}$$

и для получения предельного соотношения (4.28) воспользуемся леммой 4.4, тождеством

$$\psi(x) + \psi\left(x + \frac{1}{2}\right) = -2 \log 2 + 2\psi(2x)$$

(см. далее формулу (4.47) при $r = 2$) и соотношением

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{\alpha n < p \leq \beta n} \log p = \beta - \alpha, \quad \text{где } \alpha < \beta,$$

вытекающим из асимптотического закона распределения простых чисел. Тогда

$$\begin{aligned} \varpi_r &= \sum_{l=1}^{r-1} 2l \left(\psi\left(\frac{l+1}{2r+1}\right) - \psi\left(\frac{l}{2r}\right) + \psi\left(\frac{1}{2} + \frac{l+1}{2r+1}\right) - \psi\left(\frac{1}{2} + \frac{l}{2r}\right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{2r}{l} - \frac{2r+1}{l+1} \right) \right) \\ &\quad + \sum_{l=1}^r (2l-1) \left(\psi\left(\frac{l}{2r}\right) - \psi\left(\frac{l}{2r+1}\right) + \psi\left(\frac{1}{2} + \frac{l}{2r}\right) - \psi\left(\frac{1}{2} + \frac{l}{2r+1}\right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{2r+1}{l} - \frac{2r}{l} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \sum_{l=1}^{r-1} 2l \left(\psi \left(\frac{l+1}{r+1/2} \right) - \psi \left(\frac{l}{r} \right) \right) + 2 \sum_{l=1}^r (2l-1) \left(\psi \left(\frac{l}{r} \right) - \psi \left(\frac{l}{r+1/2} \right) \right) \\
&\quad - \sum_{l=1}^{r-1} 2l \left(\frac{2r}{l} - \frac{2r+1}{l+1} \right) - \sum_{l=1}^r (2l-1) \left(\frac{2r+1}{l} - \frac{2r}{l} \right) \\
&= 2 \sum_{l=1}^r \psi \left(\frac{l}{r} \right) (2l-1-2l) + 4r\psi(1) + 2 \sum_{l=1}^r \psi \left(\frac{l}{r+1/2} \right) (2(l-1) - (2l-1)) \\
&\quad - \sum_{l=1}^r \frac{1}{l} (4rl - 2(l-1)(2r+1) + (2l-1)) + 4r \\
&= -2 \sum_{l=1}^r \left(\psi \left(\frac{l}{r} \right) + \psi \left(\frac{l}{r+1/2} \right) \right) - (4r+1) \sum_{l=1}^r \frac{1}{l} + 4r\psi(1) + 4r,
\end{aligned}$$

и поскольку $\psi(1) = -\gamma$ (см., например, [27, § 1.1, формула (8)]), получаем требуемое. Лемма доказана.

ЛЕММА 4.6. *Для величины (4.28) справедливы оценки*

$$-\log(r+1) - 4 < \varpi_r - 4r + (4r+1)\gamma < \log(r+1) + \frac{1}{r} + 2; \quad (4.44)$$

в частности,

$$\varpi_r = 4r(1 - \gamma) + O(\log r) \quad \text{при } r \rightarrow \infty. \quad (4.45)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу монотонного возрастания функции $\psi(x)$ на полуинтервале $(0, 1]$ имеем

$$-\psi(1) + \sum_{l=1}^{r+1} \psi \left(\frac{l}{r+1} \right) < \sum_{l=1}^r \psi \left(\frac{l}{r+1/2} \right) < \sum_{l=1}^r \psi \left(\frac{l}{r} \right), \quad (4.46)$$

при этом суммы в верхней и нижней оценках находятся с помощью формулы

$$\sum_{l=1}^r \psi \left(x + \frac{l-1}{r} \right) = -r \log r + r\psi(rx) \quad (4.47)$$

(см., например, [27, § 1.1, формула (6)]).

Согласно неравенству (2.28) последовательность

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{r} - \log r$$

убывает, а последовательность

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{r} - \log(r+1)$$

возрастает; поэтому их общий предел γ заключен между элементами этих последовательностей, т.е.

$$\log r < \sum_{l=1}^r \frac{1}{l} - \gamma < \log(r+1). \quad (4.48)$$

Подставляя полученные оценки (4.46)–(4.48) в (4.28), находим

$$-4r \log \frac{r+1}{r} - \log(r+1) < \varpi_r - 4r + (4r+1)\gamma < (2r+1) \log \frac{r+1}{r} + \log(r+1)$$

и для завершения доказательства оценок (4.44) вновь воспользуемся неравенством (2.28). Предельное соотношение (4.45) вытекает непосредственно из (4.44). Лемма доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Знаменатель $\text{den}(I_n)$ линейной формы (1.5) является делителем числа $\Pi_n^{-b} D_{2n}^{a+b-1}$, где последовательность целых чисел $\Pi_n = \Pi_n^{(r)}$, $n = 1, 2, \dots$, определена в лемме 4.5. Таким образом,*

$$\varlimsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \text{den}(I_n)}{n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log D_{2n}^{a+b-1} - b \log \Pi_n}{n} = 2(a+b-1) - b\varpi_r.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО полностью повторяет доказательство леммы 1.4 с заменой представления (1.22) на

$$R(t) = H_n(t)^{a-2rb} G_n(t)^b,$$

с применением лемм 1.3, 4.5 для функций (1.16), (4.25) и правила Лейбница дифференцирования произведения. Предложение доказано.

В заключение этого параграфа приведем несколько частных значений величины (4.28) (при $r = 1$ см. формулу (4.18)):

$$\begin{aligned} \varpi_2 &\approx 2.01561, \quad \varpi_3 \approx 3.64442, \quad \varpi_{10} \approx 15.38202, \quad \varpi_{50} \approx 82.98948, \\ \varpi_{100} &\approx 1.67541 \cdot 100, \quad \varpi_{1000} \approx 1.68956 \cdot 1000, \quad \varpi_r \approx 4(1-\gamma)r \approx 1.69114r. \end{aligned}$$

§ 5. Доказательство результатов о линейной независимости

Следующая теорема опирается на результаты, полученные в § 2 и § 4.

ТЕОРЕМА 5.1. *Пусть выполнены условия предложения 2.3, b нечетно и, кроме того,*

$$\varkappa + 2(a+b-1) - b\varpi_r < 0,$$

где

$$\varpi_r = -2 \sum_{l=1}^r \left(\psi\left(\frac{l}{r}\right) + \psi\left(\frac{l}{r+1/2}\right) \right) - (4r+1) \sum_{l=1}^r \frac{1}{l} - 4r\gamma + 4r.$$

Тогда среди чисел

$$\zeta(b+2), \zeta(b+4), \dots, \zeta(a+b-1) \quad (5.1)$$

по крайней мере одно иррационально.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 1.1 для любого целого $n \geq 1$ величина (1.2) является линейной формой от 1 и чисел (5.1). Предполагая рациональность каждого из чисел (5.1) и обозначая их наименьший общий знаменатель через D , получаем, что $J_n = D|I_n|\text{den}(I_n)$ является целым положительным числом для бесконечной последовательности индексов $n \geq 1$. Это противоречит предельному соотношению

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log J_n}{n} \leq \varkappa + 2(a + b - 1) - b\varpi_r < 0,$$

вытекающему из предложений 2.3 и 4.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 0.1. Применим теорему 5.1, выбирая для каждого набора подходящие a, b и $r = 1$. Отметим, что в любом из рассматриваемых далее случаев $\mu_1 < 3.05$, так что условие (2.61) выполнено.

Иррациональность по крайней мере одного числа из первого набора в (0.1) получается при выборе $a = 19$ и $b = 3$ в теореме 5.1. В этом случае $\mu_1 \approx 3.04028$ и $\tau_0 \approx 2.98027 + 0.02985i$, $\text{Im } f_0(\tau_0) + 3\pi \approx 0.09308 \not\equiv 0 \pmod{\pi\mathbb{Z}}$. Поэтому оценка

$$\varkappa + 2(a + b - 1) - b\varpi_r \approx -0.72567 < 0$$

и применение теоремы 5.1 доказывают требуемое.

Для второго набора в (0.1) полагаем $a = 33$, $b = 5$. Тогда

$$\begin{aligned} \mu_1 &\approx 3.03309, & \tau_0 &\approx 3.00783 + 0.03046i, & \text{Im } f_0(\tau_0) + 9\pi &\approx 0.14978, \\ \varkappa + 2(a + b - 1) - b\varpi_r &\approx -0.76662 < 0. \end{aligned}$$

Наконец, полагая $a = 47$, $b = 7$ для третьего набора в (0.1), получаем

$$\begin{aligned} \mu_1 &\approx 3.03043, & \tau_0 &\approx 3.01730 + 0.02406i, & \text{Im } f_0(\tau_0) + 15\pi &\approx 0.16232, \\ \varkappa + 2(a + b - 1) - b\varpi_r &\approx -0.82928 < 0. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 0.2. Положим $a = 7b$, $r = 1$ для каждого нечетного $b \geq 3$ и обозначим через τ_b корень соответствующего многочлена (2.21) в области $\text{Re } \tau > 0$, $\text{Im } \tau > 0$ с максимально возможной частью $\text{Re } \tau_b$. Отметим, что корень многочлена (2.21) на интервале $(3, +\infty)$ совпадает с корнем многочлена

$$(\tau + 3)(\tau - 1)^8 - (\tau - 3)(\tau + 1)^8,$$

который равен $\mu_1 \approx 3.02472$. Так как условие (2.61) выполнено, по лемме 2.10 имеем неравенство $\text{Re } f_0(\tau_b) \leq \text{Re } f_0(\mu_1)$, откуда

$$\varkappa \leq b\varkappa_0 := b \log \frac{2^{2(a-2)}(\mu_1 + 3)^3(\mu_1 - 3)^3}{(\mu_1 + 1)^8(\mu_1 - 1)^8} \approx -15.56497b.$$

Поэтому

$$\varkappa + 2(a + b - 1) - b\varpi_r < b\varkappa_0 + 16b - b\varpi_1 \approx -0.04701b < 0,$$

и для применения теоремы 5.1 остается убедиться в том, что условие (2.55) выполнено. Несложная проверка показывает, что функция

$$\begin{aligned} g_0(b) &= \operatorname{Im} f_0(\tau_b) + 3(b-2)\pi \\ &= 3b(\arg(\tau_b - 3) + \arg(-\tau_b + 3)) - 8b(\arg(\tau_b - 1) + \arg(\tau_b + 1)) + 3(b-2)\pi \\ &= 2b(3\arg(\tau_b - 3) + 8\arg(\tau_b - 1) - 16\arg(\tau_b + 1)) \end{aligned}$$

как функция от $b \geq 3$ возрастает, откуда следует, что $g_0(b) \geq g_0(3) \approx 0.05935 > 0$. Кроме того, соотношения

$$\arg(-\tau_b + 3) \sim \frac{b-2}{b}\pi, \quad |-\tau_b + 3| \sim |\mu_1 - 3| \quad \text{при } b \rightarrow \infty, \quad b \text{ нечетно,}$$

позволяют вычислить предел

$$\lim_{\substack{b \rightarrow \infty \\ b \text{ нечетно}}} g_0(b) < \pi.$$

Следовательно, $\operatorname{Im} f_0(\tau_b) \not\equiv 0 \pmod{\pi\mathbb{Z}}$ и применение теоремы 5.1 завершает доказательство теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 0.3. В соответствии с леммой 1.1 и предложением 4.1 для $b = 1$ построенные в (1.2) величины $\tilde{I}_n(a, r) = I_n D_{2n}^a / \Pi_n^{(r)}$ являются линейными формами от чисел $1, \zeta(3), \zeta(5), \dots, \zeta(a)$ с целыми коэффициентами. Согласно предложениям 2.1, 3.1, 4.1 значения α, β в критерии линейной независимости (см. введение) определяются как

$$\begin{aligned} \alpha(a, r) &= -\kappa(a, r) - 2a + \varpi_r, \\ \beta(a, r) &= 2(2r+1)\log(2r+1) + 2(a-2r)\log 2 + 2a - \varpi_r, \end{aligned} \tag{5.2}$$

где величина $\kappa = \kappa(a, r)$ задается соотношением (2.59). При $a = 145, r = 10$ и $a = 1971, r = 65$ получаем

$$\begin{aligned} \mu_1(145, 10) - 21 &\approx 0.38013 \cdot 10^{-4}, & 1 + \frac{\alpha(145, 10)}{\beta(145, 10)} &\approx 2.000397, \\ \mu_1(1971, 65) - 131 &\approx 0.22019 \cdot 10^{-10}, & 1 + \frac{\alpha(1971, 65)}{\beta(1971, 65)} &\approx 3.000103, \end{aligned}$$

где $\mu_1(a, r)$ – вещественный корень многочлена (2.21) на интервале $(2r+1, +\infty)$ при $b = 1$. Из критерия линейной независимости заключаем, что

$$\delta(145) \geq 3, \quad \delta(1971) \geq 4, \tag{5.3}$$

поскольку размерность пространства является целым числом. Кроме того, по теореме Апері $\delta(3) = 2$. Из полученных оценок вытекает утверждение теоремы.

ЛЕММА 5.1. Пусть целые положительные a, r удовлетворяют условиям

$$a > 2(r+2)\log(r+1) + 1 \quad (5.4)$$

и $\mu_1 = \mu_1(a, r)$ – вещественный корень многочлена

$$h(\tau) = (\tau + 2r + 1)(\tau - 1)^{a+1} - (\tau - 2r - 1)(\tau + 1)^{a+1} \quad (5.5)$$

на интервале $(2r + 1, +\infty)$. Тогда

$$0 < \mu_1 - (2r + 1) < 2\varepsilon, \quad \text{где } \varepsilon := \frac{2r+1}{(r+1)^2} < 1. \quad (5.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственные вычисления показывают, что

$$h(2r + 1) = 2^{a+2}(r+1)r^{a+1} > 0, \quad (5.7)$$

$$h(2r + 1 + 2\varepsilon) = 2^{a+2}((2r + 1 + \varepsilon)(r + \varepsilon)^{a+1} - \varepsilon(r + 1 + \varepsilon)^{a+1}). \quad (5.8)$$

Ввиду (5.4) имеем

$$(r + 1 + \varepsilon)^{a-1} > (r + \varepsilon)^{a+1}, \quad (5.9)$$

так как

$$\begin{aligned} & (a-1)\log(r+1+\varepsilon) - (a+1)\log(r+\varepsilon) \\ &= (a-1)\log\left(1 + \frac{1}{r+\varepsilon}\right) - 2\log(r+\varepsilon) \\ &> (a-1)\log\left(1 + \frac{1}{r+1}\right) - 2\log(r+1) \\ &> \frac{a-1}{r+2} - 2\log(r+1) = \frac{a-1-2(r+2)\log(r+1)}{r+2} > 0. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \varepsilon(r+1+\varepsilon)^2 &= \frac{(2r+1)(r+1+\varepsilon)^2}{(r+1)^2} \\ &> \frac{(2r+1)(r+1+\varepsilon)^2}{(r+1)^2} - \frac{\varepsilon(3r^2+4r+1+2\varepsilon r+\varepsilon)}{(r+1)^2} = 2r+1+\varepsilon. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Подставляя неравенства (5.9), (5.10) в (5.8), получаем, что $h(2r + 1 + 2\varepsilon) < 0$. Сопоставляя полученное неравенство с (5.7), заключаем, что на интервале $(2r + 1, 2r + 1 + 2\varepsilon)$ действительно расположен корень многочлена (5.5). Поэтому требуемая локализация (5.6) вытекает из единственности вещественного корня μ_1 на интервале $(2r + 1, +\infty)$ (лемма 2.7). Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 5.1. В предположениях леммы 5.1 пусть $r > 6$. Тогда для величины $\varkappa = \varkappa(a, r)$ в (2.59) справедлива оценка

$$\varkappa(a, r) < 2(2r + 1)\log(2r + 1) - 2(a + 1)(1 + \log r).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $h(\mu_1) = 0$, имеем

$$\varkappa = \log \frac{2^{2(a-2r)}(\mu_1 + 2r + 1)^{2(2r+1)}(\mu_1 - 1)^{2(a+1)r}}{(\mu_1 + 1)^{2(a+1)(r+1)}},$$

откуда ввиду (5.6) выполнено

$$\begin{aligned} \frac{\varkappa}{2} - (a - 2r) \log 2 &= (2r + 1) \log \left(1 + \frac{2r}{\mu_1 + 1} \right) - (a + 1)r \log \left(1 + \frac{2}{\mu_1 - 1} \right) - (a - 2r) \log(\mu_1 + 1) \\ &< (2r + 1) \log \left(1 + \frac{r}{r + 1} \right) - \frac{(a + 1)r}{r + 1} - (a - 2r) \log(2r + 2) \\ &= (2r + 1) \log(2r + 1) - (a + 1) \left(\frac{r}{r + 1} + \log(r + 1) \right) - (a - 2r) \log 2 \\ &< (2r + 1) \log(2r + 1) - (a + 1)(1 + \log r) - (a - 2r) \log 2. \end{aligned}$$

При этом мы воспользовались неравенством

$$\log \left(1 + \frac{2}{\mu_1 - 1} \right) > \log \left(1 + \frac{1}{r + \varepsilon} \right) > 2 \log \left(1 + \frac{1}{2r + 1} \right) > \frac{1}{r + 1}$$

(см. также (2.28) при $n = 2r + 1$), справедливым для $r > 6$, поскольку

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{r + \varepsilon} - \left(1 + \frac{1}{2r + 1} \right)^2 &= \frac{r - 4\varepsilon r - 3r + 1}{(r + \varepsilon)(2r + 1)^2} \\ &= \frac{r^3 - 5r^2 - 7r - 2}{(r + \varepsilon)(r + 1)^2(2r + 1)^2} > 0, \quad \text{если } r > 6. \end{aligned}$$

Следствие доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 0.4. Поскольку $\delta(a)$ является целым числом и

$$0.395 \cdot \log 3 \approx 0.43395, \quad 0.395 \cdot \log 145 \approx 1.96581, \quad 0.395 \cdot \log 1971 \approx 2.99659,$$

из теоремы Апери и оценок (5.3) вытекает справедливость неравенства (0.2) для всех нечетных $a < e^{4/0.395}$, т.е. $a < 24999$. На самом деле, мы покажем, что для нечетных $a \geq 20737 = 12^4 + 1$ справедлива более сильная, чем (0.2), оценка

$$\delta(a) > \frac{\log a}{\log 12}, \tag{5.11}$$

или, что то же самое,

$$\delta(12^m + 1) > m, \quad m = 4, 5, 6, \dots \tag{5.12}$$

Для каждого $a = 12^m + 1$ выберем

$$r = \left\lfloor \frac{\log^2 12}{3} \cdot \frac{a}{\log^2 a} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{12^m + 1}{3m^2} \right\rfloor, \quad m = 4, 5, 6, \dots,$$

и воспользуемся для оценки снизу размерности $\delta(a)$ критерием линейной независимости, формулами (5.2), а также неравенствами леммы 4.6 и следствия 5.1:

$$\begin{aligned} \delta(a) &\geq 1 + \frac{\alpha(a, r)}{\beta(a, r)} \\ &> \frac{2(a+1)(1+\log r) + 2(a-2r)\log 2}{2(2r+1)\log(2r+1) + 2(a-2r)\log 2 + 2a - 4r(1-\gamma) + \log(r+1) + 4 + \gamma}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Тогда при $m = 4, 5, 6, 7$ оценка (5.12) следует непосредственно из (5.13):

m	$a = 12^m + 1$	$r = \left\lfloor \frac{a}{3m^2} \right\rfloor$	$\delta(a)$
4	20737	432	> 4.00882
5	248833	3317	> 5.15339
6	2985985	27648	> 6.35168
7	35831809	243753	> 7.58967

Для остальных значений m мы воспользуемся в неравенстве (5.13) тривиальными оценками

$$\begin{aligned} 0 < \frac{r}{a} &\leq \frac{1}{3m^2}, \quad \frac{2r+1}{a} \leq \frac{2}{3m^2} + \frac{1}{a} \leq \frac{2}{m^2 \log 12}, \\ \log r &\geq \log \frac{12^m}{4m^2} = m \log 12 - 2 \log 2 - 2 \log m, \\ \log(2r+1) &\leq \log(a-1) = m \log 12. \end{aligned}$$

Тогда

$$\delta(a) = \delta(12^m + 1) > \frac{m \log 12 - 2 \log m + 1 - \log 2 - 1/(3m^2)}{1 + \log 2 + 2/m} > \frac{m \log 12 - 2 \log m}{1 + \log 2 + 2/m}$$

и оценка (5.12) при $m \geq 8$ вытекает из монотонного возрастания функции

$$\Delta(m) = (m \log 12 - 2 \log m) - m \left(1 + \log 2 + \frac{2}{m} \right) = m(\log 6 - 1) - 2 \log m - 2$$

и положительности ее значения $\Delta(8) \approx 0.17519$ при $m = 8$. Теорема доказана.

Фактически мы доказали оценку (5.11) для всех нечетных $a \geq 3$, за исключением конечного множества $12^3 + 1 = 1729 \leq a \leq 1969$.

Список литературы

1. *Apéry R.* Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$ // *Astérisque*. 1979. V. 61. P. 11–13.
2. *Van der Poorten A.* A proof that Euler missed... Apéry's proof of the irrationality of $\zeta(3)$. An informal report // *Math. Intelligencer*. 1978/79. V. 1. № 4. P. 195–203.
3. *Beukers F.* A note on the irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$ // *Bull. London Math. Soc.* 1979. V. 11. P. 268–272.
4. *Гутник Л. А.* Об иррациональности некоторых величин, содержащих $\zeta(3)$ // *УМН*. 1979. Т. 34. № 3. С. 190; // *Acta Arith.* 1983. V. 42. № 3. P. 255–264.
5. *Beukers F.* Padé approximations in number theory // *Lecture Notes in Math.* V. 888. Berlin: Springer-Verlag, 1981. P. 90–99.
6. *Beukers F.* Irrationality proofs using modular forms // *Astérisque*. 1987. V. 147–148. P. 271–283.
7. *Сорокин В. Н.* Аппроксимации Эрмита–Паде для систем Никишина и иррациональность $\zeta(3)$ // *УМН*. 1994. Т. 49. № 2. С. 167–168.
8. *Нестеренко Ю. В.* Некоторые замечания о $\zeta(3)$ // *Матем. заметки*. 1996. Т. 59. № 6. С. 865–880.
9. *Hata M.* A new irrationality measure for $\zeta(3)$ // *Acta Arith.* 2000. V. 92. № 1. P. 47–57.
10. *Rhin G., Viola C.* The group structure for $\zeta(3)$ // *Acta Arith.* 2001. V. 97. № 3. P. 269–293.
11. *Vasilyev D. V.* On small linear forms for the values of the Riemann zeta-function at odd points. Preprint № 1 (558). Minsk: Nat. Acad. Sci. Belarus, Institute Math., 2001.
12. *Ball K.* Diophantine approximation of hypergeometric numbers. Preprint, 2000.
13. *Rivoal T.* La fonction zêta de Riemann prend une infinité de valeurs irrationnelles aux entiers impairs // *C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. Math.* 2000. V. 331. № 4. P. 267–270; // <http://arXiv.org/abs/math/0008051>.
14. *Rivoal T.* Propriétés diophantiennes des valeurs de la fonction zêta de Riemann aux entiers impairs. Thèse de Doctorat. Caen: Univ. de Caen, 2001.
15. *Ball K., Rivoal T.* Irrationalité d'une infinité de valeurs de la fonction zêta aux entiers impairs // *Invent. Math.* 2001. V. 146. № 1. P. 193–207.
16. *Нестеренко Ю. В.* О линейной независимости чисел // *Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика*. 1985. № 1. С. 46–54.
17. *Хессами Пилеруд Т. Г.* Арифметические свойства значений гипергеометрических функций: Дис. . . канд. физ.-матем. наук. М.: МГУ, 1999; О линейной независимости векторов с полилогарифмическими координатами // *Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика*. 1999. № 6. С. 54–56.
18. *Рухадзе Е. А.* Оценка снизу приближения $\ln 2$ рациональными числами // *Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика*. 1987. № 6. С. 25–29.
19. *Зудилин В. В.* Об иррациональности значений дзета-функции в нечетных точках // *УМН*. 2001. Т. 56. № 2. С. 215–216.
20. *Никишин Е. М.* Об иррациональности значений функций $F(x, s)$ // *Матем. сб.* 1979. Т. 109. № 3. С. 410–417.
21. *Нестеренко Ю. В.* Диофантовы приближения к дзета-функции Римана // Доклад на научно-исследовательском семинаре по теории чисел (4 октября 2000 г.). М.: МГУ, 2000.
22. *Ленг С.* Введение в теорию модулярных форм. М.: Мир, 1979.
23. *Де Брёйен Н. Г.* Асимптотические методы в анализе. М.: ИЛ, 1961.
24. *Yoshida M.* Hypergeometric function, my love. *Aspects of Math.* V. E32. Wiesbaden: Vieweg, 1997.
25. *Chudnovsky G. V.* On the method of Thue–Siegel // *Ann. of Math. (2)*. 1983. V. 117. № 2. P. 325–382.
26. *Hata M.* Legendre type polynomials and irrationality measures // *J. Reine Angew. Math.* 1990. V. 407. № 1. P. 99–125.
27. *Люк Ю.* Специальные математические функции и их аппроксимации. М.: Мир, 1980.

28. *Зудилин В. В.* Одно из чисел $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$, $\zeta(11)$ иррационально // УМН. 2001. Т. 56. № 4. С. 149–150.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: wadim@ips.ras.ru

Поступило в редакцию
24.IV.2001