Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Лапин, $(DA)_\infty$ -модули над $(DA)_\infty$ -алгебрами и спектральные последовательности, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2002, том 66, выпуск 3, 103–130

DOI: <https://doi.org/10.4213/im388>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 18:26:53

УДК 513.83

С. В. Лапин

**$(DA)_\infty$ -модули над $(DA)_\infty$ -алгебрами
и спектральные последовательности**

Введена конструкция $(DA)_\infty$ -(ко)модуля над $(DA)_\infty$ -(ко)алгеброй и изучены основные гомотопические свойства этой конструкции. Установлена связь между $(DA)_\infty$ -(ко)модулями над $(DA)_\infty$ -(ко)алгебрами и спектральными последовательностями, которая позволила построить структуру A_∞ -комодуля над A_∞ -коалгеброй Милнора на гомологиях любого спектра непосредственно из дифференциалов спектральной последовательности Адамса этого спектра.

Библиография: 8 наименований.

В работах [1]–[3] на гомологиях любого топологического пространства была введена структура A_∞ -коалгебры над A_∞ -комонадой $\overline{E}_*$, где $\overline{E}_*$ – это гомологии комонады $\overline{E}$, определяемой Σ -свободной и ациклической операдой E . Следствием этой структуры является существование на гомологиях произвольного топологического пространства структуры A_∞ -комодуля над A_∞ -коалгеброй Милнора. Основным свойством структуры A_∞ -комодуля над A_∞ -коалгеброй Милнора на гомологиях топологического пространства является то, что гомологии ко- B -конструкции этого A_∞ -комодуля над A_∞ -коалгеброй Милнора изоморфны предельному члену спектральной последовательности Адамса для вычисления стабильных гомотопических групп рассматриваемого топологического пространства. Существование этого изоморфизма говорит о том, что структура A_∞ -комодуля над A_∞ -коалгеброй Милнора на гомологиях топологического пространства определяет дифференциалы спектральной последовательности Адамса этого пространства как дифференциалы спектральной последовательности для вычисления гомологий ко- B -конструкции A_∞ -комодуля над A_∞ -коалгеброй.

Настоящая работа посвящена решению обратной задачи, а именно решению задачи построения структуры A_∞ -комодуля над A_∞ -коалгеброй Милнора на гомологиях любого топологического пространства непосредственно из дифференциалов спектральной последовательности Адамса этого пространства. Более того, при помощи методов, развитых в этой работе, решается задача построения структуры A_∞ -комодуля над A_∞ -коалгеброй Милнора на гомологиях произвольного спектра. Главным свойством этой структуры является то, что гомологии ко- B -конструкции A_∞ -комодуля гомологий произвольного спектра над A_∞ -коалгеброй Милнора изоморфны предельному члену спектральной последовательности Адамса для вычисления p -примарных компонент гомотопических групп этого

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 00-01-00411).

спектра. Для решения указанных задач в настоящей работе была введена конструкция $(DA)_\infty$ -(ко)модуля над $(DA)_\infty$ -(ко)алгеброй и изучены гомотопические свойства $(DA)_\infty$ -(ко)модулей над $(DA)_\infty$ -(ко)алгебрами. Основным результатом работы является теорема 5.1, которая устанавливает связь между $(DA)_\infty$ -модулями над $(DA)_\infty$ -алгебрами и спектральными последовательностями. Эта связь, применяемая к спектральной последовательности Адамса, позволила построить на гомологиях произвольного спектра структуру A_∞ -комодуля над A_∞ -коалгеброй Милнора непосредственно из дифференциалов спектральной последовательности Адамса этого спектра.

§ 1. $D_\infty^{(s)}$ -модули и $D_\infty^{(s)}$ -(ко)алгебры

В этом параграфе напоминаются необходимые определения и утверждения из [4], [5], связанные с понятиями $D_\infty^{(s)}$ -модуля и $D_\infty^{(s)}$ -(ко)алгебры. Пусть K – коммутативное кольцо с единицей и s – некоторое фиксированное неотрицательное целое число.

Напомним сначала, что *дифференциальным K -модулем* называется произвольный K -модуль X , снабженный K -гомоморфизмом $d: X \rightarrow X$, который именуется *дифференциалом модуля X* и для которого выполнено условие $d^2 = 0$.

Отображением дифференциальных K -модулей $f: X \rightarrow Y$ называется K -линейное отображение $f: X \rightarrow Y$, удовлетворяющее условию $df = fd$.

Гомотопией между отображениями $f, g: X \rightarrow Y$ дифференциальных модулей называется K -линейное отображение $h: X \rightarrow Y$, для которого выполняется равенство $dh + hd = f - g$. При помощи понятия гомотопии между отображениями дифференциальных модулей стандартно определяется понятие гомотопической эквивалентности дифференциальных модулей.

Пусть заданы отображения дифференциальных модулей $\eta: X \rightrightarrows Y : \xi$ и гомотопия $h: X \rightarrow X$, для которых выполнены следующие условия:

$$\eta\xi = 1_Y, \quad dh + hd = \xi\eta - 1_X.$$

Рассмотренную ситуацию обычно записывают в виде $(\eta: X \rightrightarrows Y : \xi, h)$ и называют *сильной деформационной ретракцией дифференциальных модулей*. При выполнении дополнительных условий $\eta h = 0$, $h\xi = 0$, $hh = 0$ сильную деформационную ретракцию $(\eta: X \rightrightarrows Y : \xi, h)$ называют *SDR-ситуацией дифференциальных модулей*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. $D_\infty^{(s)}$ -модулем называется K -модуль X , рассматриваемый вместе с $D_\infty^{(s)}$ -дифференциалом $\{d^{i+s}\}$, т.е. рассматриваемый вместе с семейством K -гомоморфизмов $\{d^{i+s}: X \rightarrow X \mid i \in \mathbb{Z}, i \geq 0\}$, которые для каждого целого числа $k \geq 0$ удовлетворяют следующему соотношению:

$$\sum_{i+j=k} d^{i+s} d^{j+s} = 0.$$

Легко видеть, что если задан $D_\infty^{(s)}$ -модуль X , то K -модуль X , рассматриваемый вместе с K -гомоморфизмом $d^s: X \rightarrow X$, является дифференциальным модулем, поскольку выполнено соотношение $d^s d^s = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Морфизмом $D_{\infty}^{(s)}$ -модулей $f: X \rightarrow Y$ называется семейство K -гомоморфизмов $f = \{f^i: X \rightarrow Y \mid i \in \mathbb{Z}, i \geq 0\}$, удовлетворяющих для каждого целого числа $k \geq 0$ следующему соотношению:

$$\sum_{i+j=k} f^i d^{j+s} = \sum_{i+j=k} d^{i+s} f^j.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Под (s) -гомотопией $h: X \rightarrow Y$ между заданными морфизмами $D_{\infty}^{(s)}$ -модулей $f, g: X \rightarrow Y$ понимается такое семейство K -гомоморфизмов $h = \{h^{i-s}: X \rightarrow Y \mid i \in \mathbb{Z}, i \geq 0\}$, что для любого целого числа $k \geq 0$ выполнено следующее соотношение:

$$\sum_{i+j=k} d^{i+s} h^{j-s} + h^{j-s} d^{i+s} = f^k - g^k.$$

Напомним теперь основные гомотопические свойства $D_{\infty}^{(s)}$ -модулей. Пусть заданы морфизмы $D_{\infty}^{(s)}$ -модулей $\eta: X \rightrightarrows Y: \xi$ и задана (s) -гомотопия $h: X \rightarrow X$ между морфизмами $D_{\infty}^{(s)}$ -модулей, для которых выполнены следующие условия:

$$\sum_{i+j=k} \eta^i \xi^j = (1_Y)^k, \quad \sum_{i+j=k} d^{i+s} h^{j-s} + h^{i-s} d^{j+s} = \sum_{i+j=k} \xi^i \eta^j - (1_X)^k, \quad k \geq 0.$$

Морфизмы $\eta: X \rightrightarrows Y: \xi$ и (s) -гомотопия $h: X \rightarrow X$, удовлетворяющие перечисленным выше условиям, записываются в виде $(\eta: X \rightrightarrows Y: \xi, h)$ и называются *сильной деформационной ретракцией $D_{\infty}^{(s)}$ -модулей*. При выполнении дополнительных условий

$$\sum_{i+j=k} \eta^i h^{j-s} = 0, \quad \sum_{i+j=k} h^{i-s} \xi^j = 0, \quad \sum_{i+j=k} h^{i-s} h^{j-s} = 0, \quad k \geq 0,$$

указанная сильная деформационная ретракция $D_{\infty}^{(s)}$ -модулей называется *SDR-ситуацией $D_{\infty}^{(s)}$ -модулей*.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть заданы произвольные $D_{\infty}^{(s)}$ -модуль X и дифференциальный модуль Y . Кроме того, пусть задана произвольная сильная деформационная ретракция $(\eta: (X, d^s) \rightrightarrows (Y, d): \xi, h)$ дифференциальных модулей. Тогда семейство гомоморфизмов $\{d^{i+s}: Y \rightarrow Y\}$, определяемых формулами

$$d^s = d, \quad d^{i+s} = \eta \left(\sum_{\substack{1 \leq k \leq i \\ i_1 + \dots + i_k = i \\ i_1 \geq 1, \dots, i_k \geq 1}} d^{i_1+s} \underbrace{(h d^{i_2+s}) \dots (h d^{i_k+s})}_{k-1} \right) \xi, \quad i \geq 1, \quad (1.1)$$

является $D_\infty^{(s)}$ -дифференциалом модуля Y . Более того, имеется сильная деформационная ретракция $D_\infty^{(s)}$ -модулей $(\{\eta^i\}: (X, d^{i+s}) \rightrightarrows (Y, d^{i+s}) : \{\xi^i\}, \{h^{i-s}\})$, где

$$\xi^0 = \xi, \quad \xi^i = h \left(\sum_{\substack{1 \leq k \leq i \\ i_1 + \dots + i_k = i \\ i_1 \geq 1, \dots, i_k \geq 1}} d^{i_1+s} \underbrace{(hd^{i_2+s}) \dots (hd^{i_k+s})}_{k-1} \right) \xi, \quad i \geq 1, \quad (1.2)$$

$$\eta^0 = \eta, \quad \eta^i = \eta \left(\sum_{\substack{1 \leq k \leq i \\ i_1 + \dots + i_k = i \\ i_1 \geq 1, \dots, i_k \geq 1}} d^{i_1+s} \underbrace{(hd^{i_2+s}) \dots (hd^{i_k+s})}_{k-1} \right) h, \quad i \geq 1, \quad (1.3)$$

$$h^{-s} = h, \quad h^{i-s} = h \left(\sum_{\substack{1 \leq k \leq i \\ i_1 + \dots + i_k = i \\ i_1 \geq 1, \dots, i_k \geq 1}} d^{i_1+s} \underbrace{(hd^{i_2+s}) \dots (hd^{i_k+s})}_{k-1} \right) h, \quad i \geq 1. \quad (1.4)$$

Если сильная деформационная ретракция $(\eta: (X, d^s) \rightrightarrows (Y, d) : \xi, h)$ является SDR-ситуацией дифференциальных модулей, то сильная деформационная ретракция $(\{\eta^i\}: (X, d^{i+s}) \rightrightarrows (Y, d^{i+s}) : \{\xi^i\}, \{h^{i-s}\})$, получаемая по формулам (1.1)–(1.4), является SDR-ситуацией $D_\infty^{(s)}$ -модулей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. $D_\infty^{(s)}$ -модуль X будем называть *стабильным*, если для каждого элемента $x \in X$ найдется номер $k \geq 0$, зависящий от элемента x , для которого выполнены следующие условия: $d^{i+s}(x) = 0$, $i > k$. Модулем гомологий $H(X)$ стабильного $D_\infty^{(s)}$ -модуля X называется модуль гомологий $\text{Ker } D_s / \text{Im } D_s$ модуля X относительно его суммарного дифференциала

$$D_s = (d^s + d^{1+s} + \dots + d^{i+s} + \dots): X \rightarrow X.$$

Подчеркнем, что суммарный дифференциал корректно определен только в случае стабильных $D_\infty^{(s)}$ -модулей. Кроме того, легко видеть, что если в условиях теоремы 1.1 заданный $D_\infty^{(s)}$ -модуль X является стабильным, то $D_\infty^{(s)}$ -модуль Y , получаемый по формулам (1.1)–(1.4), также является стабильным.

Напомним теперь, что *дифференциальной K -алгеброй* (X, d, π) называется $\mathbb{Z}$ -градуированный дифференциальный K -модуль (X, d) , где $d: X_n \rightarrow X_{n-1}$, который снабжен цепным ассоциативным умножением $\pi: X \otimes X \rightarrow X$.

Отображением дифференциальных алгебр $f: (X, d, \pi) \rightarrow (Y, d, \pi)$ называется цепное отображение $f: X \rightarrow Y$, для которого выполнено условие $f\pi = \pi(f \otimes f)$.

Дифференциальной гомотопией между отображениями дифференциальных алгебр $f, g: (X, d, \pi) \rightarrow (Y, d, \pi)$ называется гомотопия $h: X \rightarrow Y$ между отображениями дифференциальных модулей $f, g: (X, d) \rightarrow (Y, d)$, для которой выполнено условие $h\pi = \pi(h \otimes f + g \otimes h)$.

Пусть заданы дифференциальные алгебры X, Y и задана SDR-ситуация дифференциальных модулей $(\eta: X \rightrightarrows Y : \xi, h)$, где $\eta: X \rightrightarrows Y : \xi$ являются отображениями

дифференциальных алгебр, а гомотопия $h: X \rightarrow X$ является гомотопией между отображениями $\xi\eta$ и 1_X дифференциальных алгебр. Указанную SDR-ситуацию $(\eta: X \rightrightarrows Y: \xi, h)$ будем называть SDR-ситуацией дифференциальных алгебр.

Двойственным образом определяются понятия дифференциальной коалгебры, отображения дифференциальных коалгебр, дифференциальной гомотопии между отображениями дифференциальных коалгебр и SDR-ситуации дифференциальных коалгебр.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5. Градуированная ассоциативная K -алгебра (X, π) называется $D_{\infty}^{(s)}$ -алгеброй, если градуированный K -модуль $X = \{X_n\}$, $n \in \mathbb{Z}$, снабжен таким $D_{\infty}^{(s)}$ -дифференциалом $\{d^{i+s}: X_{\bullet} \rightarrow X_{\bullet-1}\}$, что каждая компонента d^{i+s} этого $D_{\infty}^{(s)}$ -дифференциала является дифференцированием алгебры (X, π) , т.е. для каждого $i \geq 0$ выполнено условие

$$d^{i+s}\pi = \pi(d^{i+s} \otimes 1 + 1 \otimes d^{i+s}).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6. Под морфизмом $f: X \rightarrow Y$ заданных $D_{\infty}^{(s)}$ -алгебр понимают такой морфизм $D_{\infty}^{(s)}$ -модулей $f: X_{\bullet} \rightarrow Y_{\bullet}$, что для каждого целого числа $i \geq 0$ выполнено следующее условие:

$$f^i\pi = \sum_{k+m=i} \pi(f^k \otimes f^m).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.7. (s) -гомотопией между заданными морфизмами $D_{\infty}^{(s)}$ -алгебр $f, g: X \rightarrow Y$ будем называть (s) -гомотопию $h: X_{\bullet} \rightarrow Y_{\bullet+1}$ между морфизмами $D_{\infty}^{(s)}$ -модулей $f, g: X \rightarrow Y$, для которой выполнено следующее условие:

$$h^{i-s}\pi = \sum_{k+m=i} \pi(h^{k-s} \otimes f^m + g^k \otimes h^{m-s}), \quad i \geq 0.$$

Рассмотрим теперь гомотопические свойства $D_{\infty}^{(s)}$ -алгебр. Пусть заданы произвольные $D_{\infty}^{(s)}$ -алгебры X, Y и SDR-ситуация $D_{\infty}^{(s)}$ -модулей $(\eta: X \rightrightarrows Y: \xi, h)$, где морфизмы η, ξ являются морфизмами $D_{\infty}^{(s)}$ -алгебр, а гомотопия h является гомотопией между морфизмами $D_{\infty}^{(s)}$ -алгебр $\xi\eta$ и 1_X . Такую SDR-ситуацию $D_{\infty}^{(s)}$ -модулей будем называть SDR-ситуацией $D_{\infty}^{(s)}$ -алгебр.

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть заданы $D_{\infty}^{(s)}$ -алгебра X , дифференциальная алгебра Y и любая SDR-ситуация $(\eta: (X, d^s, \pi) \rightrightarrows (Y, d, \pi): \xi, h)$ дифференциальных алгебр. Тогда формулы (1.1)–(1.4) задают на алгебре (Y, π) структуру $D_{\infty}^{(s)}$ -алгебры и определяют SDR-ситуацию $D_{\infty}^{(s)}$ -алгебр

$$(\{\eta^i\}: (X, d^{i+s}, \pi) \rightrightarrows (Y, d^{i+s}, \pi): \{\xi^i\}, \{h^{i-s}\}),$$

где $d^s = d$, $\eta^0 = \eta$, $\xi^0 = \xi$, $h^{-s} = h$.

Двойственным образом определяются понятия $D_{\infty}^{(s)}$ -коалгебры, морфизма между $D_{\infty}^{(s)}$ -коалгебрами, (s) -гомотопии между морфизмами $D_{\infty}^{(s)}$ -коалгебр и SDR-ситуации $D_{\infty}^{(s)}$ -коалгебр.

Аналогом теоремы 1.2 для $D_{\infty}^{(s)}$ -коалгебр является следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть заданы $D_\infty^{(s)}$ -коалгебра X и дифференциальная градуированная коалгебра Y . Кроме того, пусть задана произвольная SDR-ситуация $(\eta: (X, d^s, \nabla) \rightrightarrows (Y, d, \nabla) : \xi, h)$ дифференциальных коалгебр. Тогда формулы (1.1)–(1.4) определяют на коалгебре (Y, ∇) структуру $D_\infty^{(s)}$ -коалгебры и задают SDR-ситуацию $D_\infty^{(s)}$ -коалгебр

$$(\{\eta^i\}: (X, d^{i+s}, \nabla) \rightrightarrows (Y, d^{i+s}, \nabla) : \{\xi^i\}, \{h^{i-s}\}),$$

где $d^s = d$, $\eta^0 = \eta$, $\xi^0 = \xi$, $h^{-s} = h$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.8. $D_\infty^{(s)}$ -алгебру X будем называть *стабильной*, если $D_\infty^{(s)}$ -модуль X является стабильным. Аналогично, $D_\infty^{(s)}$ -коалгебру X будем называть *стабильной*, если $D_\infty^{(s)}$ -модуль X является стабильным.

Легко видеть, что любая стабильная $D_\infty^{(s)}$ -алгебра X определяет дифференциальную алгебру (X, D_s, π) , где D_s – это суммарный дифференциал $D_\infty^{(s)}$ -модуля X . Аналогично, любая стабильная $D_\infty^{(s)}$ -коалгебра X определяет дифференциальную коалгебру (X, D_s, ∇) .

§ 2. $D_\infty^{(s)}$ -(ко)модули над $D_\infty^{(s)}$ -(ко)алгебрами

В этом параграфе вводится понятие $D_\infty^{(s)}$ -(ко)модуля над $D_\infty^{(s)}$ -(ко)алгеброй, который является $D_\infty^{(s)}$ -аналогом понятия дифференциального (ко)модуля над дифференциальной (ко)алгеброй, и устанавливаются основные гомотопические свойства $D_\infty^{(s)}$ -модулей над $D_\infty^{(s)}$ -(ко)алгебрами.

Пусть K – коммутативное кольцо с единицей. Напомним сначала, что *левым дифференциальным модулем над дифференциальной K -алгеброй* (A, d, π) называется градуированный дифференциальный K -модуль (X, d) , $X = \{X_n\}$, $n \in \mathbb{Z}$, $d: X_n \rightarrow X_{n-1}$, снабженный цепным отображением $\mu: A \otimes X \rightarrow X$, для которого выполнено условие $\mu(\pi \otimes 1) = \mu(1 \otimes \mu)$. Аналогично определяется *правый дифференциальный модуль над дифференциальной алгеброй*.

Отображением $f: X \rightarrow X'$ левого дифференциального модуля X над дифференциальной алгеброй A в левый дифференциальный модуль X' над дифференциальной алгеброй A' называется пара отображений $f = (\check{f}, \hat{f})$, где $\hat{f}: X \rightarrow X'$ – отображение дифференциальных K -модулей, $\check{f}: A \rightarrow A'$ – отображение дифференциальных K -алгебр, для которых выполнено условие $\mu'(\check{f} \otimes \hat{f}) = \hat{f}\mu$. Аналогично определяется *отображение правых дифференциальных модулей над дифференциальными алгебрами*.

Гомотопией $h: X \rightarrow X'$ между отображениями $f, g: X \rightarrow X'$ из левого дифференциального модуля X над дифференциальной алгеброй A в левый дифференциальный модуль X' над дифференциальной алгеброй A' называется пара гомотопий $h = (\check{h}, \hat{h})$, где $\hat{h}: X \rightarrow X'$ – гомотопия между отображениями $\hat{f}, \hat{g}: X \rightarrow X'$ дифференциальных K -модулей, $\check{h}: A \rightarrow A'$ – гомотопия между отображениями $\check{f}, \check{g}: A \rightarrow A'$ дифференциальных K -алгебр, для которых выполнено условие $\hat{h}\mu = \mu'(\check{h} \otimes \hat{f} + \check{g} \otimes \hat{h})$. Аналогично определяется *гомотопия между отображениями правых дифференциальных модулей над дифференциальными алгебрами*.

Пусть заданы левые дифференциальные модули X и X' соответственно над дифференциальными алгебрами A и A' . Кроме того, пусть заданы отображения $\eta: X \rightarrow X'$, $\xi: X' \rightarrow X$ дифференциальных модулей над дифференциальными алгебрами и задана гомотопия $h: X \rightarrow X$ между отображениями дифференциальных модулей над дифференциальными алгебрами, для которых выполнены условия $\eta\xi = 1$, $dh + hd = \xi\eta - 1$, $\eta h = 0$, $h\xi = 0$, $hh = 0$. Рассмотренную ситуацию будем записывать в виде $(\eta: X \rightrightarrows X': \xi, h)$ и называть SDR-ситуацией левых дифференциальных модулей над дифференциальными алгебрами. Аналогично определяется понятие SDR-ситуации для правых дифференциальных модулей над дифференциальными алгебрами.

Ясно, что SDR-ситуация $(\eta: X \rightrightarrows X': \xi, h)$ дифференциальных модулей над дифференциальными алгебрами определяет SDR-ситуацию $(\hat{\eta}: X \rightrightarrows X': \hat{\xi}, \hat{h})$ дифференциальных K -модулей и SDR-ситуацию $(\check{\eta}: A \rightrightarrows A': \check{\xi}, \check{h})$ дифференциальных алгебр.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. *Левым $D_{\infty}^{(s)}$ -модулем над $D_{\infty}^{(s)}$ -алгеброй (A, d^{i+s}, π) называется левый градуированный модуль (X, μ) над градуированной алгеброй (A, π) , снабженный $D_{\infty}^{(s)}$ -дифференциалом $\{d^{i+s}: X_{\bullet} \rightarrow X_{\bullet-1}\}$, компоненты которого для каждого $i \geq 0$ удовлетворяют следующему условию:*

$$d^{i+s}\mu = \mu(d^{i+s} \otimes 1 + 1 \otimes d^{i+s}).$$

Аналогично определяется понятие *правого $D_{\infty}^{(s)}$ -модуля над $D_{\infty}^{(s)}$ -алгеброй*.

Легко видеть, что тройка (X, d^s, μ) является дифференциальным модулем над дифференциальной алгеброй (A, d^s, π) , поскольку выполнены соотношения $d^s d^s = 0$, $d^s \mu = \mu(d^s \otimes 1 + 1 \otimes d^s)$ и $d^s \pi = \pi(d^s \otimes 1 + 1 \otimes d^s)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. *Морфизмом $f: X \rightarrow X'$ из левого $D_{\infty}^{(s)}$ -модуля X над $D_{\infty}^{(s)}$ -алгеброй A в левый $D_{\infty}^{(s)}$ -модуль X' над $D_{\infty}^{(s)}$ -алгеброй A' называется такая пара морфизмов $f = (\check{f}, \hat{f})$, где $\hat{f} = \{\hat{f}^i: X \rightarrow X'\}$ – морфизм $D_{\infty}^{(s)}$ -модулей над K , $\check{f} = \{\check{f}^i: A \rightarrow A'\}$ – морфизм $D_{\infty}^{(s)}$ -алгебр над K , что для каждого $i \geq 0$ выполнено условие*

$$\hat{f}^i \mu = \sum_{k+m=i} \mu'(\check{f}^k \otimes \hat{f}^m).$$

Аналогично определяется понятие *морфизма правых $D_{\infty}^{(s)}$ -модулей над $D_{\infty}^{(s)}$ -алгебрами*.

Ясно, что пара $f^0 = (\check{f}^0, \hat{f}^0): X \rightarrow X'$ является отображением из дифференциального модуля (X, d^s, μ) над дифференциальной алгеброй (A, d^s, π) в дифференциальный модуль (X', d^s, μ') над дифференциальной алгеброй (A', d^s, π') , поскольку выполнены условия $d^s \hat{f}^0 = \hat{f}^0 d^s$, $d^s \check{f}^0 = \check{f}^0 d^s$, $\hat{f}^0 \mu = \mu'(\check{f}^0 \otimes \hat{f}^0)$ и $\check{f}^0 \pi = \pi'(\check{f}^0 \otimes \check{f}^0)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. *(s)-гомотопией $h: X \rightarrow X'$ между заданными морфизмами $f, g: X \rightarrow X'$ из левого $D_{\infty}^{(s)}$ -модуля X над $D_{\infty}^{(s)}$ -алгеброй A в левый $D_{\infty}^{(s)}$ -модуль X' над $D_{\infty}^{(s)}$ -алгеброй A' называется пара (s)-гомотопий $h =$*

$(\check{h}, \hat{h})$, где $\hat{h} = \{\hat{h}^{i-s}: X \rightarrow X'\} - (s)$ -гомотопия между морфизмами $D_\infty^{(s)}$ -модулей $\hat{f} = \{\hat{f}^i\}$ и $\hat{g} = \{\hat{g}^i\}$, $\check{h} = \{\check{h}^{i-s}: A \rightarrow A'\} - (s)$ -гомотопия между морфизмами $D_\infty^{(s)}$ -алгебр $\check{f} = \{\check{f}^i\}$ и $\check{g} = \{\check{g}^i\}$, для которых выполнено условие

$$\hat{h}^{i-s}\mu = \sum_{k+m=i} \mu'(\check{h}^{k-s} \otimes \hat{f}^m + \check{g}^k \otimes \hat{h}^{m-s}).$$

Аналогично определяется (s) -гомотопия между морфизмами правых $D_\infty^{(s)}$ -модулей над $D_\infty^{(s)}$ -алгебрами.

Легко видеть, что пара гомотопий $h^{-s} = (\check{h}^{-s}, \hat{h}^{-s})$ является гомотопией между отображениями $f^0 = (\check{f}^0, \hat{f}^0)$ и $g^0 = (\check{g}^0, \hat{g}^0)$ из дифференциального модуля (X, d^s, μ) над дифференциальной алгеброй (A, d^s, π) в дифференциальный модуль (X', d^s, μ') над дифференциальной алгеброй (A', d^s, π') .

Опишем гомотопические свойства $D_\infty^{(s)}$ -модулей над $D_\infty^{(s)}$ -алгебрами. Пусть заданы левые $D_\infty^{(s)}$ -модули X и X' соответственно над $D_\infty^{(s)}$ -алгебрами A и A' . Кроме того, пусть заданы морфизмы $\eta: X \rightarrow X'$, $\xi: X' \rightarrow X$ $D_\infty^{(s)}$ -модулей над $D_\infty^{(s)}$ -алгебрами и (s) -гомотопия $h: X \rightarrow X$ между морфизмами $D_\infty^{(s)}$ -модулей над $D_\infty^{(s)}$ -алгебрами, для которых выполнены условия

$$\begin{aligned} \sum_{i+j=k} \eta^i \xi^j &= 1^k, \quad \sum_{i+j=k} d^{i+s} h^{j-s} + h^{i-s} d^{j+s} = \sum_{i+j=k} \xi^i \eta^j - 1^k, \quad k \geq 0, \\ \sum_{i+j=k} \eta^i h^{j-s} &= 0, \quad \sum_{i+j=k} h^{i-s} \xi^j = 0, \quad \sum_{i+j=k} h^{i-s} h^{j-s} = 0, \quad k \geq 0, \end{aligned}$$

где $\eta^i = (\check{\eta}^i, \hat{\eta}^i)$, $\xi^i = (\check{\xi}^i, \hat{\xi}^i)$, $h^{i-s} = (\check{h}^{i-s}, \hat{h}^{i-s})$.

Рассмотренную ситуацию будем записывать в виде $(\eta: X \rightrightarrows X' : \xi, h)$ и называть SDR-ситуацией левых $D_\infty^{(s)}$ -модулей над $D_\infty^{(s)}$ -алгебрами. Аналогично определяется SDR-ситуация правых $D_\infty^{(s)}$ -модулей над $D_\infty^{(s)}$ -алгебрами.

Ясно, что SDR-ситуация $D_\infty^{(s)}$ -модулей над $D_\infty^{(s)}$ -алгебрами $(\eta: X \rightrightarrows X' : \xi, h)$ определяет SDR-ситуацию $D_\infty^{(s)}$ -модулей $(\hat{\eta}: X \rightrightarrows X' : \hat{\xi}, \hat{h})$ и SDR-ситуацию $D_\infty^{(s)}$ -алгебр $(\check{\eta}: A \rightrightarrows A' : \check{\xi}, \check{h})$.

Прямыми вычислениями проверяется, что для $D_\infty^{(s)}$ -модулей над $D_\infty^{(s)}$ -алгебрами при цепных гомотопических эквивалентностях типа SDR-ситуаций дифференциальных модулей над дифференциальными алгебрами справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть задан дифференциальный модуль X' над дифференциальной алгеброй A' , и пусть задан $D_\infty^{(s)}$ -модуль X над $D_\infty^{(s)}$ -алгеброй A . Кроме того, пусть задана произвольная SDR-ситуация $(\eta: (X, d^s) \rightrightarrows (X', d) : \xi, h)$ дифференциальных модулей над дифференциальными алгебрами. Тогда формулы (1.1)–(1.4), примененные к SDR-ситуации $(\hat{\eta}: (X, d^s) \rightrightarrows (X', d) : \hat{\xi}, \hat{h})$ дифференциальных модулей и к SDR-ситуации $(\check{\eta}: (A, d^s) \rightrightarrows (A', d) : \check{\xi}, \check{h})$ дифференциальных алгебр, определяют на градуированном модуле (X', μ') над градуированной алгеброй (A', π') структуру $D_\infty^{(s)}$ -модуля (X', d^{i+s}, μ') над $D_\infty^{(s)}$ -алгеброй (A', d^{i+s}, π') и задают SDR-ситуацию $D_\infty^{(s)}$ -модулей над $D_\infty^{(s)}$ -алгебрами $(\{\eta^i\}: X \rightrightarrows X' : \{\xi^i\}, \{h^{i-s}\})$, где $d^s = d$, $\eta^0 = \eta$, $\xi^0 = \xi$, $h^{-s} = h$.

Двойственным образом определяются понятия $D_{\infty}^{(s)}$ -комодуля над $D_{\infty}^{(s)}$ -коалгеброй, морфизма $D_{\infty}^{(s)}$ -комодулей над $D_{\infty}^{(s)}$ -коалгебрами, (s) -гомотопии между морфизмами $D_{\infty}^{(s)}$ -комодулей над $D_{\infty}^{(s)}$ -коалгебрами, а также SDR-ситуации $D_{\infty}^{(s)}$ -комодулей над $D_{\infty}^{(s)}$ -коалгебрами.

Аналогом теоремы 2.1 для $D_{\infty}^{(s)}$ -комодулей над $D_{\infty}^{(s)}$ -коалгебрами является следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть задан дифференциальный комодуль (X', d, τ') над дифференциальной коалгеброй (L', d, ∇') , и пусть задан $D_{\infty}^{(s)}$ -комодуль (X, d^{i+s}, τ) над $D_{\infty}^{(s)}$ -коалгеброй (L, d^{i+s}, ∇) . Кроме того, пусть задана любая SDR-ситуация $(\eta: (X, d^s) \rightrightarrows (X', d): \xi, h)$ дифференциальных комодулей над дифференциальными коалгебрами. Тогда формулы (1.1)–(1.4), примененные к SDR-ситуации $(\hat{\eta}: (X, d^s) \rightrightarrows (X', d): \hat{\xi}, \hat{h})$ дифференциальных модулей и к SDR-ситуации $(\check{\eta}: (X, d^s) \rightrightarrows (X', d): \check{\xi}, \check{h})$ дифференциальных коалгебр, определяют на градуированном комодуле (X', τ') над градуированной алгеброй (L', ∇') структуру $D_{\infty}^{(s)}$ -комодуля (X', d^{i+s}, τ') над $D_{\infty}^{(s)}$ -коалгеброй (L', d^{i+s}, ∇') и задают SDR-ситуацию $D_{\infty}^{(s)}$ -комодулей над $D_{\infty}^{(s)}$ -коалгебрами $(\{\eta^i\}: X \rightrightarrows X': \{\xi^i\}, \{h^{i-s}\})$, где $d^s = d$, $\eta^0 = \eta$, $\xi^0 = \xi$, $h^{-s} = h$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.7. $D_{\infty}^{(s)}$ -модуль X над $D_{\infty}^{(s)}$ -алгеброй A будем называть *стабильным*, если $D_{\infty}^{(s)}$ -алгебра A и $D_{\infty}^{(s)}$ -модуль X над K являются стабильными. Аналогично, $D_{\infty}^{(s)}$ -комодуль X над $D_{\infty}^{(s)}$ -коалгеброй L называется *стабильным*, если $D_{\infty}^{(s)}$ -коалгебра L и $D_{\infty}^{(s)}$ -модуль X над K являются стабильными.

Ясно, что если задан стабильный $D_{\infty}^{(s)}$ -модуль (X, d^{i+s}, μ) над $D_{\infty}^{(s)}$ -алгеброй (A, d^{i+s}, π) , то определен дифференциальный модуль (X, D_s, μ) над дифференциальной алгеброй (A, D_s, π) , где дифференциал D_s является соответственно суммарным дифференциалом для $D_{\infty}^{(s)}$ -модуля (X, d^{i+s}) и для $D_{\infty}^{(s)}$ -модуля (A, d^{i+s}) .

§ 3. (DA) $_{\infty}^{(s)}$ -(ко)алгебры

В этом параграфе напоминаются необходимые понятия и утверждения из [5], связанные с конструкцией $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -(ко)алгебры.

Пусть заданы любые градуированные $D_{\infty}^{(s)}$ -модули X и Y , где компоненты $D_{\infty}^{(s)}$ -дифференциалов имеют степени (-1) . На градуированном модуле $X \otimes Y$ введем $D_{\infty}^{(s)}$ -дифференциал $\{d^{i+s}: (X \otimes Y)_{\bullet} \rightarrow (X \otimes Y)_{\bullet-1} \mid i \geq 0\}$, полагая $d^{i+s} = d_X^{i+s} \otimes 1 + 1 \otimes d_Y^{i+s}$ со стандартным соглашением о знаках при вычислениях. В частности, для каждого градуированного $D_{\infty}^{(s)}$ -модуля X и любого $n \geq 1$ определен градуированный $D_{\infty}^{(s)}$ -модуль $X^{\otimes n}$.

Рассмотрим понятие $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -алгебры, которое является $D_{\infty}^{(s)}$ -аналогом введенного в [6] понятия дифференциальной A_{∞} -алгебры. Пусть K – произвольное коммутативное кольцо с единицей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Градуированный $D_{\infty}^{(s)}$ -модуль (X, d^{i+s}) над K , где $s \geq 1$,

рассматриваемый вместе с семейством K -гомоморфизмов

$$\left\{ \pi_n^{-(n+1)+i+s} : \right. \\ \left. X^{\otimes(n+2)} \longrightarrow X \mid \pi_n^{-(n+1)+i+s}((X^{\otimes(n+2)})_{\bullet}) \subseteq X_{\bullet+n}, \ n \geq 0, \ i \geq 0 \right\},$$

называется $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -алгеброй, если для любых целых чисел $n \geq 0$ и $k \geq 0$ выполнены следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \sum_{i+j=k} d^{i+s} \pi_0^{-1+j+s} &= \sum_{i+j=k} \pi_0^{-1+i+s} d^{j+s}, \\ \sum_{i+j=k} d^{i+s} \pi_{n+1}^{-(n+2)+j+s} + (-1)^n \pi_{n+1}^{-(n+2)+i+s} d^{j+s} \\ &= \sum_{i+j=k} \sum_{m=0}^n (-1)^{\nu} \pi_{n-m}^{-(n-m+1)+i+s} (1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes \pi_m^{-(m+1)+j+s} \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1), \end{aligned}$$

где сумма берется также по всем местам t , на которых может стоять $\pi_m^{-(m+1)+j+s}$; $\nu = t(m+1) + n$.

Примерами $(DA)_{\infty}^{(1)}$ -алгебр $(X, d^{i+1}, \pi_n^{-n+i})$ служат рассмотренные в § 1 $D_{\infty}^{(1)}$ -алгебры (X, d^{i+1}, π) , где $\pi_0^0 = \pi$ и $\pi_n^{-n+i} = 0$ при $(n, i) \neq (0, 0)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Морфизмом $f: X \rightarrow Y$ заданных $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -алгебр X и Y называется такое семейство K -гомоморфизмов

$$f = \{ f_n^{-n+i} : X^{\otimes(n+1)} \rightarrow Y \mid f_n^{-n+i}((X^{\otimes(n+1)})_{\bullet}) \subseteq Y_{\bullet+n}, \ n \geq 0, \ i \geq 0 \},$$

что для любых целых чисел $n \geq 0$ и $k \geq 0$ выполнены следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \sum_{i+j=k} d^{i+s} f_0^j &= \sum_{i+j=k} f_0^i d^{j+s}, \\ \sum_{i+j=k} d^{i+s} f_{n+1}^{-(n+1)+j} + (-1)^n f_{n+1}^{-(n+1)+i} d^{j+s} \\ &= \sum_{i+j=k} \sum_{m=0}^n (-1)^{\nu} f_{n-m}^{-(n-m)+i} (1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes \pi_m^{-(m+1)+j+s} \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1) \\ &\quad + \sum_{i+j=k} \sum_{m=0}^n (-1)^{n_2+n_4+\dots} \pi_m^{-(m+1)+i+s} (f_{n_1}^{-n_1+j_1} \otimes \dots \otimes f_{n_{m+2}}^{-n_{m+2}+j_{m+2}}), \end{aligned}$$

где $\nu = t(m+1) + n$, $n_1 + \dots + n_{m+2} = n - m$, $j_1 + \dots + j_{m+2} = j$, и сумма берется также по всем местам t , на которых может стоять $\pi_m^{-(m+1)+j+s}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Под (s) -гомотопией между морфизмами $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -алгебр $f, g: X \rightarrow Y$ будем понимать такое семейство K -гомоморфизмов

$$h = \{h_n^{-n+i-s}: X^{\otimes(n+1)} \rightarrow Y \mid h_n^{-n+i-s}((X^{\otimes(n+1)})_{\bullet}) \subseteq Y_{\bullet+n+1}, \quad n \geq 0, \quad i \geq 0\},$$

что для любых целых чисел $n \geq 0$, $k \geq 0$ выполнены следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \sum_{i+j=k} d^{i+s} h_0^{j-s} + h_0^{i-s} d^{j+s} &= f_0^k - g_0^k, \\ \sum_{i+j=k} d^{i+s} h_{n+1}^{-(n+1)+j-s} + (-1)^{n+1} h_{n+1}^{-(n+1)+i-s} d^{j+s} &= f_{n+1}^{-(n+1)+k} - g_{n+1}^{-(n+1)+k} \\ &+ \sum_{i+j=k} \sum_{m=0}^n (-1)^{\nu} h_{n-m}^{-(n-m)+i-s} (1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes \pi_m^{-(m+1)+j+s} \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1) \\ &+ \sum_{i+j=k} \sum_{m=0}^n (-1)^{m+1+\varepsilon(t)} \pi_m^{-(m+1)+i+s} (g_{n_1}^{-n_1+j_1} \otimes \dots \otimes g_{n_{t-1}}^{-n_{t-1}+j_{t-1}} \otimes \\ &\otimes h_{n_t}^{-n_t+j_t-s} \otimes f_{n_{t+1}}^{-n_{t+1}+j_{t+1}} \otimes \dots \otimes f_{n_{m+2}}^{-n_{m+2}+j_{m+2}}), \end{aligned}$$

где суммы берутся также по всем местам t , на которых могут стоять соответственные $\pi_m^{-(m+1)+j+s}$ и $h_{n_t}^{-n_t+j_t-s}$; $n_1 + \dots + n_{m+2} = n - m$, $j_1 + \dots + j_{m+2} = j$,

$$\varepsilon(t) = n_2 + n_4 + \dots + n_{2\lfloor \frac{t}{2} \rfloor} + n_{2\lfloor \frac{t+1}{2} \rfloor+1} + n_{2\lfloor \frac{t+1}{2} \rfloor+3} + \dots + n_{2\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor+1},$$

$$\nu = t(m+1) + n + 1.$$

Рассмотрим теперь понятие B -конструкции $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -алгебры. Пусть задана произвольная $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -алгебра X . Обозначим через $(T(SX), \nabla)$ тензорную коалгебру от надстройки SX над градуированным K -модулем X . Образующие K -модуля $T(SX)$ обозначаются через $[x_1, \dots, x_n]$, $x_i \in X$, и имеют размерность, равную сумме размерностей элементов x_i и числа n . Коумножение $\nabla: T(SX) \rightarrow T(SX) \otimes T(SX)$ градуированной коалгебры $T(SX)$ задается на образующих следующей формулой:

$$\nabla[x_1, \dots, x_n] = [\] \otimes [x_1, \dots, x_n] + \sum_{i=1}^{n-1} [x_1, \dots, x_i] \otimes [x_{i+1}, \dots, x_n] + [x_1, \dots, x_n] \otimes [\],$$

где символом $[\]$ обозначена образующая K -модуля $(SX)_0 = K$. Рассмотрим K -линейное отображение $\beta: T(SX)_{\bullet} \rightarrow X_{\bullet-1}$, которое на образующих задается следующим правилом:

$$\beta[x_1, \dots, x_n] = \begin{cases} x_1, & n = 1, \\ 0, & n > 1. \end{cases}$$

Введем $D_{\infty}^{(s)}$ -дифференциал $\{d^{i+s}: T(SX)_{\bullet} \rightarrow T(SX)_{\bullet-1} \mid i \geq 0\}$ на градуированной коалгебре $(T(SX), \nabla)$, который однозначно определяется условием того,

что каждая компонента d^{i+s} является дифференцированием коалгебры $(T(SX), \nabla)$, и условием справедливости следующего соотношения:

$$\beta d^{i+s} = -d^{i+s} \beta + \sum_{n \geq 0} \pi_n^{-(n+1)+i+s} (\beta \otimes \dots \otimes \beta) \nabla^{(n)}, \quad i \geq 0,$$

где $\nabla^{(0)} = \nabla$, $\nabla^{(n)} = (\nabla^{(n-1)} \otimes 1) \nabla$, $n \geq 1$. Таким образом, для произвольной $(DA)_\infty^{(s)}$ -алгебры $(X, d^{i+s}, \pi_n^{-(n+1)+i+s})$ определена соответствующая ей $D_\infty^{(s)}$ -коалгебра $(T(SX), d^{i+s}, \nabla)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4. $D_\infty^{(s)}$ -коалгебра $(T(SX), d^{i+s}, \nabla)$ называется *B-конструкцией* $(DA)_\infty^{(s)}$ -алгебры $(X, d^{i+s}, \pi_n^{-(n+1)+i+s})$ и обозначается $B(X)$.

Легко видеть, что введение структуры $(DA)_\infty^{(s)}$ -алгебры $(X, d^{i+s}, \pi_n^{-(n+1)+i+s})$ на градуированном модуле X эквивалентно введению на градуированной коалгебре $(T(SX), \nabla)$ структуры $D_\infty^{(s)}$ -коалгебры $\{d^{i+s}: T(SX)_\bullet \rightarrow T(SX)_{\bullet-1}\}$, где для каждого $i \geq 0$ компонента $\pi_n^{-(n+1)+i+s}: (X \otimes (n+2))_\bullet \rightarrow X_{\bullet+n}$ отождествляется с гомоморфизмом $d^{i+s}: (SX)_{\bullet+n+2}^{\otimes(n+2)} \rightarrow (SX)_{\bullet+n+1}$, $n \geq 0$, а компонента $d^{i+s}: X_\bullet \rightarrow X_{\bullet-1}$ отождествляется с гомоморфизмом $d^{i+s}: (SX)_{\bullet+1} \rightarrow (SX)_\bullet$.

Пусть задан произвольный морфизм $(DA)_\infty^{(s)}$ -алгебр $f = \{f_n^{-n+i}: X \rightarrow Y$. Семейство K -гомоморфизмов $\{f_n^{-n+i}: (X \otimes (n+1))_\bullet \rightarrow Y_{\bullet+n}\}$ определяет морфизм $D_\infty^{(s)}$ -коалгебр $B(f) = \{B(f)^i: B(X) \rightarrow B(Y)$, который однозначно задается условием справедливости следующего соотношения:

$$\beta B(f)^i = \sum_{n \geq 0} f_n^{-n+i} (\beta \otimes \dots \otimes \beta) \nabla^{(n-1)}, \quad i \geq 0.$$

Легко видеть, что задание морфизма $D_\infty^{(s)}$ -коалгебр $g = \{g^i: B(X) \rightarrow B(Y)$ равносильно заданию морфизма $(DA)_\infty^{(s)}$ -алгебр $f = \{f_n^{-n+i}: X \rightarrow Y$, где для каждого индекса $i \geq 0$ компонента $f_n^{-n+i}: (X \otimes (n+1))_\bullet \rightarrow Y_{\bullet+n}$ отождествляется с соответствующим K -гомоморфизмом $g^i: (SX)_{\bullet+n+1}^{\otimes(n+1)} \rightarrow (SY)_{\bullet+n+1}$.

Пусть задана любая (s) -гомотопия $h = \{h_n^{-n+i-s}: (X \otimes (n+1))_\bullet \rightarrow Y_{\bullet+n+1}\}$ между морфизмами $(DA)_\infty^{(s)}$ -алгебр $f = \{f_n^{-n+i}\}$, $g = \{g_n^{-n+i}\}: X \rightarrow Y$. Легко видеть, что семейство K -гомоморфизмов $\{h_n^{-n+i-s}\}$ определяет (s) -гомотопию $B(h) = \{B(h)^{i-s}: B(X)_\bullet \rightarrow B(Y)_{\bullet+1}\}$ между морфизмами $D_\infty^{(s)}$ -коалгебр $B(f)$, $B(g): B(X) \rightarrow B(Y)$, которая однозначно задается условием справедливости следующего соотношения:

$$\beta B(h)^{i-s} = - \sum_{n \geq 0} h_n^{-n+i-s} (\beta \otimes \dots \otimes \beta) \nabla^{(n-1)}, \quad i \geq 0.$$

Пусть теперь задана любая (s) -гомотопия $t = \{t^{i-s}: B(X)_\bullet \rightarrow B(Y)_{\bullet+1}\}$ между морфизмами $D_\infty^{(s)}$ -коалгебр $p = \{p^i\}$, $q = \{q^i\}: B(X) \rightarrow B(Y)$. Тогда, как было сказано выше, морфизмы p и q определяют морфизмы $(DA)_\infty^{(s)}$ -алгебр $f = \{f_n^{-n+i}\}$, $g = \{g_n^{-n+i}\}: X \rightarrow Y$. Ясно, что задание (s) -гомотопии t эквивалентно заданию (s) -гомотопии $h = \{h_n^{-n+i-s}: (X \otimes (n+1))_\bullet \rightarrow Y_{\bullet+n+1}\}$ между

морфизмами $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -алгебр $f = \{f_n^{-n+i}\}$, $g = \{g_n^{-n+i}\}: X \rightarrow Y$, где для каждого $i \geq 0$ компонента $h_n^{-n+i-s}: (X^{\otimes(n+1)})_{\bullet} \rightarrow Y_{\bullet+n+1}$ отождествляется с соответствующим гомоморфизмом $t^{i-s}: (SX)_{\bullet+n+1}^{\otimes(n+1)} \rightarrow (SY)_{\bullet+n+2}$.

Рассмотрим гомотопические свойства $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -алгебр. Пусть заданы морфизмы $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -алгебр $\eta: X \rightrightarrows Y: \xi$, для которых выполнено условие $\eta\xi = 1_Y$, и пусть задана некоторая (s) -гомотопия $h = \{h_n^{-n+i-s}: (X^{\otimes(n+1)})_{\bullet} \rightarrow X_{\bullet+n+1}\}$ между морфизмами $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -алгебр 1_X и $\xi\eta$, удовлетворяющая условиям $h\xi = 0$, $\eta h = 0$, $hh = 0$. Рассмотренную ситуацию будем называть *SDR-ситуацией* $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -алгебр.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть заданы любые $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -алгебра X и SDR-ситуация цепных комплексов $(\eta: (X, d^s) \rightrightarrows (Y, d): \xi, h)$. Тогда на Y имеется структура $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -алгебры и определена SDR-ситуация $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -алгебр $(\eta: X \rightrightarrows Y: \xi, h)$ с начальными условиями $d^s = d$, $\eta_0^0 = \eta$, $\xi_0^0 = \xi$, $h_0^{-s} = h$.

Двойственным образом определяются понятия $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -коалгебры, морфизма $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -коалгебр, (s) -гомотопии между морфизмами $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -коалгебр, SDR-ситуации $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -коалгебр, а также ко- B -конструкции $F(X) = (T(S^{-1}X), d^{i+s}, \pi)$ для заданной $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -коалгебры $(X, d^{i+s}, \nabla_n^{-(n+1)+i+s})$.

Аналогом теоремы 3.1 для $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -коалгебр является следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть заданы любые $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -коалгебра X и SDR-ситуация цепных комплексов $(\eta: (X, d^s) \rightrightarrows (Y, d): \xi, h)$. Тогда на Y имеется структура $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -коалгебры и определена SDR-ситуация $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -коалгебр $(\eta: X \rightrightarrows Y: \xi, h)$ с начальными условиями $d^s = d$, $\eta_0^0 = \eta$, $\xi_0^0 = \xi$, $h_0^{-s} = h$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.5. $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -алгебра X называется *стабильной*, если $B(X)$ является стабильной $D_{\infty}^{(s)}$ -коалгеброй. Аналогично, $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -коалгебра X называется *стабильной*, если $F(X)$ является стабильной $D_{\infty}^{(s)}$ -алгеброй.

Отметим, что если $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -алгебра X является стабильной, то $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -алгебра Y , получаемая в теореме 3.1, также является стабильной. Аналогично для $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -коалгебр, получаемых в теореме 3.2.

Легко видеть, что произвольная стабильная $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -алгебра X определяет суммарную A_{∞} -алгебру (X, D_s, π_n) , где $\pi_n: (X^{\otimes(n+2)})_{\bullet} \rightarrow X_{\bullet+n}$ задается формулой

$$\pi_n = (\pi_n^{-(n+1)+s} + \pi_n^{-(n+1)+1+s} + \dots + \pi_n^{-(n+1)+i+s} + \dots),$$

а $D_s: X_{\bullet} \rightarrow X_{\bullet-1}$ — это суммарный дифференциал $D_{\infty}^{(s)}$ -модуля X . Аналогично, любая стабильная $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -коалгебра X определяет суммарную A_{∞} -коалгебру (X, D_s, ∇_n) .

Напомним теперь (см. [6]), что заданная над произвольным полем A_{∞} -алгебра (X, d, π_n) определяет свою A_{∞} -алгебру гомологий $(H(X), d = 0, \pi_n)$. Аналогично, для заданной над любым полем A_{∞} -коалгебры (X, d, ∇_n) определена ее A_{∞} -коалгебра гомологий $(H(X), d = 0, \nabla_n)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.6. A_∞ -алгеброй гомологий $H(X)$ для заданной над полем стабильной $(DA)_\infty^{(s)}$ -алгебры X называется A_∞ -алгебра гомологий ее суммарной A_∞ -алгебры (X, D_s, π_n) . Аналогично, A_∞ -коалгеброй гомологий $H(X)$ для заданной над полем стабильной $(DA)_\infty^{(s)}$ -коалгебры X будем называть A_∞ -коалгебру гомологий ее суммарной A_∞ -коалгебры (X, D_s, ∇_n) .

§ 4. $(DA)_\infty^{(s)}$ -(ко)модули над $(DA)_\infty^{(s)}$ -(ко)алгебрами

В этом параграфе вводится конструкция $(DA)_\infty^{(s)}$ -(ко)модуля над $(DA)_\infty^{(s)}$ -(ко)-алгеброй, которая является $D_\infty^{(s)}$ -аналогом дифференциального A_∞ -(ко)модуля над дифференциальной A_∞ -(ко)алгеброй, и изучаются гомотопические свойства этой конструкции.

Пусть заданы любые градуированные $D_\infty^{(s)}$ -модули (X, d_X^{i+s}) и (Y, d_Y^{i+s}) , где компоненты $D_\infty^{(s)}$ -дифференциалов имеют степени (-1) . На градуированном модуле $X \otimes Y$ введем $D_\infty^{(s)}$ -дифференциал $\{d^{i+s}: (X \otimes Y)_\bullet \rightarrow (X \otimes Y)_{\bullet-1} \mid i \geq 0\}$, полагая $d^{i+s} = d_X^{i+s} \otimes 1 + 1 \otimes d_Y^{i+s}$ со стандартным соглашением о знаках при вычислениях. В частности, для каждого градуированного $D_\infty^{(s)}$ -модуля (X, d^{i+s}) и любого $n \geq 1$ определен градуированный $D_\infty^{(s)}$ -модуль $(X^{\otimes n}, d^{i+s})$.

Введем теперь понятие $(DA)_\infty^{(s)}$ -модуля над $(DA)_\infty^{(s)}$ -алгеброй, которое является $D_\infty^{(s)}$ -аналогом введенного в [6] понятия дифференциального A_∞ -модуля над дифференциальной A_∞ -алгеброй.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. *Левым $(DA)_\infty^{(s)}$ -модулем $(X, d^{i+s}, \mu^{-(n+1)+i+s})$ над заданной $(DA)_\infty^{(s)}$ -алгеброй $(A, d^{i+s}, \pi_n^{-(n+1)+i+s})$, где $s \geq 1$, называется градуированный $D_\infty^{(s)}$ -модуль (X, d^{i+s}) над K , рассматриваемый вместе с таким семейством K -гомоморфизмов*

$$\{\mu_n^{-(n+1)+i+s}: A^{\otimes(n+1)} \otimes X \rightarrow X \mid \mu_n^{-(n+1)+i+s}((A^{\otimes(n+1)} \otimes X)_\bullet) \subseteq X_{\bullet+n}, \quad n \geq 0, \quad i \geq 0\},$$

что для любых целых чисел $n \geq 0$ и $k \geq 0$ выполнены следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \sum_{i+j=k} d^{i+s} \mu_0^{-1+j+s} &= \sum_{i+j=k} \mu_0^{-1+i+s} d^{j+s}, \\ \sum_{i+j=k} d^{i+s} \mu_{n+1}^{-(n+2)+j+s} &+ (-1)^n \mu_{n+1}^{-(n+2)+i+s} d^{j+s} \\ &= \sum_{i+j=k} \sum_{m=0}^n (-1)^\nu \mu_{n-m}^{-(n-m+1)+i+s} (1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes \pi_m^{-(m+1)+j+s} \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1) \\ &+ \sum_{i+j=k} \sum_{m=0}^n (-1)^{nm} \mu_{n-m}^{-(n-m+1)+i+s} (1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes \mu_m^{-(m+1)+j+s}), \end{aligned}$$

где сумма берется также по всем местам t , на которых может стоять $\pi_m^{-(m+1)+j+s}$; $\nu = t(m+1) + n$. Аналогично определяется конструкция правого $(DA)_\infty^{(s)}$ -модуля над $(DA)_\infty^{(s)}$ -алгеброй.

Легко видеть, что семейство $\mu_0 = \{\mu_0^{-1+i+s}: (A \otimes X)_\bullet \rightarrow X_\bullet \mid i \geq 0\}$ является морфизмом $D_\infty^{(s)}$ -модулей, а дифференциальный K -модуль (X, d^s) , рассматриваемый вместе с набором K -гомоморфизмов $\{\mu_n^{-(n+1)+s}: A^{\otimes(n+1)} \otimes X \rightarrow X \mid n \geq 0\}$, является дифференциальным A_∞ -модулем над A_∞ -алгеброй.

Простейшими примерами $(DA)_\infty^{(1)}$ -модулей $(X, d^{i+1}, \mu_n^{-n+i})$ над $(DA)_\infty^{(1)}$ -алгебрами $(A, d^{i+1}, \pi_n^{-n+i})$ служат рассмотренные в § 2 $D_\infty^{(1)}$ -модули (X, d^{i+1}, μ) над $D_\infty^{(1)}$ -алгебрами (A, d^{i+1}, π) , где $\mu_0^0 = \mu$, $\pi_0^0 = \pi$ и $\mu_n^{-n+i} = 0$, $\pi_n^{-n+i} = 0$ при $(n, i) \neq (0, 0)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. Морфизмом $f: X \rightarrow X'$ из левого $(DA)_\infty^{(s)}$ -модуля X над $(DA)_\infty^{(s)}$ -алгеброй A в левый $(DA)_\infty^{(s)}$ -модуль X' над $(DA)_\infty^{(s)}$ -алгеброй A' называется такая пара $f = (\check{f}, \hat{f})$ семейств K -гомоморфизмов,

$$\begin{aligned} \hat{f} &= \{\hat{f}_n^{-n+i}: A^{\otimes n} \otimes X \rightarrow X' \mid \hat{f}_n^{-n+i}((A^{\otimes n} \otimes X)_\bullet) \subseteq X'_{\bullet+n}, \quad n \geq 0, \quad i \geq 0\}, \\ \check{f} &= \{\check{f}_n^{-n+i}: A^{\otimes(n+1)} \rightarrow A' \mid \check{f}_n^{-n+i}((A^{\otimes(n+1)})_\bullet) \subseteq A'_{\bullet+n}, \quad n \geq 0, \quad i \geq 0\}, \end{aligned}$$

что семейство $\check{f} = \{\check{f}_n^{-n+i}\}$ является морфизмом $(DA)_\infty^{(s)}$ -алгебр и для любых целых чисел $n \geq 0$ и $k \geq 0$ выполнены следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \sum_{i+j=k} d^{i+s} \hat{f}_0^j &= \sum_{i+j=k} \hat{f}_0^i d^{j+s}, \\ \sum_{i+j=k} d^{i+s} \hat{f}_{n+1}^{-(n+1)+j} + (-1)^n \hat{f}_{n+1}^{-(n+1)+i} d^{j+s} &= \sum_{i+j=k} \sum_{m=0}^n (-1)^\nu \hat{f}_{n-m}^{-(n-m)+i} (1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes \pi_m^{-(m+1)+j+s} \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1) \\ &\quad + \sum_{i+j=k} \sum_{m=0}^n (-1)^{(n+1)m+1} \hat{f}_{n-m}^{-(n-m)+i} (1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes \mu_m^{-(m+1)+j+s}) \\ &\quad + \sum_{i+j=k} \sum_{m=0}^n (-1)^{n_2+n_4+\dots} \mu_m^{-(m+1)+i+s} (\check{f}_{n_1}^{-n_1+j_1} \otimes \dots \otimes \hat{f}_{n_{m+2}}^{-n_{m+2}+j_{m+2}}), \end{aligned}$$

где $\nu = t(m+1) + n$, $n_1 + \dots + n_{m+2} = n - m$, $j_1 + \dots + j_{m+2} = j$, и сумма берется также по всем местам t , на которых может стоять $\pi_m^{-(m+1)+j+s}$. Аналогично определяются морфизмы правых $(DA)_\infty^{(s)}$ -модулей над $(DA)_\infty^{(s)}$ -алгебрами.

Легко видеть, что семейство $\hat{f}_0 = \{\hat{f}_0^i: X_\bullet \rightarrow X'_\bullet \mid i \geq 0\}$ является морфизмом $D_\infty^{(s)}$ -модулей, а пара семейств K -гомоморфизмов $\{\hat{f}_n^{-n}: A^{\otimes n} \otimes X \rightarrow X' \mid n \geq 0\}$ и $\{\check{f}_n^{-n}: A^{\otimes(n+1)} \rightarrow A' \mid n \geq 0\}$ является морфизмом из дифференциального A_∞ -модуля $(X, d^s, \mu_n^{-(n+1)+s})$ над A_∞ -алгеброй $(A, d^s, \pi_n^{-(n+1)+s})$ в дифференциальный A_∞ -модуль $(X', d^s, \mu_n^{-(n+1)+s})$ над A_∞ -алгеброй $(A', d^s, \pi_n^{-(n+1)+s})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.3. Под (s) -гомотопией $h: X \rightarrow X'$ между морфизмами $f, g: X \rightarrow X'$ из левого $(DA)_\infty^{(s)}$ -модуля X над $(DA)_\infty^{(s)}$ -алгеброй A в левый

$(DA)_\infty^{(s)}$ -модуль X' над $(DA)_\infty^{(s)}$ -алгеброй A' будем понимать такую пару $h = (\check{h}, \hat{h})$ семейств K -гомоморфизмов,

$$\begin{aligned}\hat{h} &= \{\hat{h}_n^{-n+i-s} : \\ &A^{\otimes n} \otimes X \rightarrow X' \mid \hat{h}_n^{-n+i-s}((A^{\otimes n} \otimes X)_\bullet) \subseteq X'_{\bullet+n+1}, \quad n \geq 0, \quad i \geq 0\}, \\ \check{h} &= \{\check{h}_n^{-n+i-s} : \\ &A^{\otimes(n+1)} \rightarrow A' \mid \check{h}_n^{-n+i-s}((A^{\otimes(n+1)})_\bullet) \subseteq A'_{\bullet+n+1}, \quad n \geq 0, \quad i \geq 0\},\end{aligned}$$

что семейство $\check{h} = \{\check{h}_n^{-n+i-s}\}: A \rightarrow A'$ является (s) -гомотопией между морфизмами $(DA)_\infty^{(s)}$ -алгебр $\check{f}, \check{g}: A \rightarrow A'$ и для любых целых чисел $n \geq 0$ и $k \geq 0$ выполнены следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\sum_{i+j=k} d^{i+s} \hat{h}_0^{j-s} + \hat{h}_0^{i-s} d^{j+s} &= \hat{f}_0^k - \hat{g}_0^k, \\ \sum_{i+j=k} d^{i+s} \hat{h}_{n+1}^{-(n+1)+j-s} + (-1)^{n+1} \hat{h}_{n+1}^{-(n+1)+i-s} d^{j+s} &= \hat{f}_{n+1}^{-(n+1)+k} - \hat{g}_{n+1}^{-(n+1)+k} \\ &+ \sum_{i+j=k} \sum_{m=0}^n (-1)^\nu \hat{h}_{n-m}^{-(n-m)+i-s} (1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes \pi_m^{-(m+1)+j+s} \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1) \\ &+ \sum_{i+j=k} (-1)^{m(n+1)} \hat{h}_{n-m}^{-(n-m)+i-s} (1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes \mu_m^{-(m+1)+j+s}) \\ &+ \sum_{i+j=k} \sum_{m=0}^n (-1)^{m+1+\varepsilon(t)} \mu_m^{-(m+1)+i+s} (\check{g}_{n_1}^{-n_1+j_1} \otimes \dots \otimes \check{g}_{n_{t-1}}^{-n_{t-1}+j_{t-1}} \otimes \\ &\otimes \check{h}_{n_t}^{-n_t+j_t-s} \otimes \check{f}_{n_{t+1}}^{-n_{t+1}+j_{t+1}} \otimes \dots \otimes \check{f}_{n_{m+1}}^{-n_{m+1}+j_{m+1}} \otimes \hat{f}_{n_{m+2}}^{-n_{m+2}+j_{m+2}}) \\ &+ \sum_{i+j=k} (-1)^{n_2+n_4+\dots} \mu_m^{-(m+1)+i+s} (\check{g}_{n_1}^{-n_1+j_1} \otimes \dots \\ &\dots \otimes \check{g}_{n_{m+1}}^{-n_{m+1}+j_{m+1}} \otimes \hat{h}_{n_{m+2}}^{-n_{m+2}+j_{m+2}-s}),\end{aligned}$$

где суммы берутся также по всем местам t , на которых могут стоять соответственно $\pi_m^{-(m+1)+j+s}$ и $\hat{h}_{n_t}^{-n_t+j_t-s}$; $n_1 + \dots + n_{m+2} = n - m$, $j_1 + \dots + j_{m+2} = j$,

$$\varepsilon(t) = n_2 + n_4 + \dots + n_{2\lfloor \frac{t}{2} \rfloor} + n_{2\lfloor \frac{t+1}{2} \rfloor+1} + n_{2\lfloor \frac{t+1}{2} \rfloor+3} + \dots + n_{2\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor+1},$$

$\nu = t(m+1) + n + 1$. Аналогично определяется (s) -гомотопия между морфизмами правых $(DA)_\infty^{(s)}$ -модулей над $(DA)_\infty^{(s)}$ -алгебрами.

Семейство $\hat{h}_0 = \{\hat{h}_0^{i-s}: X_\bullet \rightarrow X'_{\bullet+1} \mid i \geq 0\}$ является (s) -гомотопией между морфизмами $D_\infty^{(s)}$ -модулей $\hat{f}_0 = \{\hat{f}_0^i\}$, $\hat{g}_0 = \{\hat{g}_0^i\}: X \rightarrow X'$, а пара семейств K -гомоморфизмов $\{\hat{h}_n^{-n-s}: A^{\otimes n} \otimes X \rightarrow X'\}$ и $\{\check{h}_n^{-n-s}: A^{\otimes(n+1)} \rightarrow A'\}$ является гомотопией между морфизмами $(\{\hat{f}_n^{-n}\}, \{\check{f}_n^{-n}\})$ и $(\{\hat{g}_n^{-n}\}, \{\check{g}_n^{-n}\})$ из дифференциального A_∞ -модуля $(X, d^s, \mu_n^{-(n+1)+s})$ над A_∞ -алгеброй $(A, d^s, \pi_n^{-(n+1)+s})$ в дифференциальный A_∞ -модуль $(X', d^s, \mu_n^{-(n+1)+s})$ над A_∞ -алгеброй $(A', d^s, \pi_n^{-(n+1)+s})$.

Введем теперь понятие B -конструкции $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -модуля над $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -алгеброй. Пусть задан произвольный левый $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -модуль X над $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -алгеброй A . Обозначим через $(T(SA) \otimes X, \tau)$, где $\tau = \nabla \otimes 1$, градуированный левый комодуль над указанной в § 3 градуированной коалгеброй $(T(SA), \nabla)$. Образующие K -модуля $T(SA) \otimes X$ записываются в виде $[a_1, \dots, a_n] \otimes x_{n+1}$ и имеют размерность, равную сумме размерностей элементов $a_1, \dots, a_n, x_{n+1}$ и числа n . Рассмотрим K -линейное отображение $\hat{\beta}: (T(SA) \otimes X)_{\bullet} \rightarrow X_{\bullet}$, которое задается следующим правилом:

$$\hat{\beta}[a_1, \dots, a_n]x_{n+1} = \begin{cases} x_{n+1}, & n = 0, \\ 0, & n > 0. \end{cases}$$

Теперь на градуированном K -модуле $T(SA) \otimes X$ введем $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -дифференциал $\{d^{i+s}: (T(SA) \otimes X)_{\bullet} \rightarrow (T(SA) \otimes X)_{\bullet-1} \mid i \geq 0\}$, который однозначно определяется условием того, что каждая компонента d^{i+s} удовлетворяет соотношению $\tau d^{i+s} = (d^{i+s} \otimes 1 + 1 \otimes d^{i+s})\tau$, где $(T(SA), d^{i+s}, \nabla) = B(A)$, и условием справедливости следующего равенства:

$$\hat{\beta}d^{i+s} = d^{i+s}\hat{\beta} - \sum_{n \geq 0} \mu_n^{-(n+1)+i+s}(\beta \otimes \dots \otimes \beta \otimes \hat{\beta})\tau^{(n)},$$

где $\tau^{(0)} = \tau$, $\tau^{(n)} = (1 \otimes \tau^{(n-1)})\tau$, $n \geq 1$. Таким образом, для произвольного левого $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -модуля $(X, d^{i+s}, \mu_n^{-(n+1)+i+s})$ над $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -алгеброй $(A, d^{i+s}, \pi_n^{-(n+1)+i+s})$ определен левый $D_{\infty}^{(s)}$ -комодуль $(T(SA) \otimes X, d^{i+s}, \tau)$ над $D_{\infty}^{(s)}$ -коалгеброй $B(A)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.4. Левый $D_{\infty}^{(s)}$ -комодуль $(T(SA) \otimes X, d^{i+s}, \tau)$ над $D_{\infty}^{(s)}$ -коалгеброй $B(A) = (T(SA), d^{i+s}, \nabla)$ называется B -конструкцией левого $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -модуля X над $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -алгеброй A и обозначается $B(A, X)$. Аналогично определяется правый $D_{\infty}^{(s)}$ -комодуль $B(X, A)$ над $D_{\infty}^{(s)}$ -коалгеброй $B(A)$ в случае правого $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -модуля X над $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -алгеброй A .

Пусть заданы любые градуированные K -модули X и A . Без труда проверяется, что задание структуры $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -модуля $(X, d^{i+s}, \mu_n^{-(n+1)+i+s})$ над $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -алгеброй $(A, d^{i+s}, \pi_n^{-(n+1)+i+s})$ эквивалентно введению на градуированном комодуле $(T(SA) \otimes X, \tau)$ над градуированной коалгеброй $(T(SA), \nabla)$ структуры $D_{\infty}^{(s)}$ -комодуля $(T(SA) \otimes X, d^{i+s}, \tau)$ над $D_{\infty}^{(s)}$ -коалгеброй $(T(SA), d^{i+s}, \nabla)$, где компонента $\mu_n^{-(n+1)+i+s}: (A^{(n+1)} \otimes X)_{\bullet} \rightarrow X_{\bullet+n}$ отождествляется с K -гомоморфизмом $d^{i+s}: ((SA)^{\otimes(n+1)} \otimes X)_{\bullet+n+1} \rightarrow X_{\bullet+n}$, а компонента $\pi_n^{-(n+1)+i+s}: A_{\bullet}^{\otimes(n+2)} \rightarrow A_{\bullet+n}$ отождествляется с K -гомоморфизмом $d^{i+s}: (SA)_{\bullet+n+2}^{\otimes(n+2)} \rightarrow (SA)_{\bullet+n+1}$.

Пусть теперь задан произвольный морфизм $f = (\check{f}, \hat{f}): X \rightarrow X'$ из левого $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -модуля X над $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -алгеброй A в левый $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -модуль X' над $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -алгеброй A' . Тогда определен морфизм $D_{\infty}^{(s)}$ -комодулей над $D_{\infty}^{(s)}$ -коалгебрами $B(f) = (B(\check{f}), B(\hat{f})): B(A, X) \rightarrow B(A', X')$, который однозначно задается

требованием того, что $B(\check{f}): B(A) \rightarrow B(A')$ является морфизмом $D_\infty^{(s)}$ -коалгебр, и условием справедливости следующего соотношения:

$$\hat{\beta}B(\hat{f})^i = \sum_{n \geq 0} \hat{f}_n^{-n+i}(\beta \otimes \dots \otimes \beta \otimes \hat{\beta})\tau^{(n-1)}, \quad i \geq 0.$$

Легко видеть, что задание морфизма левых $D_\infty^{(s)}$ -комодулей над $D_\infty^{(s)}$ -коалгебрами $g = (\check{g}, \hat{g}): B(A, X) \rightarrow B(A', X')$ эквивалентно заданию морфизма $(DA)_\infty^{(s)}$ -модулей $f = (\check{f}, \hat{f}): X \rightarrow X'$, где компонента $\hat{f}^{-n+i}: (A^{\otimes n} \otimes X)_\bullet \rightarrow X'_{\bullet+n}$ отождествляется с K -гомоморфизмом $\hat{g}^i: ((SA)^{\otimes} \otimes X)_{\bullet+n} \rightarrow X'_{\bullet+n}$, а компонента $\check{f}_n^{-n+i}: (A^{\otimes(n+1)})_\bullet \rightarrow A'_{\bullet+n}$ отождествляется с соответствующим K -гомоморфизмом $\check{g}^i: ((SA)^{\otimes(n+1)})_{\bullet+n+1} \rightarrow (SA)_{\bullet+n+1}$.

Пусть задана любая (s) -гомотопия $h = (\check{h}, \hat{h}): X \rightarrow X'$ между морфизмами $(\check{f}, \hat{f}), (\check{g}, \hat{g}): X \rightarrow X'$ из левого $(DA)_\infty^{(s)}$ -модуля X над $(DA)_\infty^{(s)}$ -алгеброй A в левый $(DA)_\infty^{(s)}$ -модуль X' над $(DA)_\infty^{(s)}$ -алгеброй A' . Тогда определена (s) -гомотопия $B(h) = (B(\check{h}), B(\hat{h})): B(A, X) \rightarrow B(A', X')$ между морфизмами $D_\infty^{(s)}$ -комодулей над $D_\infty^{(s)}$ -коалгебрами, которая однозначно задается требованием того, что $B(\check{h}): B(A) \rightarrow B(A')$ является (s) -гомотопией между морфизмами $D_\infty^{(s)}$ -коалгебр, и условием справедливости следующего соотношения:

$$\hat{\beta}B(\hat{h})^{i-s} = \sum_{n \geq 0} \hat{h}_n^{-n+i-s}(\beta \otimes \dots \otimes \beta \otimes \hat{\beta})\tau^{(n-1)}, \quad i \geq 0.$$

Ясно, что точно так же, как и выше, задание (s) -гомотопии между морфизмами левых $D_\infty^{(s)}$ -модулей над $D_\infty^{(s)}$ -алгебрами эквивалентно заданию соответствующей (s) -гомотопии между морфизмами $(DA)_\infty^{(s)}$ -модулей над $(DA)_\infty^{(s)}$ -алгебрами.

Рассмотрим теперь гомотопические свойства $(DA)_\infty^{(s)}$ -модулей над $(DA)_\infty^{(s)}$ -алгебрами. Пусть заданы морфизмы $\eta = (\check{\eta}, \hat{\eta}): X \rightrightarrows X': (\check{\xi}, \hat{\xi}) = \xi$ некоторых $(DA)_\infty^{(s)}$ -модулей X и X' соответственно над $(DA)_\infty^{(s)}$ -алгебрами A и A' , для которых выполнено условие $\eta\xi = (1_{X'}, 1_{A'})$, и пусть задана некоторая (s) -гомотопия $h = (\check{h}, \hat{h}): X \rightarrow X$ между морфизмами $(DA)_\infty^{(s)}$ -модулей над $(DA)_\infty^{(s)}$ -алгебрами $(1_X, 1_A)$ и $\xi\eta$, удовлетворяющая условиям $h\xi = 0$, $\eta h = 0$, $hh = 0$. Рассмотренную ситуацию будем называть *SDR-ситуацией $(DA)_\infty^{(s)}$ -модулей над $(DA)_\infty^{(s)}$ -алгебрами* и записывать в виде $(\eta: X \rightrightarrows X': \xi, h)$.

При помощи B -конструкции $(DA)_\infty^{(s)}$ -модулей над $(DA)_\infty^{(s)}$ -алгебрами и теоремы 2.2, аналогично тому, как это было сделано в [5], доказывается следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4.1. *Пусть задан любой $(DA)_\infty^{(s)}$ -модуль X над $(DA)_\infty^{(s)}$ -алгеброй A и заданы любые SDR-ситуации дифференциальных модулей $(\check{\eta}: A \rightrightarrows A': \check{\xi}, \check{h})$ и $(\bar{\eta}: X \rightrightarrows X': \bar{\xi}, \bar{h})$. Тогда на A' имеется структура $(DA)_\infty^{(s)}$ -алгебры, на X' имеется структура $(DA)_\infty^{(s)}$ -модуля над $(DA)_\infty^{(s)}$ -алгеброй A' и определена SDR-ситуация $(DA)_\infty^{(s)}$ -модулей над $(DA)_\infty^{(s)}$ -алгебрами $(\eta: X \rightrightarrows X': \xi, h)$, для*

которой выполнены начальные условия $d_{A'}^s = d$, $\xi_0^0 = \tilde{\xi}$, $\eta_0^0 = \tilde{\eta}$, $\hat{h}_0^{-s} = \tilde{h}$ и $d_{X'}^s = d$, $\hat{\xi}_0^0 = \tilde{\xi}$, $\hat{\eta}_0^0 = \tilde{\eta}$, $\hat{h}_0^{-s} = \tilde{h}$.

Пусть задан $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -модуль X над $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -алгеброй A , где X и A являются градуированными линейными пространствами над некоторым полем. Тогда определены SDR-ситуации дифференциальных модулей $(\tilde{\eta}: A \rightrightarrows H(A, d^s) : \tilde{\xi}, \tilde{h})$ и $(\bar{\eta}: X \rightrightarrows H(X, d^s) : \bar{\xi}, \bar{h})$, где $H(A, d^s)$ и $H(X, d^s)$ – гомологические модули соответственно для дифференциальных модулей (A, d^s) и (X, d^s) . Применяя к этой паре SDR-ситуаций теорему 4.1, получаем следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Пусть задан любой $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -модуль X над $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -алгеброй A , где X и A являются градуированными линейными пространствами над полем. Тогда на $H(A, d^s)$ имеется структура $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -алгебры, на $H(X, d^s)$ имеется структура $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -модуля над $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -алгеброй и определена SDR-ситуация $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -модулей над $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -алгебрами $(\eta: X \rightrightarrows H(X, d^s) : \xi, h)$, продолжающая пару SDR-ситуаций $(\tilde{\eta}: A \rightrightarrows H(A, d^s) : \tilde{\xi}, \tilde{h})$ и $(\bar{\eta}: X \rightrightarrows H(X, d^s) : \bar{\xi}, \bar{h})$ дифференциальных модулей.

Двойственным образом определяются понятия $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -комодуля над $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -коалгеброй, морфизма $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -комодулей над $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -коалгебрами, (s) -гомотопии между морфизмами $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -комодулей над $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -коалгебрами, SDR-ситуации $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -комодулей над $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -коалгебрами, а также ко- B -конструкции $F(L, X)$ для $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -комодуля X над $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -коалгеброй A .

Аналогом теоремы 4.1 для $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -комодулей над $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -коалгебрами является следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть задан любой $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -комодуль X над $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -коалгеброй L и заданы любые SDR-ситуации дифференциальных модулей $(\tilde{\eta}: L \rightrightarrows L' : \tilde{\xi}, \tilde{h})$ и $(\bar{\eta}: X \rightrightarrows X' : \bar{\xi}, \bar{h})$. Тогда на L' имеется структура $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -коалгебры, на X' имеется структура $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -комодуля над $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -коалгеброй L' и определена SDR-ситуация $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -комодулей над $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -коалгебрами $(\eta: X \rightrightarrows X' : \xi, h)$, для которой выполнены начальные условия $d_{L'}^s = d$, $\xi_0^0 = \tilde{\xi}$, $\eta_0^0 = \tilde{\eta}$, $\hat{h}_0^{-s} = \tilde{h}$ и $d_{X'}^s = d$, $\hat{\xi}_0^0 = \tilde{\xi}$, $\hat{\eta}_0^0 = \tilde{\eta}$, $\hat{h}_0^{-s} = \tilde{h}$.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Пусть задан любой $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -комодуль X над $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -коалгеброй L , где X и L являются линейными пространствами над полем. Тогда на $H(L, d^s)$ имеется структура $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -коалгебры, на $H(X, d^s)$ имеется структура $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -комодуля над $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -коалгеброй и определена SDR-ситуация $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -комодулей над $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -коалгебрами $(\eta: X \rightrightarrows H(X, d^s) : \xi, h)$, продолжающая пару SDR-ситуаций $(\tilde{\eta}: L \rightrightarrows H(L, d^s) : \tilde{\xi}, \tilde{h})$ и $(\bar{\eta}: X \rightrightarrows H(X, d^s) : \bar{\xi}, \bar{h})$ дифференциальных модулей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.5. Левый $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -модуль X над $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -алгеброй A называется *стабильным*, если $B(A, X)$ является стабильным левым $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -комодулем над $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -коалгеброй $B(A)$. Аналогично определяется понятие стабильности для правых $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -модулей над $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -алгебрами. Левый $(DA)_{\infty}^{(s)}$ -комодуль X

над $(DA)_\infty^{(s)}$ -коалгеброй L называется *стабильным*, если $F(L, X)$ является стабильным левым $(DA)_\infty^{(s)}$ -модулем над $(DA)_\infty^{(s)}$ -алгеброй $F(L)$. Аналогично определяется стабильность правых $(DA)_\infty^{(s)}$ -комодулей над $(DA)_\infty^{(s)}$ -коалгебрами.

Легко проверить, что если $(DA)_\infty^{(s)}$ -модуль X над $(DA)_\infty^{(s)}$ -алгеброй A является стабильным, то $(DA)_\infty^{(s)}$ -модуль X' над $(DA)_\infty^{(s)}$ -алгеброй A' , получаемый в теореме 4.1, также является стабильным. Аналогично для $(DA)_\infty^{(s)}$ -комодулей над $(DA)_\infty^{(s)}$ -коалгебрами, получаемых в теореме 4.2.

Ясно, что произвольный стабильный $(DA)_\infty^{(s)}$ -модуль X над $(DA)_\infty^{(s)}$ -алгеброй A определяет суммарный A_∞ -модуль (X, D_s, μ_n) над суммарной A_∞ -алгеброй (A, D_s, π_n) , где $\mu_n: (A^{\otimes n+1} \otimes X)_\bullet \rightarrow X_{\bullet+n}$ задается формулой

$$\mu_n = (\mu_n^{-(n+1)+s} + \mu_n^{-(n+1)+1+s} + \dots + \mu_n^{-(n+1)+i+s} + \dots),$$

а D_s – это суммарный дифференциал соответственно для $D_\infty^{(s)}$ -модулей A и X . Аналогично, произвольный стабильный $(DA)_\infty^{(s)}$ -комодуль X над $(DA)_\infty^{(s)}$ -коалгеброй L определяет суммарный A_∞ -комодуль (X, D_s, τ_n) над суммарной A_∞ -алгеброй (X, D_s, ∇_n) .

Напомним теперь (см. [6]), что для заданного над любым полем A_∞ -модуля X над A_∞ -алгеброй A определен A_∞ -модуль гомологий $H(X)$ над A_∞ -алгеброй гомологий $H(A)$. Аналогично, для заданной над любым полем A_∞ -комодуля X над A_∞ -коалгеброй L определен A_∞ -комодуль гомологий $H(X)$ над A_∞ -коалгеброй гомологий $H(L)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.6. A_∞ -модулем гомологий $H(X)$ над A_∞ -алгеброй гомологий $H(A)$ для заданного над полем стабильного $(DA)_\infty^{(s)}$ -модуля X над $(DA)_\infty^{(s)}$ -алгеброй A называется A_∞ -модуль гомологий суммарного A_∞ -модуля (X, D_s, μ_n) над A_∞ -алгеброй гомологий суммарной A_∞ -алгебры (X, D_s, π_n) . Аналогично определяется A_∞ -комодуль гомологий над A_∞ -коалгеброй гомологий для заданного над полем стабильного $(DA)_\infty^{(s)}$ -комодуля над $(DA)_\infty^{(s)}$ -коалгеброй.

§ 5. $(DA)_\infty^{(1)}$ -(ко)модули над $(DA)_\infty^{(1)}$ -(ко)алгебрами и спектральные последовательности

В этом параграфе устанавливается связь между спектральными последовательностями и $(DA)_\infty^{(s)}$ -(ко)модулями над $(DA)_\infty^{(s)}$ -(ко)алгебрами. Далее решается задача построения структуры A_∞ -комодуля над A_∞ -коалгеброй Милнора на гомологиях любого спектра непосредственно из дифференциалов спектральной последовательности Адамса этого спектра.

Спектральной алгеброй будем называть произвольную мультипликативную спектральную последовательность, т.е. любую последовательность дифференциальных алгебр $\{(E_s, d_s, \pi^{(s)})\}$, $s \geq 1$, где $E_{s+1} = H(E_s) = \ker d_s / \operatorname{im} d_s$ и умножение $\pi^{(s+1)}$ в члене E_{s+1} индуцировано умножением $\pi^{(s)}$ в члене E_s . Отметим, что если спектральная алгебра $\{(E_s, d_s, \pi^{(s)})\}$ задана над полем, то всегда определен предельный член $(E_\infty, d_\infty = 0, \pi^{(\infty)})$ этой спектральной алгебры, который является градуированной алгеброй.

Левым спектральным модулем $\{(E_s, d_s, \mu^{(s)})\}$ над заданной спектральной алгеброй $\{(A_s, d_s, \pi^{(s)})\}$ будем называть любую спектральную последовательность $\{(E_s, d_s)\}$, $s \geq 1$, для которой каждый дифференциальный модуль (E_s, d_s) , $s \geq 1$, является левым дифференциальным модулем $(E_s, d_s, \mu^{(s)})$ над дифференциальной алгеброй $(A_s, d_s, \pi^{(s)})$ и структурное отображение $\mu^{(s+1)}$ в члене E_{s+1} индуцировано структурным отображением $\mu^{(s)}$ в члене E_s . Аналогично вводится понятие *правого спектрального модуля над спектральной алгеброй*. Так же, как и выше, отметим, что если спектральный модуль $\{(E_s, d_s, \mu^{(s)})\}$ над спектральной алгеброй $\{(A_s, d_s, \pi^{(s)})\}$ задан над полем, то всегда определен предельный член $(E_{\infty}, d_{\infty} = 0, \mu^{(\infty)})$ этого спектрального модуля, который является градуированным модулем над градуированной алгеброй $(A_{\infty}, d_{\infty} = 0, \pi^{(\infty)})$.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть над произвольным полем задан любой левый спектральный модуль $\{(E_s, d_s, \mu^{(s)})\}$ над спектральной алгеброй $\{(A_s, d_s, \pi^{(s)})\}$. Тогда на каждом члене E_s , $1 \leq s \leq \infty$, этого спектрального модуля имеется структура стабильного левого $(DA)_{\infty}^{(1)}$ -модуля $(E_s, d_s^{i+s}, (\mu^{(s)})_n^{-n+i})$ над $(DA)_{\infty}^{(1)}$ -алгеброй $(A_s, d_s^{i+s}, (\pi^{(s)})_n^{-n+i})$, где $d_{\infty}^{i+\infty} = 0$ при $s = \infty$, для которого выполнены начальные условия $d_s^s = d_s$, $(\pi^{(s)})_0^0 = \pi^{(s)}$, $(\mu^{(s)})_0^0 = \mu^{(s)}$. Левый A_{∞} -модуль гомологий $H(E_s, d_s^{i+s}, (\mu^{(s)})_n^{-n+i})$ над A_{∞} -алгеброй гомологий $H(A_s, d_s^{i+s}, (\pi^{(s)})_n^{-n+i})$ для каждого $s \geq 1$ изоморфен левому суммарному A_{∞} -модулю $(E_{\infty}, D = 0, \mu_n^{(\infty)})$ над A_{∞} -алгеброй $(A_{\infty}, D = 0, \pi_n^{(\infty)})$, определяемому стабильным $(DA)_{\infty}^{(1)}$ -модулем $(E_{\infty}, d_{\infty}^{i+\infty} = 0, (\mu^{(\infty)})_n^{-n+i})$ над $(DA)_{\infty}^{(1)}$ -алгеброй $(A_{\infty}, d_{\infty}^{i+\infty} = 0, (\pi^{(\infty)})_n^{-n+i})$.

ПОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как спектральный модуль $\{(E_s, d_s, \mu^{(s)})\}$ над спектральной алгеброй $\{(A_s, d_s, \pi^{(s)})\}$ задан над полем, то определены две последовательности SDR-ситуаций дифференциальных модулей

$$\begin{aligned} (\hat{\eta}^{(s)}: (E_s, d_s) \rightrightarrows (E_{s+1}, d = 0): \hat{\xi}^{(s)}, \hat{h}^{(s)}), \quad s \geq 1, \\ (\check{\eta}^{(s)}: (A_s, d_s) \rightrightarrows (A_{s+1}, d = 0): \check{\xi}^{(s)}, \check{h}^{(s)}), \quad s \geq 1, \end{aligned}$$

где пара $\eta^{(s)} = (\hat{\eta}^{(s)}, \check{\eta}^{(s)})$ является отображением дифференциальных модулей над дифференциальными алгебрами. Если рассматривать дифференциальные модули над дифференциальными алгебрами как A_{∞} -модули над A_{∞} -алгебрами, то указанные выше две последовательности SDR-ситуаций задают последовательность SDR-ситуаций A_{∞} -модулей над A_{∞} -алгебрами

$$\begin{aligned} (\{\hat{\eta}_n^{(s)}\}: (E_s, d_s, \mu^{(s)}) \rightrightarrows (E_{s+1}, d = 0, \mu^{(s+1)}): \{\hat{\xi}_n^{(s)}\}, \{\hat{h}_n^{(s)}\}), \quad s \geq 1, \\ (\{\check{\eta}_n^{(s)}\}: (A_s, d_s, \pi^{(s)}) \rightrightarrows (A_{s+1}, d = 0, \pi^{(s+1)}): \{\check{\xi}_n^{(s)}\}, \{\check{h}_n^{(s)}\}), \quad s \geq 1. \end{aligned}$$

Морфизм A_{∞} -алгебр $\{\check{\eta}_n^{(s)}\}$ задается равенствами $\check{\eta}_0^{(s)} = \eta^{(s)}$ и $\check{\eta}_n^{(s)} = 0$, $n > 0$, а морфизм A_{∞} -алгебр $\{\check{\xi}_n^{(s)}\}$ и гомотопия $\{\check{h}_n^{(s)}\}$ определяются следующими ре-

куррентными формулами:

$$\begin{aligned}
\check{\xi}_0^{(s)} &= \check{\xi}^{(s)}, \quad \check{h}_0^{(s)} = \check{h}^{(s)}, \\
\check{\xi}_{n+1}^{(s)} &= \sum_{n_1+n_2=n} (-1)^{n_2} \check{h}^{(s)} \pi^{(s)}(\check{\xi}_{n_1} \otimes \check{\xi}_{n_2}), \quad n \geq 0, \\
\check{h}_{n+1}^{(s)} &= \check{h}^{(s)} \pi^{(s)}(\check{h}_n^{(s)} \otimes 1) \\
&+ \sum_{n_1+n_2=n} (-1)^{n_2+1} \check{h}^{(s)} \pi^{(s)}(\check{\xi}_{n_1}^{(s)} (\check{\eta}^{(s)})^{\otimes(n_1+1)} \otimes \check{h}_{n_2}^{(s)}), \quad n \geq 0.
\end{aligned}$$

Аналогично, морфизм A_∞ -модулей $\{\hat{\eta}_n^{(s)}\}$ задается равенствами $\hat{\eta}_0^{(s)} = \hat{\eta}^{(s)}$ и $\hat{\eta}_n^{(s)} = 0$, $n > 0$, а морфизм A_∞ -модулей $\{\hat{\xi}_n^{(s)}\}$ и гомотопия $\{\hat{h}_n^{(s)}\}$ определяются рекуррентными формулами

$$\begin{aligned}
\hat{\xi}_0^{(s)} &= \hat{\xi}^{(s)}, \quad \hat{h}_0^{(s)} = \hat{h}^{(s)}, \\
\hat{\xi}_{n+1}^{(s)} &= \sum_{n_1+n_2=n} (-1)^{n_2} \hat{h}^{(s)} \mu^{(s)}(\hat{\xi}_{n_1} \otimes \hat{\xi}_{n_2}), \quad n \geq 0, \\
\hat{h}_{n+1}^{(s)} &= \hat{h}^{(s)} \mu^{(s)}(\hat{h}_n^{(s)} \otimes 1) \\
&+ \sum_{n_1+n_2=n} (-1)^{n_2+1} \hat{h}^{(s)} \mu^{(s)}(\hat{\xi}_{n_1}^{(s)} (\hat{\eta}^{(s)})^{\otimes(n_1+1)} \otimes \hat{h}_{n_2}^{(s)}), \quad n \geq 0.
\end{aligned}$$

Указанная выше последовательность SDR-ситуаций A_∞ -модулей над A_∞ -алгебрами при помощи B -конструкции и ко- B -конструкции определяет последовательность SDR-ситуаций дифференциальных модулей над дифференциальными алгебрами

$$\begin{aligned}
(\{\tilde{\eta}_n^{(s)}\}: (\tilde{E}_s, \tilde{d}_s, \tilde{\mu}^{(s)}) \rightrightarrows (\tilde{E}_{s+1}, \partial_{s+1}, \tilde{\mu}^{(s+1)}): \{\tilde{\xi}_n^{(s)}\}, \{\tilde{h}_n^{(s)}\}), \quad s \geq 1, \\
(\{\tilde{\eta}_n^{(s)}\}: (\tilde{A}_s, \tilde{d}_s, \tilde{\pi}^{(s)}) \rightrightarrows (\tilde{A}_{s+1}, \partial_{s+1}, \tilde{\pi}^{(s+1)}): \{\tilde{\xi}_n^{(s)}\}, \{\tilde{h}_n^{(s)}\}), \quad s \geq 1.
\end{aligned}$$

Здесь для краткости записи были введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
(\tilde{A}_s, \tilde{d}_s, \tilde{\pi}^{(s)}) &= FB(A_s, d_s, \pi^{(s)}), \quad (\tilde{A}_s, \partial_s, \tilde{\pi}^{(s)}) = FB(A_s, d=0, \pi^{(s)}), \\
(\tilde{E}_s, \tilde{d}_s, \tilde{\mu}^{(s)}) &= F(B(A_s, d_s, \pi^{(s)}), B((A_s, d_s, \pi^{(s)}), (E_s, d_s, \mu^{(s)}))), \\
(\tilde{E}_s, \partial_s, \tilde{\mu}^{(s)}) &= F(B(A_s, d=0, \pi^{(s)}), B((A_s, d=0, \pi^{(s)}), (E_s, d=0, \mu^{(s)}))), \\
\{\tilde{\eta}_n^{(s)}\} &= FB(\{\hat{\eta}_n^{(s)}\}), \quad \{\tilde{\eta}_n^{(s)}\} = FB(\{\check{\eta}_n^{(s)}\}), \\
\{\tilde{\xi}_n^{(s)}\} &= FB(\{\hat{\xi}_n^{(s)}\}), \quad \{\tilde{\xi}_n^{(s)}\} = FB(\{\check{\xi}_n^{(s)}\}), \\
\{\tilde{h}_n^{(s)}\} &= FB(\{\hat{h}_n^{(s)}\}), \quad \{\tilde{h}_n^{(s)}\} = FB(\{\check{h}_n^{(s)}\}).
\end{aligned}$$

Введем на градуированных модулях $\tilde{E}_1$ и $\tilde{A}_1$ структуры $D_{\infty}^{(1)}$ -модулей $(\tilde{E}_1, \tilde{d}^{i+1})$ и $(\tilde{A}_1, \tilde{d}^{i+1})$, полагая соответственно

$$\begin{aligned} \tilde{d}_1^1 &= \tilde{d}_1, & \tilde{d}_1^{i+1} &= \tilde{\xi}^{(1)} \dots \tilde{\xi}^{(i)} \tilde{d}_{i+1} \tilde{\eta}^{(i)} \dots \tilde{\eta}^{(1)}, & i > 0. \\ \tilde{d}_1^1 &= \tilde{d}_1, & \tilde{d}_1^{i+1} &= \tilde{\xi}^{(1)} \dots \tilde{\xi}^{(i)} \tilde{d}_{i+1} \tilde{\eta}^{(i)} \dots \tilde{\eta}^{(1)}, & i > 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь для каждого $i > 0$ отображение дифференциальных модулей над дифференциальными алгебрами

$$\begin{aligned} \hat{\zeta}^{(i)} &= \tilde{\xi}^{(1)} \dots \tilde{\xi}^{(i)} \tilde{\eta}^{(i)} \dots \tilde{\eta}^{(1)} : (\tilde{E}_1, \tilde{d}_1, \tilde{\mu}^{(1)}) \rightarrow (\tilde{E}_1, \tilde{d}_1, \tilde{\mu}^{(1)}), \\ \check{\zeta}^{(i)} &= \tilde{\xi}^{(1)} \dots \tilde{\xi}^{(i)} \tilde{\eta}^{(i)} \dots \tilde{\eta}^{(1)} : (\tilde{A}_1, \tilde{d}_1, \tilde{\pi}^{(1)}) \rightarrow (\tilde{A}_1, \tilde{d}_1, \tilde{\pi}^{(1)}). \end{aligned}$$

Прямыми вычислениями проверяется, что отображения $\tilde{\mu}^{(1)}$ и $\tilde{\pi}^{(1)}$ связаны с $D_{\infty}^{(1)}$ -дифференциалами следующими соотношениями:

$$\tilde{d}_1^{i+1} \tilde{\mu}^{(1)} = \hat{\zeta}^{(i)} \tilde{\mu}^{(1)} (\tilde{d}_1^{i+1} \otimes 1 + 1 \otimes \tilde{d}_1^{i+1}), \quad \tilde{d}_1^{i+1} \tilde{\pi}^{(1)} = \check{\zeta}^{(i)} \tilde{\pi}^{(1)} (\tilde{d}_1^{i+1} \otimes 1 + 1 \otimes \tilde{d}_1^{i+1}).$$

Эти соотношения говорят о том, что относительно введенных выше $D_{\infty}^{(1)}$ -дифференциалов модуль $(\tilde{E}_1, \tilde{\mu}^{(1)})$ над алгеброй $(\tilde{A}_1, \tilde{\pi}^{(1)})$ не является $D_{\infty}^{(1)}$ -модулем над $D_{\infty}^{(1)}$ -алгеброй. Сложившееся положение можно исправить путем введения новых $D_{\infty}^{(1)}$ -дифференциалов на $\tilde{E}_1$ и $\tilde{A}_1$. В самом деле, пользуясь свободностью модуля $\tilde{E}_1$ над алгеброй $\tilde{A}_1$ и свободностью алгебры $\tilde{A}_1$, введем соответственно на $\tilde{E}_1$ и $\tilde{A}_1$ новые $D_{\infty}^{(1)}$ -дифференциалы $\{\hat{d}^{i+1}\}$ и $\{\check{d}^{i+1}\}$, которые на образующих совпадают с имеющимися $D_{\infty}^{(1)}$ -дифференциалами, а на произведениях определяются при помощи формул

$$\hat{d}_1^{i+1} \tilde{\mu}^{(1)} = \tilde{\mu}^{(1)} (\check{d}_1^{i+1} \otimes 1 + 1 \otimes \hat{d}_1^{i+1}), \quad \check{d}_1^{i+1} \tilde{\pi}^{(1)} = \tilde{\pi}^{(1)} (\check{d}_1^{i+1} \otimes 1 + 1 \otimes \check{d}_1^{i+1}), \quad i \geq 0.$$

Таким образом, определен левый $D_{\infty}^{(1)}$ -модуль $(\tilde{E}_1, \hat{d}^{i+1}, \tilde{\mu}^{(1)})$ над $D_{\infty}^{(1)}$ -алгеброй $(\tilde{A}_1, \check{d}^{i+1}, \tilde{\pi}^{(1)})$. Нетрудно проверить, что морфизмы $D_{\infty}^{(1)}$ -модулей

$$\hat{\zeta} = \{\hat{\zeta}^{(i)}\} : (\tilde{E}_1, \hat{d}_1^{i+1}) \rightarrow (\tilde{E}_1, \check{d}_1^{i+1}), \quad \check{\zeta} = \{\check{\zeta}^{(i)}\} : (\tilde{A}_1, \check{d}_1^{i+1}) \rightarrow (\tilde{A}_1, \check{d}_1^{i+1}),$$

где $\hat{\zeta}^{(0)} = 1_{\tilde{E}_1}$, $\check{\zeta}^{(0)} = 1_{\tilde{A}_1}$, являются изоморфизмами $D_{\infty}^{(1)}$ -модулей. Заметим теперь, что по построению $\hat{d}_1^1 = \check{d}_1^1 = \tilde{d}_1$ и $\hat{d}_1^1 = \check{d}_1^1 = \tilde{d}_1$. Из этого следует, что имеются две SDR-ситуации дифференциальных модулей

$$(F(\hat{\beta}^{(1)}): (\tilde{E}_1, \hat{d}_1^1) \rightrightarrows (E_1, d_1) : \hat{m}^{(1)}, \hat{t}^{(1)}), \quad (F(\check{\beta}^{(1)}): (\tilde{A}_1, \check{d}_1^1) \rightrightarrows (A_1, d_1) : \check{m}^{(1)}, \check{t}^{(1)}),$$

определяемые дифференциальным модулем $(E_1, d_1, \mu^{(1)})$ над дифференциальной алгеброй $(A_1, d_1, \pi^{(1)})$. Отображение $\check{\beta}^{(1)}$ — это стандартная скрепляющая цепь из дифференциальной коалгебры $B(A_1)$ в дифференциальную алгебру A_1 ,

$F(\check{\beta}^{(1)}): (A_1, \check{d}_1^1, \check{\pi}^{(1)}) \rightarrow (A_1, d_1, \pi^{(1)})$ – каноническое отображение дифференциальных алгебр, определяемое скрепляющей копечью $\check{\beta}^{(1)}$, $\check{m}^{(1)}$ – цепное отображение, задаваемое формулой $\check{m}^{(1)}(a) = [[a]]$, $\check{t}^{(1)}$ – цепная гомотопия, определяемая следующим образом:

$$\check{t}^{(1)}[[a_1], [a_2, \dots, a_n], \dots] = [[a_1, a_2, \dots, a_n], \dots],$$

и $\check{t}^{(1)} = 0$ на элементах другого вида. Отображение $\hat{\beta}^{(1)}$ – стандартное $\check{\beta}^{(1)}$ -отображение, рассмотренное в § 4, $F(\hat{\beta}^{(1)})$ – каноническое отображение дифференциальных модулей над дифференциальными алгебрами, определяемое $\check{\beta}^{(1)}$ -отображением $\hat{\beta}^{(1)}$, $\hat{m}^{(1)}(e) = e$, $\hat{t}^{(1)}$ – цепная гомотопия, определяемая следующим образом:

$$\hat{t}^{(1)}[[a_1], [a_2, \dots, a_n], \dots]e = [[a_1, a_2, \dots, a_n], \dots]e,$$

и $\hat{t}^{(1)} = 0$ на элементах другого вида. Рассматривая $D_\infty^{(1)}$ -модуль $(\tilde{E}_1, \hat{d}_1^{i+1}, \tilde{\mu}^{(1)})$ над $D_\infty^{(1)}$ -алгеброй $(\tilde{A}_1, \check{d}_1^{i+1}, \check{\pi}^{(1)})$ как $(DA)_\infty^{(1)}$ -модуль над $(DA)_\infty^{(1)}$ -алгеброй и применяя теорему 4.1 к указанной выше паре SDR-ситуаций дифференциальных модулей, получим на градуированном модуле A_1 структуру $(DA)_\infty^{(1)}$ -алгебры $(A_1, d_1^{i+1}, (\pi^{(1)})_n^{-n+i})$, для которой выполнены начальные условия $d_1^1 = d_1$ и $(\pi^{(1)})_0^0 = \pi^{(1)}$, а на градуированном модуле E_1 получим структуру $(DA)_\infty^{(1)}$ -модуля $(E_1, d_1^{i+1}, (\mu^{(1)})_n^{-n+i})$ над $(DA)_\infty^{(1)}$ -алгеброй $(A_1, d_1^{i+1}, (\pi^{(1)})_n^{-n+i})$, для которого выполнены начальные условия $d_1^1 = d_1$ и $(\mu^{(1)})_0^0 = \mu^{(1)}$. Легко видеть, что полученный левый $(DA)_\infty^{(1)}$ -модуль над $(DA)_\infty^{(1)}$ -алгеброй является стабильным.

Таким образом, на начальном члене E_1 произвольного спектрального модуля $\{(E_s, d_s, \mu^{(s)})\}$ над спектральной алгеброй $\{(A_s, d_s, \pi^{(s)})\}$, заданными над полем, имеется структура левого стабильного $(DA)_\infty^{(1)}$ -модуля $(E_1, d_1^{i+1}, (\mu^{(1)})_n^{-n+i})$ над $(DA)_\infty^{(1)}$ -алгеброй $(A_1, d_1^{i+1}, (\pi^{(1)})_n^{-n+i})$, где $d_1^1 = d_1$, $(\mu^{(1)})_0^0 = \mu^{(1)}$ и $(\pi^{(1)})_0^0 = \pi^{(1)}$.

Применяя теперь теорему 4.1 к левому $(DA)_\infty^{(1)}$ -модулю E_1 над $(DA)_\infty^{(1)}$ -алгеброй A_1 и к рассмотренной выше последовательности пар SDR-ситуаций дифференциальных модулей

$$\begin{aligned} (\hat{\eta}^{(s)}): (E_s, d_s) &\rightrightarrows (E_{s+1}, d=0): \hat{\xi}^{(s)}, \hat{h}^{(s)}, & s \geq 1, \\ (\check{\eta}^{(s)}): (A_s, d_s) &\rightrightarrows (A_{s+1}, d=0): \check{\xi}^{(s)}, \check{h}^{(s)}, & s \geq 1, \end{aligned}$$

получим по индукции последовательность левых стабильных $(DA)_\infty^{(1)}$ -модулей $(E_s, d_s^{i+s}, (\mu^{(s)})_n^{-n+i})$ над $(DA)_\infty^{(1)}$ -алгебрами $(A_s, d_s^{i+s}, (\pi^{(s)})_n^{-n+i})$ и последовательность SDR-ситуаций $(DA)_\infty^{(1)}$ -модулей над $(DA)_\infty^{(1)}$ -алгебрами $E_s \rightrightarrows E_{s+1}$, $s \geq 1$, где $d_s^s = d_s$, $(\mu^{(s)})_0^0 = \mu^{(s)}$ и $(\pi^{(s)})_0^0 = \pi^{(s)}$. Эта последовательность SDR-ситуаций стабильных $(DA)_\infty^{(1)}$ -модулей над $(DA)_\infty^{(1)}$ -алгебрами индуцирует последовательность SDR-ситуаций A_∞ -модулей над A_∞ -алгебрами

$$\begin{aligned} (E_s, D_s, \mu_n^{(s)}) &\rightrightarrows (E_{s+1}, D_{s+1}, \mu_n^{(s+1)}), & s \geq 1, \\ (A_s, D_s, \pi_n^{(s)}) &\rightrightarrows (A_{s+1}, D_{s+1}, \pi_n^{(s+1)}), & s \geq 1, \end{aligned}$$

где $(E_s, D_s, \pi_n^{(s)})$ является суммарным A_{∞} -модулем над суммарной A_{∞} -алгеброй $(E_s, D_s, \pi_n^{(s)})$ для стабильного $(DA)_{\infty}^{(1)}$ -модуля $(E_s, d_s^{i+s}, (\mu^{(s)})_n^{-n+i})$ над $(DA)_{\infty}^{(1)}$ -алгеброй $(A_s, d_s^{i+s}, (\pi^{(s)})_n^{-n+i})$. Таким образом, все A_{∞} -модули E_s над A_{∞} -алгебрами A_s , $s \geq 1$, являются гомотопически эквивалентными между собой и, следовательно, все A_{∞} -модули гомологий $H(E_s)$ над A_{∞} -алгебрами гомологий $H(A_s)$ являются изоморфными между собой. Так как гомологический функтор перестановочен с прямыми пределами, то для любого $s \geq 1$ левый A_{∞} -модуль гомологий $H(E_s)$ над A_{∞} -гомологий $H(A_s)$ изоморфен предельному левому A_{∞} -модулю $(E_{\infty}, D = 0, \mu_n^{(\infty)})$ над предельной A_{∞} -алгеброй $(A_{\infty}, D = 0, \pi_n^{(\infty)})$, который является суммарным A_{∞} -модулем над суммарной A_{∞} -алгеброй для $(DA)_{\infty}^{(1)}$ -модуля $(E_{\infty}, d_{\infty}^{i+\infty} = 0, \mu_n^{(\infty)})$ над $(DA)_{\infty}^{(1)}$ -алгеброй $(A_{\infty}, d_{\infty}^{i+\infty} = 0, \pi_n^{(\infty)})$.

Двойственным образом доказывается следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть над любым полем задан любой левый спектральный комодуль $\{(E_s, d_s, \tau^{(s)})\}$ над спектральной коалгеброй $\{(L_s, d_s, \nabla^{(s)})\}$. Тогда на каждом члене E_s , $1 \leq s \leq \infty$, этого спектрального комодуля имеет-ся структура стабильного левого $(DA)_{\infty}^{(1)}$ -комодуля $(E_s, d_s^{i+s}, (\tau^{(s)})_n^{-n+i})$ над $(DA)_{\infty}^{(1)}$ -коалгеброй $(L_s, d_s^{i+s}, (\nabla^{(s)})_n^{-n+i})$, где $d_{\infty}^{i+\infty} = 0$ при $s = \infty$, для которого выполнены начальные условия $d_s^s = d_s$, $(\nabla^{(s)})_0^0 = \nabla^{(s)}$, $(\tau^{(s)})_0^0 = \tau^{(s)}$. Левый A_{∞} -комодуль гомологий $H(E_s, d_s^{i+s}, (\tau^{(s)})_n^{-n+i})$ над A_{∞} -коалгеброй гомологий $H(L_s, d_s^{i+s}, (\nabla^{(s)})_n^{-n+i})$ для каждого $s \geq 1$ изоморфен левому суммарному A_{∞} -комодулю $(E_{\infty}, D = 0, \tau_n^{(\infty)})$ над суммарной A_{∞} -коалгеброй $(L_{\infty}, D = 0, \nabla_n^{(\infty)})$, который определяется стабильным левым $(DA)_{\infty}^{(1)}$ -комодулем $(E_{\infty}, d_{\infty}^{i+\infty} = 0, (\tau^{(\infty)})_n^{-n+i})$ над $(DA)_{\infty}^{(1)}$ -коалгеброй $(L_{\infty}, d_{\infty}^{i+\infty} = 0, (\nabla^{(\infty)})_n^{-n+i})$.

Теорему 5.1 можно уточнить, если начальный член рассматриваемого спектрального модуля над спектральной алгеброй является свободным модулем над свободной алгеброй. В самом деле, имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 5.3. Пусть над произвольным полем задан любой левый спектральный модуль $\{(E_s, d_s, \mu^{(s)})\}$ над спектральной алгеброй $\{(A_s, d_s, \pi^{(s)})\}$, $1 \leq s \leq \infty$, у которого начальный член $(E_1, d_1, \mu^{(1)})$ является свободным модулем над свободной алгеброй $(A_1, d_1, \pi^{(1)})$. Тогда на этом начальном члене имеется структура левого стабильного $D_{\infty}^{(1)}$ -модуля $(E_1, d_1^{i+1}, \mu^{(1)})$ над $D_{\infty}^{(1)}$ -алгеброй $(A_1, d_1^{i+1}, \pi^{(1)})$, где $d_1^1 = d_1$, для которого, если его рассматривать как левый $(DA)_{\infty}^{(1)}$ -модуль над $(DA)_{\infty}^{(1)}$ -алгеброй, левый A_{∞} -модуль гомологий $H(E_1)$ над A_{∞} -алгеброй гомологий $H(A_1)$ изоморфен предельному левому A_{∞} -модулю $(E_{\infty}, \mu_n^{(\infty)})$ над предельной A_{∞} -алгеброй $(A_{\infty}, \pi_n^{(\infty)})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что в доказательстве теоремы 5.1 были рассмотрены две SDR-ситуации дифференциальных модулей

$$(F(\hat{\beta}^{(1)}): (\tilde{E}_1, \hat{d}_1^1) \rightrightarrows (E_1, d_1): \hat{m}^{(1)}, \hat{t}^{(1)}), \quad (F(\check{\beta}^{(1)}): (\tilde{A}_1, \check{d}_1^1) \rightrightarrows (A_1, d_1): \check{m}^{(1)}, \check{t}^{(1)}).$$

Пользуясь тем, что модуль $(E_1, \mu^{(1)})$ является свободным над свободной алгеброй $(A_1, \pi^{(1)})$, определим SDR-ситуацию дифференциальных модулей над дифференциальными алгебрами

$$\begin{aligned} (F(\hat{\beta}^{(1)}): (\tilde{E}_1, \hat{d}_1^1, \tilde{\mu}^{(1)}) &\rightrightarrows (E_1, d_1, \mu^{(1)}): \overline{\hat{m}^{(1)}}, \overline{\hat{t}^{(1)}}), \\ (F(\check{\beta}^{(1)}): (\tilde{A}_1, \check{d}_1^1, \tilde{\pi}^{(1)}) &\rightrightarrows (A_1, d_1, \pi^{(1)}): \overline{\check{m}^{(1)}}, \overline{\check{t}^{(1)}}), \end{aligned}$$

где отображение дифференциальных алгебр $\overline{\check{m}^{(1)}}: (A_1, d_1, \pi^{(1)}) \rightarrow (\tilde{A}_1, \check{d}_1^1, \tilde{\pi}^{(1)})$ задается на образующих алгебры A_1 так же, как и указанное выше отображение $\check{m}^{(1)}$, а на произведениях образующих однозначно определяется условием того, что $\check{m}^{(1)}$ является отображением дифференциальных алгебр. Гомотопия $\overline{\check{t}^{(1)}}: (\tilde{A}_1, \check{d}_1^1, \tilde{\pi}^{(1)}) \rightarrow (\tilde{A}_1, \check{d}_1^1, \tilde{\pi}^{(1)})$ между отображениями дифференциальных алгебр задается следующим образом. Для произвольного элемента $\tilde{a} \in \tilde{A}_1$ соответствующий ему элемент $F(\check{\beta}^{(1)})(\tilde{a})$ имеет единственное представление в виде конечной линейной комбинации

$$F(\check{\beta}^{(1)})(\tilde{a}) = \sum c_{i_1 \dots i_n} \pi^{(1)}(a_{i_1} \otimes \dots \otimes a_{i_n}),$$

где элементы $a_{i_1}, \dots, a_{i_n}$ принадлежат множеству образующих свободной алгебры A_1 , а элементы $c_{i_1 \dots i_n}$ — это некоторые коэффициенты из поля, над которым задана алгебра A_1 . Определим гомотопию $\overline{\check{t}^{(1)}}$, полагая

$$\overline{\check{t}^{(1)}}(\tilde{a}) = -\check{t}^{(1)}(\tilde{a}) + \sum c_{i_1 \dots i_n} [[a_{i_1}, a_{i_2}], [a_{i_3}], \dots, [a_{i_n}]].$$

Отображение $\overline{\hat{m}^{(1)}}: (E_1, d_1, \mu^{(1)}) \rightarrow (\tilde{E}_1, \hat{d}_1^1, \tilde{\mu}^{(1)})$ дифференциальных модулей над дифференциальными алгебрами задается на образующих модуля E_1 над алгеброй A_1 так же, как и указанное выше отображение $\hat{m}^{(1)}$, а на других элементах однозначно определяется условием того, что $\hat{m}^{(1)}$ является отображением дифференциальных модулей над дифференциальными алгебрами. Гомотопия $\overline{\hat{t}^{(1)}}$ между отображениями дифференциальных модулей над дифференциальными алгебрами задается следующим образом. Для произвольного элемента $\tilde{e} \in \tilde{E}_1$ соответствующий ему элемент $F(\hat{\beta}^{(1)})(\tilde{e})$ имеет единственное представление в виде конечной линейной комбинации:

$$F(\hat{\beta}^{(1)})(\tilde{e}) = \sum c_{j_k, i_1 \dots i_n} \pi^{(1)}(a_{j_k, i_1} \otimes \dots \otimes a_{j_k, i_n}) e_{j_k},$$

где элементы $a_{j_k, i_1}, \dots, a_{j_k, i_n}$ принадлежат множеству образующих свободной алгебры A_1 , элементы e_{j_k} принадлежат множеству образующих свободного модуля E_1 над алгеброй A_1 , а элементы $c_{j_k, i_1 \dots i_n}$ — это некоторые коэффициенты из поля, над которым заданы E_1 и A_1 . Определим гомотопию $\overline{\hat{t}^{(1)}}$, полагая

$$\overline{\hat{t}^{(1)}}(\tilde{e}) = -\hat{t}^{(1)}(\tilde{e}) + \sum c_{j_k, i_1 \dots i_n} [[a_{j_k, i_1}, a_{j_k, i_2}], [a_{j_k, i_3}], \dots, [a_{j_k, i_n}]] e_{j_k}.$$

Применяя теперь теорему 2.1 к построенному в доказательстве теоремы 5.1 левому $D_{\infty}^{(1)}$ -модулю $(\tilde{E}_1, \hat{d}_1^{i+1}, \tilde{\mu}^{(1)})$ над $D_{\infty}^{(1)}$ -алгеброй $(\tilde{A}_1, \check{d}_1^{i+1}, \tilde{\pi}^{(1)})$ и к рассмотренной выше SDR-ситуации дифференциальных модулей над дифференциальными алгебрами, получим левый стабильный $D_{\infty}^{(1)}$ -модуль $(E_1, d_1^{i+1}, \mu^{(1)})$ над $D_{\infty}^{(1)}$ -

алгеброй $(A_1, d^{i+1}, \pi^{(1)})$, где $d_1^1 = d_1$. Легко видеть, что левый $D_{\infty}^{(1)}$ -модуль E_1 над $D_{\infty}^{(1)}$ -алгеброй A_1 , если его рассматривать как левый $(DA)_{\infty}^{(1)}$ -модуль над $(DA)_{\infty}^{(1)}$ -алгеброй, гомотопически эквивалентен построенному в доказательстве теоремы 5.1 левому $(DA)_{\infty}^{(1)}$ -модулю $(E_1, d_1^{i+1}, (\mu^{(1)})_n^{-n+i})$ над $(DA)_{\infty}^{(1)}$ -алгеброй $(A_1, d_1^{i+1}, (\pi^{(1)})_n^{-n+i})$. Поэтому из теоремы 5.1 следует, что левый A_{∞} -модуль гомотопий $H(E_1, d^{i+1}, \mu^{(1)})$ над A_{∞} -алгеброй гомотопий $H(A_1, d^{i+1}, \pi^{(1)})$ изоморфен предельному левому A_{∞} -модулю $(E_{\infty}, \mu_n^{(\infty)})$ над предельной A_{∞} -алгеброй $(A_{\infty}, \pi_n^{(\infty)})$.

Рассмотрим теперь применение теоремы 5.3 к спектральной последовательности Адамса (см. [7]), вычисляющей p -примарные компоненты гомотопических групп произвольных спектров.

Пусть $H(p) = \{K(\mathbb{Z}_p, n)\}$ – спектр Эйленберга–Маклейна, где $p \geq 2$ является произвольным фиксированным простым числом. Спектр $H(p)$ стандартным способом определяет теорию гомотопий $H(-; \mathbb{Z}_p)$ на категории спектров, которая задается следующим правилом:

$$H_n(X; \mathbb{Z}_p) = \pi_n(H(p) \wedge X) = \varinjlim_q H_{n+q}(X_q; \mathbb{Z}_p),$$

где $X = \{X_n\}$ – произвольный спектр, а $H_{n+q}(X_q; \mathbb{Z}_p)$ – группы сингулярных гомотопий пространства X_q с коэффициентами в $\mathbb{Z}_p$. Хорошо известно, что для любого спектра X гомотопии этого спектра $H(X; \mathbb{Z}_p)$ являются левым комодулем над коалгеброй Милнора $K_p = H(H(p); \mathbb{Z}_p)$ стабильных коопераций в теории гомотопий $H(-; \mathbb{Z}_p)$.

Напомним теперь, что для спектра $H(p)$ и произвольного спектра X имеется спектральная последовательность Адамса, представляющая собой левый спектральный модуль $\{(E_s, d_s, \mu^{(s)})\}$ над спектральной алгеброй $\{(A_s, d_s, \pi^{(s)})\}$, для которого предельный левый модуль $(E_{\infty}, \mu^{(\infty)})$ над алгеброй $(A_{\infty}, \pi^{(\infty)})$ присоединен к левому модулю p -примарных компонент гомотопических групп $\pi_{\bullet}(X)$ спектра X над алгеброй p -примарных компонент гомотопических групп $\pi_{\bullet}(S^0)$ сферического спектра S^0 . Отметим (см. [8]), что гомотопические группы $\pi_{\bullet}(X)$ произвольного спектра X имеют совпадающие левую и правую модульные структуры над алгеброй $\pi_{\bullet}(S^0)$. Для указанной выше спектральной последовательности Адамса ее начальным членом является ко- B -конструкция $F(K_p, H(X; \mathbb{Z}_p))$, рассматриваемая вместе со структурой левого модуля над алгеброй $F(K_p)$.

Так как спектральная последовательность Адамса для спектров $H(p)$ и X задана над полем $\mathbb{Z}_p$, является левым спектральным модулем над спектральной алгеброй и ее начальный член $F(K_p, H(X; \mathbb{Z}_p))$ является левым свободным модулем над свободной алгеброй $F(K_p)$, то для этой спектральной последовательности выполнены условия теоремы 5.3. Учитывая теперь, что задание на модуле $T(S^{-1}K_p) \otimes H(X; \mathbb{Z}_p)$ над алгеброй $T(S^{-1}K_p)$ структуры $D_{\infty}^{(1)}$ -модуля над $D_{\infty}^{(1)}$ -алгеброй эквивалентно введению на $H(X; \mathbb{Z}_p)$ структуры левого $(DA)_{\infty}^{(1)}$ -комодуля $(H(X; \mathbb{Z}_p), d^{i+1}, \tau_n^{-n+i})$ над $(DA)_{\infty}^{(1)}$ -коалгеброй $(K_p, d^{i+1}, \nabla_n^{-n+i})$, получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 5.4. Пусть спектральный модуль $\{(E_s, d_s, \mu^{(s)})\}$ над спектральной алгеброй $\{(A_s, d_s, \pi^{(s)})\}$ является спектральной последовательностью Адамса для спектров $H(p)$ и X . Тогда дифференциалы этого спектрального модуля над спектральной алгеброй определяют при помощи теорем 5.1 и 5.3 на левом комодуле $(H(X; \mathbb{Z}_p), \tau)$ над коалгеброй Милнора (K_p, ∇) структуру левого стабильного $(DA)_\infty^{(1)}$ -комодуля $(H(X; \mathbb{Z}_p), d^{i+1}, \tau_n^{-n+i})$ над $(DA)_\infty^{(1)}$ -коалгеброй Милнора $(K_p, d^{i+1}, \nabla_n^{-n+i})$, где $d^{i+1} = 0$, $i \geq 0$, $\tau_0^0 = \tau$, $\nabla_0^0 = \nabla$. Левый A_∞ -модуль гомологий $H(F(K_p, H(X; \mathbb{Z}_p)), d^{i+1}, \mu)$ над A_∞ -алгеброй гомологий $H(F(K_p), d^{i+1}, \pi)$ изоморфен левому предельному A_∞ -модулю $(E_\infty, \mu_n^{(\infty)})$ над предельной A_∞ -алгеброй $(A_\infty, \pi_n^{(\infty)})$ рассматриваемой спектральной последовательности Адамса.

Если взять суммарные A_∞ -структуры для стабильных $(DA)_\infty^{(1)}$ -структур из утверждения теоремы 5.4, то получим, что модуль гомологий $H(X; \mathbb{Z}_p)$ любого спектра X имеет структуру A_∞ -комодуля над A_∞ -коалгеброй Милнора K_p , для которой A_∞ -модуль гомологий $H(F(K_p, H(X; \mathbb{Z}_p)))$ над A_∞ -алгеброй гомологий $H(F(K_p))$ является предельным членом рассмотренной выше спектральной последовательности Адамса для вычисления p -примарных компонент гомотопических групп спектра X .

Список литературы

1. Смирнов В. А. Гомотопическая теория коалгебр // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1985. Т. 49. № 6. С. 1302–1321.
2. Смирнов В. А. Вторичные операции в гомологиях операды E // Изв. РАН. Сер. матем. 1992. Т. 56. № 2. С. 449–468.
3. Смирнов В. А. Гомологии B -конструкций и ко- B -конструкций // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. № 4. С. 80–96.
4. Лапин С. В. Дифференциальные возмущения и D_∞ -дифференциальные модули // Матем. сб. 2001. Т. 192. № 11. С. 55–76.
5. Лапин С. В. D_∞ -дифференциальные A_∞ -алгебры и спектральные последовательности // Матем. сб. 2002. Т. 193. № 1. С. 119–142.
6. Кадешивили Т. В. К теории гомологий расслоенных пространств // УМН. 1980. Т. 35. С. 183–188.
7. Свитцер Р. М. Алгебраическая топология – гомотопии и гомологии. М.: Наука, 1985.
8. Уайтхед Дж. Новейшие достижения в теории гомотопий. М.: Мир, 1974.

Поступило в редакцию
9.IV.2001