Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. С. Сгибнев, Полумультимпликативные оценки для решения многомерного уравнения восстановления, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2002, том 66, выпуск 3, 159–174

DOI: <https://doi.org/10.4213/im390>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 08:32:33

УДК 517.968.28+519.218.24

М. С. Сгибнев

Полумультипликативные оценки для решения многомерного уравнения восстановления

Получены разложения для решения многомерного уравнения восстановления с полумультипликативными оценками для остатков. Учтено влияние корней характеристического уравнения на асимптотическое поведение решения. Полученные результаты применяются к исследованию асимптотики среднего числа частиц зависящих от возраста ветвящихся процессов с несколькими типами частиц.

Библиография: 13 наименований.

§ 1. Введение

Под уравнением многомерного восстановления понимается система уравнений (см. [1, гл. VIII, § 9])

$$X_{im}(x) = K_{im}(x) + \sum_{j=1}^n \int_0^x X_{jm}(x-u) F_{ij}(du), \quad (1)$$

где $i = 1, \dots, n$, $m = 1, \dots, m_1$, F_{ij} – неотрицательные конечные меры на $[0, \infty)$, $i, j = 1, \dots, n$, а $K_{im}(x)$, $i = 1, \dots, n$, $m = 1, \dots, m_1$, – измеримые, ограниченные в каждом конечном интервале функции. В матричной форме система уравнений (1) принимает вид

$$\mathbf{X}(x) = \mathbf{K}(x) + \mathbf{F} * \mathbf{X}(x), \quad (2)$$

где $\mathbf{X}(x)$, $\mathbf{K}(x)$ – матрицы порядка $n \times m_1$, а $\mathbf{F}$ – матрица порядка $n \times n$ с элементами $X_{im}(x)$, $K_{im}(x)$, F_{ij} соответственно; общим элементом матрицы $\mathbf{F} * \mathbf{X}(x)$ служит сумма, стоящая в правой части (1).

В настоящей работе предполагается, что $K_{im}(x)$ – непрерывные справа функции ограниченной вариации на $[0, \infty)$. Каждая такая функция естественным образом порождает конечную вещественнозначную меру на $[0, \infty)$, которую будем обозначать той же буквой с теми же индексами. Будем искать решение системы (1) в классе непрерывных справа функций $X_{im}(x)$, имеющих ограниченную вариацию на каждом конечном отрезке, или, что то же, в классе σ -конечных мер X_{im} на $[0, \infty)$, для которых $X_{im}(x)$ суть их функции распределения: $X_{im}(x) = X_{im}([0, x])$.

Уравнения многомерного восстановления (системы уравнений восстановления) изучались многими авторами (см. библиографию в [2], а также работы [1], [3]–[5]).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00504).

Для произвольной комплекснозначной меры ν определим ее *преобразование Лапласа*

$$\hat{\nu}(s) = \int_{\mathbb{R}} e^{sx} \nu(dx)$$

для тех значений $s \in \mathbb{C}$, при которых данный интеграл имеет смысл, т.е. сходится абсолютно относительно полной вариации $|\nu|$ меры ν . Условимся о том, что операции над матрицами осуществляются по-элементно; например,

$$\int_0^\infty x \mathbf{F}(dx) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\int_0^\infty x F_{ij}(dx) \right),$$

а через $\hat{\mathbf{F}}(s)$ будем обозначать матрицу, состоящую из преобразований Лапласа $\hat{F}_{ij}(s)$ элементов матрицы $\mathbf{F}$. Аналогичное соглашение относится и к неравенствам, в которых участвуют матрицы. Пусть $\mathbf{I}$ – единичная матрица порядка $n \times n$.

Асимптотическое поведение решения $\mathbf{X}(x)$ уравнения (2) при $x \rightarrow \infty$ существенно зависит от свойств матрицы $\mathbf{F}$. Настоящая работа посвящена изучению влияния корней *характеристического уравнения*

$$\det(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{F}}(s)) = 0 \quad (3)$$

на асимптотику решения $\mathbf{X}(x)$ уравнения восстановления (2) при $x \rightarrow \infty$.

В качестве применения полученных результатов будет установлена асимптотика среднего числа частиц зависящих от возраста ветвящихся процессов с несколькими типами частиц.

§ 2. Предварительные сведения

Пусть $\mathbf{B}$ – квадратная матрица порядка n и $\mu_1, \dots, \mu_n$ – ее собственные значения. Величина $\max_{1 \leq j \leq n} |\mu_j|$ называется *спектральным радиусом* $\mathbf{B}$. По теореме Перрона–Фробениуса [6, теорема 9.2.1] любая неотрицательная неприводимая матрица $\mathbf{B}$ имеет положительное собственное значение r кратности 1, равное ее спектральному радиусу, и существует положительный правый (левый) собственный вектор, соответствующий r . Если отказаться от условия неприводимости, то справедливо следующее утверждение [6, теорема 9.3.1, (i)]: любая неотрицательная матрица $\mathbf{B}$ имеет вещественное собственное значение r , равное спектральному радиусу $\mathbf{B}$. В дальнейшем будем предполагать, что матрица $\hat{\mathbf{F}}(0) = (\hat{F}_{ij}(0)) = (F_{ij}([0, \infty)))$ неприводима, а спектральный радиус матрицы $\mathbf{F}(\{0\}) = (F_{ij}(\{0\}))$ меньше единицы.

В терминах преобразований Лапласа уравнение (2) можно записать в виде

$$\hat{\mathbf{X}}(s) = \hat{\mathbf{K}}(s) + \hat{\mathbf{F}}(s)\hat{\mathbf{X}}(s).$$

Следовательно, $\hat{\mathbf{X}}(s) = [\mathbf{I} - \hat{\mathbf{F}}(s)]^{-1} \hat{\mathbf{K}}(s) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\mathbf{H}}(s) \hat{\mathbf{K}}(s)$, где через $\hat{\mathbf{H}}(s)$ обозначено преобразование Лапласа *матричной меры восстановления*

$$\mathbf{H} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{F}^{k*}; \quad (4)$$

здесь $\mathbf{F}^{1*} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{F}$, $\mathbf{F}^{(k+1)*} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{F}^{k*} * \mathbf{F} = \mathbf{F} * \mathbf{F}^{k*}$, $\mathbf{F}^{0*} \stackrel{\text{def}}{=} \delta \mathbf{I}$, где δ – мера единичной массы, сосредоточенная в нуле. Таким образом, $\mathbf{X} = \mathbf{H} * \mathbf{K}$ или $\mathbf{X}(x) = \int_0^x \mathbf{H}(du) \mathbf{K}(x - u)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функция $\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, называется *полумультипликативной*, если она конечна, положительна, измерима по Борелю и удовлетворяет следующим условиям: $\varphi(0) = 1$, $\varphi(x + y) \leq \varphi(x) \varphi(y)$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Имеют место соотношения [7, теорема 7.6.2]

$$\begin{aligned} -\infty < r_-(\varphi) &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\log \varphi(x)}{x} = \sup_{x < 0} \frac{\log \varphi(x)}{x} \\ &\leq \inf_{x > 0} \frac{\log \varphi(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log \varphi(x)}{x} \stackrel{\text{def}}{=} r_+(\varphi) < \infty. \end{aligned} \quad (5)$$

Следующие примеры полумультипликативных функций на $\mathbb{R}_+$ иллюстрируют широту понятия полумультипликативности: $\varphi(x) = (x + 1)^r$, $r > 0$; $\varphi(x) = \exp(cx^\beta)$, где $c > 0$ и $0 < \beta < 1$; $\varphi(x) = \exp(r_+x)$, r_+ вещественно. В первых двух случаях $r_+(\varphi) = 0$, в то время как в последнем $r_+(\varphi) = r_+$. Произведение конечного числа полумультипликативных функций снова является полумультипликативной функцией. Кроме того, если $R(x)$, $x \in \mathbb{R}_+$, – положительная, начиная с некоторого места неубывающая, правильно меняющаяся на бесконечности функция с неотрицательным показателем β (т.е. $R(tx)/R(x) \rightarrow t^\beta$ для $t > 0$, когда $x \rightarrow \infty$ [8, § VIII.8]), то найдутся полумультипликативная функция $\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}_+$, и точка $x_0 \in (0, \infty)$ такие, что $c_1 R(x) \leq \varphi(x) \leq c_2 R(x)$ при всех $x \geq x_0$, где c_1 и c_2 – некоторые положительные постоянные [9, предложение].

Обозначим через $S(\varphi)$ совокупность всех комплекснозначных σ -конечных мер ν , определенных на σ -алгебре $\mathcal{B}$ борелевских подмножеств прямой $\mathbb{R}$, таких, что

$$\|\nu\|_\varphi = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) |\nu|(dx) < \infty.$$

Совокупность $S(\varphi)$ – банахова алгебра с нормой $\|\cdot\|_\varphi$; операцией умножения элементов ν и κ из $S(\varphi)$ служит их свертка $\nu * \kappa$, а единицей – мера δ . (Теория банаховых алгебр $S(\varphi)$ для мер, сосредоточенных на $[0, \infty)$, изложена в [7, гл. 4].) Из (5) вытекает, что преобразование Лапласа $\hat{\nu}(s)$ произвольной меры $\nu \in S(\varphi)$ абсолютно сходится относительно полной вариации $|\nu|$ при $r_-(\varphi) \leq \operatorname{Re} s \leq r_+(\varphi)$. Следующие две теоремы о преобразованиях Лапласа доказаны в [10].

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, – полумультипликативная функция такая, что $r_-(\varphi) < r_+(\varphi)$, функция $\varphi(x)/\exp[r_+(\varphi)x]$, $x \geq 0$, не убывает, а функция $\varphi(x)/\exp[r_-(\varphi)x]$, $x \leq 0$, не возрастает. Предположим, что $\nu \in S(\varphi)$ и $\hat{\nu}(s_0) = 0$, где $r_-(\varphi) < \operatorname{Re} s_0 < r_+(\varphi)$. Тогда $\hat{\kappa}(s) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\nu}(s)/(s - s_0)$, $r_-(\varphi) \leq \operatorname{Re} s \leq r_+(\varphi)$, – преобразование Лапласа некоторой меры $\kappa \in S(\varphi)$.

Если корень уравнения $\hat{\nu}(s) = 0$ лежит на границе полосы $\{r_-(\varphi) \leq \operatorname{Re} s \leq r_+(\varphi)\}$, то справедлива следующая теорема (для определенности рассмотрим случай $\operatorname{Re} s_0 = r_+(\varphi)$).

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, – полумультимпликативная функция такая, что функция $\varphi(x)/\exp[r_+(\varphi)x]$, $x \geq 0$, не убывает, а $\varphi(x)/\exp[r_-(\varphi)x]$, $x \leq 0$, не возрастает. Пусть $\nu \in S(\varphi)$ и $\hat{\nu}(s_0) = 0$, где $\operatorname{Re} s_0 = r_+(\varphi)$. Предположим, что

$$\int_0^\infty x\varphi(x)|\nu|(dx) < \infty \quad \text{или} \quad \int_{\mathbb{R}} |x|\varphi(x)|\nu|(dx) < \infty,$$

в зависимости от того, будет ли $r_-(\varphi) < r_+(\varphi)$ или $r_-(\varphi) = r_+(\varphi)$. Тогда $\hat{\kappa}(s) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\nu}(s)/(s - s_0)$, $r_-(\varphi) \leq \operatorname{Re} s \leq r_+(\varphi)$, – преобразование Лапласа некоторой меры $\kappa \in S(\varphi)$.

Абсолютно непрерывную компоненту произвольной неотрицательной меры ν обозначим через ν_c , а сингулярную компоненту – через ν_s : $\nu_s = \nu - \nu_c$. Если $\mathbf{F}$ – матрица, элементы которой суть неотрицательные меры, то через $\mathbf{F}_s$ будем обозначать матрицу, элементы которой суть сингулярные компоненты соответствующих элементов $\mathbf{F}$.

§ 3. Теоремы многомерного восстановления

Пусть $\varphi(x)$, $x \geq 0$, – полумультимпликативная функция такая, что $r_+ \stackrel{\text{def}}{=} r_+(\varphi) \geq 0$. Предположим, что $\hat{\mathbf{F}}(r_+) < \infty$, и пусть множество $\mathcal{Z}$ корней характеристического уравнения (3), лежащих в полуплоскости $\{s \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} s \leq r_+\}$, конечно: $\mathcal{Z} = \{s_1, \dots, s_l\}$. Пусть n_j – кратность корня s_j ; это означает, что

$$\det(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{F}}(s)) = (s - s_j)^{n_j} f_j(s),$$

где $f_j(s_j) \neq 0$. Если $\mathcal{Z} \neq \emptyset$, то среди элементов $\mathcal{Z}$ имеется один вещественный корень кратности единица, который мы будем обозначать через q ; для определенности $q = s_1$ и $n_1 = 1$. Если $s \in \mathcal{Z}$, то $\bar{s} \in \mathcal{Z}$ и корень $\bar{s}$ имеет ту же кратность, что и s .

Пусть

$$\int_0^\infty x^{2n_j} e^{\operatorname{Re} s_j x} \mathbf{F}(dx) < \infty, \quad \int_0^\infty x^{n_j} e^{\operatorname{Re} s_j x} |\mathbf{K}|(dx) < \infty,$$

где $s_j \in \mathcal{Z}$. Определим коэффициенты $\mathbf{B}_{jk}$, $k = 1, \dots, n_j$, из асимптотического разложения

$$\hat{\mathbf{X}}(s) = [\mathbf{I} - \hat{\mathbf{F}}(s)]^{-1} \hat{\mathbf{K}}(s) = \sum_{k=1}^{n_j} \frac{(-1)^k \mathbf{B}_{jk}}{(s - s_j)^k} + o\left(\frac{1}{s - s_j}\right), \quad s \rightarrow s_j. \quad (6)$$

Матричные коэффициенты $\mathbf{B}_{jk}$ зависят от матрицы $\mathbf{K}$, однако мы не будем фиксировать эту зависимость в обозначениях ради сокращения записи. Обозначим через $\mathcal{E}_j$ комплекснозначную меру с плотностью $\mathbf{1}_{(0, \infty)}(x)e^{-s_j x}$; здесь $\mathbf{1}_A(x)$ – индикаторная функция множества A . Преобразование Лапласа меры $\mathcal{E}_j$ равно $1/(s_j - s)$, $\operatorname{Re}(s - s_j) < 0$.

Забегаая вперед, сразу отметим, что искомое разложение для решения $\mathbf{X}$ будет иметь следующий вид:

$$\mathbf{X} = \sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^{n_j} \mathbf{B}_{jk} \mathcal{E}_j^{k*} + \Delta_{\mathbf{K}} \quad (7)$$

с остатком $\Delta_{\mathbf{K}}$, обладающим интегральной оценкой $\int_0^\infty \varphi(x) |\Delta_{\mathbf{K}}|(dx) < \infty$ с полумультипликативной весовой функцией (здесь $|\Delta_{\mathbf{K}}|$ – матрица полных вариаций вещественнозначных мер, являющихся элементами матрицы $\Delta_{\mathbf{K}}$). Это позволит получить оценку $o(1/\varphi(x))$ для $|\Delta_{\mathbf{K}}|((x, \infty))$ в соответствующем разложении для $\mathbf{X}(x)$ при $x \rightarrow \infty$.

Если $\mathcal{L} \neq \emptyset$, то основной вклад в асимптотику $\mathbf{X}$ будет давать член $\mathbf{B}_{11} \mathcal{E}_1$, отвечающий корню $s_1 = q$ уравнения (3). Поэтому целесообразно вычислить коэффициент $\mathbf{B}_{11}$ в явном виде.

ЛЕММА 1. Пусть $\det(\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}(q)) = 0$. Предположим, что $\widehat{\mathbf{F}}'(q) \stackrel{\text{def}}{=} (\widehat{F}'_{ij}(q))$ – конечная матрица. Выберем левый и правый собственные векторы $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_n)$ и $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)^T$ с положительными координатами, отвечающие собственному значению 1 матрицы $\widehat{\mathbf{F}}(q)$, так, чтобы $\mathbf{l}\mathbf{r} = 1$. Тогда

$$\mathbf{B}_{11} = \frac{\mathbf{r} \widehat{\mathbf{K}}(q)}{\widehat{\mathbf{F}}'(q) \mathbf{r}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция $\det(\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}(s))$ равна линейной комбинации произведений, состоящих из n сомножителей, каждый из которых является преобразованием Лапласа некоторого элемента матрицы $\delta \mathbf{I} - \mathbf{F}$. Следовательно, $\det(\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}(s))$ – преобразование Лапласа $\hat{\alpha}(s)$ некоторой вещественнозначной меры α , причем функция $\hat{\alpha}(s)$ имеет производную в точке $s = q$. При $s \rightarrow q$ имеем $(\widehat{\mathbf{M}}(s) - \widehat{\mathbf{M}}(q))$ – присоединенная матрица к $\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}(s)$

$$[\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}(s)]^{-1} = \frac{\widehat{\mathbf{M}}(s)}{\hat{\alpha}(s)/(s-q)} \frac{1}{s-q} = \frac{\widehat{\mathbf{M}}(q)}{\hat{\alpha}'(q)} \frac{1}{s-q} + o\left(\frac{1}{s-q}\right),$$

откуда

$$[\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}(s)]^{-1} \widehat{\mathbf{K}}(s) = \frac{\widehat{\mathbf{M}}(q) \widehat{\mathbf{K}}(q)}{\hat{\alpha}'(q)} \frac{1}{s-q} + o\left(\frac{1}{s-q}\right).$$

Таким образом, $\mathbf{B}_{11} = -\widehat{\mathbf{M}}(q) \widehat{\mathbf{K}}(q) / \hat{\alpha}'(q)$. Равенство

$$\frac{\widehat{\mathbf{M}}(q)}{\hat{\alpha}'(q)} = -\frac{\mathbf{r} \mathbf{l}}{\widehat{\mathbf{F}}'(q) \mathbf{r}}$$

нетрудно установить, модифицируя надлежащим образом рассуждения из доказательств лемм 8 и 6 в [11]. А именно, надо воспользоваться тем, что в нашем случае $\sum_{j=0}^k \widehat{\mathbf{F}}(q)^j / k \rightarrow \mathbf{r} \mathbf{l}$ при $k \rightarrow \infty$ [12, теорема 8.6.1], и заменить вектор-столбец $\mathbf{e}$ с единичными координатами на вектор $\mathbf{r}$. Для полноты изложения приведем соответствующие рассуждения.

Имеем $\widehat{\mathbf{M}}(q) = c\mathbf{r}\mathbf{l}$, где $c = \lim_{z \rightarrow 1-} \det(\mathbf{I} - z\widehat{\mathbf{F}}(q))/(1-z) > 0$. Действительно, при $0 < z < 1$ матрица $\widehat{\mathbf{M}}_z(q)$, присоединенная к $\mathbf{I} - z\widehat{\mathbf{F}}(q)$, равна

$$\det(\mathbf{I} - z\widehat{\mathbf{F}}(q)) \sum_{k=0}^{\infty} z^k \widehat{\mathbf{F}}(q)^k = \frac{\det(\mathbf{I} - z\widehat{\mathbf{F}}(q))}{1-z} \cdot (1-z) \sum_{k=0}^{\infty} z^k \widehat{\mathbf{F}}(q)^k. \quad (8)$$

Характеристический многочлен $f(\lambda)$ матрицы $\widehat{\mathbf{F}}(q)$ равен

$$f(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \det(\lambda\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}(q)) = \prod_{j=1}^k (\lambda - \lambda_j)^{m_j},$$

где λ_j – собственные числа $\widehat{\mathbf{F}}(q)$, а m_j – их кратности, $j = 1, \dots, k$, $\sum_{j=1}^k m_j = n$, при этом собственное число $\lambda_1 = 1$ имеет кратность 1. Поэтому

$$\det(\mathbf{I} - z\widehat{\mathbf{F}}(q)) = z^n f(1/z) = z^n \prod_{j=1}^k (1/z - \lambda_j)^{m_j} = (1-z) \prod_{j=2}^k (1 - z\lambda_j)^{m_j}.$$

Таким образом, $c = \prod_{j=2}^k (1 - \lambda_j)^{m_j} > 0$, ибо $\lambda_j \neq 1 \ \forall j > 1$, и если λ_j – комплексное собственное число, то $\exists \lambda_i = \overline{\lambda_j}$ и $m_i = m_j$, откуда $(1 - \lambda_j)^{m_j} \times (1 - \lambda_i)^{m_i} = |1 - \lambda_j|^{2m_j}$. В силу тауберовой теоремы для степенных рядов

$$(1-z) \sum_{k=0}^{\infty} z^k \widehat{\mathbf{F}}(q)^k \rightarrow \mathbf{r}\mathbf{l} \quad \text{при } z \rightarrow 1-$$

(см. [8, гл. XIII, § 5, теорема 5]). Поэтому из (8) вытекает

$$\widehat{\mathbf{M}}(q) = \lim_{z \rightarrow 1-} \widehat{\mathbf{M}}_z(q) = c\mathbf{r}\mathbf{l}. \quad (9)$$

Продифференцируем равенство $[\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}(s)]\widehat{\mathbf{M}}(s) = \hat{\alpha}(s)\mathbf{I}$ в точке $s = q$. Получим

$$-\widehat{\mathbf{F}}'(q)\widehat{\mathbf{M}}(q) + [\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}(q)]\widehat{\mathbf{M}}'(q) = \hat{\alpha}'(q)\mathbf{I}.$$

Умножим обе части последнего равенства сначала слева на вектор $\mathbf{l}$, а затем справа на $\mathbf{r}$. В итоге, учитывая (9) и равенство $\mathbf{l}\mathbf{r} = 1$, получим

$$-\mathbf{l}\widehat{\mathbf{F}}'(q)\widehat{\mathbf{M}}(q)\mathbf{r} = -\mathbf{l}\widehat{\mathbf{F}}'(q)c\mathbf{r} = \hat{\alpha}'(q).$$

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, – полумультимпликативная функция такая, что $\varphi(x) \equiv 1$ при $x < 0$, $r_+ \geq 0$ и функция $\varphi(x)/\exp(r_+x)$, $x \geq 0$, не убывает. Предположим, что $\widehat{\mathbf{F}}(r_+) < \infty$ и спектральный радиус матрицы $(\mathbf{F}^{m*})_s^\wedge(r_+)$ меньше единицы при некотором целом $m \geq 1$. Допустим, что множество $\mathcal{Z}$ корней характеристического уравнения (3), лежащих в полуплоскости $\{s \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} s \leq r_+\}$, конечно. Обозначим через N максимальную кратность корней уравнения (3), лежащих на прямой $\{s \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} s = r_+\}$ ($N = 0$ означает, что таких корней на указанной прямой нет). Пусть также

$$\int_0^\infty x^{2N} \varphi(x) \mathbf{F}(dx) < \infty, \quad \int_0^\infty x^N \varphi(x) |\mathbf{K}|(dx) < \infty.$$

Тогда для решения $\mathbf{X}$ уравнения (2) справедливо представление (7), в котором остаток $\Delta_{\mathbf{K}}$ удовлетворяет неравенству $\int_0^\infty \varphi(x) |\Delta_{\mathbf{K}}|(dx) < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем число $r_- \leq 0$ так, чтобы все корни характеристического уравнения (3) лежали в полосе $\{s \in \mathbb{C}: r_- \leq \operatorname{Re} s \leq r_+\}$. Сразу же оговоримся: параметр r_- играет вспомогательную роль и произвольность выбора r_- не повлияет на окончательные результаты настоящей работы. Образует следующую систему полумультимпликативных функций: $\varphi_k(x) \stackrel{\text{def}}{=} (1+x)^k \varphi(x)$ при $x \geq 0$ и $\varphi_k(x) \stackrel{\text{def}}{=} \exp(r_-x)$ при $x < 0$, где k меняется от 0 до $2N$. Очевидно, что $r_+(\varphi_k) = r_+$ и $r_-(\varphi_k) = r_-$ при всех $k = 0, \dots, 2N$. Выберем $a > r_+$ и положим $p = \sum_{j=1}^l n_j$. Рассмотрим функцию

$$d(s) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(s-a)^p \det(\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}(s))}{\prod_{j=1}^l (s-s_j)^{n_j}} = \frac{(s-a)^p \hat{\alpha}(s)}{\prod_{j=1}^l (s-s_j)^{n_j}}.$$

Доказательство теоремы 3 ввиду его большого объема удобно разбить на несколько лемм.

ЛЕММА 2. Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда функция $d(s)$ – преобразование Лапласа $\widehat{D}(s)$ некоторой меры D из $S(\varphi_N)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разлагая рациональную функцию на простые дроби, получим

$$d(s) = \hat{\alpha}(s) + \sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^{n_j} \frac{C_{jk}}{(s-s_j)^k} \hat{\alpha}(s), \quad (10)$$

где C_{jk} – константы. Из условий теоремы вытекает, что мера α с преобразованием Лапласа $\hat{\alpha}(s) = \det(\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}(s))$ принадлежит банаховой алгебре $S(\varphi_{2N})$. Применяя к каждому слагаемому $C_{jk} \hat{\alpha}(s)/(s-s_j)^k$ теорему 1 или теорему 2, в зависимости от того, будет ли $\operatorname{Re} s_j$ меньше или равно r_+ , устанавливаем, что оно является преобразованием Лапласа некоторой меры из $S(\varphi_{2N})$ или $S(\varphi_{2N-k})$ соответственно. В итоге получим, что $d(s) = \widehat{D}(s)$, где $D \in S(\varphi_N)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Пусть выполнены условия теоремы 3. Элемент $D \in S(\varphi_N)$ обратим в $S(\varphi_N)$.

Доказательство в значительной степени повторяет рассуждения из [10, теорема 4], однако в связи с матричной спецификой рассматриваемого случая приведем его в полном объеме. Пусть $\mathcal{M}$ – пространство максимальных идеалов алгебры $S(\varphi_N)$. Каждый максимальный идеал $M \in \mathcal{M}$ порождает некоторый гомоморфизм $h: S(\varphi_N) \rightarrow \mathbb{C}$, и M – ядро этого гомоморфизма. Обозначим через $\nu(M)$ значение h на $\nu \in S(\varphi_N)$. Элемент $\nu \in S(\varphi_N)$ имеет обратный тогда и только тогда, когда ν не принадлежит никакому максимальному идеалу $M \in \mathcal{M}$. Иными словами, ν обратим тогда и только тогда, когда $\nu(M) \neq 0$ при любом $M \in \mathcal{M}$.

Пространство $\mathcal{M}$ разбивается на два множества: множество максимальных идеалов, не содержащих совокупности $L(\varphi_N)$ всех абсолютно непрерывных мер из $S(\varphi_N)$, и $\mathcal{M}_2 = \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_1$. Если $M \in \mathcal{M}_1$, то порожденный им гомоморфизм имеет вид $h(\nu) = \hat{\nu}(s_0)$, $r_- \leq \operatorname{Re} s_0 \leq r_+$. В этом случае $M = \{\nu \in S(\varphi_N) : \hat{\nu}(s_0) = 0\}$ [7, гл. IV, § 4]. Если $M \in \mathcal{M}_2$, то $\nu(M) = 0 \forall \nu \in L(\varphi_N)$.

Покажем, что $D(M) \neq 0$ для любого $M \in \mathcal{M}$, тем самым мы установим существование обратного элемента $D^{-1} \in S(\varphi_N)$. Действительно, если $M \in \mathcal{M}_1$, то при некотором $s_0 \in \{r_- \leq \operatorname{Re} s \leq r_+\}$ имеем $D(M) = \hat{D}(s_0) \neq 0$.

Пусть теперь $M \in \mathcal{M}_2$. По теореме о строении произвольного гомоморфизма $h: S(\varphi_N) \rightarrow \mathbb{C}$ [13, теорема 1]

$$h(\nu) = \int_{\mathbb{R}} \chi(x, \nu) \exp(\beta x) \nu(dx), \quad \nu \in S(\varphi_N), \quad (11)$$

где β – вещественное число такое, что $r_- \leq \beta \leq r_+$, а функция $\chi(x, \nu)$ двух переменных $x \in \mathbb{R}$ и $\nu \in S(\varphi_N)$ – обобщенный характер, из свойств которого нам потребуется лишь одно: $|\nu| - \operatorname{ess} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\chi(x, \nu)| \leq 1$. В силу мультипликативности функционала $\nu \rightarrow \nu(M)$, $\nu \in S(\varphi_N)$, имеем $\mathbf{F}(M)^m = \mathbf{F}^{m*}(M) = (\mathbf{F}^{m*})_s(M)$. Обозначим, для краткости, $\Theta = (\Theta_{ij}) \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{F}^{m*})_s$.

Спектральный радиус произвольной матрицы $\mathbf{B}$ равен $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{B}^k\|^{1/k}$, где $\|\mathbf{B}^k\|$ – евклидова норма матрицы $\mathbf{B}^k$. Поэтому если элементы одной матрицы не превосходят по абсолютной величине соответствующих элементов некоторой неотрицательной матрицы, то спектральный радиус первой матрицы не превосходит спектрального радиуса второй. В силу (11) при некотором $\beta \in [r_-, r_+]$ имеем

$$\begin{aligned} |\Theta_{ij}(M)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} \chi(x, \Theta_{ij}) \exp(\beta x) \Theta_{ij}(dx) \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \exp(\beta x) \Theta_{ij}(dx) \leq \int_{\mathbb{R}} \exp(r_+ x) \Theta_{ij}(dx), \end{aligned}$$

откуда вытекает, что спектральный радиус матрицы $\Theta(M)$ не превосходит спектрального радиуса матрицы $\hat{\Theta}(r_+) = (\mathbf{F}^{m*})_s^\wedge(r_+)$, который по предположению меньше единицы. Следовательно, спектральный радиус матрицы $\mathbf{F}(M)^m$ меньше единицы. Поэтому спектральный радиус матрицы $\mathbf{F}(M)$, равный корню степени m из спектрального радиуса матрицы $\mathbf{F}(M)^m$, также будет меньше единицы. Поскольку $T(s_j)^k F \in L(\varphi_N) \forall j, k$, из (10) вытекает, что $D(M) = \det(\mathbf{I} - \mathbf{F}(M)) \neq 0$.

Итак, $D(M) \neq 0$ для любого $M \in \mathcal{M}$. Это означает, что $\exists D^{-1} \in S(\varphi_N)$ и функция $1/d(s)$, $r_- \leq \operatorname{Re} s \leq r_+$, – преобразование Лапласа элемента D^{-1} . Лемма доказана.

Рассмотрим вспомогательную матрицу

$$\mathbf{q}(s) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\prod_{j=1}^l (s - s_j)^{n_j}}{(s - a)^p} [\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}(s)]^{-1}, \quad s \in \{r_- \leq \operatorname{Re} s \leq r_+\} \setminus \mathcal{L}.$$

ЛЕММА 4. Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда $\mathbf{q}(s)$ является матрицей преобразований Лапласа некоторой матрицы $\mathbf{Q}$ мер из $S(\varphi_N)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что $\widehat{\mathbf{M}}(s)$ – присоединенная матрица к $\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}(s)$. Тогда $\mathbf{q}(s) = [1/d(s)]\widehat{\mathbf{M}}(s)$. Следовательно, по лемме 3 $\mathbf{q}(s) = \widehat{\mathbf{Q}}(s)$, где $\mathbf{Q} \stackrel{\text{def}}{=} D^{-1} * \mathbf{M} \in S(\varphi_N)$ (элементы матрицы $\mathbf{Q}$ суть свертки меры D^{-1} с соответствующими элементами матрицы $\mathbf{M}$, принадлежащими $S(\varphi_{2N}) \subset S(\varphi_N)$). Лемма доказана.

Вернемся к доказательству теоремы 3. Имеем

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{X}}(s) &= [\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}(s)]^{-1} \widehat{\mathbf{K}}(s) = \frac{(s - a)^p}{\prod_{j=1}^l (s - s_j)^{n_j}} \widehat{\mathbf{Q}}(s) \widehat{\mathbf{K}}(s) \\ &= \left[1 + \sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^{n_j} \frac{C_{jk}}{(s - s_j)^k} \right] \widehat{\mathbf{Q}}(s) \widehat{\mathbf{K}}(s) \end{aligned} \quad (12)$$

(здесь мы снова воспользовались разложением рациональной функции на простые дроби). Положим для краткости $\mathbf{W} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{Q} * \mathbf{K}$. Очевидно, что $\mathbf{W} \in S(\varphi_N)$. Осуществим следующие преобразования:

$$\frac{\widehat{\mathbf{W}}(s)}{(s - s_j)^k} = \frac{\widehat{\mathbf{W}}(s_j)}{(s - s_j)^k} + \frac{\widehat{\mathbf{W}}(s) - \widehat{\mathbf{W}}(s_j)}{(s - s_j)^k} = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\mathbf{w}_{i,j}(s_j)}{(s - s_j)^{k-i}} + \mathbf{w}_{k,j}(s), \quad (13)$$

где

$$\mathbf{w}_{0,j}(s) \stackrel{\text{def}}{=} \widehat{\mathbf{W}}(s), \quad \mathbf{w}_{i,j}(s) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbf{w}_{i-1,j}(s) - \mathbf{w}_{i-1,j}(s_j)}{s - s_j}, \quad i = 1, \dots, k.$$

Применяя теорему 1 или теорему 2, в зависимости от того, будет ли $\operatorname{Re} s_j$ меньше или равно r_+ , видим, что матричная мера $\mathbf{W}_{i,j} \stackrel{\text{def}}{=} T(s_j)^i \mathbf{W}$ с преобразованием Лапласа $\mathbf{w}_{i,j}(s)$ принадлежит банаховой алгебре $S(\varphi_N)$ или $S(\varphi_{N-k})$ соответственно. Подставляя (13) в (12) и производя суммирование, получим в силу единственности разложения (6)

$$\left[1 + \sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^{n_j} \frac{C_{jk}}{(s - s_j)^k} \right] \widehat{\mathbf{W}}(s) = \widehat{\mathbf{W}}(s) + \sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^{n_j} \frac{(-1)^k \mathbf{B}_{jk}}{(s - s_j)^k} + \sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^{n_j} C_{jk} \mathbf{w}_{k,j}(s).$$

Положим $\Delta_{\mathbf{K}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{W} + \sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^{n_j} C_{jk} T(s_j)^k \mathbf{W}$. Тогда $\Delta_{\mathbf{K}} \in S(\varphi_0) = S(\varphi)$ и

$$\widehat{\mathbf{X}}(s) = \sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^{n_j} \frac{(-1)^k \mathbf{B}_{jk}}{(s - s_j)^k} + \widehat{\Delta}_{\mathbf{K}}(s).$$

Переходя в этом равенстве от преобразований Лапласа к мерам, получим представление (7). Теорема 3 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Условие, состоящее в том, что при некотором целом $m \geq 1$ спектральный радиус ρ_m матрицы $\mathbf{V}(m) = (V_{kj}(m)) \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{F}^{m*})_s^\wedge(r_+)$ меньше единицы, является, вообще говоря, необходимым для того, чтобы остаток $\Delta_{\mathbf{K}}$ в разложении (7) удовлетворял интегральной оценке

$$\int_0^\infty e^{r+x} |\Delta_{\mathbf{K}}|(dx) < \infty.$$

Действительно, допустим противное, т.е. что $\rho_m \geq 1 \forall m \geq 1$. Пусть $\mathbf{H}$ – матричная мера восстановления (4) ($\mathbf{H}$ – решение уравнения (2) при $\mathbf{K} = \delta\mathbf{I}$). Предположим, что для $\mathbf{H}$ справедливо разложение (7) с оценкой $\int_0^\infty e^{r+x} |\Delta|(dx) < \infty$, где $\Delta = \Delta_{\mathbf{K}}$ при $\mathbf{K} = \delta\mathbf{I}$. Пусть $\mathbf{x}(m) = (x_1(m), \dots, x_n(m))$ – неотрицательный правый собственный вектор матрицы $\mathbf{V}(m)$, соответствующий собственному значению ρ_m , такой, что сумма его координат равна единице. Матрица $\mathbf{V}(m)$ содержит, по крайней мере, один элемент, не меньший $1/n$. В самом деле, допустив противное, нетрудно прийти к противоречию: с одной стороны имеем

$$\sum_{j=1}^n [\mathbf{V}(m)\mathbf{x}(m)]_j = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n V_{jk}(m)x_k(m) < \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} x_k(m) = 1,$$

а с другой –

$$\sum_{j=1}^n [\mathbf{V}(m)\mathbf{x}(m)]_j = \rho_m \sum_{j=1}^n x_j(m) = \rho_m \geq 1.$$

Таким образом, найдутся пара индексов (j, k) и целочисленная последовательность $\{m_i\}$ ($m_i \rightarrow \infty, i \rightarrow \infty$) такие, что у матриц $\mathbf{V}(m_i)$ на пересечении j -й строки и k -го столбца стоят элементы, не меньшие $1/n$. Выберем множества $A_{m_i} \in \mathcal{B}$ лебеговой меры нуль таким образом, чтобы мера $V_{jk}(m_i)$ была сосредоточена на A_{m_i} . Тогда лебегова мера множества $A \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_i A_{m_i}$ равна нулю и из разложения (7) для $\mathbf{X} = \mathbf{H}$ вытекает, что справа в матричном неравенстве

$$\int_A e^{r+x} \mathbf{H}(dx) \geq \sum_{i=1}^n \int_A e^{r+x} (\mathbf{F}^{m_i*})_s(dx)$$

на пересечении j -й строки и k -го столбца стоит $+\infty$, а в силу (7)

$$\int_A e^{r+x} \mathbf{H}(dx) \leq \int_A e^{r+x} |\Delta|(dx) < \infty.$$

Полученное противоречие показывает, что если для $\mathbf{H}$ справедливо разложение (7) с оценкой $\int_0^\infty e^{r+x} |\Delta|(dx) < \infty$, то тогда обязательно найдется целое $m \geq 1$ такое, что спектральный радиус матрицы $(\mathbf{F}^{m*})_s^\wedge(r_+)$ строго меньше единицы.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть выполнены условия теоремы 3 и $\det(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{F}}(0)) \neq 0$. Тогда для решения $\mathbf{X}(x)$ уравнения (2) справедливо разложение

$$\mathbf{X}(x) = [\mathbf{I} - \hat{\mathbf{F}}(0)]^{-1} \hat{\mathbf{K}}(0) - \sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^{n_j} \mathbf{B}_{jk} e^{-s_j x} \sum_{p=0}^{k-1} \frac{x^p}{p! s_j^{k-p}} - \Delta_{\mathbf{K}}((x, \infty)), \quad (14)$$

где

$$|\Delta_{\mathbf{K}}|((x, \infty)) = o(1/\varphi(x)), \quad x \rightarrow \infty. \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (7) вытекает

$$\mathbf{X}(x) = \mathbf{X}([0, x]) = \sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^{n_j} \mathbf{B}_{jk} \mathcal{E}_j^{k*}([0, x]) + \Delta_{\mathbf{K}}([0, \infty)) - \Delta_{\mathbf{K}}((x, \infty)).$$

Имеем

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbf{K}}([0, \infty)) &= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ [\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}(s)]^{-1} \widehat{\mathbf{K}}(s) - \sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^{n_j} \frac{(-1)^k \mathbf{B}_{jk}}{(s - s_j)^k} \right\} \\ &= [\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}(0)]^{-1} \widehat{\mathbf{K}}(0) - \sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^{n_j} \frac{\mathbf{B}_{jk}}{s_j^k}. \end{aligned}$$

Далее,

$$\mathcal{E}_j^{k*}([0, x]) = -e^{-s_j x} \sum_{p=0}^{k-1} \frac{x^p}{p! s_j^{k-p}} + \frac{1}{s_j^k}. \quad (16)$$

Равенство (14) установлено. Оценка (15) вытекает из очевидного соотношения

$$\varphi(x) |\Delta_{\mathbf{K}}|((x, \infty)) \leq \int_x^\infty \varphi(y) |\Delta_{\mathbf{K}}|(dy) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty.$$

Следствие доказано.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть выполнены условия теоремы 3, $\det(\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}(0)) = 0$ и $\widehat{\mathbf{M}}(s)$ – присоединенная матрица к $\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}(s)$. Выберем левый и правый собственные векторы $\mathbf{l}$ и $\mathbf{r}$ с положительными координатами, отвечающие собственному значению 1 матрицы $\widehat{\mathbf{F}}(0)$, так, чтобы $\mathbf{l}\mathbf{r} = 1$. Пусть $s_1 = 0$. Тогда для решения $\mathbf{X}(x)$ уравнения (2) справедливо разложение

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(x) &= \frac{\mathbf{r}\widehat{\mathbf{K}}(0)}{\widehat{\mathbf{F}}'(0)\mathbf{r}} x + \left[\frac{\widehat{\mathbf{M}}'(0)}{\widehat{\alpha}'(0)} - \frac{\widehat{\mathbf{M}}(0)\widehat{\alpha}''(0)}{2\widehat{\alpha}'(0)^2} \right] \widehat{\mathbf{K}}(0) - \frac{\mathbf{r}\widehat{\mathbf{K}}'(0)}{\widehat{\mathbf{F}}'(0)\mathbf{r}} \\ &\quad - \sum_{j=2}^l \sum_{k=1}^{n_j} \mathbf{B}_{jk} e^{-s_j x} \sum_{p=0}^{k-1} \frac{x^p}{p! s_j^{k-p}} - \Delta_{\mathbf{K}}((x, \infty)), \end{aligned} \quad (17)$$

где $\Delta_{\mathbf{K}}((x, \infty))$ удовлетворяет (15).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы избежать путаницы в доказательстве, будем фиксировать графически зависимость коэффициентов $\mathbf{B}_{jk}$ от $\mathbf{K}$, поскольку здесь нам предстоит рассматривать отдельно как общий случай с произвольной матрицей $\mathbf{K}$, так и частный случай $\mathbf{K} = \delta\mathbf{I}$, соответствующий матричной мере восстановления. Имеем

$$\mathbf{X}(x) = \mathbf{B}_{11}(\mathbf{K})x + \sum_{j=2}^l \sum_{k=1}^{n_j} \mathbf{B}_{jk}(\mathbf{K}) \mathcal{E}_j^{k*}([0, x]) + \Delta_{\mathbf{K}}([0, \infty)) - \Delta_{\mathbf{K}}((x, \infty)), \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbf{K}}([0, \infty)) &= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ [\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}(s)]^{-1} \widehat{\mathbf{K}}(s) + \frac{\mathbf{B}_{11}(\mathbf{K})}{s} - \sum_{j=2}^l \sum_{k=1}^{n_j} \frac{(-1)^k \mathbf{B}_{jk}(\mathbf{K})}{(s - s_j)^k} \right\} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ [\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}(s)]^{-1} \widehat{\mathbf{K}}(s) + \frac{\mathbf{B}_{11}(\mathbf{K})}{s} \right\} - \sum_{j=2}^l \sum_{k=1}^{n_j} \frac{\mathbf{B}_{jk}(\mathbf{K})}{s_j^k}. \end{aligned} \quad (19)$$

В общем случае предел

$$\mathbf{D}_{\mathbf{K}} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ [\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}(s)]^{-1} \widehat{\mathbf{K}}(s) + \frac{\mathbf{B}_{11}(\mathbf{K})}{s} \right\}$$

нетрудно выразить через $\mathbf{D}_{\mathbf{K}}$ при $\mathbf{K} = \delta \mathbf{I}$. Действительно, так как $\mathbf{B}_{11}(\mathbf{K}) = \mathbf{B}_{11}(\delta \mathbf{I}) \widehat{\mathbf{K}}(0)$, имеем

$$\begin{aligned} [\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}(s)]^{-1} \widehat{\mathbf{K}}(s) + \frac{\mathbf{B}_{11}(\mathbf{K})}{s} &= \left\{ [\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}(s)]^{-1} + \frac{\mathbf{B}_{11}(\delta \mathbf{I})}{s} \right\} \widehat{\mathbf{K}}(0) \\ &\quad + [\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}(s)]^{-1} [\widehat{\mathbf{K}}(s) - \widehat{\mathbf{K}}(0)], \end{aligned}$$

откуда

$$\mathbf{D}_{\mathbf{K}} = \mathbf{D}_{\delta \mathbf{I}} \widehat{\mathbf{K}}(0) + \lim_{s \rightarrow 0} [\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}(s)]^{-1} [\widehat{\mathbf{K}}(s) - \widehat{\mathbf{K}}(0)]. \quad (20)$$

Предел в правой части равен

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\widehat{\mathbf{M}}(s)}{\det(\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}(s))/s} \frac{\widehat{\mathbf{K}}(s) - \widehat{\mathbf{K}}(0)}{s} = \frac{\widehat{\mathbf{M}}(0) \widehat{\mathbf{K}}'(0)}{\widehat{\alpha}'(0)} = -\frac{\mathbf{r} \widehat{\mathbf{K}}'(0)}{\widehat{\mathbf{I}} \widehat{\mathbf{F}}'(0) \mathbf{r}}. \quad (21)$$

Вычислим $\mathbf{D}_{\delta \mathbf{I}}$. Заметим, что $\mathbf{B}_{11}(\delta \mathbf{I}) = -\widehat{\mathbf{M}}(0)/\widehat{\alpha}'(0)$. Далее, полагая $g(s) \stackrel{\text{def}}{=} s/\widehat{\alpha}(s)$, $g(0) \stackrel{\text{def}}{=} 1/\widehat{\alpha}'(0)$, имеем при $s \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} [\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}(s)]^{-1} &= \frac{\widehat{\mathbf{M}}(s)}{\widehat{\alpha}(s)} = \frac{\widehat{\mathbf{M}}(s)g(s)}{s} \\ &= \frac{1}{s} [\widehat{\mathbf{M}}(0) + \widehat{\mathbf{M}}'(0)s + o(s)] [g(0) + g'(0)s + o(s)] \\ &= \frac{1}{s} \frac{\widehat{\mathbf{M}}(0)}{\widehat{\alpha}'(0)} + \widehat{\mathbf{M}}(0)g'(0) + \widehat{\mathbf{M}}'(0)g(0) + o(1). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\mathbf{D}_{\delta \mathbf{I}} = \widehat{\mathbf{M}}(0)g'(0) + \widehat{\mathbf{M}}'(0)g(0) = -\frac{\widehat{\mathbf{M}}(0)\widehat{\alpha}''(0)}{2\widehat{\alpha}'(0)^2} + \frac{\widehat{\mathbf{M}}'(0)}{\widehat{\alpha}'(0)}. \quad (22)$$

Из (20)–(22) вытекает

$$\mathbf{D}_{\mathbf{K}} = \left[\frac{\widehat{\mathbf{M}}'(0)}{\widehat{\alpha}'(0)} - \frac{\widehat{\mathbf{M}}(0)\widehat{\alpha}''(0)}{2\widehat{\alpha}'(0)^2} \right] \widehat{\mathbf{K}}(0) + \frac{\widehat{\mathbf{M}}(0)\widehat{\mathbf{K}}'(0)}{\widehat{\alpha}'(0)}.$$

Подставляя найденное значение $\mathbf{D}_{\mathbf{K}}$ в (19), получим

$$\Delta_{\mathbf{K}}([0, \infty)) = \left[\frac{\widehat{\mathbf{M}}'(0)}{\widehat{\alpha}'(0)} - \frac{\widehat{\mathbf{M}}(0)\widehat{\alpha}''(0)}{2\widehat{\alpha}'(0)^2} \right] \widehat{\mathbf{K}}(0) + \frac{\widehat{\mathbf{M}}(0)\widehat{\mathbf{K}}'(0)}{\widehat{\alpha}'(0)} - \sum_{j=2}^l \sum_{k=1}^{n_j} \frac{\mathbf{B}_{jk}(\mathbf{K})}{s_j^k}.$$

Наконец, из (18) и (16) вытекает искомое разложение (17). Следствие доказано.

§ 4. Асимптотика среднего числа частиц

В настоящем параграфе мы применим доказанные теоремы многомерного восстановления к исследованию асимптотики среднего числа частиц зависящих от возраста ветвящихся процессов. В самой общей модели таких процессов – модель I в терминологии [1] – предполагается, что популяция состоит из n типов частиц. Напомним вкратце устройство этих процессов [1, гл. VIII]. Каждая частица i -го типа имеет случайную продолжительность жизни τ_i с невырожденной функцией распределения $G_i(t)$. В конце жизни частица i -го типа превращается в совокупность частиц $\nu_i = (\nu_{i1}, \dots, \nu_{in})$, где ν_{ik} – число частиц k -го типа нулевого возраста, порожденных частицей i -го типа в момент ее гибели. Обозначим $p_{i\alpha}(u) = \mathbf{P}(\nu_i = \alpha \mid \tau_i = u)$, где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – вектор с неотрицательными целочисленными координатами. Функции $p_{i\alpha}(u)$ переменной u предполагаются измеримыми по Борелю. Эволюция частицы i -го типа определяется совместным распределением

$$\mathbf{P}(\tau_i \in B, \nu_i = \alpha) = \int_B p_{i\alpha}(u) G_i(du), \quad B \in \mathcal{B}, \quad \alpha \in \mathbb{N}^n,$$

где $\mathbb{N}$ – множество неотрицательных целых чисел. Процесс начинается с частицы, скажем, i -го типа, имеющей нулевой возраст в момент $t = 0$. Эволюции различных частиц предполагаются независимыми друг от друга, а условное распределение эволюций всех частиц данного поколения при условии, что известны эволюции всех частиц предыдущих поколений, зависит лишь от состава этого поколения. Обозначим через $a_{ij}(u) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \alpha_j p_{i\alpha}(u)$ математическое ожидание числа частиц j -го типа, появляющихся в следующем поколении из одной частицы i -го типа, при условии, что эта частица исчезает в возрасте u . Тогда

$$A_{ij} = \int_0^\infty a_{ij}(u) G_i(du)$$

– математическое ожидание числа частиц-потомков j -го типа у одной частицы типа i . Запись $\mathbf{Z}(t) = (Z_{ij}(t))$ будет означать, что в момент t существуют $Z_{ij}(t)$ частиц j -го типа при условии, что процесс начался с одной частицы i -го типа, $i, j = 1, \dots, n$.

Пусть $\mathbf{A}(t) = (A_{ij}(t)) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{E}\mathbf{Z}(t)$ – матрица соответствующих математических ожиданий и $G_i(\{0\}) = 0 \forall i$. Тогда функции $A_{ij}(t)$ удовлетворяют следующему многомерному уравнению восстановления [1, гл. VIII, § 6, (7)]:

$$A_{ij}(t) = \sum_{k=1}^n \int_0^t a_{ik}(u) A_{kj}(t-u) G_i(du) + \delta_{ij}[1 - G_i(t)], \quad i, j = 1, \dots, n,$$

где δ_{ij} – символ Кронекера. Обозначим

$$F_{ij}(dx) \stackrel{\text{def}}{=} a_{ij}(x) G_i(dx), \quad K_{ij}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \delta_{ij}[1 - G_i(x)], \quad X_{ij}(x) \stackrel{\text{def}}{=} A_{ij}(x). \quad (23)$$

В итоге приходим к уже исследованному многомерному уравнению восстановления (1) при $m_1 = n$. Образует матрицы $\mathbf{F}$, $\mathbf{K}$ с элементами F_{ij} , K_{ij} соответственно, задаваемыми равенствами (23). Отметим, что функции $K_{ij}(x)$ суть функции

распределения мер $K_{ij} = \delta_{ij}(\delta - G_i)$, $i, j = 1, \dots, n$. Введем сокращенное обозначение для диагональных матриц: $\text{diag}\{a_i\} \stackrel{\text{def}}{=} \text{diag}\{a_1, \dots, a_n\}$. Таким образом, $\mathbf{K} = \text{diag}\{\delta - G_i\}$. Матрица $\widehat{\mathbf{F}}(0) = (\int_0^\infty a_{ij}(x) G_i(dx))$ предполагается неприводимой.

Пусть $\widehat{\mathbf{F}}(r_+) < \infty$ и $\widehat{G}_i(r_+) < \infty$, $i = 1, \dots, n$, при $r_+ \geq 0$. Как и в § 3, пусть $\mathcal{Z} = \{s_1, \dots, s_l\}$ – множество корней уравнения $\det(\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}(s)) = 0$, лежащих в полуплоскости $\{s \in \mathbb{C}: \text{Re } s \leq r_+\}$, с кратностями n_j , $j = 1, \dots, l$. Если $\mathcal{Z} \neq \emptyset$, то, как и прежде, $q = s_1$ – единственный вещественный корень уравнения (3) кратности $n_1 = 1$. Пусть

$$\int_0^\infty x^{2n_j} e^{\text{Re } s_j x} a_{ij}(x) G_i(dx) < \infty \quad \forall i, j$$

и

$$\int_0^\infty x^{n_j} e^{\text{Re } s_j x} |\mathbf{K}|(dx) < \infty,$$

где $s_j \in \mathcal{Z}$. Определим коэффициенты $\mathbf{B}_{jk}$, $k = 1, \dots, n_j$, из асимптотического разложения: при $s \rightarrow s_j$

$$[\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}(s)]^{-1} \widehat{\mathbf{K}}(s) = [\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}(s)]^{-1} \text{diag}\{1 - \widehat{G}_i(s)\} = \sum_{k=1}^{n_j} \frac{(-1)^k \mathbf{B}_{jk}}{(s - s_j)^k} + o\left(\frac{1}{s - s_j}\right).$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, – полумультимпликативная функция такая, что $\varphi(x) \equiv 1$ при $x < 0$, $r_+ \geq 0$ и функция $\varphi(x)/\exp(r_+x)$, $x \geq 0$, не убывает. Предположим, что

$$\widehat{\mathbf{F}}(r_+) = \left(\int_0^\infty e^{r_+x} a_{ij}(x) G_i(dx) \right) < \infty$$

и спектральный радиус матрицы $(\mathbf{F}^{m*})_s^\wedge(r_+)$ меньше единицы при некотором целом $m \geq 1$. Допустим, что множество $\mathcal{Z}$ корней характеристического уравнения (3), лежащих в полуплоскости $\{s \in \mathbb{C}: \text{Re } s \leq r_+\}$, конечно. Обозначим через N максимальную кратность корней уравнения (3), лежащих на прямой $\{s \in \mathbb{C}: \text{Re } s = r_+\}$. Если $\mathcal{Z} \neq \emptyset$, то выберем левый и правый собственные векторы $\mathbf{l}$ и $\mathbf{r}$ с положительными координатами, отвечающие собственному значению 1 матрицы $\widehat{\mathbf{F}}(q)$, так, чтобы $\mathbf{l}\mathbf{r} = 1$. Пусть также

$$\int_0^\infty x^{2N} \varphi(x) \mathbf{F}(dx) < \infty, \quad \int_0^\infty x^N \varphi(x) |\mathbf{K}|(dx) < \infty.$$

Тогда если $0 \notin \mathcal{Z}$, то

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(x) &= - \sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^{n_j} \mathbf{B}_{jk} e^{-s_j x} \sum_{p=0}^{k-1} \frac{x^p}{p! s_j^{k-p}} + \rho(x) \\ &= \begin{cases} \frac{\mathbf{r} \mathbf{l} \text{diag}\{\widehat{G}_i(q) - 1\} e^{-qx}}{q \mathbf{l} \widehat{\mathbf{F}}'(q) \mathbf{r}} \\ - \sum_{j=2}^l \sum_{k=1}^{n_j} \mathbf{B}_{jk} e^{-s_j x} \sum_{p=0}^{k-1} \frac{x^p}{p! s_j^{k-p}} + \rho(x) & \text{при } \mathcal{Z} \neq \emptyset, \\ \rho(x) & \text{при } \mathcal{Z} = \emptyset, \end{cases} \quad (24) \end{aligned}$$

где

$$|\rho(x)| \leq \text{Var}\{\rho(y); y \in (x, \infty)\} = o(1/\varphi(x)) \quad \text{при } x \rightarrow \infty. \quad (25)$$

А если $q = 0 \in \mathcal{X}$, то

$$\mathbf{A}(x) = \frac{\mathbf{r} \mathbf{l} \text{diag}\{\int_0^\infty x G_i(dx)\}}{\mathbf{l} \widehat{\mathbf{F}}'(0) \mathbf{r}} - \sum_{j=2}^l \sum_{k=1}^{n_j} \mathbf{B}_{jk} e^{-s_j x} \sum_{p=0}^{k-1} \frac{x^p}{p! s_j^{k-p}} + \rho(x),$$

где $\rho(x)$ удовлетворяет соотношению (25).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $0 \notin \mathcal{X}$. Применим следствие 1. Положим $\rho(x) = -\Delta_{\mathbf{K}}((x, \infty))$. В нашем случае $\widehat{\mathbf{K}}(0) = \text{diag}\{1 - \widehat{G}_i(0)\} = \mathbf{0}$. Соотношения (24) и (25) установлены. Пусть теперь $q = 0 \in \mathcal{X}$. Тогда достаточно применить следствие 2. Положим $\rho(x) = -\Delta_{\mathbf{K}}((x, \infty))$. В данном случае $\widehat{\mathbf{K}}(0) = \mathbf{0}$ и $\widehat{\mathbf{K}}'(0) = \text{diag}\{-\widehat{G}'_i(0)\} = -\text{diag}\{\int_0^\infty x G_i(dx)\}$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если функции $a_{ij}(x)$ ограничены, то моментные условия теоремы 3 можно заменить на $\int_0^\infty x^{2N} \varphi(x) G_i(dx) < \infty \forall i$.

§ 5. Сравнение результатов

В заключение подчеркнем универсальность теорем и следствий настоящей работы, позволяющих получить ряд известных результатов в качестве весьма частных случаев. В терминологии [1, гл. VIII, § 9] уравнение (2) называется *критическим*, если перронов корень матрицы $\widehat{\mathbf{F}}(0)$ равен единице (иными словами, если $q = s_1 = 0$). В теоремах 1, 2 и 4 из [1, гл. VIII, § 9] рассматривается критический случай и предполагается, что все элементы матрицы $\mathbf{F}$ – абсолютно непрерывные меры, что автоматически влечет $\mathbf{F}_s = \mathbf{0}$, и, следовательно, спектральный радиус матрицы $\widehat{\mathbf{F}}_s(0)$ равен нулю. Пусть L – сужение меры Лебега на $[0, \infty)$. В наших обозначениях теорема 1 из [1, гл. VIII, § 9] гласит, что если $\int_0^\infty x^2 \mathbf{F}(dx) < \infty$, то $\int_0^\infty |\mathbf{H} - \delta \mathbf{I} - \mathbf{B}_{11} L|(dx) < \infty$, а если дополнительно предположить $\int_0^\infty x^3 \mathbf{F}(dx) < \infty$, то $\int_0^\infty x |\mathbf{H} - \delta \mathbf{I} - \mathbf{B}_{11} L|(dx) < \infty$. Прочитированный результат получается из теоремы 3 при $\mathbf{K} = \mathbf{F}$, $N = 1$, $\varphi(x) \equiv 1$ в первом случае и $\varphi(x) = 1 + x$, $x \geq 0$, во втором. Если $\int_0^\infty x^3 \mathbf{F}(dx) < \infty$, то теорема 3 из [1, гл. VIII, § 9] гласит, что $\mathbf{X}(x) = \mathbf{B}_{11}x + \mathbf{B}_0 + o(1)$ при $x \rightarrow \infty$, где $\mathbf{B}_0$ – вполне определенная матрица. Следствие 2 в этих условиях усиливает данное утверждение: $o(1)$ можно заменить на $o(1/x)$; для этого достаточно в следствии 2 положить $\varphi(x) = 1 + x$ и $N = 1$. А результат с $o(1)$ получается уже при $\int_0^\infty x^2 \mathbf{F}(dx) < \infty$, в этом случае в следствии 2 возьмем $\varphi(x) \equiv 1$.

В теореме 4 из [1, гл. VIII, § 9] говорится, что если $\int_0^\infty x^3 \mathbf{F}(dx) < \infty$, а $\mathbf{K}(x) \downarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$ и $\int_0^\infty x \mathbf{K}(x) dx < \infty$, то (в наших обозначениях)

$$\mathbf{X}(x) = \frac{\mathbf{r} \widehat{\mathbf{K}}'(0)}{\mathbf{l} \widehat{\mathbf{F}}'(0) \mathbf{r}} + o\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \rightarrow \infty.$$

Этот результат получается из следствия 2 при $\varphi(x) = 1 + x$ и $N = 1$.

При исследовании асимптотики моментов зависящих от возраста ветвящихся процессов в [1] предполагается, что все меры $F_{ij}(dx) = a_{ij}(x) G(dx)$ абсолютно

непрерывны, что автоматически влечет $\mathbf{F}_s = \mathbf{0}$. Перейдем к сравнению результатов, касающихся асимптотики среднего числа частиц ветвящихся процессов. Теорема 1 из [1, гл. VIII, § 10] гласит, что если процесс критический (т.е. $q = s_1 = 0$), если $\int_0^\infty x^r G_i(dx) < \infty \forall i$ и $\int_0^\infty x^{r+1} \mathbf{F}(dx) < \infty$, то $\mathbf{A}(x) = \mathbf{A}_0 + o(x^{1-r})$ при $x \rightarrow \infty$, где $r = 1, 2$. Этот результат вытекает из следствия 2 при $\mathbf{K} = \text{diag}\{\delta - G_i\}$ и $\varphi(x) = (1+x)^{r-1}$ (в данном случае $N = 1$).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Пусть $\varphi(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, — полумультимпликативная функция, определенная на множестве целых чисел $\mathbb{Z}$. Если в доказательствах теорем и следствий заменить преобразования Лапласа на производящие функции и вместо алгебр $S(\varphi)$ использовать банаховы алгебры комплексных последовательностей $\{\nu_k\}$ таких, что $\sum_{k=-\infty}^\infty \varphi(k)|\nu_k| < \infty$, то получим аналоги соответствующих утверждений для мер и распределений, сосредоточенных на множестве $\mathbb{Z}$. При этом в формулировке теорем необходимо внести соответствующие изменения: надо заменить меры $L, \mathcal{E}_j$ на их дискретные аналоги. Кроме того, при рассмотрении дискретного случая нет надобности в условии на спектральный радиус матрицы $(\mathbf{F}^{m*})_s^\wedge(r_+)$.

Список литературы

1. Севастьянов Б. А. Ветвящиеся процессы. М.: Наука, 1971.
2. Athreya K. B., Ney P. A Markov process approach to systems of renewal equations with application to branching processes // Branching processes. Advances in Probability and Related Topics. V. 5. N. Y.: Marcel Dekker, 1978. P. 293–317.
3. Севастьянов Б. А., Чистяков В. П. Уравнения многомерного восстановления и моменты ветвящихся процессов // Теория вероятностей и ее применения. 1971. Т. 16. № 2. С. 201–217.
4. Crump K. S. On systems of renewal equations // J. Math. Anal. Appl. 1970. V. 30. P. 425–434.
5. Crump K. S. On systems of renewal equations: the reducible case // J. Math. Anal. Appl. 1970. V. 31. P. 517–528.
6. Ланкастер П. Теория матриц. М.: Наука, 1982.
7. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М.: ИЛ, 1962.
8. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Наука, 1967.
9. Sgibnev M. S. Submultiplicative moments of the supremum of a random walk with negative drift // Statist. Probab. Lett. 1997. V. 32. P. 377–383.
10. Sgibnev M. S. An asymptotic expansion for the distribution of the supremum of a random walk // Studia Math. 2000. V. 140. P. 41–55.
11. Jelenković P. R., Lazar A. A. Subexponential asymptotics of a Markov-modulated random walk with queueing applications // J. Appl. Probab. 1998. V. 35. P. 325–347.
12. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989.
13. Rogozin B. A., Sgibnev M. S. Банаховы алгебры мер на прямой // Сиб. матем. журн. 1980. Т. 21. № 2. С. 160–169.