Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. А. Тюрин, Динамическое соответствие в алгебраической лагранжевой геометрии, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2002, том 66, выпуск 3, 175–196

DOI: <https://doi.org/10.4213/im391>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 18:25:53

УДК 512.7+514.7+514.8

Н. А. Тюрин

Динамическое соответствие в алгебраической лагранжевой геометрии

В настоящей работе, являющейся продолжением статьи [12], развивается основная идея приложения абелевой лагранжевой алгебраической геометрии (см. [3], [4], [10], [11]) к геометрическому квантованию. Для такого АЛГ(а)-квантования принцип соответствия Дирака выполнен. Известные модели геометрического квантования при выборе вещественной или комплексной поляризации представляются редукциями (или линеаризациями) предлагаемого нами квантования, что позволяет в общей ситуации связать результаты известных конструкций, использующих поляризации.

Библиография: 12 наименований.

Введение

Геометрическое квантование – это процесс (см., например, [6]), результатом которого для произвольного симплектического многообразия с симплектической формой (M, ω) является построение подходящего гильбертова пространства $\mathcal{H}$ и соответствия

$$Q: C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow O(\mathcal{H}), \quad (0.1)$$

где $O(\mathcal{H})$ – пространство самосопряженных операторов над $\mathcal{H}$. “Источник” и “цель” в (0.1) обладают структурами алгебр Ли: первое пространство снабжено скобкой Пуассона, порождаемой симплектической формой, второе обладает коммутатором, взвешенным на мнимую единицу, и идеальное квантование должно удовлетворять соотношению Дирака (иначе называемому *принципом соответствия*)

$$Q(\{f, g\}_\omega) = ci[Q(f), Q(g)],$$

где c – некоторая константа. Другими словами, соответствие Q должно быть гомоморфизмом алгебр Ли. Более того, требуется, чтобы представление Q было неприводимо. Однако согласно теореме ван Хова (см. [6]) такого представления, вообще говоря, не существует. В известных примерах одно из условий опускается: результат квантования Сурьо–Костанта (см., например, [6]) не является неприводимым представлением, в то время как результат квантования Березина–Теплица [4] удовлетворяет соотношению Дирака только асимптотически.

В работе [12] была предложена схема квантования, следующая из геометрической формулировки квантовой механики. Пространство квантовых состояний представлено бесконечномерным келеровым многообразием модулей полувзвешенных

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант поддержки ведущих научных школ № 00-15-96085).

бор-зоммерфельдовых лагранжевых циклов фиксированного топологического типа и некоторого фиксированного объема $\mathcal{B}_S^{\text{hw},1}$ (построенное и предложенное в [11]; развернутую версию см. в [4]). В качестве квантовых наблюдаемых выступают гладкие вещественные функции на $\mathcal{B}_S^{\text{hw},1}$, обладающие специальным свойством: для любой такой функции F ее гамильтоново векторное поле является киллинговым для келеровой метрики. Над проективным пространством это условие эквивалентно понятию “символа Березина”, поэтому в дальнейшем будем использовать для краткости следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Гладкая вещественная функция F над келеровым многообразием $\mathcal{K}$, снабженным келеровой тройкой (Ω, J, G) симплектической, комплексной и римановой структур, называется *квазисимволом*, если ее гамильтоново векторное поле X_F сохраняет риманову метрику G :

$$\text{Lie}_{X_F} G = 0. \quad (0.2)$$

Заметим, что множество квазисимволов над произвольным келеровым многообразием $\mathcal{K}$ является не просто векторным пространством, но алгеброй Ли, так как скобка Пуассона двух квазисимволов также удовлетворяет условию (0.2). Алгебру Ли всех квазисимволов для келерова многообразия $\mathcal{K}$ будем обозначать $\mathcal{N}(\mathcal{K})$. Размерность этой алгебры является характеристикой келерова многообразия $\mathcal{K}$. Если вещественная размерность $\mathcal{K}$ зафиксирована и равна $2n$, то нетрудно видеть [7], что размерность пространства квазисимволов ограничена снизу нулем (для комплексного тора), а сверху – числом $\frac{1}{2}(n+1)n-1$ (проективное пространство).

В работе [12] было построено линейное отображение из пространства гладких функций над исходным симплектическим многообразием M (пространства классических наблюдаемых) в пространство гладких функций над многообразием модулей $\mathcal{B}_S^{\text{hw},1}$ (см. [12, формула (3.3)]). Основным результатом статьи [12], заключающийся в том, что это отображение является гомоморфизмом алгебр Ли, дополняется и развивается в настоящей работе.

ТЕОРЕМА. Пусть (M, ω) – произвольное односвязное симплектическое многообразие размерности $2n$, S – некоторый гомологический класс, $S \in H_n(M, \mathbb{Z})$, $\mathcal{B}_S^{\text{hw},1}$ – многообразие модулей полувзвешенных бор-зоммерфельдовых лагранжевых циклов, представляющих класс S , единичного объема, снабженное келеровой структурой (Ω, J, G) . Для каждой вещественной функции $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ существует соответствующая гладкая функция F_f на $\mathcal{B}_S^{\text{hw},1}$ такая, что:

- 1) для любой функции f образ F_f является квазисимволом над $\mathcal{B}_S^{\text{hw},1}$;
- 2) принцип соответствия, представленный в форме

$$\{F_f, F_g\}_\Omega = 2F_{\{f,g\}_\omega},$$

имеет место, т.е. отображение $f \mapsto F_f$ является гомоморфизмом алгебр Ли.

В работе [12] утверждение 2) этой теоремы уже было доказано путем непосредственного вычисления, однако используемый в настоящей работе метод, в дальнейшем называемый *динамическим соответствием*, позволяет получить тот же результат наряду с новым утверждением 1). Мы используем ниже это динамическое соответствие, связывающее гладкие функции на исходном симплектическом многообразии M и векторные поля на многообразии модулей $\mathcal{B}_S^{\text{hw},1}$. В § 2 обсуждаются результаты теоремы с точки зрения возможного квантования классических механических систем. В качестве иллюстрации в § 3 предлагается связь такого нового квантования с известными случаями, когда исходное симплектическое многообразие M допускает вещественную или комплексную поляризацию. Оба эти случая могут быть рассмотрены как редукции АЛГ(a)-квантования (квантование в рамках абелева случая в алгебраической лагранжевой геометрии).

§ 1. Динамическое соответствие

Пусть (M, ω) – односвязное компактное симплектическое многообразие размерности $2n$ такое, что форма ω представляет целочисленный класс когомологий. Тогда для фиксированного класса гомологий срединной размерности $S \in H_n(M, \mathbb{Z})$ имеем бесконечномерное многообразие модулей $\mathcal{B}_S^{\text{hw},1}$ полувзвешенных бор-зоммерфельдовых лагранжевых циклов единичного объема, снабженное симплектической структурой Ω , согласованной интегрируемой комплексной структурой J и индуцируемой первыми двумя структурами римановой метрикой G (см. [4], [11]). Многообразие модулей $\mathcal{B}_S^{\text{hw},1}$ состоит из пар (S, θ) , где первый элемент S есть бор-зоммерфельдов лагранжев цикл, а θ – некоторый полувес на S такой, что

$$\int_S \theta^2 = 1$$

(см. [4], [11]). Для любой гладкой функции $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ имеем индуцированную функцию $F_f \in C^\infty(\mathcal{B}_S^{\text{hw},1}, \mathbb{R})$, определяемую формулой

$$F_f(S, \theta) = \tau \int_S f|_S \theta^2 \quad (1.1)$$

(ср. с формулой (3.3) из [12]). Таким образом, имеем отображение

$$F: C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{B}_S^{\text{hw},1}, \mathbb{R}). \quad (1.2)$$

С другой стороны, имеется следующее отображение

$$\Theta_{\text{DC}}: C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \text{Vect}(\mathcal{B}_S^{\text{hw},1}), \quad (1.3)$$

называемое в дальнейшем *динамическим соответствием*. Оно естественно определено и строится следующим образом. Для произвольной гладкой функции f на исходном многообразии M имеется росток гамильтонова симплектоморфизма ϕ_f , который единственным образом по модулю одновременного фазового поворота

поднимается до ростка автоморфизма тотального пространства $L \rightarrow M$ расслоения предквантования, сохраняющего связность предквантования a (см. [7]). Таким образом, мы получаем и соответствующий росток автоморфизма многообразия модулей $\mathcal{B}_S^{\text{hw},1}$, сохраняющего келерову структуру, т.е. функция f индуцирует векторное поле $\Theta_{\text{DC}}(f) \in \text{Vect}(\mathcal{B}_S^{\text{hw},1})$. Это векторное поле сохраняет келерову структуру на $\mathcal{B}_S^{\text{hw},1}$ будучи инфинитезимальной частью келерова автоморфизма многообразия модулей. Таким образом, по построению соответствия (1.3) имеем первое свойство индуцируемых векторных полей.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. *Образ соответствия является подпространством*

$$\text{Im } \Theta_{\text{DC}} \subset \text{Vect}_K(\mathcal{B}_S^{\text{hw},1}),$$

где последнее пространство составляют векторные поля, сохраняющие одновременно симплектическую структуру и риманову метрику, т.е. всю келерову структуру.

Далее, векторные поля из $\text{Im } \Theta_{\text{DC}}$ удовлетворяют важному свойству.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. *Для любой пары функций $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ выполнено соотношение*

$$\Theta_{\text{DC}}(\{f, g\}_\omega) = [\Theta_{\text{DC}}(f), \Theta_{\text{DC}}(g)],$$

где квадратными скобками обозначен обычный коммутатор векторных полей.

Действительно, скобке Пуассона двух гладких функций соответствует коммутатор их гамильтоновых векторных полей. Поднимаясь до ростков гамильтоновых симплектоморфизмов M и далее до келеровых автоморфизмов многообразия модулей $\mathcal{B}_S^{\text{hw},1}$ и снова переходя к векторным полям, получаем требуемый результат.

Наконец, возникает необходимость сравнить два векторных поля на многообразии модулей $\mathcal{B}_S^{\text{hw},1}$, индуцируемых одной и той же функцией f на исходном многообразии: гамильтоново векторное поле X_{F_f} , соответствующее индуцированной функции F_f , и “динамически соответствующее” функции f поле $\Theta_{\text{DC}}(f)$. Такое сравнение содержится в следующем утверждении.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3. *Для любой гладкой функции $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ выполнено тождество*

$$X_{F_f} = 2\tau\Theta_{\text{DC}}(f).$$

Доказательство этого тождества, проводимое путем прямых вычислений, содержится в следующем параграфе. Здесь покажем, что наша основная теорема непосредственно следует из представленных выше предложений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Действительно, утверждение 1) теоремы следует непосредственно из определения квазисимвола и предложений 1.1 и 1.3: для любой функции f векторное поле $\Theta_{\text{DC}}(f)$ сохраняет келерову структуру согласно

предложению 1.1, но это векторное поле с точностью до константы совпадает с гамильтоновым векторным полем функции F_f . А это по определению и значит, что F_f – квазисимвол над многообразием модулей $\mathcal{B}_S^{\text{hw},1}$.

Утверждение 2) теоремы следует из предложений 1.2, 1.3: скобка Пуассона пары функций f, g переходит при динамическом соответствии в векторное поле, пропорциональное коммутатору векторных полей $\Theta_{\text{DC}}(f)$ и $\Theta_{\text{DC}}(g)$ (предложение 1.2); последний коммутатор есть согласно предложению 1.3 гамильтоново векторное поле скобки Пуассона квазисимволов F_f и F_g . Поскольку в настоящей работе мы пользуемся формулой (1.1) для определения функции F_f , которая в отличие от определения из [12] включает в себя параметр τ , то принцип соответствия для такого определения выглядит следующим образом:

$$\{F_f, F_g\}_\Omega = 2\tau F_{\{f,g\}_\omega}.$$

Необходимо отдельно обсудить вопрос о том, когда отображение (1.2) является вложением. Так как оно линейно, то это эквивалентно тому, что данное отображение (1.2) не имеет ядра. Если функция f над M попадает в ядро этого соответствия, то необходимо имеем, что для любого бор-зоммерфельдова лагранжева цикла S функция f тождественно равна нулю на S :

$$f|_S \equiv 0.$$

Например, если на M найдутся точка x и некоторая окрестность $O(x)$ такие, что не существует бор-зоммерфельдова цикла, пересекающего эту окрестность, то ядро соотношения (1.2) нетривиально: функция, равная 1 в точке x и тривиальная вне окрестности $O(x)$, лежит в ядре. С другой стороны, для симплектических многообразий, рассматриваемых нами в качестве базовых, естественно ввести требование *равноправия точек*: если существует хотя бы одно лагранжево подмногообразие данного топологического типа, то для любой точки найдется лагранжево подмногообразие того же типа, содержащее эту точку (здесь, как и в [4], рассматриваются только связные лагранжевы подмногообразия). Еще более специальным требованием равноправия точек является следующее: для любой пары точек x и y найдется симплектический автоморфизм (M, ω) , переводящий x в y . Очевидно, что последнее требование влечет первое.

Требованию равноправия точек в сильной или слабой форме удовлетворяет большинство известных симплектических многообразий (простейшие примеры: проективное пространство удовлетворяет требованию в сильной форме, в то время как кокасательное расслоение – в слабой). Не касаясь детального обсуждения предмета, потребуем, чтобы для исходного симплектического многообразия (M, ω) выполнялось требование равноправия точек в слабой или сильной форме. Тогда нетрудно видеть, что отображение (1.2) является вложением (если многообразие модулей $\mathcal{B}_S^{\text{hw},1}$ непусто). Для произвольной функции $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ найдется точка $x \in M$, в окрестности которой f отлична от нуля (в предположении, что f не является тождественным нулем). Тогда по требованию равноправия точек найдется

лагранжев цикл, представляющий класс $[S]$ и проходящий через точку x . Используя теорему Дарбу–Вейнштейна (см. [4]), можно деформировать этот лагранжев цикл в бор-зоммерфельдов цикл, представляющий тот же класс гомологий и проходящий через ту же точку x . Ограничение функции f на этот цикл нетривиально, поэтому найдется полувес θ , относительно квадрата которого функция даст ненулевой интеграл вдоль найденного нами бор-зоммерфельдова цикла. Этот интеграл по определению (см. (1.1)) и есть значение индуцированной функции F_f в соответствующей точке многообразия модулей $\mathcal{B}_S^{\text{hw},1}$. Значит, F_f не тривиальна, и соответствие (1.2) не имеет ядра.

Таким образом, в случае, когда исходное симплектическое многообразие (M, ω) удовлетворяет требованию равноправия точек, можно дополнить утверждения теоремы еще одним утверждением.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4. *Для симплектических многообразий, обладающих свойством равноправия точек (например, для однородных пространств или касательных расслоений), соответствие (1.2) является вложением.*

Вместе утверждения основной теоремы и предложения 1.4 лежат в основе построения нового подхода к квантованию классических механических систем. Далее это будет рассмотрено в § 3.

§ 2. Доказательство предложения 1.3

В этом параграфе мы произведем вычисления, необходимые для доказательства ключевого для настоящей работы предложения 1.3.

Прежде всего, напомним, что касательное в точке (S_0, θ_0) пространство к многообразию модулей $\mathcal{B}_S^{\text{hw},1}$ представляется парами ψ_1, ψ_2 гладких функций,

$$\psi_i \in C^\infty(S_0, \mathbb{R}),$$

удовлетворяющих условию

$$\int_{S_0} \psi_i \theta_0^2 = 0. \quad (2.1)$$

Теперь рассмотрим инфинитезимальное действие гамильтонова векторного поля X_f , соответствующего гладкой функции $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, на точку (S_0, θ_0) . В точках лагранжева бор-зоммерфельдова цикла S_0 гамильтоново векторное поле естественно раскладывается на части: касательную к циклу S_0 и нормальную. А именно, имеем разложение

$$X_f = V_f + W_f,$$

где первая часть выражается формулой

$$V_f = \omega^{-1}(d(f|_{S_0})) \quad (2.2)$$

и вторая часть $W_f = X_f - V_f$ касательна к S_0 (точнее, содержится в $TS_0 \subset TM$ в точках S_0). Касательная часть может быть вычислена и так:

$$W_f = (\omega^{-1}(df))|_{S_0}. \quad (2.3)$$

Формула (2.2) отражает замечательный факт лагранжевой геометрии, который лежит в основе всех дальнейших вычислений и в некотором смысле делает возможными представленные в этой работе конструкции. Действительно, имеет место

ЛЕММА 2.1. *Гамильтоново векторное поле X_f касается лагранжева цикла S , если и только если порождающая функция f постоянна на этом цикле:*

$$f|_S = \text{const.}$$

Иными словами, гамильтонов поток X_f сохраняет только тот лагранжев цикл, который полностью содержится в некотором подмногообразии уровня функции f (мы рассматриваем только гладкие циклы).

Доказательство является очень наглядным и необходимым упражнением в рамках симплектической геометрии вообще и для чтения этой работы в частности, поэтому мы не приводим здесь ни подходящей ссылки, ни доказательства.

Удобно понимать V_f (2.2) как “внешнюю” часть гамильтонова потока относительно S_0 , в то время как W_f (2.3) является “внутренней” частью, сохраняющей при своем действии сам цикл S_0 и действующей на объекты, определенные на этом цикле (в нашем случае – на полувеса). Инфинитезимальная деформация цикла (S_0, θ_0) под действием X_f и представляет координаты векторного поля $\Theta_{\text{DC}}(f) \in \text{Vect}_K(\mathcal{B}_S^{\text{hw},1})$ в точке (S_0, θ_0) . По действию X_f имеем, что “внешняя” часть V_f гамильтонова векторного поля отвечает за деформацию самого бор-зоммерфельдова цикла S_0 , а “внутренняя” часть W_f отвечает за деформацию полувеса θ_0 над S_0 .

Изодрастические (или гамильтоновы) деформации бор-зоммерфельдовых циклов задаются функциями на этих циклах с точностью до прибавления константы (см. [4]). Из такого описания касательного пространства видно (см. [4]), что векторное поле V_f в точности соответствует касательному вектору вида

$$\psi_1(S_0, \theta_0) = f|_{S_0} - c, \quad (2.4)$$

где нормировочная константа c берется таким образом, чтобы условие (2.1) было выполнено:

$$c = \int_{S_0} f|_{S_0} \theta_0^2.$$

Вторая компонента векторного поля $\Theta_{\text{DC}}(f)$ имеет вид

$$\psi_2(S_0, \theta_0) = \frac{\text{Lie}_{W_f} \theta_0}{\theta_0}, \quad (2.5)$$

где производная Ли берется от полувеса θ_0 над S_0 вдоль “внутренней” части W_f гамильтонова векторного поля X_f .

Для дальнейших вычислений нам потребуется следующий прием. Зафиксируем подходящую ориентацию на S_0 (а это возможно по определению, см. [4]) и вместе

с полувесом θ_0 рассмотрим соответствующую его квадрату θ_0^2 форму объема $d\mu_0$. Тогда имеем соответствующую “логарифмическую” производную Ли

$$L_f = \frac{\text{Lie}_{W_f} d\mu_0}{d\mu_0}.$$

В то же время

$$\text{Lie}_{W_f}(\theta_0^2) = 2 \text{Lie}_{W_f} \theta_0 \cdot \theta_0,$$

следовательно,

$$L_f = 2 \frac{\text{Lie}_{W_f} \theta_0}{\theta_0} = 2\psi_2(S_0, \theta_0).$$

Теперь вычислим координаты гамильтонова векторного поля X_{F_f} над многообразием модулей $\mathcal{B}_S^{\text{hw},1}$. Дифференциал функции F_f уже был вычислен в [12], и в точке (S_0, θ_0) он имеет вид

$$dF_f(\alpha, \beta) = \tau \int_{S_0} f|_{f_0} 2\beta\theta_0^2 + \tau \int_{S_0} d\alpha ((\omega^{-1}(df))|_{S_0})\theta_0^2 \quad (2.6)$$

для пары функций $\alpha, \beta \in C^\infty(S_0, \mathbb{R})$, представляющей касательный к многообразию модулей вектор. В силу простоты выражения для симплектической формы Ω над $\mathcal{B}_S^{\text{hw},1}$ (см. [4], [12]) имеем

$$\Omega(S_0, \theta_0)\langle(\alpha, \beta); (\gamma, \delta)\rangle = \int_{S_0} (\alpha \cdot \delta - \beta \cdot \gamma)\theta_0^2 \quad (2.7)$$

для четверки функций $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in C^\infty(S_0, \mathbb{R})$ с нулевыми интегралами, представляющих парами касательные векторы, можно легко обратить первое слагаемое в (2.6), получая первую координату гамильтонова векторного поля X_{F_f} :

$$\psi'_1(S_0, \theta_0) = 2\tau f|_{S_0} - c', \quad (2.8)$$

где c' — снова нормализующая выполнение соотношения (2.1) константа. Перейдем ко второму слагаемому в (2.6). Прежде всего заметим, что выражение $(\omega^{-1}(df))|_{S_0}$ из второго слагаемого есть в точности “внутренняя” часть W_f (2.3) гамильтонова векторного поля X_f . Отсюда имеем

$$\begin{aligned} \int_{S_0} d\alpha(W_f)\theta_0^2 &= \int_{S_0} d\alpha \wedge i_{W_f} d\mu_0 \\ &= - \int_{S_0} \alpha \cdot d(i_{W_f} d\mu_0) = - \int_{S_0} \alpha \frac{di_{W_f} d\mu_0}{d\mu_0} \theta_0^2, \end{aligned}$$

используя на втором шаге интегрирование по частям. Подставляя этот результат в (2.7), получаем вторую координату векторного поля X_{F_f} :

$$\psi'_2(S_0, \theta_0) = \tau \frac{\text{Lie}_{W_f} d\mu_0}{d\mu_0} = 2\tau L_f. \quad (2.9)$$

Как следует из статьи [12] и § 1 настоящей работы, для любого такого многообразия модулей имеется вложение гладких функций на исходном многообразии в пространство квазисимволов на многообразии модулей. При этом сохраняются структуры алгебр Ли, индуцированных скобками Пуассона на M и $\mathcal{B}_S^{\text{hw},1}$. Таким образом, можно рассматривать эту конструкцию как нелинейное квантование исходной классической механической системы. Квантовая система представлена в рамках геометрической формулировки квантовой механики (см. [1], [12]) следующим образом: пространство квантовых состояний есть наше бесконечномерное келерово многообразие $\mathcal{B}_S^{\text{hw},1}$, пространство квантовых наблюдаемых состоит из квазисимволов, динамика системы описывается уравнением Гамильтона для выделенной функции – гамильтониана, измерения используют риманову метрику, входящую в келерову структуру на $\mathcal{B}_S^{\text{hw},1}$. Для квантового наблюдаемого – квазисимвола F – собственными квантовыми состояниями будут в точности критические точки функции F на $\mathcal{B}_S^{\text{hw},1}$, и критические значения в этих точках являются собственными значениями этого наблюдаемого.

Необходимо заметить, что развитие данного подхода к квантованию классических механических систем требует введения подходящей компактификации многообразия модулей полувзвешенных бор-зоммерфельдовых лагранжевых циклов фиксированного объема. Компактифицировать такого рода многообразия модулей можно разными способами; существует и метод “максимальной” компактификации, когда результирующее компактное многообразие настолько велико, что включает в себя все возможные прочие компактификации. Однако нам здесь необходима компактификация, которая согласована с динамикой исходной классической системы. Работа в этом направлении продолжается.

Теперь перейдем к рассмотрению вопроса о том, как новый подход к квантованию связан с известными методами квантования, предполагающими фиксацию на исходном симплектическом многообразии M дополнительной структуры. Речь идет о комплексных и вещественных поляризациях. В рамках формальной геометрии эти два понятия похожи друг на друга. Вещественная поляризация симплектического многообразия (M, ω) – это поле лагранжевых подпространств в касательном расслоении, причем это распределение интегрируется. Комплексная поляризация – это поле чисто мнимых n -мерных подпространств в комплексифицированном касательном расслоении, причем это распределение также интегрируемо. Если бы можно было ввести глобальные координаты на всем M , тривиализуя касательное расслоение TM , то эти два понятия были бы связаны поворотом Вика, однако в общем случае никакого соответствия нет и, более того, существование интегрируемой комплексной структуры не влечет наличия интегрируемого лагранжевого распределения и наоборот.

Итак, пусть над (M, ω) имеется *вещественная поляризация*. Наша система, определяемая (M, ω) , является вполне интегрируемой: имеем набор n гладких функций в инволюции

$$\{f_i, f_j\}_\omega = 0 \quad \forall i, j,$$

определяющих лагранжево расслоение

$$\pi : M \rightarrow \Delta, \tag{3.1}$$

где $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ – выпуклый многогранник, причем для любого внутреннего значения $(t_1, \dots, t_n) \in \Delta \setminus \partial\Delta$ соответствующий слой

$$\pi^{-1}(t_1, \dots, t_n) = f_1^{-1}(t_1) \cap \dots \cap f_n^{-1}(t_n)$$

является гладким лагранжевым циклом. Вырождения в гранях многогранника Δ регулярны, т.е. над внутренней частью $(n - k)$ -мерной грани “висят” гладкие $(n - k)$ -мерные изотропные подмногообразия.

Обычно если имеется вещественная поляризация, то схема квантования (см. [9]) предполагает выбор бор-зоммерфельдовых слоев в расслоении (3.1) в качестве базиса гильбертова пространства $\mathcal{H}$. Эти слои определяют сечения расслоения предквантования L , ковариантно постоянные вдоль π . Носителями таких сечений являются в точности бор-зоммерфельдовы слои, поэтому именно такие слои следует выделять в виде базиса гильбертова пространства (ниже мы покажем, что для компактного M число таких слоев всегда конечно). Кроме того (см. [9]), схема квантования подразумевает введение старшей внешней степени расслоения на базисы подрасслоения в TM , касательного слоям π , однако нетрудно видеть, что в нашем случае такой детерминант будет тривиальным с фиксированной тривиализацией. Тривиализация выделена внешним произведением гамильтоновых векторных полей X_{f_i} , поэтому вклад такого рода полуформенных частей может быть также тривиализован. Формально можно представить соответствующее гильбертово пространство в виде прямой суммы

$$\mathcal{H} = \oplus \mathbb{C}\langle S_l \rangle,$$

где S_l – набор бор-зоммерфельдовых слоев.

Выделенные функции $f_1, \dots, f_n$ переходят в операторы, диагональные в этом выделенном базисе; для остальных функций, удовлетворяющих специальным условиям, имеется процедура определения некоторых операторов на $\mathcal{H}$ (необязательно самосопряженных), использующая динамические свойства системы (см. [9]). В нашем случае в силу конечности числа бор-зоммерфельдовых слоев допускают квантование только те функции, которые сохраняют вещественную поляризацию, т.е. функции f_i и алгебраические комбинации из них.

Теперь применим АЛГ(a)-программу к нашей системе, выбирая в качестве определяющего класса гомологий класс слоя лагранжева расслоения π . Тогда получаем бесконечномерное келерово многообразие $\mathcal{B}_S^{\text{hw},1}$, где

$$[S] = [\pi^{-1}(\text{pt})] \in H_n(M, \mathbb{Z}).$$

Выделенные функции – первые интегралы $f_1, \dots, f_n$ – порождают квазисимволы $F_{f_1}, \dots, F_{f_n}$ – гладкие функции на многообразии модулей $\mathcal{B}_S^{\text{hw},1}$. Рассмотрим пересечение

$$\mathcal{P} = \text{Crit}(F_{f_1}) \cap \dots \cap \text{Crit}(F_{f_n}) \subset \mathcal{B}_S^{\text{hw},1} \quad (3.2)$$

критических множеств для всех выделенных квазисимволов. На этом множестве естественным образом действует инволюция, индуцируемая на всем многообразии модулей $\mathcal{B}_S^{\text{hw},1}$ простым преобразованием

$$\sigma(S, \theta) = (S, -\theta).$$

Согласно определяющей формуле (1.2) любая вещественная функция-квазисимвол F на многообразии модулей инвариантна относительно действия этой инволюции. Поэтому очевидно, что для любой функции F_{f_i} ее критическое множество также инвариантно относительно действия σ . Отсюда следует, что и множество $\mathcal{P}$, определенное в (3.2), инвариантно относительно этой инволюции.

Тогда имеем следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Множество $\{S_l\}$ бор-зоммерфельдовых лагранжесов слоев в точности совпадает с факторизацией совместного критического множества $\mathcal{P}$ по действию естественной инволюции σ .*

Это означает, что можно восстановить известное из [9] квантование с вещественной поляризацией в терминах АЛГ(а)-квантования. Конечномерное гильбертово пространство $\mathcal{H}$ “натягивается” на множество точек $\mathcal{P}$, разбитых на пары и сопряженных относительно действия естественной вещественной структуры без вещественных точек, имеющейся на многообразии модулей $\mathcal{B}_S^{\text{hw},1}$. Если рассмотреть вещественное векторное пространство

$$\mathcal{H}_{\mathbb{R}} = \sum_i \mathbb{R}p_i,$$

где p_i – общие для всех F_{f_j} критические точки, составляющие множество $\mathcal{P}$, то вещественная структура на $\mathcal{B}_S^{\text{hw},1}$ индуцирует комплексную структуру на $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$, что дает нам гильбертово пространство $\mathcal{H}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 3.1. Используем уравнения для критических точек квазисимволов, приведенные в конце § 2. Поскольку для любого бор-зоммерфельдова слоя S_i все первые интегралы f_j постоянны на нем, то первое уравнение из (2.10) выполнено автоматически. Для доказательства второго условия нам необходимо найти для каждого бор-зоммерфельдова слоя S_i подходящий полувес θ_i такой, чтобы пары $(S_i, \pm\theta_i)$ были неподвижны относительно гамильтоновых полей первых интегралов f_j . Для этого найдем сначала для произвольного бор-зоммерфельдова слоя S_i подходящую форму объема, инвариантную относительно всех гамильтоновых векторных полей первых интегралов (заметим, что все эти гамильтоновы векторные поля X_{f_j} касаются в силу леммы 2.1, т.е. в точках S_i выполнено тождество $X_{f_j} \equiv W_{f_j}$).

Рассмотрим в точках S_i набор дифференциалов $df_1, \dots, df_n$ и составим из них n -форму

$$\eta = df_1 \wedge \dots \wedge df_n. \quad (3.3)$$

Из свойств вполне интегрируемой системы видно, что эта форма невырождена в точках S_i . Тогда существует такая n -форма η' , что в точках S_i выполнено тождество

$$d\mu_L = \eta \wedge \eta', \quad (3.4)$$

где $d\mu_L$ – форма Лиувилля на симплектическом многообразии M . Конечно, форма η' , заданная равенством (3.4), определена неоднозначно, однако ее *ограничение*

$$d\mu_i = \eta'|_{S_i} \quad (3.5)$$

определено абсолютно однозначно. По построению эта форма инвариантна относительно действия гамильтонова потока любого из первых интегралов f_j . Действительно, поскольку и форма η , и форма $d\mu_L$, и лагранжево подмногообразие S_i сохраняются при деформации, задаваемой X_{f_j} для любого $j = 1, \dots, n$, то и форма $d\mu_i$ из (3.5) обладает тем же свойством инвариантности. Остается нормировать $d\mu_i$ так, чтобы интеграл по циклу S_i равнялся единице, и перейти к соответствующим полувесам $\pm\theta_i$, квадраты которых равны $d\mu_i$. Эти полувеса так же будут инвариантны относительно X_{f_j} . Покажем, что других подходящих полувесов нет. Пусть существует еще один инвариантный полувес θ'_i над S_i . Тогда отношение полувесов

$$\psi = \frac{\theta'_i}{\theta_i},$$

являющееся гладкой функцией над S_i , должно удовлетворять уравнениям инвариантности относительно гамильтоновых потоков, порождаемых первыми интегралами:

$$\text{Lie}_{W_{f_j}} \psi = 0 \quad \forall j = 1, \dots, n. \quad (3.6)$$

Но набор гамильтоновых векторных полей X_{f_j} образует полную систему векторных полей на S_i , и условие (3.6) необходимо влечет то, что ψ постоянна на S_i . Нормировочное условие показывает, что ψ может быть только тождественно равна ± 1 , что соответствует уже найденным решениям. (Заметим, что наши вычисления опираются на те же соображения, которые используются в [9] для введения, например, меры интегрирования на базе расслоения π .)

В обратную сторону: пусть (S_0, θ_0) – общая критическая точка для всех квази-символов F_{f_j} . Тогда снова по (2.10) получаем, что все первые интегралы $f_1, \dots, f_n$ постоянны на S_0 . Рассматривая только первую компоненту в паре, получаем

$$f_j|_{S_0} = \text{const} = t_j \quad \forall j = 1, \dots, n,$$

откуда следует, что S_0 является лагранжевым бор-зоммерфельдовым слоем:

$$S_0 = \pi^{-1}(t_1, \dots, t_j).$$

Это завершает доказательство предложения 3.1.

Используемый нами метод позволяет показать, что в случае вещественной поляризации имеется не более чем дискретное число бор-зоммерфельдовых слоев. Хотя это и не относится непосредственно к настоящему исследованию, покажем, что это действительно так.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Пусть компактное симплектическое многообразие (M, ω) допускает существование вещественной поляризации с лагранжевым слоением

$$\pi: M \rightarrow \Delta,$$

задаваемым функциями $f_1, \dots, f_n$. Тогда существует не более чем конечное число регулярных бор-зоммерфельдовых слоев.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО разобьем на два шага. Сначала покажем, что множество бор-зоммерфельдовых слоев не содержит непрерывной компоненты (т.е. при проекции всех бор-зоммерфельдовых слоев на Δ подмножество $\pi(P) \subset \Delta$ может состоять только из дискретного набора точек с возможными точками накопления и не содержит гладких одномерных компонент). Затем покажем, что $\pi(P)$ не содержит точек накопления (используя теорему Дарбу–Вейнштейна, покажем, что каждая точка из $\pi(P)$ имеет некоторую окрестность, которая не содержит более ни одной проекции бор-зоммерфельдова слоя).

Шаг 1. Пусть точка (S_0, θ_0) содержится в гладкой компоненте бор-зоммерфельдова многообразия (в терминологии [9]). Тогда согласно замечаниям, помещенным в конце § 2, некоторый вектор $(\psi_1, \psi_2) \in T_{S_0, \theta_0} \mathcal{B}_S^{\text{hw}, 1}$ касается критического множества квазисимвола F_{f_j} , если

$$\text{Lie}_{W_{f_j}} \psi_i = 0$$

тождественно на S_0 . Но S_0 является слоем лагранжева слоения (3.1), на котором гамильтоновы векторные поля X_{f_j} составляют полную систему векторных полей, откуда система уравнений

$$\text{Lie}_{W_{f_j}} \psi_i = 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$$

имеет только постоянные решения

$$\psi_1 = \psi_2 = 0.$$

Следовательно, бор-зоммерфельдовы слои не образуют гладких компонент.

Шаг 2. Известно, что множество бор-зоммерфельдовых слоев проекции π состоит из точек с возможными накоплениями. Покажем, что каждая точка $\pi(S_0)$ обладает некоторой окрестностью $N_0 \subset \Delta$, которая не содержит никакого другого бор-зоммерфельдова слоя. Действительно, согласно теореме Дарбу–Вейнштейна [4] бор-зоммерфельдов цикл S_0 (будучи конечно же лагранжевым) обладает окрестностью N_0 такой, что эта окрестность изоморфна некоторой окрестности нулевого сечения кокасательного расслоения T^*S_0 . Тогда если S_1 – другой бор-зоммерфельдов цикл, целиком содержащийся в окрестности N_0 цикла S_0 , то он в точности изображается графиком дифференциала некоторой гладкой функции ψ на S_0 (см. [4]). Но любая гладкая функция на компактном многообразии имеет как минимум две критические точки: точки минимума и максимума, в которых дифференциал этой функции обращается в нуль. Отсюда следует, что и для функции ψ

существуют, как минимум, две точки, в которых дифференциал обращается в нуль, и эти точки, как нетрудно видеть, соответствуют точкам пересечения S_0 и S_1 , т.е. бор-зоммерфельдовы слои S_0 и S_1 пересекаются, как минимум, в двух точках, что невозможно, поскольку это слои лагранжева слоения π . Таким образом, каждая точка $\pi(S_l) \in \Delta$ обладает некоторой окрестностью, не содержащей никакой другой бор-зоммерфельдовой точки, т.е. множество бор-зоммерфельдовых слоев проецируется в конечный набор точек. Это завершает доказательство утверждения.

Согласно геометрической формулировке квантовой механики (см. [1], [12]) квазисимволы F_{f_j} имеют в качестве совместных собственных состояний набор $\mathcal{P}$. Поскольку первые интегралы $f_1, \dots, f_n$ коммутируют между собой, то согласно утверждению 2) основной теоремы квазисимволы $F_{f_1}, \dots, F_{f_n}$ также попарно коммутируют. Теми же свойствами обладают и линейные операторы, соответствующие $f_1, \dots, f_n$. Они коммутируют, будучи одновременно диагонализированы в совместном базисе $\langle S_1, \dots, S_l \rangle$. Таким образом, известная из [9] схема квантования является редукцией (или линеаризацией) АЛГ(a)-квантования.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Здесь уместно продолжить и развить замечание, приведенное в конце § 3 работы [12] и касающееся как раз случая вполне интегрируемой системы. На первый взгляд переход к многообразию модулей полувзвешенных бор-зоммерфельдовых циклов фиксированного объема может доставить для такой системы огромный набор коммутирующих элементов (квазисимволов), которые одновременно алгебраически независимы, что позволило бы построить некоторый универсальный объект (например, аналог спектральной кривой или что-то в этом роде). Однако на самом деле мы не получаем никакой дополнительной геометрической информации. Действительно, рассмотрим серии

$$F_{f_j^k}, \quad j = 1, \dots, n, \quad k > 0, \quad (3.7)$$

квазисимволов, любая пара из которых коммутирует между собой. Однако нетрудно видеть, что множество совместных критических точек при “наборе” степени k никак не меняется и остается тем же $\mathcal{P}$. В самом деле, условия

$$f_j|_{S_i} = \text{const}, \quad f_j^k|_{S_i} = \text{const}$$

для гладких функций равносильны. Несмотря на то, что сами квазисимволы вида (3.7) алгебраически независимы, их *критические значения* в совместных критических точках $\mathcal{P}$ являются алгебраически зависимыми (т.е. мы не получаем никакого дополнительного соотношения, которое позволило бы, например, получить геометрический объект, подобный спектральной кривой). В самом деле, каждый первый интеграл f_j дает в критической точке S_i набор критических значений

$$c = f_j|_{S_i}, \quad c^2, \dots, \quad c^k, \dots,$$

алгебраическая зависимость которого очевидна.

Перейдем теперь к случаю, когда на симплектическом многообразии имеется *комплексная поляризация*. Это значит, что (M, ω) дополнительно снабжено согласованной с ω интегрируемой комплексной структурой I , превращающей M в n -мерное алгебраическое многообразие. Известная схема квантования в этом случае называется *квантованием Березина* (см. [7]). Гильбертово пространство $\mathcal{H}$ на этот раз определяется как пространство голоморфных сечений расслоения предквантования L :

$$\mathcal{H} = H^0(M_I, L),$$

которое является конечномерным (напомним, что M компактно) гильбертовым пространством (эрмитова структура наследуется от объемлющего пространства всех гладких сечений расслоения предквантования L). Класс квантуемых функций выделен в пространстве $C^\infty(M, \mathbb{R})$ хорошо знакомым нам условием того, что гамильтонов поток каждой допустимой функции сохраняет комплексную структуру I на M (см. [7]). Каждая такая функция ϕ определяет соответствующий оператор Березина на гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, причем этот оператор в точности совпадает в данном случае с оператором, получаемым методом Сурьо–Костанта (см. [7]). Проблема этого подхода заключается в том, что класс допустимых функций во многих случаях слишком мал (максимальные наборы квазисимволов имеются в случае проективного пространства или других однородных пространств).

В этом случае АЛГ(а)-квантование связано с квантованием Березина посредством ВРУ-отображения (см. [4], [12]). Прежде всего, пользуясь геометрической формулировкой квантовой механики (см. [12]), перейдем от гильбертова пространства $\mathcal{H}$ к настоящему пространству квантовых состояний $\mathbb{P}(\mathcal{H})$. Имеем отображение

$$\text{ВРУ}: \mathcal{B}_S^{\text{hw},1} \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{H}) \quad (3.8)$$

(см. [4]), обозначенное так по начальным буквам фамилий авторов, предложивших его (необходимые ссылки см. там же, в [4]). Это отображение можно рассматривать как отображение одного пространства квантовых состояний на другое пространство квантовых состояний. Для классического наблюдаемого $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ (необходимо выбираемого из класса допустимых функций) имеем два соответствующих квантовых наблюдаемых:

- 1) квазисимвол F_f на многообразии модулей $\mathcal{B}_S^{\text{hw},1}$;
 - 2) “классический” березинский символ A_f на проективном пространстве $\mathbb{P}(\mathcal{H})$.
- Эти две функции связаны следующим соотношением.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. *Множество критических точек $\text{Crit}(F_f) \subset \mathcal{B}_S^{\text{hw},1}$ квазисимвола F_f вкладывается ВРУ-отображением (3.8) во множество критических точек $\text{Crit}(A_f) \subset \mathbb{P}(\mathcal{H})$:*

$$\text{ВРУ}(\text{Crit}(F_f)) \subset \text{Crit}(A_f).$$

Доказательство вновь использует динамическое соответствие. Поскольку мы рассматриваем только допустимые функции в качестве f , то для такой функции гамильтоново векторное поле X_f действует на проективное пространство $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ как инфинитезимальный келеров автоморфизм, и на этот раз соответствующее векторное поле $\Theta_{\text{DC}}(f) \in \text{Vect}_K(\mathbb{P}(\mathcal{H}))$ совпадает с гамильтоновым векторным полем X_{A_f} (это следует из естественности квантования Сурьо–Костанта). Отсюда имеем соотношение

$$d\text{BPU}(X_{F_f}) = X_{A_f},$$

из которого немедленно следует предложение.

Таким образом, если (S_0, θ_0) является критической точкой для квазисимвола F_f , то образ этой точки $\text{BPU}((S_0, \theta_0))$ является собственным состоянием для символа A_f . Таким образом, квантование Березина представляется как некоторая редукция АЛГ(a)-квантования.

Заметим, что многообразие модулей $\mathcal{B}_S^{\text{hw},1}$ может быть использовано для сравнения результатов двух известных подходов в геометрическом квантовании, если исходная классическая система допускала существование одновременно и вещественной, и комплексной поляризации. Кроме приведенных выше соотношений, в рамках проективной геометрии, чтобы связать результаты квантований в присутствии поляризаций, возможно воспользоваться и некоторой линейной надстройкой над нелинейной конструкцией АЛГ(a)-квантования. В результате применения АЛГ(a)-квантования к классической механической системе, представляемой симплектическим многообразием (M, ω) , получаем нелинейную квантовую систему, представляемую бесконечномерным келеровым многообразием $\mathcal{B}_S^{\text{hw},1}$ с келеровой структурой (G, J, Ω) , с выделенным набором квантовых наблюдаемых – квазисимволов, приходящих из классических наблюдаемых посредством отображения (1.2). Сама эта квантовая система может быть рассмотрена как классическая механическая система с *фиксированной комплексной поляризацией*. Расслоением предквантования для $((\mathcal{B}_S^{\text{hw},1})_J, \Omega)$ будет голоморфное расслоение Берри (см. [4])

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{B}_S^{\text{hw},1},$$

снабженное эрмитовой связностью A , определяемой обычным условием

$$F_A = 2\pi i \Omega.$$

Применяя к такой системе схему квантования Березина, получаем гильбертово пространство

$$\mathcal{H} = H^0(\mathcal{B}_S^{\text{hw},1}, \mathcal{L}),$$

на котором действуют самосопряженные операторы Березина, соответствующие квазисимволам на базе $\mathcal{B}_S^{\text{hw},1}$. Но как раз наши проквантованные наблюдаемые $\{F_f\}$ и попадают согласно основной теореме в подпространство квазисимволов

$$\mathcal{N}(\mathcal{B}_S^{\text{hw},1}) \subset C^\infty(\mathcal{B}_S^{\text{hw},1}, \mathbb{R}).$$

Таким образом, сквозное отображение

$$\begin{aligned} C^\infty(M, \mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{N}(\mathcal{B}_S^{\text{hw},1}) \rightarrow \text{Op}(\mathcal{H}), \\ f &\mapsto F_f \mapsto A_{F_f} \end{aligned} \quad (3.9)$$

доставляет нам представление алгебры Пуассона классических наблюдаемых над исходным (M, ω) в алгебре самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Композиция отображений (3.9) удовлетворяет соотношению Дирака, поскольку и первое отображение (согласно теореме), и второе (согласно [7]) удовлетворяют этому соотношению. На этом шаге мы теряем неприводимость, иначе получили бы противоречие с классической теоремой ван Хова [6]. Однако такое “двойное” квантование имеет место. Оно представляет нам редукцию АЛГ(a)-квантования, при которой происходит линейаризация схемы. Эта линейаризация включает в себя линейные квантования, возникающие в присутствии вещественной или комплексной поляризации редукции, т.е. даже для “классического” линейного квантования многообразие модулей полувзвешенных бор-зоммерфельдовых циклов фиксированного объема доставляет возможность сравнения и унификации известных методов квантования.

Наконец, необходимо отметить, что получаемое в результате применения программы [4] к симплектическому многообразию (M, ω) бесконечномерное многообразие модулей $\mathcal{B}_S^{\text{hw},1}$ по построению снабжено целым набором дополнительных структур. Оно является не просто симплектическим многообразием с целочисленной симплектической формой, но допускает по построению одновременно и комплексную поляризацию, и вещественную поляризацию (напомним, что имеется лагранжево расслоение

$$\pi: \mathcal{B}_S^{\text{hw},1} \rightarrow \mathcal{B}_S \quad (3.10)$$

над многообразием модулей “невзвешенных” бор-зоммерфельдовых циклов [4]). Кроме того, келерово многообразие модулей снабжено и канонической вещественной структурой σ без вещественных точек. Разнообразие имеющихся дополнительных структур немедленно приводит к возникновению естественных вопросов и гипотез (например, какие слои в расслоении (3.10) являются бор-зоммерфельдовыми?), работа над которыми продолжает развитие нового предмета – алгебраической лагранжевой геометрии.

Заключение

Конструкция многообразия модулей полувзвешенных бор-зоммерфельдовых лагранжевых циклов фиксированного объема позволяет предложить новые подходы к предмету геометрического квантования классических механических систем. Однако пока эти новые подходы касаются только узкого класса классических систем, соответствующего симплектическим многообразиям, т.е. многообразиям с регулярными и невырожденными скобками Пуассона. Рассмотрения симплектических листов пуассоновых многообразий с регулярными пуассоновыми структурами позволяют расширить область применения АЛГ(a)-квантования. А именно, предположим, что исходное пуассоновое многообразие (Y, Π) расслоено на симплектические подмногообразия M_u , $u \in U$, т.е. ограничение скобки Пуассона Π на каждый

лист M_u невырождено. Потребуем также, чтобы над каждым листом M_u индуцируемая ограничением Π симплектическая форма ω_u представляла целочисленный класс когомологий слоя M_u . Тогда для каждого $u \in U$ будем иметь многообразие модулей $\mathcal{B}_{S,u}^{\text{hw},1}$. Далее, назовем максимально изотропное относительно пуассоновой структуры Π подмногообразие $X \in Y$ *бор-зоммерфельдовым*, если для любого $u \in U$ пересечение $M_u \cap X$ является бор-зоммерфельдовым лагранжевым циклом для симплектического листа (M_u, ω_u) . Нетрудно видеть, что, как и в симплектическом случае, и на этот раз касательное пространство в точке X к многообразию модулей таких бор-зоммерфельдовых циклов моделируется пространством гладких функций $C^\infty(X, \mathbb{R})$ по модулю констант. Расслоения со связностями предквантования над всеми симплектическими листами “собираются” в линейное расслоение со связностью над всем Y (условие целочисленности форм гарантирует неизменность целочисленных параметров при вариации параметра u , что дает утверждение о том, что все расслоения собираются в одно). Как и в [4], переходим теперь к планковским циклам, полувзвешенным планковским и т.д. до конечного результата – многообразия модулей полувзвешенных бор-зоммерфельдовых максимально изотропных циклов $\mathcal{B}_\Sigma^{\text{hw},1}$, где $[\Sigma] \cap [M_u] = [S]$ – соответствующий класс гомологий. Конечно, рассмотренный случай является случаем нулевого уровня сложности в пуассоновой геометрии, однако мы надеемся, что в дальнейшем будут найдены пути обобщения АЛГ(a)-квантования на более высокий уровень.

С геометрической точки зрения (см. [1]), классические и квантовые механические системы различаются присутствием в последнем случае дополнительной к симплектической структуре – согласованной римановой метрикой такой, что соответствующая комплексная структура интегрируема. Подробно этот вопрос обсуждался нами в [12]. Однако в геометрической формулировке квантовой механики, лежащей в основе этой и предыдущей работ, возникает неожиданный вопрос, касающийся измерений квантовых наблюдаемых. Действительно, в этой формулировке квантовым наблюдаемым является некоторая специальная функция (квазисимвол), но такая функция имеет точное значение в каждой точке, представляющей соответствующее квантовое состояние (которое по определению совпадает со средним наблюдаемым значением). Конечно, наличие римановой метрики приносит вероятностные аспекты, но при этом есть и точное значение. Однако геометрия бор-зоммерфельдовых лагранжевых циклов содержит в себе еще одну конструкцию, в результате которой классические наблюдаемые (гладкие функции на исходном симплектическом многообразии) отображаются в некоторые специальные “наблюдаемые”, которые уже не являются обычными функциями, поскольку принадлежат иной геометрии.

Вернемся к конструкции из [4]: многообразие модулей бор-зоммерфельдовых лагранжевых циклов фиксированного типа образует бесконечномерное гладкое многообразие $\mathcal{B}_S$, касательное пространство к которому в произвольной гладкой точке $S \in \mathcal{B}_S$ моделируется пространством гладких функций над S по модулю констант (см. [4]). Тогда легко видеть, что произвольная гладкая функция $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ индуцирует гладкое векторное поле T_f на $\mathcal{B}_S$. Действительно, в произвольной точке $S \in \mathcal{B}_S$ ограничение $f|_S \in C^\infty(S, \mathbb{R})$ определяет касатель-

ный к многообразию модулей вектор. Однако это не просто векторное поле на многообразии модулей $\mathcal{B}_S$: в точках вырождения T_f как векторного поля касательные векторы нулевые, зато возникают точные значения T_f как значения числовой функции. Точка $S_0 \in \mathcal{B}_S$ является критической для T_f как векторного поля, если и только если функция f ограничивается константой на S_0 :

$$f|_{S_0} = \text{const.}$$

Но тогда получаем эту константу как численное значение T_f в “точке вырождения” S_0 . Таким образом, индуцируемый объект T_f , строго говоря, не является ни векторным полем, ни функцией над многообразием модулей $\mathcal{B}_S$. Распознать, что это такое, возможно в рамках суперсимплектической геометрии (нечетный случай).

Напомним определение нечетного суперсимплектического многообразия и приведем основной пример такого многообразия (см. [2], [5], [8]). Локально такое многообразие покрывается картами, координатные системы которых разделяются на четные и нечетные переменные. Любая суперформа в таком случае также имеет градуированные компоненты; замкнутая невырожденная 2-форма задает на таком многообразии четную суперсимплектическую структуру, если она четна, и нечетную суперсимплектическую структуру, если она нечетна. Основными примерами четных суперсимплектических многообразий являются вещественные расслоения со связностями над обычными симплектическими многообразиями (см. [8]). Основным примером нечетного суперсимплектического многообразия является кокасательное расслоение с измененной четностью (см. [2]). Если X – произвольное многообразие, T^*X – его кокасательное расслоение, то суперсимплектическое многообразие ΠT^*X получается в результате изменения четности переменных по слоям кокасательного расслоения. Тогда суперфункции на ΠT^*X генерируются векторными полями (нечетные функции) и скалярными функциями на X (четные функции). Таким образом, основным примером суперфункции является мультивекторное поле, т.е. сечение некоторой внешней степени касательного расслоения. Скобка Пуассона любой пары таких функций есть, по существу, просто скобка Схутена мультивекторных полей (см. [2], [4]).

Вернемся теперь к нашему случаю и посмотрим на полученные объекты с точки зрения суперсимплектической геометрии. А именно, нетрудно видеть, что T_f является суперфункцией над суперсимплектическим нечетным многообразием $\Pi T^*\mathcal{B}_S$, снабженным соответствующей градуированной скобкой, называемой еще *скобкой Бутен* (в литературе по суперсимплектической геометрии встречаются и другие названия, однако будем следовать работе [5], автору которой мы обязаны изложением основ предмета и привлечением интереса к этому предмету). Функция (или, точнее, суперфункция) имеет четность 1 в невырожденных точках (как векторного поля) и четность 0 там, где векторное поле, вырождаясь, дает числовую функцию.

Однако вернемся на шаг назад: если рассматривать T_f просто как векторное поле над многообразием модулей $\mathcal{B}_S$, то несложно построить соответствующее динамическое соответствие

$$\Theta_S: C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \text{Vect}(\mathcal{B}_S). \quad (*)$$

Рассуждая так же, как и в § 2, можно рассмотреть росток симплектоморфизма, порожденного гладкой функцией f , инфинитезимально действующего как росток автоморфизма $\mathcal{B}_S$. Ослабленной версией предложения 1.2 будет утверждение того, что

$$T_f^v = \Theta_S(f),$$

где символом T_f^v обозначено соответствующее T_f векторное поле на многообразии модулей $\mathcal{B}_S$. Это влечет замечание о том, что динамическое соответствие (*) сохраняет структуру алгебр Ли, т.е. отображает скобку Пуассона произвольных функций $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ в кратное коммутатору соответствующих векторных полей:

$$\Theta_S(\{f, g\}_\omega) = c[\Theta_S(f), \Theta_S(g)],$$

где c – некоторая константа. Продолжая исследования в этом направлении, можно дополнить приведенные замечания естественным выводом: скобка Бутен суперфункций T_f и T_g на $\Pi T^*\mathcal{B}_S$, индуцируемых функциями f и g на M , пропорциональна суперфункции, соответствующей скобке Пуассона f и g .

Таким образом, бор-зоммерфельдова лагранжева геометрия доставляет еще одно нетривиальное представление пуассоновой алгебры классических наблюдаемых над симплектическим многообразием (M, ω) в алгебре Ли суперфункций над нечетным суперсимплектическим многообразием, снабженной скобкой Бутен. Снова возвращаясь к обзорной работе [5], отметим, что суперсимплектическая геометрия в достаточной степени похожа на симплектическую (например, верна теорема Дарбу и некоторые другие соотношения), однако на сегодняшний день отнюдь не ясно, как можно было бы применить ту же бор-зоммерфельдову лагранжеву геометрию (или АЛАГ-программу) в этом суперслучае. Однако необходимо отметить, что бор-зоммерфельдова лагранжева геометрия сама по себе является частью супергеометрии. Определение планковского цикла (см. [4]) может быть дано следующим образом. Если (M, ω) – симплектическое многообразие с целочисленной формой ω , то определяемое этими данными главное $U(1)$ -расслоение предквантования P со связностью может быть рассмотрено как четное суперсимплектическое многообразие (см. [8]). Соответствующая суперсимплектическая форма Ω кососимметрична по переменным базы M и симметрична по переменным слоя $P \rightarrow M$. Тогда планковские циклы в P есть в точности те циклы в P , которые являются лагранжевыми относительно суперсимплектической формы Ω .

Основная часть настоящей работы была проделана в Корейском институте высоких исследований (KIAS, Seoul), и автор считает своим приятным долгом выразить признательность всем, кто создал и создает в этом относительно новом, но необыкновенно динамично развивающемся центре обстановку и атмосферу, способствующие научной работе.

Список литературы

1. *Ashtekar A., Schilling T.* Geometrical formulation of quantum mechanics. ArXiv: gr-qc/9706069.

2. *Березин Ф. А.* Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными. М.: Изд-во МГУ, 1983.
3. *Gorodentsev A., Tyurin A.* ALAG. Preprint / Max-Planck-Inst. Bonn, 2000. № 00-7.
4. *Городенцев А. Л., Тюрин А. Н.* Абелева лагранжева алгебраическая геометрия // Изв. РАН. Сер. матем. 2001. Т. 65. № 3. С. 15–50.
5. *Khudaverdian O. M.* Semidensities on odd symplectic super manifolds. arXiv:DG/0012256.
6. *Харпн Н.* Геометрическое квантование в действии. М.: Мир, 1985.
7. *Rawnsley J., Cahen M., Gutt S.* Quantization of Kaehler manifolds 1 // JGP. 1990. V. 7. № 1. P. 45–62.
8. *Rothstein M.* The structure of supersymplectic supermanifolds // Lecture notes in Phys. V. 375. Berlin: Springer, 1991. P. 331–343.
9. *Sniatycki J.* Geometric quantization and quantum mechanics. Berlin: Springer, 1987.
10. *Tyurin A.* On Bohr–Sommerfeld bases. arXiv:AG/9909084.
11. *Tyurin A.* Complexification of Bohr–Sommerfeld condition. Preprint / Math. Inst. Univ. of Oslo, 1999. № 15.
12. *Тюрин Н. А.* Принцип соответствия в абелевой лагранжевой геометрии // Изв. РАН. Сер. матем. 2001. Т. 65. № 4. С. 191–204.

ЛТФ, ОИЯИ (Дубна)
E-mail: tyurin@tyurin.mccme.ru,
ntyurin@thsun1.jinr.ru

Поступило в редакцию
25.I.2002