Общероссийский математический портал

Д. А. Шакин, I -устойчивые идеалы, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2002, том 66, выпуск 3, 197–224

DOI: <https://doi.org/10.4213/im392>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 03:06:27

УДК 512.664.2+512.714

Д. А. Шакин

***I*-устойчивые идеалы**

Вводится понятие *I*-устойчивого идеала в кольце коммутативных многочленов над полем, являющееся обобщением так называемых устойчивых идеалов, которые возникают как идеалы старших членов при общей линейной замене переменных. Интерес к идеалам такого типа обуславливается возможностью сведения некоторых вопросов теории однородных идеалов (например, получение верхних оценок для градуированных чисел Бетти) к рассмотрению только устойчивых идеалов. *I*-устойчивые идеалы сохраняют многие интересные свойства устойчивых идеалов; в частности, построенная в статье минимальная резольвента *I*-устойчивого идеала позволяет получить явную формулу для градуированных чисел Бетти, которые оказываются не зависящими от характеристики базового поля, кроме того, факторкольца по *I*-устойчивым идеалам, порожденным мономами степени не меньше двух, являются кольцами Голода. Рассматриваются другие аналоги устойчивых идеалов (сильно и слабо *I*-устойчивые идеалы) и приводятся условия для коэн-маколеевости и горенштейновости факторколец по *I*-устойчивым идеалам.

Библиография: 9 наименований.

§ 1. Введение

Устойчивые идеалы были впервые рассмотрены авторами статьи [1], в которой были построены минимальные свободные градуированные резольвенты для этого класса идеалов. Их результаты были использованы многими авторами, в частности, для доказательства того, что лекс-сегментные идеалы имеют максимальные числа Бетти среди всех однородных идеалов с одинаковой функцией Гильберта [2]. В статье [3] рассматриваются бесквадратные устойчивые идеалы, изучение которых тесно связано с теорией симплициальных комплексов и колец Стенли–Рейснера.

В настоящей работе обобщаются результаты статей [1], [3] и [4] на более широкий класс идеалов, которые мы будем называть *устойчивыми относительно идеала I*, или *I-устойчивыми*.

В § 2 вводится понятие *I*-устойчивых, а также слабо и сильно *I*-устойчивых идеалов и доказываются их простейшие свойства. В § 3–7 изучается случай, когда идеал *I* порожден мономами вида $x_i^{d_i}$, $d_i \geq 1$.

В § 3 строится минимальная свободная градуированная резольвента для *I*-устойчивого идеала и вычисляются его градуированные числа Бетти, а также доказывается, что *I*-устойчивый идеал, порожденный в одной степени *d*, имеет *d*-линейную резольвенту.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00468).

В §4 строится базис векторных пространств $\text{Tot}_i^A(A/J, k)$ для I -устойчивого идеала $J \subseteq A = k[x_1, \dots, x_n]$ в терминах циклов комплекса Козюля, а также доказывается, что если J порожден в степенях ≥ 2 , то A/J является кольцом Голода.

В §5 приводятся условия на I -устойчивый идеал J , при которых факторкольцо A/J является кольцом Коэна–Маколея и горенштейновым кольцом.

В §6 рассматривается более узкий класс сильно I -устойчивых идеалов, которые являются обобщением так называемых борелевских устойчивых идеалов, и вычисляются градуированные числа Бетти модуля $A/(I + J)$ для сильно I -устойчивого идеала J .

В §7 изучаются слабо I -устойчивые идеалы, их градуированные числа Бетти, а также описываются их минимальные свободные резольвенты в случае, когда идеал порожден в одной степени.

Как сообщил автору Т. Рёмер, часть результатов, представленных в настоящей работе, была независимо получена другими авторами (Т. Рёмер, В. Гашаров, И. Пеева и Т. Хиби).

Везде далее $A = k[x_1, \dots, x_n]$ — кольцо многочленов над полем k , множество всех мономов кольца A обозначим через $\mathfrak{M}$ (считаем, что $1 \in \mathfrak{M}$).

Будем рассматривать на кольце A $\mathbb{Z}$ -градуировку

$$\deg x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n} = \sum_{i=1}^n a_i$$

и $\mathbb{Z}^n$ -градуировку

$$\deg_n x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n} = \sum_{i=1}^n a_i \varepsilon_i,$$

где $\varepsilon_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\varepsilon_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ..., $\varepsilon_n = (0, \dots, 0, 1)$. Кроме того, будем рассматривать два порядка на мономах: лексикографический $x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n} >_l x_1^{b_1} \dots x_n^{b_n}$, если существует m , $1 \leq m \leq n$, такое, что $a_m > b_m$, и для любого $l > m$ выполнено равенство $a_l = b_l$; и степенной лексикографический $u >_{dl} v$, если либо $\deg u > \deg v$, либо $\deg u = \deg v$ и $u >_l v$.

Напомним определение и простейшие свойства комплекса Козюля конечно порожденного A -модуля M . Пусть $\mathbf{y} = \{y_1, \dots, y_r\}$ — некоторый набор элементов кольца A . По определению комплекс Козюля $K(M) = K(\mathbf{y}; M)$ состоит из модулей $K_q(\mathbf{y}; M) = M \otimes_A A'_q$, где A'_q — свободный A -модуль с образующими $e_\sigma = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_q}$, $\sigma = \{i_1, \dots, i_q\}$, $1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq r$, а дифференциал ∂ имеет вид

$$\partial_q(e_\sigma) = \sum_{s \in \sigma} (-1)^{\alpha(\sigma, s)} y_s e_{\sigma_s},$$

где $\alpha(\sigma, s) = |\{i \in \sigma \mid i < s\}|$ и $\sigma_s = \sigma \setminus \{s\}$. Если все y_i принадлежат $\mathfrak{M}$, то на модулях $K_q(\mathbf{y}; M)$ можно ввести $\mathbb{Z}^n$ -градуировку:

$$\deg_n x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n} \otimes e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_q} = (a_1, \dots, a_n) + \sum_{j=1}^q \deg_n y_{i_j}.$$

В этом случае все гомоморфизмы ∂_q являются однородными. Если $\mathbf{y} = \{x_1, \dots, x_n\}$, то будем писать $K(M)$ вместо $K(\mathbf{y}; M)$. Гомологии комплекса $K(M)$

будем обозначать через $H_i(M)$, а класс гомологий цикла $z \in K_q(M)$ – через $[z]$. Отметим следующее свойство комплекса Козюля $K(\mathbf{y}; M)$:

$$\sup\{i \mid H_i(K(\mathbf{y}; M)) \neq 0\} = r - \text{depth}(\mathbf{y}, M),$$

где $\text{depth}(\mathbf{y}, M)$ – длина максимальной M -регулярной последовательности, содержащейся в идеале $(\mathbf{y})A$; в частности, комплекс $K(A)$ ацикличесен и является минимальной свободной резольвентой для поля k , следовательно, $\text{Tor}_i^A(k, M) \cong H_i(M)$.

§ 2. Свойства I -устойчивых идеалов

Если $u \in \mathfrak{M}$, то положим $M(u) = \max\{i \mid x_i|u\}$, $m(u) = \min\{i \mid x_i|u\}$, $m(1) = +\infty$, $M(1) = -\infty$, $u' = u/x_{M(u)}$. Для всякого мономиального идеала $J \subseteq A$ обозначим через $G(J)$ его минимальное порождающее множество, кроме того, зафиксируем произвольный мономиальный идеал $I \subseteq A$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Мономиальный идеал $J \subseteq A$ называется *I -устойчивым*, если выполняются следующие два условия:

- 1) $G(J) \cap I = \emptyset$;
- 2) $\forall u \in G(J)$, $\forall j < M(u)$ $\exists i > j$ такое, что $x_i|u$ и $ux_j/x_i \in J + I$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Мономиальный идеал $J \subseteq A$ называется *слабо I -устойчивым*, если выполняются следующие два условия:

- 1) $G(J) \cap I = \emptyset$;
- 2) $\forall u \in G(J)$, $\forall j < M(u')$ $\exists i > j$ такое, что $x_i|u$ и $ux_j/x_i \in J + I$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Мономиальный идеал $J \subseteq A$ называется *сильно I -устойчивым*, если выполняются следующие два условия:

- 1) $G(J) \cap I = \emptyset$;
- 2) $\forall u \in G(J)$, $\forall i$ такого, что $x_i|u$, и $\forall j < i$ имеем $ux_j/x_i \in I + J$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. Очевидно, что всякий сильно I -устойчивый идеал является I -устойчивым и всякий I -устойчивый идеал является слабо I -устойчивым.

Однако, как показывают следующие примеры, классы I -устойчивых, сильно I -устойчивых и слабо I -устойчивых идеалов различны.

ПРИМЕР 2.5. Пусть $A = k[x_1, x_2, x_3]$, $I = (x_1^2)A$, $J = (x_1x_3)A$; тогда идеал J слабо I -устойчив, но не I -устойчив.

ПРИМЕР 2.6. Пусть $A = k[x_1, x_2, x_3]$, $I = (x_1^3, x_2^2)A$, $J = (x_1^2x_2, x_1x_2x_3)A$; тогда идеал J I -устойчив, но не сильно I -устойчив.

ЛЕММА 2.7. Если J – I -устойчивый (слабо I -устойчивый, сильно I -устойчивый) идеал, то условие 2) определения 2.1 (соответственно, определения 2.2, 2.3) выполняется для всех мономов $u \in J \setminus I$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем лемму в случае I -устойчивого идеала J , в остальных случаях доказательство аналогично.

Пусть $w \in J \setminus I$; тогда существует $u \in G(J)$ такой, что $w = uz$ для некоторого $z \in \mathfrak{M}$. Заметим, что $M(u) \leq M(w)$. Пусть $j < M(w)$.

Если $j < M(u)$, то так как идеал J I -устойчивый, то существует $i > j$ такое, что $x_i | u$ и $ux_j/x_i \in I + J$, следовательно, $wx_j/x_i = zux_j/x_i \in I + J$.

Если $j \geq M(u)$, то $wx_j/x_{M(u)} = uzx_j/x_{M(u)} \in J$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.8. Пусть J – I -устойчивый идеал; тогда всякий моном $u \in J \setminus I$ единственным образом разлагается в произведение $u := g(u)v$, где $g(u) \in G(J)$, $v \in \mathfrak{M}$ и $M(g(u)) \leq m(v)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть u_0 – минимальная из порождающих идеала J ; тогда $u_0 = u_0 \cdot 1$. Пусть $u \in J \setminus I$, и для любого $v \in J \setminus I$, $v <_l u$, существование разложения доказано. Так как $u \in J$, то существует $w \in G(J)$ такой, что $u = wz$, $z \in \mathfrak{M}$. Пусть $m(z) < M(w)$; тогда $u = w_1z_1$, $w_1 = wx_{m(z)}/x_i$, $z_1 = zx_i/x_{m(z)}$, $i > m(z)$, причем $w_1 \in J \setminus I$, $w_1 <_l w$, $z_1 >_l z$. Продолжая этот процесс, на s -м шаге получим $u = w_s z_s$, $m(z_s) \geq M(w_s)$, $w_s \in J \setminus I$. Так как $w_s <_l u$, то по предположению индукции $w_s = g(w_s)t$, $M(g(w_s)) \leq m(t)$ и $u = g(w_s)tz_s$, $M(g(w_s)) < m(tz_s)$.

Единственность очевидна.

Докажем несколько технических лемм, которые потребуются в дальнейшем.

ЛЕММА 2.9. Пусть J – I -устойчивый идеал, $u \in G(J)$, $ux_i \notin I$, $i < M(u)$; тогда $g(x_i u) <_l u$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u = x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n}$, $v = g(ux_i) = x_1^{b_1} \dots x_n^{b_n}$.

Если $i < M(u)$, то $M(v) \leq M(x_i u) = M(u)$, и так как $x_{M(u)} | (x_i u/v)$, то $b_{M(u)} < a_{M(u)}$, следовательно, $v <_l u$.

ЛЕММА 2.10. Пусть J – I -устойчивый идеал, $w \in J \setminus I$, $y \in \mathfrak{M}$, причем $uw \notin I$; тогда следующие условия равносильны:

- 1) $g(wy) = g(w)$;
- 2) $M(g(w)) \leq m(y)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g(wy) = g(w)$; тогда $wy = g(wy)z = g(w)z$, следовательно, $M(g(w)) = M(g(wy)) \leq m(z)$. Так как $g(w) | w$, то $y | z$, следовательно, $m(y) \geq m(z)$, откуда $M(g(w)) \leq m(y)$.

Пусть $M(g(w)) \leq m(y)$. Так как $w = g(w)z_1$, $M(g(w)) \leq m(z_1)$, то $wy = g(w)z_1y$, $M(g(w)) \leq m(z_1y)$, т.е. $g(w) = g(wy)$.

ЛЕММА 2.11. Пусть J – I -устойчивый идеал, $w \in J \setminus I$, $y \in \mathfrak{M}$, причем $uw \notin I$; тогда $g(yg(w)) = g(yw)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем индукцию по степени y .

Пусть $\deg y = 1$, т.е. $y = x_i$. Если $i \geq M(w)$, то в силу леммы 2.10 $g(w) = g(yw)$ и $g(yg(w)) = g(w) = g(yw)$. Если $i < M(w)$, то $w = g(w)z$, $m(z) \geq M(g(w))$. Так как $g(yg(w)) | yg(w)$, то

$$M(g(yg(w))) \leq M(yg(w)) = M(g(w)) \leq m(z),$$

следовательно, по лемме 2.10 $g(yg(w)) = g(yzg(w)) = g(yw)$.

Пусть $\deg y > 1$, $y = x_i y_i$. По предположению индукции имеем

$$g(yw) = g(yx_i w) = g(y_i g(x_i w)) = g(y_i g(x_i g(w))) = g(y_i x_i g(w)) = g(yg(w)).$$

ЛЕММА 2.12. Пусть идеал I порожден мономами вида $x_i^{d_i}$, J – I -устойчивый идеал; тогда для всех мономов $u \in J \setminus I$ выполняется следующее условие:

$$\forall i < M(u): x_i u / x_{M(u)} \in I + J.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u \in J \setminus I$, в силу леммы 2.7 получаем, что для любого $i < M(u)$ существует $j > i$ такое, что $x_j | u$ и $x_i u / x_j \in I + J$. Если $x_i u / x_j \in I$, то $x_i u / x_{M(u)} \in I$ и лемма будет доказана. Если же $x_i u / x_j \in J \setminus I$, то снова существует $l > j$ такое, что $x_i u x_j / x_j x_l = x_i u / x_l \in J + I$. Продолжая этот процесс, получим, что $x_i u / x_{M(u)} \in J + I$. Лемма доказана полностью.

§ 3. Минимальные свободные резольвенты для I -устойчивых идеалов

Пусть I – идеал, порожденный мономами вида $x_i^{d_i}$, $d_i \geq 1$ (везде далее в статье будем предполагать, что I имеет такой вид), кроме того, для удобства полагаем, что $d_i = +\infty$, если $x_i^a \notin I$ для любого a . Пусть J – произвольный I -устойчивый идеал.

Для всякого множества $\sigma = \{i_1, \dots, i_q\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ обозначим $x_\sigma = x_{i_1} \dots x_{i_q}$, кроме того, для всякого $\tau \subseteq \sigma$ положим $\sigma_\tau = \sigma \setminus \tau$, в частности, $\sigma_s = \sigma \setminus \{s\}$ и $\sigma_{st} = \sigma \setminus \{s, t\}$.

Рассмотрим множество символов $e(\sigma; u)$, где $\sigma \subseteq \{1, \dots, n\}$, $u \in \mathfrak{M}$; запишем $e(u)$ вместо $e(\emptyset; u)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Символ $e(\sigma; u)$ будем называть *допустимым*, если:

- 1) $u \in G(J)$;
- 2) $u x_\sigma \notin I$;
- 3) $M(x_\sigma) < M(u)$.

Если $e(\sigma; u)$ удовлетворяет первым двум условиям определения 3.1, то при $s \in \sigma$ обозначим $u_s = g(u x_s)$, $y_s = x_s u / u_s$, $S(\sigma; u) = \{s \in \sigma \mid e(\sigma_s; u_s) \text{ – допустимый}\}$.

Пусть F_q – свободный A -модуль, свободными образующими которого являются допустимые символы $e(\sigma; u)$, $|\sigma| = q$. Определим при $q > 0$ отображения $d_q: F_q \rightarrow F_{q-1}$ на образующих:

$$d_q(e(\sigma; u)) = \sum_{s \in S(\sigma; u)} (-1)^{\alpha(\sigma, s)} y_s e(\sigma_s; u_s) - \sum_{s \in \sigma} (-1)^{\alpha(\sigma, s)} x_s e(\sigma_s; u),$$

и отображение $d_0: L_0 \rightarrow J$ по формуле

$$d_0(e(u)) = u,$$

и продолжим их до гомоморфизмов A -модулей.

Рассмотрим на A -модулях F_q $\mathbb{Z}^n$ -градуировку: для любого допустимого символа $e(\sigma; u)$ и для любого $y \in \mathfrak{M}$ положим $\deg_n y e(\sigma; u) = \deg_n y u x_\sigma$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Очевидно, что гомоморфизмы d_q сохраняют $\mathbb{Z}^n$ -градуировку.

ТЕОРЕМА 3.3. *Последовательность модулей F_q и гомоморфизмов d_q является минимальной свободной градуированной резольвентой для J над A .*

Докажем сначала несколько вспомогательных лемм.

Пусть C_q – свободные A -модули с образующими $e(\sigma, u)$, удовлетворяющими только первым двум условиям определения 3.1. Определим при $q > 0$ отображения $D_q: C_q \rightarrow C_{q-1}$ на образующих:

$$D_q(e(\sigma; u)) = \sum_{s \in \sigma} (-1)^{\alpha(\sigma, s)} y_s e(\sigma_s; u_s) - \sum_{s \in \sigma} (-1)^{\alpha(\sigma, s)} x_s e(\sigma_s; u),$$

и отображение $D_0: C_0 \rightarrow J$ по формуле

$$D_0(e(u)) = u,$$

и продолжим их до гомоморфизмов A -модулей.

ЛЕММА 3.4. *Последовательность модулей и гомоморфизмов $C_* = (C_q, D_q)$ является комплексом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим

$$\begin{aligned} \Delta_1(e(\sigma; u)) &= \sum_{s \in \sigma} (-1)^{\alpha(\sigma, s)} x_s e(\sigma_s; u), \\ \Delta_2(e(\sigma; u)) &= \sum_{s \in \sigma} (-1)^{\alpha(\sigma, s)} y_s e(\sigma_s; u_s). \end{aligned}$$

Тогда $D_q = \Delta_2 - \Delta_1$, и достаточно доказать, что $\Delta_1^2 = 0$, $\Delta_1 \Delta_2 + \Delta_2 \Delta_1 = 0$, $\Delta_2^2 = 0$.

Действительно,

$$\begin{aligned} &(\Delta_1 \Delta_2 + \Delta_2 \Delta_1)(e(\sigma; u)) \\ &= \Delta_1 \left[\sum_{s \in \sigma} (-1)^{\alpha(\sigma, s)} y_s e(\sigma_s; u_s) \right] + \Delta_2 \left[\sum_{t \in \sigma} (-1)^{\alpha(\sigma, t)} x_t e(\sigma_t; u) \right] \\ &= \sum_{s \in \sigma} \sum_{t \in \sigma_s} (-1)^{\alpha(\sigma, s) + \alpha(\sigma_s, t)} y_s x_t e(\sigma_{st}; u_s) \\ &\quad + \sum_{t \in \sigma} \sum_{s \in \sigma_t} (-1)^{\alpha(\sigma, t) + \alpha(\sigma_t, s)} y_s x_t e(\sigma_{st}; u_s) = 0, \end{aligned}$$

так как $(-1)^{\alpha(\sigma, s) + \alpha(\sigma_s, t)} = -(-1)^{\alpha(\sigma, t) + \alpha(\sigma_t, s)}$ при $s \neq t$.

Далее, обозначая $u_{st} = g(x_t u_s)$, $y_{st} = x_t u_s / u_{st}$, имеем

$$\begin{aligned} \Delta_2^2(e(\sigma; u)) &= \Delta_2 \left[\sum_{s \in \sigma} (-1)^{\alpha(\sigma, s)} y_s e(\sigma_s; u_s) \right] \\ &= \sum_{s \in \sigma} \sum_{t \in \sigma_s} (-1)^{\alpha(\sigma, s) + \alpha(\sigma_s, t)} y_s y_{st} e(\sigma_{st}; u_{st}) \\ &= \sum_{\substack{s, t \in \sigma \\ s < t}} (-1)^{\alpha(\sigma, s) + \alpha(\sigma_s, t)} (y_s y_{st} e(\sigma_{st}; u_{st}) - y_t y_{ts} e(\sigma_{st}; u_{ts})) = 0, \end{aligned}$$

так как по лемме 2.11 имеем $u_{ts} = g(x_s g(x_t u)) = g(x_t x_s u) = g(x_t g(x_s u)) = u_{st}$, и, кроме того, $y_s y_{st} = x_s x_t u / u_{st} = x_s x_t u / u_{ts} = y_t y_{ts}$.

Наконец,

$$\begin{aligned} \Delta_1^2(e(\sigma; u)) &= \Delta_1 \left[\sum_{s \in \sigma} (-1)^{\alpha(\sigma, s)} x_s e(\sigma_s; u) \right] \\ &= \sum_{s \in \sigma} \sum_{t \in \sigma_s} (-1)^{\alpha(\sigma, s) + \alpha(\sigma_s, t)} x_s x_t e(\sigma_{st}; u) \\ &= \sum_{\substack{s, t \in \sigma \\ s < t}} (-1)^{\alpha(\sigma, s) + \alpha(\sigma_s, t)} (x_s x_t e(\sigma_{st}; u) - x_t x_s e(\sigma_{st}; u)) = 0. \end{aligned}$$

ЛЕММА 3.5. *Последовательность модулей и гомоморфизмов $F_* = (F_q, d_q)$ является комплексом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $B_q \subseteq C_q$ – свободные A -подмодули с образующими $e(\sigma, u)$, удовлетворяющими только первым двум условиям определения 3.1 и условию $M(u) \leq M(x_\sigma)$ (в частности, $B_0 = 0$). Докажем, что B_* – подкомплекс в C_* . Действительно, пусть $e(\sigma; u) \in B_q$, $q \geq 1$. Обозначим $M = M(x_\sigma)$. Если $s \in \sigma_M$, то $e(\sigma_s; u), e(\sigma_s; u_s) \in B_{q-1}$. В силу леммы 2.10 ($M \geq M(u)$) имеем $u_M = u$, следовательно, $y_M e(\sigma_M; u_M) = x_M e(\sigma_M; u)$, поэтому

$$D_q(e(\sigma; u)) = \sum_{s \in \sigma_M} (-1)^{\alpha(\sigma, s)} (y_s e(\sigma_s; u_s) - x_s e(\sigma_s; u)) \in B_{q-1}.$$

Таким образом, $B_* = (B_q, D_q)$ – подкомплекс в C_* , и, следовательно, F_* – комплекс, так как $F_* \cong C_*/B_*$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.6. Элемент $ye(\sigma; u) \in F_q$, где $y \in \mathfrak{M}$, называется *термом*.

Рассмотрим на термах в F_q следующий порядок: $ye(\sigma; u) < ze(\tau; v)$, если либо $u <_l v$, либо $u = v$, $x_\sigma <_l x_\tau$, либо $u = v$, $x_\sigma = x_\tau$, $y <_l z$.

ЛЕММА 3.7. *Пусть $e(\sigma; u) \in F_q$, $s = m(x_\sigma)$. Терм $c = x_s e(\sigma_s; u)$ старше всех термов в $d_q(e(\sigma; u))$, отличных от него.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $x_{\sigma_s} >_l x_{\sigma_t}$ при $t \in \sigma$, $t \neq s$, то $c > x_t e(\sigma_t; u)$, и так как по лемме 2.9 $u_t <_l u$, то $c > y_t e(\sigma_t; u_t)$ при $t \in S(\sigma; u)$.

ЛЕММА 3.8. *Пусть a, b – термы в F_q , $b > a$, и старший терм $d_q(b)$ встречается среди термов $d_q(a)$. Тогда существует $c \in F_q$ такой, что $b - c \in \text{Im } d_{q+1}$ и старший терм c строго меньше b .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $q = 0$, то $b = ye(u)$, $a = ze(v)$, $yu = zv$. Так как $b > a$, то $u = x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n} >_l v = x_1^{b_1} \dots x_n^{b_n}$, и, следовательно, $a_{M(u)} \geq b_{M(u)}$, но так как $u, v \in G(J)$, то существует $l < M(u)$ такое, что $a_l < b_l$. Тогда символ $e(l; u)$ допустимый. Положим $c = b + d_1(y/x_l e(l; u))$. По лемме 3.7 старший терм c строго меньше b .

Если $q > 0$, то $b = ye(\sigma; u)$, $a = ze(\tau; v)$. Обозначим $s = m(x_\sigma)$, $p = m(x_\tau)$, $z_r = vx_r/v_r$. По лемме 3.7 $t = yx_s e(\sigma_s; u)$ – старший терм в $d_q(b)$.

Если $t = zx_re(\tau_r; v)$, то $u = v$ и при $r > p$ получаем $b < a$. Противоречие. При $r = p$ имеем $zx_p = yx_s$. Кроме того, так как $b > a$, то $p < s$, следовательно, символ $e(p \cup \sigma; u)$ допустимый. Положим $c = b + d_{q+1}(y/x_p e(p \cup \sigma; u))$. По лемме 3.7 старший терм c строго меньше b .

Если $t = zz_re(\tau_r; v_r)$, то $u = v_r = g(vx_r)$, по лемме 2.9 $g(vx_r) <_l v$, т. е. $u <_l v$. Противоречие. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.9. При доказательстве теоремы 3.3 только в лемме 3.8 используется конкретный вид идеала I .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.10. Терм $b \in F_q$ называется *окончательным*, если для любого $a \in F_q$ такого, что $a < b$, старший терм $d_q(b)$ не встречается среди $d_q(a)$.

ЛЕММА 3.11. *Любой элемент из F_q представляется по модулю $\text{Im } d_{q+1}$ в виде линейной комбинации окончательных термов с коэффициентами из поля k .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО является простым следствием леммы 3.8.

ЛЕММА 3.12. *Пусть $f \in F_q$ – ненулевая линейная комбинация окончательных термов с коэффициентами из k ; тогда $d_q(f) \neq 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $d_q(f) = 0$. Пусть b – старший терм f . Так как $d_q(f) = 0$, то старший терм $d_q(b)$ встречается среди $d_q(b')$, где b' – термы f , отличные от b . Но это противоречит окончательности b .

ЛЕММА 3.13. F_* – резольвента для J над A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 3.5 F_* – комплекс, следовательно, достаточно доказать, что $\text{Ker } d_q \subseteq \text{Im } d_{q+1}$. Пусть $f \in \text{Ker } d_q$; тогда по лемме 3.11 $f = f' + d_{q+1}(h)$, где $h \in F_{q+1}$, f' – сумма окончательных термов с коэффициентами из поля k . Так как $d_q(f) = 0$, то $d_q(f') = 0$, следовательно, в силу леммы 3.12 $f' = 0$, т. е. $f \in \text{Im } d_{q+1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.3. По лемме 3.13 F_* является свободной резольventой для J над A .

Для доказательства минимальности F_* достаточно показать, что $d_q(F_q) \subseteq (x_1, \dots, x_n)F_{q-1}$. Это сразу вытекает из определения d_q , так как $x_s u \notin G(J)$ и, следовательно, $\deg y_s \geq 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.14. Минимальная свободная градуированная резольвента для A/J над A имеет вид

$$F_* \xrightarrow{d_0} A \xrightarrow{\alpha} A/J \rightarrow 0,$$

где α – естественный гомоморфизм.

Знание явного вида резольventы позволяет вычислить некоторые важные характеристики идеала J : градуированные числа Бетти, ряды Гильберта и Пуанкаре. Для всякого $u \in G(J)$ обозначим $r(u) = |\{i \mid i < M(u), ux_i \in I\}|$.

СЛЕДСТВИЕ 3.15. *Ряд Гильберта I -устойчивого идеала J имеет вид*

$$F_J(t) = \frac{\sum_{u \in G(J)} t^{\deg u} (1-t)^{M(u)-r(u)-1}}{(1-t)^n}.$$

Минимальная свободная градуированная резольвента для A/J над A может быть представлена в виде

$$0 \rightarrow \bigoplus_{j \geq h} A(-j)^{\beta_{h,j}} \rightarrow \dots \rightarrow \bigoplus_{j \geq 1} A(-j)^{\beta_{1,j}} \rightarrow A \rightarrow A/J \rightarrow 0,$$

где $A(-j)$ – кольцо A , представленное как A -модуль со сдвигом градуировки на $-j$, а $\beta_{i,j} = \beta_{i,j}^A(A/J)$ – градуированные числа Бетти модуля A/J .

СЛЕДСТВИЕ 3.16. Если J – I -устойчивый идеал, то для любого $i \geq 1$ имеем

$$\beta_{i,i+j}^A(A/J) = \sum_{\substack{u \in G(J) \\ \deg u = j+1}} \binom{M(u) - r(u) - 1}{i-1},$$

в частности, числа Бетти $\beta_{i,i+j}^A(A/J)$ не зависят от характеристики поля k (если $a > b$ или $a < 0$, то полагаем $\binom{b}{a} = 0$).

Если существует d такое, что $\beta_{i,i+j}^A(A/J) = 0$ при $j \neq d-1$, $i \geq 1$, то говорят, что модуль A/J имеет d -линейную резольвенту.

СЛЕДСТВИЕ 3.17. Если J – I -устойчивый идеал, порожденный в степени d , то модуль A/J имеет d -линейную резольвенту.

Напомним, что рядом Пуанкаре $P_M^R(t)$ модуля M над кольцом R называется выражение

$$P_M^R(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i^R(M) t^i,$$

а рядом Пуанкаре $P^R(t)$ кольца R называется ряд Пуанкаре его поля вычетов (здесь $\beta_i^R(M) = \sum_j \beta_{i,j}^R(M)$ – числа Бетти модуля M).

СЛЕДСТВИЕ 3.18. Ряд Пуанкаре I -устойчивого идеала J над кольцом A имеет вид

$$P_J^A(t) = \sum_{u \in G(J)} (1+t)^{M(u)-r(u)-1}.$$

§ 4. Базис в $\text{Tor}_q^A(A/J, k)$

Пусть J – I -устойчивый идеал. В силу замечания 3.14 имеем

$$\text{Tor}_q^A(A/J, k) \cong H_{q-1}(F_* \otimes_A k) = F_{q-1} \otimes_A k,$$

следовательно, элементы $e(\sigma; u) \otimes 1$, $|\sigma| = q-1$ составляют базис векторного пространства $\text{Tor}_q^A(A/J, k)$ (везде далее знак тензорного умножения без указания кольца обозначает тензорное умножение над A). Однако иногда удобнее описывать модули $\text{Tor}_q^A(A/J, k)$ через комплекс Козюля $K = K(A)$ кольца A : $\text{Tor}_q^A(A/J, k) \cong H_q(A/J)$.

Минимальную свободную резольвенту $F_* \rightarrow A \rightarrow A/J$ для A/J будем обозначать через (T, d) . Рассмотрим тензорное произведение комплексов $T_* \otimes_A K_*$,

положим $G_{i,j} = T_j \otimes_A K_i$. Напомним, как строится естественный изоморфизм $\varphi: H_i(A/J \otimes_A K_*) \rightarrow H_i(k \otimes_A T_*)$. Пусть $[z] \in H_i(A/J \otimes_A K_*)$ и элементы a_j , $j = 0, \dots, i$, удовлетворяют условиям:

- 1) $a_j \in G_{i-j,j}$;
- 2) $\partial_{i-j} a_j = (-1)^{j+1} d_{j+1} a_{j+1}$ при $j = 0, \dots, i-1$;
- 3) $d_0 a_0 = z$.

Положим $\varphi([z]) = [\partial_0(a_i)]$. При построении изоморфизма φ удобно пользоваться следующей диаграммой:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & a_i \in G_{0,i} \\
 & & & & \downarrow d_i \\
 & & & a_{i-1} \in G_{1,i-1} & \xrightarrow{\partial_1} & G_{0,i-1} \\
 & & & \downarrow d_{i-1} & & \\
 & & a_1 \in G_{i-1,1} & \xrightarrow{\partial_{i-1}} & \dots & \\
 & & \downarrow d_1 & & & \\
 a_0 \in G_{i,0} & \xrightarrow{\partial_i} & G_{i-1,0} & & & \\
 \downarrow d_0 & & & & & \\
 z \in K_i(A/J) & & & & &
 \end{array}$$

Для всякого множества $\sigma \subseteq \{1, \dots, n\}$ и всякого подмножества $\tau \subseteq \sigma$ положим $\gamma(\tau) = \sum_{t \in \sigma_\tau} \alpha(\sigma, t)$.

Следующая лемма очевидна.

ЛЕММА 4.1. Пусть $\tau \subseteq \sigma$. Тогда:

- 1) $\forall t \in \tau: \gamma(\tau_t) = \gamma(\tau) + \alpha(\sigma, t)$;
- 2) $\forall t \in \sigma: \alpha(\sigma, t) = \alpha(\sigma_\tau, t) + \alpha(\tau, t)$;
- 3) $\forall r, t \in \tau, r \neq t: (-1)^{\alpha(\tau, t) + \alpha(\tau_t, r) + 1} = (-1)^{\alpha(\tau, r) + \alpha(\tau_r, t)}$.

Пусть $e(\sigma, u)$ – допустимый символ, $|\sigma| = i-1$. Определим элементы $f_j \in G_{i-j,j}$ при $j = 1, \dots, i$ по формуле

$$\begin{aligned}
 f_j &= (-1)^{i-j} \sum_{\tau \subseteq \sigma, |\tau|=j-1} (-1)^{\gamma(\tau)} e(\tau; u) \otimes e_{\sigma_\tau} \\
 &+ \sum_{\tau \subseteq \sigma, |\tau|=j} (-1)^{\gamma(\tau)} s_\tau \otimes e_{\sigma_\tau} \wedge e_{M(u)}, \\
 s_\tau &= \sum_{r \in S(\tau; u)} (-1)^{\alpha(\tau, r)} \frac{y_r}{x_{M(u)}} e(\tau_r; u_r)
 \end{aligned}$$

(здесь, как и в §3, $u_r = g(x_r u)$, $y_r = x_r u / u_r$, $u' = u / x_{M(u)}$), кроме того, положим

$$f_0 = (-1)^{(i-2)(i-1)/2} u' \otimes e_\sigma \wedge e_{M(u)} \in G_{i,0}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. $\partial_{i-j} f_j = d_{j+1} f_{j+1}$ при $j = 0, \dots, i-1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $M = M(u)$. Пусть $j > 0$; тогда $\partial_{i-j} f_j = A + B$, где

$$\begin{aligned}
 A &= \sum_{\tau \subseteq \sigma, |\tau|=j-1} \left[\sum_{s \in \sigma_\tau} (-1)^{i-j+\gamma(\tau)+\alpha(\sigma_\tau, s)} x_s e(\tau; u) \otimes e_{\sigma(\tau \cup s)} \right] \\
 &\quad + \sum_{\tau \subseteq \sigma, |\tau|=j} (-1)^{\gamma(\tau)+|\sigma_\tau|} x_M s_\tau \otimes e_{\sigma_\tau} \\
 &= (-1)^{i-j} \sum_{\tau \subseteq \sigma, |\tau|=j} \left[\sum_{t \in \tau} (-1)^{\gamma(\tau_t)+\alpha(\sigma_\tau, t)} x_t e(\tau_t; u) \otimes e_{\sigma_\tau} \right] \\
 &\quad + (-1)^{i-j-1} \sum_{\tau \subseteq \sigma, |\tau|=j} (-1)^{\gamma(\tau)} x_M s_\tau \otimes e_{\sigma_\tau} \\
 &= d_{j+1} \left[(-1)^{i-(j+1)} \sum_{\tau \subseteq \sigma, |\tau|=j} (-1)^{\gamma(\tau)} e(\tau; u) \otimes e_{\sigma_\tau} \right], \\
 B &= \sum_{\tau \subseteq \sigma, |\tau|=j} \left[\sum_{s \in \sigma_\tau} (-1)^{\gamma(\tau)+\alpha(\sigma_\tau, s)} x_s s_\tau \otimes e_{\sigma(\tau \cup s)} \wedge e_M \right] \\
 &= \sum_{\rho \subseteq \sigma, |\rho|=j+1} \left[\sum_{t \in \rho} (-1)^{\gamma(\rho_t)+\alpha(\sigma_\rho, t)} x_t s_{\rho_t} \otimes e_{\sigma_\rho} \wedge e_M \right] \\
 &= \sum_{\rho \subseteq \sigma, |\rho|=j+1} (-1)^{\gamma(\rho)} b_\rho \otimes e_{\sigma_\rho} \wedge e_M, \\
 b_\rho &= \sum_{t \in \rho} (-1)^{\alpha(\rho, t)} x_t s_{\rho_t}
 \end{aligned}$$

(при преобразованиях следует использовать лемму 4.1).

Таким образом, достаточно показать, что для любого $\rho \subseteq \sigma$, $|\rho| = j+1$, имеем $b_\rho = d_{j+1} s_\rho$. Действительно, $d_{j+1} s_\rho = C_1 + C_2$, где

$$\begin{aligned}
 C_1 &= - \sum_{r \in S(\rho; u)} \sum_{t \in \rho_r} (-1)^{\alpha(\rho, r)+\alpha(\rho_r, t)} \frac{x_t y_r}{x_M} e(\rho_{tr}; u_r) \\
 &= \sum_{t \in \rho} \sum_{\substack{r \in S(\rho; u) \\ r \neq t}} (-1)^{\alpha(\rho, t)+\alpha(\rho_t, r)} \frac{x_t y_r}{x_M} e(\rho_{tr}; u_r), \\
 C_2 &= \sum_{t \in S(\rho; u)} \sum_{r \in S(\rho_t; u_t)} (-1)^{\alpha(\rho, t)+\alpha(\rho_t, r)} \frac{y_t y_{tr}}{x_M} e(\rho_{tr}; u_{tr}).
 \end{aligned}$$

Обозначим множество упорядоченных пар (r, t) , по которому ведется суммирование в выражении для C_2 , символом U , т. е.

$$U = \{(r, t) \mid r, t \in \rho, r \neq t, \max \rho_t < M(u_t), \max \rho_{rt} < M(u_{tr})\},$$

кроме того, положим

$$\begin{aligned}
 V &= \{(r, t) \in U \mid \max \rho_r < M(u_r)\}, \\
 W &= U \setminus V = \{(r, t) \in U \mid \max \rho_r \geq M(u_r)\}.
 \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} & \sum_{(r,t) \in V} (-1)^{\alpha(\rho,t)+\alpha(\rho_t,r)} \frac{y_t y_{tr}}{x_M} e(\rho_{tr}; u_{tr}) \\ &= \sum_{\substack{(r,t) \in V \\ r < t}} (-1)^{\alpha(\rho,t)+\alpha(\rho_t,r)} \left[\frac{y_t y_{tr}}{x_M} e(\rho_{tr}; u_{tr}) - \frac{y_r y_{rt}}{x_M} e(\rho_{tr}; u_{rt}) \right] = 0, \end{aligned}$$

так как в силу леммы 2.11 имеем $u_{tr} = u_{rt}$, и, следовательно, $y_t y_{tr} = y_r y_{rt}$. Таким образом, получаем

$$C_2 = \sum_{(r,t) \in W} (-1)^{\alpha(\rho,t)+\alpha(\rho_t,r)} \frac{y_t y_{tr}}{x_M} e(\rho_{tr}; u_{tr}).$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} b_\rho &= \sum_{t \in \rho} \sum_{r \in S(\rho_t; u)} (-1)^{\alpha(\rho,t)+\alpha(\rho_t,r)} \frac{x_t y_r}{x_M} e(\rho_{tr}; u_r) = C_1 + C_3, \\ C_3 &= \sum_{t \in \rho} \sum_{\substack{r \in S(\rho_t; u) \\ r \notin S(\rho; u)}} (-1)^{\alpha(\rho,t)+\alpha(\rho_t,r)} \frac{x_t y_r}{x_M} e(\rho_{tr}; u_r). \end{aligned}$$

Обозначим множество упорядоченных пар (r, t) , по которому ведется суммирование в выражении для C_3 , символом X , т. е.

$$X = \{(r, t) \mid r, t \in \rho, r \neq t, \max \rho_{rt} < M(u_r) \leq \max \rho_r\}.$$

Покажем, что $W = X$. Пусть $(r, t) \in X$; достаточно показать, что $\max \rho_t < M(u_t)$, $\max \rho_{rt} < M(u_{tr})$. Заметим, что $t = \max \rho_r \geq M(u_r) \geq r$, но так как $r \neq t$, то $t > r$ и $t = \max \rho$, следовательно, $\max \rho_t < t \leq M(u_t)$. Кроме того, так как $t \geq M(u_r)$, то по леммам 2.10, 2.11 имеем $u_r = u_{rt} = u_{tr}$, следовательно, $\max \rho_{rt} < M(u_r) = M(u_{tr})$, т. е. $(r, t) \in W$.

Обратно, пусть $(r, t) \in W$; достаточно показать, что $\max \rho_{rt} < M(u_r)$. Так как $\max \rho_r \geq M(u_r) \geq M(u_{rt}) > \max \rho_{rt}$, то $t = \max \rho_r$, следовательно, по леммам 2.10, 2.11 имеем $u_r = u_{rt} = u_{tr}$, откуда $\max \rho_{rt} < M(u_{tr}) = M(u_r)$, т. е. $(r, t) \in X$.

В процессе доказательства равенства $W = X$ было замечено, что если $(r, t) \in X$, то $u_r = u_{rt}$, следовательно, $y_t y_{tr} = x_t u x_r / u_r = x_t y_r$, поэтому $C_2 = C_3$.

Таким образом, для любого $\rho \subseteq \sigma$, $|\rho| = j + 1$, имеем $b_\rho = d_{j+1} s_\rho$, и, следовательно, $\partial_{i-j} f_j = d_{j+1} f_{j+1}$ при $j = 1, \dots, i - 1$.

Осталось рассмотреть случай $q = 0$. Обозначив $a = (i - 2)(i - 1)/2$, имеем

$$\begin{aligned} d_1(f_1) &= d_1 \left[\sum_{s \in \sigma} (-1)^{a - \alpha(\sigma, s)} \frac{y_s}{x_M} e(u_s) \otimes e_{\sigma_s} \wedge e_M + (-1)^{i-1+a} e(u) \otimes e_\sigma \right] \\ &= (-1)^a \left[\sum_{s \in \sigma} (-1)^{\alpha(\sigma, s)} u' x_s \otimes e_{\sigma_s} \wedge e_M + (-1)^{i-1} u \otimes e_\sigma \right] = \partial_i(f_0). \end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.3. Элемент вида $u' \otimes e_\sigma \wedge e_{M(u)} \in K(A/J)$, где $e(\sigma; u)$ – допустимый символ, будем называть *классическим*.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.4. Из предложения 4.2 следует, что классические элементы являются циклами комплекса $K(A/J)$.

ТЕОРЕМА 4.5. *Классы гомологий классических циклов $u' \otimes e_\sigma \wedge e_{M(u)}$ с $|\sigma| = q$ составляют базис векторного пространства $H_{q+1}(A/J)$, причем $\varphi([u' \otimes e_\sigma \wedge e_{M(u)}]) = \pm[e(\sigma; u)]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, в силу предложения 4.2 имеем

$$\varphi([u' \otimes e_\sigma \wedge e_{M(u)}]) = \pm[e(\sigma; u) \otimes 1],$$

а так как классы элементов $e(\sigma; u) \otimes 1$ с $|\sigma| = q$ формируют базис $\text{Tor}_{q+1}^A(A/J, k)$, а φ – изоморфизм, то классы гомологий классических циклов являются базисом в $H_{q+1}(A/J)$.

Везде далее в этом параграфе будем предполагать, что J не имеет порождающих степени 1. Рассмотрим множество наборов $(m_1, \dots, m_s)$, где $m_i \in G(J)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.6. Набор мономов $(m_1, \dots, m_s)$ будем называть *критическим*, если все m_i попарно различны и $\prod_{i=1}^s m'_i \notin J$.

Очевидно, что набор, состоящий из одного монома, является критическим, кроме того, любое подмножество критического набора тоже является критическим набором.

ЛЕММА 4.7. *Пусть (m_1, m_2) – критический набор; тогда:*

- 1) *для любого $j < \min\{M(m_1), M(m_2)\}$ имеем либо $x_j \nmid m_1$ и $x_j \nmid m_2$, либо $x_j^{d_j-1} | m_1$ и $x_j^{d_j-1} | m_2$;*
- 2) *существует $j < \min\{M(m_1), M(m_2)\}$ такое, что $x_j | m_1$ и $x_j | m_2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $M = \min\{M(m_1), M(m_2)\}$.

Докажем сначала 1). Пусть $j < M$; не ограничивая общности можно считать, что $x_j | m_1$, следовательно, $d_j \geq 2$. Покажем, что $x_j^{d_j-1} | m_2$. Действительно, если $x_j^{d_j-1} \nmid m_2$, то $x_j m'_2 \in J$, т.е. $m'_1 m'_2 \in J$. Противоречие. Далее, если $x_j^{d_j-1} \nmid m_1$, то, аналогично, $m'_1 m'_2 \in J$. Противоречие. Значит, если $x_j | m_1$ или $x_j | m_2$, то $x_j^{d_j-1} | m_1$ и $x_j^{d_j-1} | m_2$.

Докажем теперь 2). Из 1) следует, что при всех $j < M$ показатели при x_j в m_1 и m_2 совпадают. Пусть для любого $j < M$ имеем $x_j \nmid m_1$. Не ограничивая общности, можно считать, что $M(m_1) = M$, следовательно, $m_1 = x_M^a$, причем $a \geq 2$ (J порожден в степенях ≥ 2), следовательно, $d_M > 2$. Рассмотрим произведение $m'_1 m'_2$; по условию $m'_1 m'_2 \notin J$, но так как J – I -устойчивый идеал, получаем, что $x_M m'_2 \in I$, откуда следует, что $x_M^{d_M-1} | m_2$, т.е. $m_1 | m_2$. Противоречие.

ЛЕММА 4.8. *Пусть $(m_1, \dots, m_s)$ – критический набор, причем $s \geq 2$; тогда существует $j < \min\{M(m_i) \mid 1 \leq i \leq s\}$ такое, что $d_j > 1$ и $x_j^{d_j-1} | m_i$ при всех i .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО является простым следствием леммы 4.7.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.9. Минимальным числом критического набора $(m_1, \dots, m_s)$ при $s \geq 2$ будем называть число

$$\lambda(m_1, \dots, m_s) = \min\{j \mid d_j > 1 \text{ и } \forall i, 1 \leq i \leq s: x_j^{d_j-1} | m_i\},$$

если же $s = 1$, то положим

$$\lambda(m_1) = \begin{cases} 0, & \text{если } \{j \mid j < M(m_1), d_j > 1 \text{ и } x_j^{d_j-1} | m_1\} = \emptyset, \\ \min\{j \mid j < M(m_1), d_j > 1 \text{ и } x_j^{d_j-1} | m_1\} & \text{иначе.} \end{cases}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.10. По лемме 4.8 минимальное число критического набора $(m_1, \dots, m_s)$ всегда существует и строго меньше, чем $\min\{M(m_i) \mid 1 \leq i \leq s\}$, кроме того, в силу леммы 4.7 любое подмножество критического набора имеет то же минимальное число, что и сам набор.

ЛЕММА 4.11. Пусть $m_1, \dots, m_s$ – различные мономы в $G(J)$, $s \geq 2$, причем набор $(m_1, \dots, m_s)$ не является критическим, но при некотором t , $1 \leq t < s$, наборы $(m_1, \dots, m_t)$ и $(m_{t+1}, \dots, m_s)$ критические; тогда

$$\frac{\prod_{i=1}^s m'_i}{x_{\lambda(m_1, \dots, m_t)}^{t-1} x_{\lambda(m_{t+1}, \dots, m_s)}^{s-t-1}} \in J$$

(здесь $x_0 = 1$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $p = \lambda(m_1, \dots, m_t)$, $q = \lambda(m_{t+1}, \dots, m_s)$,

$$u = \frac{\prod_{i=1}^t m'_i}{x_p^{t-1}}, \quad v = \frac{\prod_{i=t+1}^s m'_i}{x_q^{s-t-1}}, \quad w = \prod_{i=1}^s m'_i.$$

Так как набор $(m_1, \dots, m_s)$ не является критическим, то $w \in J$, следовательно, существует $g \in G(J)$ такой, что $g|w$. В силу определения минимального числа имеем $x_p^{d_p-1} | u$, $x_q^{d_q-1} | v$, поэтому $g|uv$.

ЛЕММА 4.12. Пусть $z_1 = m'_1 \otimes e_{\sigma^1}$ и $z_2 = m'_2 \otimes e_{\sigma^2}$ – классические циклы, причем $\sigma^1 \cap \sigma^2 = \emptyset$ и (m_1, m_2) – критический набор с минимальным числом $\lambda(m_1, m_2) = l$; тогда

$$\partial \left(\frac{m'_1 m'_2}{x_l} \otimes e_{\sigma^1 \cup \sigma^2 \cup \{l\}} \right) = (-1)^{\alpha(\sigma^1 \cup \sigma^2, l)} m'_1 m'_2 \otimes e_{\sigma^1 \cup \sigma^2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $m_1 x_l, m_2 x_l \in I$, то $l \notin \sigma^1 \cup \sigma^2$. Кроме того, если $j \in \sigma^i$, то $x_j m'_i \in J$, откуда и вытекает утверждение леммы.

Рассмотрим алгебру гомологий $H(A/J) = \bigoplus_i H_i(R/J)$ комплекса Козюля $K(A/J)$ с внешним умножением $\wedge$:

$$[r_1 \otimes e_\sigma] \wedge [r_2 \otimes e_\tau] = (-1)^{\sum_{s \in \sigma} \alpha(\tau, s)} [r_1 r_2 \otimes e_{\sigma \cup \tau}],$$

если $\sigma \cap \tau = \emptyset$, и

$$[r_1 \otimes e_\sigma] \wedge [r_2 \otimes e_\tau] = 0,$$

если $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$.

Из теоремы 4.5 следует, что в алгебре гомологий $H(A/J)$ существует k -базис, состоящий из классов гомологий циклов вида $(-1)^{\alpha(\sigma, \lambda(m))} m' \otimes e_\sigma$, где $m' \otimes e_\sigma$ – классический цикл. Множество всех таких классов обозначим через B .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.13. Отображение $\mu: \bigsqcup_{i=1}^{\infty} B^i \rightarrow K(A/J)$ называется *тривиальной операцией Масси* на комплексе Козюля $K(A/J)$, если выполнены следующие условия:

- 1) $\mu([z])$ – цикл в $K(A/J)$, причем $[\mu([z])] = [z] \in H(A/J)$;
- 2) $\partial(\mu([z_1], \dots, [z_s])) = \sum_{i=1}^{s-1} \mu([z_1], \dots, [z_i]) \wedge \mu([z_{i+1}], \dots, [z_s])$, где $\bar{a} = (-1)^{|a|+1}a$ и $|a| = i$, если $a \in K_i(A/J)$.

Определим отображение $\mu: \bigsqcup_{i=1}^{\infty} B^i \rightarrow K(A/J)$ следующим образом. Пусть $z_i = m'_i \otimes e_{\sigma^i}$, $1 \leq i \leq s$, – классические циклы; тогда при $s = 1$

$$\mu([z_1]) = z_1;$$

при $s = 2$, если набор (m_1, m_2) критический,

$$\mu([z_1], [z_2]) = (-1)^{|\sigma^1|+1+\sum_{s \in \sigma^1} \alpha(\sigma^2, s)} \frac{m'_1 m'_2}{x_{\lambda(m_1, m_2)}} \otimes e_{\sigma^1 \cup \sigma^2 \cup \{\lambda(m_1, m_2)\}},$$

если набор (m_1, m_2) не критический,

$$\mu([z_1], [z_2]) = 0;$$

при $s > 2$

$$\mu([z_1], \dots, [z_s]) = 0.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.14. Отображение μ является тривиальной операцией Масси на комплексе Козюля $K(A/J)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выполнение условия 1) определения 4.13 очевидно; докажем выполнение условия 2).

Пусть $z_i = m'_i \otimes e_{\sigma^i}$, $1 \leq i \leq s$, – классические циклы. Если хотя бы два из множеств σ^i пересекаются, то обе части равенства в условии 2) определения 4.13 обращаются в нуль, поэтому предполагаем, что множества σ^i попарно не пересекаются, в частности, все m_i различны (так как $M(m_i) \in \sigma^i$).

Рассмотрим случай $s = 2$. Если (m_1, m_2) – не критический набор, то $\mu([z_1], [z_2]) = 0$, с другой стороны, $\mu([z_1]) \wedge \mu([z_2]) = 0$, так как $m_1 \neq m_2$, и, следовательно, $m'_1 m'_2 \in J$. Таким образом,

$$\partial(\mu([z_1], [z_2])) = 0 = \overline{\mu([z_1])} \wedge \mu([z_2]).$$

Если же (m_1, m_2) – критический набор, то по лемме 4.12 имеем

$$\partial(\mu([z_1], [z_2])) = (-1)^{\alpha(\sigma^1 \cup \sigma^2, l) + |\sigma^1| + 1 + \sum_{s \in \sigma^1} \alpha(\sigma^2, s)} m'_1 m'_2 \otimes e_{\sigma^1 \cup \sigma^2}$$

(здесь $l = \lambda(m_1, m_2)$), с другой стороны,

$$\mu([z_1]) \wedge \mu([z_2]) = (-1)^{\alpha(\sigma^1, l) + \alpha(\sigma^2, l) + \sum_{s \in \sigma^1} \alpha(\sigma^2, s)} m'_1 m'_2 \otimes e_{\sigma^1 \cup \sigma^2},$$

т. е. снова

$$\partial(\mu([z_1], [z_2])) = \overline{\mu([z_1])} \wedge \mu([z_2]).$$

Рассмотрим случай $s = 3$. Достаточно показать, что

$$\overline{\mu([z_1])} \wedge \mu([z_2], [z_3]) = -\overline{\mu([z_1], [z_2])} \wedge \mu([z_3]).$$

Если (m_1, m_2, m_3) – некритический набор, то если (m_2, m_3) – критический, то по лемме 4.11 $m'_1 m'_2 m'_3 / x_{\lambda(m_2, m_3)} \in J$, т. е. $\mu([z_1]) \wedge \mu([z_2], [z_3]) = 0$, а если (m_2, m_3) – некритический, то $\mu([z_2], [z_3]) = 0$. Таким образом, $\overline{\mu([z_1])} \wedge \mu([z_2], [z_3]) = 0$, аналогично, $\overline{\mu([z_1], [z_2])} \wedge \mu([z_3]) = 0$.

Пусть теперь набор (m_1, m_2, m_3) критический. В этом случае

$$\begin{aligned} \overline{\mu([z_1])} \wedge \mu([z_2], [z_3]) &= (-1)^a m'_1 m'_2 m'_3 / x_l \otimes e_{\sigma^1 \cup \sigma^2 \cup \sigma^3 \cup \{l\}}, \\ -\overline{\mu([z_1], [z_2])} \wedge \mu([z_3]) &= (-1)^b m'_1 m'_2 m'_3 / x_l \otimes e_{\sigma^1 \cup \sigma^2 \cup \sigma^3 \cup \{l\}}, \end{aligned}$$

где $l = \lambda(m_1, m_2, m_3)$,

$$\begin{aligned} a &= |\sigma^1| + 1 + \alpha(\sigma^1, l) + \sum_{s \in \sigma^1} \alpha(\sigma^2 \cup \sigma^3 \cup \{l\}, s) + |\sigma^2| + 1 + \sum_{s \in \sigma^2} \alpha(\sigma^3, s), \\ b &= 2|\sigma^1| + |\sigma^2| + 4 + \alpha(\sigma^3, l) + \sum_{s \in \sigma^1 \cup \sigma^2 \cup \{l\}} \alpha(\sigma^3, s) + \sum_{s \in \sigma^1} \alpha(\sigma^2, s). \end{aligned}$$

Заметим, что $l \notin \sigma^1 \cup \sigma^2 \cup \sigma^3$, поэтому после несложных вычислений получаем, что $a = b \pmod 2$, следовательно,

$$\overline{\mu([z_1])} \wedge \mu([z_2], [z_3]) = -\overline{\mu([z_1], [z_2])} \wedge \mu([z_3]).$$

Рассмотрим случай $s = 4$. Достаточно показать, что

$$\mu([z_1], [z_2]) \wedge \mu([z_3], [z_4]) = 0.$$

Если хотя бы один из наборов (m_1, m_2) , (m_3, m_4) некритический, то равенство очевидно, если (m_1, m_2) , (m_3, m_4) критические, но (m_1, m_2, m_3, m_4) некритический, то по лемме 4.11 имеем $m'_1 m'_2 m'_3 m'_4 / x_{\lambda(m_1, m_2)} x_{\lambda(m_3, m_4)} \in J$, т. е. $\mu([z_1], [z_2]) \wedge \mu([z_3], [z_4]) = 0$. Наконец, если (m_1, m_2, m_3, m_4) критический, то $\mu([z_1], [z_2])$ и $\mu([z_3], [z_4])$ содержат $e_{\lambda(m_1, m_2, m_3, m_4)}$, следовательно, $\mu([z_1], [z_2]) \wedge \mu([z_3], [z_4]) = 0$.

Если $s > 4$, то все слагаемые вида $\overline{\mu([z_1], \dots, [z_i])} \wedge \mu([z_{i+1}], \dots, [z_s])$ равны нулю, так как хотя бы один из сомножителей в каждом из них имеет не менее трех аргументов.

СЛЕДСТВИЕ 4.15. *Если J – I -устойчивый идеал, порожденный в степенях ≥ 2 , то умножение на алгебре гомологий $H(A/J)$ нулевое.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 4.5 достаточно доказать, что произведение двух классов гомологий классических циклов равно нулю. Из предложения 4.14 следует, что произведение двух классических циклов есть граница, т. е. произведение соответствующих классов гомологий равно нулю.

Следующая теорема была впервые доказана Е. С. Голодом [5], в виде, приведенном ниже, она сформулирована в [6].

ТЕОРЕМА 4.16. *Если на комплексе Козюля $K(A/J)$ существует тривиальная операция Масси, то кольцо A/J является кольцом Голода.*

СЛЕДСТВИЕ 4.17. *Если J – I -устойчивый идеал, порожденный в степенях ≥ 2 , то факторкольцо A/J является кольцом Голода, кроме того,*

$$P^{A/J}(t) = \frac{(1+t)^n}{1 - t^2 \sum_{u \in G(J)} (1+t)^{M(u)-r(u)-1}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложения 4.14 и теоремы 4.16 A/J является кольцом Голода, т. е. его ряд Пуанкаре имеет вид

$$P^{A/J}(t) = \frac{(1+t)^n}{1 - t^2 P_J^A(t)}.$$

По следствию 3.18 имеем $P_J^A(t) = \sum_{u \in G(J)} (1+t)^{M(u)-r(u)-1}$, поэтому

$$P^{A/J}(t) = \frac{(1+t)^n}{1 - t^2 \sum_{u \in G(J)} (1+t)^{M(u)-r(u)-1}}.$$

§ 5. Коэн-маколеевость и горенштейновость I -устойчивых идеалов

В этом параграфе рассматриваются условия, при которых факторкольцо по I -устойчивому идеалу является горенштейновым или коэн-маколеевым. Определение и основные свойства горенштейновых колец изложены в работе [7]. При формулировке условий горенштейновости будем считать, что I -устойчивый идеал J не имеет порождающих степени 1. Наложение этого условия не ограничивает общности, так как если $x_i \in J$, то $A/J \cong A'/J'$ (здесь $A' = k[x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n]$, $J' = J/x_i \subseteq A'$).

ТЕОРЕМА 5.1. *Пусть J – I -устойчивый идеал, порожденный в степенях ≥ 2 . Кольцо A/J горенштейново тогда и только тогда, когда идеал J главный, причем его порождающая имеет вид $x_t^a \prod_{i=1}^{t-1} x_i^{d_i-1}$, $t \geq 1$, $0 < a < d_t$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если идеал J главный, то кольцо A/J , очевидно, горенштейново.

Пусть теперь кольцо A/J горенштейново. Рассмотрим минимальную свободную резольвенту для A/J над A , построенную в замечании 3.14:

$$0 \rightarrow A^{\beta_h} \rightarrow A^{\beta_{h-1}} \rightarrow \dots \rightarrow A^{\beta_1} \rightarrow A^1 \rightarrow A/J \rightarrow 0.$$

Из горенштейновости кольца A/J следует, что $\beta_h = 1$, кроме того, матрица отображения $d_h: A^{\beta_h} \rightarrow A^{\beta_{h-1}}$ совпадает с транспонированной матрицей отображения $d_1: A^{\beta_1} \rightarrow A^1$, с точностью до линейной замены системы свободных порождающих в членах резольвенты, в частности, эти матрицы содержат одинаковое число элементов каждой степени. Если $h = 1$, то идеал J главный, причем в силу I -устойчивости его порождающая имеет вид, описанный в условии теоремы.

Покажем, что неравенство $h > 1$ невозможно. Действительно, пусть $h > 1$. Так как $\beta_h = 1$, то существует лишь один допустимый символ $e(i_1, \dots, i_{h-1}; u)$, следовательно, матрица отображения d_h имеет вид (с точностью до знаков элементов)

$$(x_{i_1}, \dots, x_{i_{h-1}}, y_{j_1}, \dots, y_{j_s}),$$

где $\{j_1, \dots, j_s\} = S(i_1, \dots, i_{h-1}; u)$, $y_i = ux_i/g(ux_i)$, следовательно, в ней есть хотя бы один элемент степени 1. С другой стороны, транспонированная матрица отображения d_1 состоит из элементов $G(J)$:

$$(g_1, \dots, g_t), \quad t = |G(J)|.$$

Таким образом, хотя бы один из g_i имеет степень 1. Противоречие.

Перейдем теперь к вопросу о коэн-маколеевости факторкольца A/J по I -устойчивому идеалу J . Напомним, что кольцо R называется *кольцом Коэна–Маколея*, если $\dim R = \text{depth } R$. Если J – I -устойчивый идеал, то $M(J) = \max\{M(u) - r(u) \mid u \in G(J)\}$ – номер последней ненулевой гомологии комплекса $K(A/J)$, следовательно, $\text{depth } A/J = n - M(J)$ (см. введение). С другой стороны, размерность Крулля $\dim A/J$ кольца A/J можно вычислять как порядок полюса ряда Гильберта $F_{A/J}(t)$ в точке $t = 1$ или как максимальную степень бесквадратного монома, не принадлежавшего радикалу идеала J . Оба подхода будут использованы для получения условий коэн-маколеевости кольца A/J (см. теорему 5.2 и лемму 5.5).

Положим $a_i = |\{u \in G(J) \mid M(u) - r(u) - 1 = i\}|$. Будем считать, что $\binom{n}{k} = 0$ при $k > n$ или $k < 0$.

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть J – I -устойчивый идеал, порожденный в степени d , $J \neq 0$. Кольцо A/J является кольцом Коэна–Маколея тогда и только тогда, когда $a_i = \binom{d+i-1}{i}$ при $0 \leq i < M(J)$.

Докажем сначала вспомогательную лемму.

ЛЕММА 5.3. Для любых $d \geq 1$ и $j \geq 1$ выполняется равенство

$$\sum_{i=0}^j (-1)^{i+1} \binom{d+i-1}{i} \binom{d}{j-i} = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Левая часть равенства в условии леммы представляет собой, с точностью до знака, коэффициент при t^j в произведении рядов $f(t)h(t)$, где

$$f(t) = (1-t)^{-d} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{d+i-1}{i} t^i, \quad h(t) = (1-t)^d = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{d}{i} t^i.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5.2. Применяя следствие 3.15, получаем

$$F_{A/J}(t) = \frac{1 - \sum_{u \in G(J)} t^d (1-t)^{M(u)-r(u)-1}}{(1-t)^n} = \frac{1 - \sum_{i=0}^{n-1} a_i t^d (1-t)^i}{(1-t)^n}.$$

Как отмечалось выше, размерность кольца A/J равна порядку полюса функции $F_{A/J}(t)$ в точке $t = 1$. Положим $f(t) = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} a_i t^d (1-t)^i$, p – порядок нуля функции $f(t)$ в точке $t = 1$. Тогда $\dim A/J = n - p$. С другой стороны, $\text{depth } A/J = n - M(J)$, следовательно, кольцо A/J является кольцом Коэна–Маколея тогда и только тогда, когда $M(J) = p$, т. е. тогда и только тогда, когда коэффициенты при $(t-1)^j$ в разложении $f(t)$ по степеням $t-1$:

$$f(t) = 1 - \sum_{i=0}^{M(J)-1} a_i t^d (1-t)^i = 1 + \sum_{i=0}^{M(J)-1} \sum_{l=0}^d (-1)^{1+i} a_i \binom{d}{l} (t-1)^{i+l},$$

равны 0 при $0 \leq j < M(J)$.

Получаем систему линейных уравнений на a_i , $0 \leq i < M(J)$:

$$\begin{aligned} -a_0 &= -1, \\ \sum_{i=0}^j (-1)^{i+1} \binom{d}{j-i} a_i &= 0 \quad \text{при } 0 < j < M(J). \end{aligned}$$

Эта система треугольная (с ненулевыми элементами на диагонали) и, следовательно, имеет единственное решение, которое в силу леммы 5.3 представляется в виде $a_i = \binom{d+i-1}{i}$, $0 \leq i < M(J)$.

Таким образом, кольцо A/J является кольцом Коэна–Маколея тогда и только тогда, когда набор $(a_0, \dots, a_{M(J)-1})$ является решением приведенной выше системы уравнений, т. е. тогда и только тогда, когда $a_i = \binom{d+i-1}{i}$ при $0 \leq i < M(J)$.

СЛЕДСТВИЕ 5.4. Пусть $I = 0$ и заданы целые числа d и M с условиями $d \geq 1$ и $n \geq M > 0$; тогда существует единственный I -устойчивый идеал J , порожденный в степени d и такой, что A/J – кольцо Коэна–Маколея и $\text{depth } A/J = n - M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если $I = 0$, то $r(u) = 0$ для всех u , следовательно, в степени d существует ровно $\binom{d+i-1}{i}$ мономов, для которых $M(u) - r(u) - 1 = i$. Положим

$$G(J) = \{u \mid \deg u = d, M(u) - r(u) - 1 < M\}.$$

Идеал J , очевидно, является I -устойчивым, кроме того, $\text{depth } A/J = n - M$, и в силу теоремы 5.2 A/J – кольцо Коэна–Маколея.

Если J – I -устойчивый идеал, то положим

$$F(J) = \{u \in G(J) \mid M(u) - r(u) = M(J)\}.$$

ЛЕММА 5.5. Пусть J – сильно I -устойчивый идеал и все $d_i = 2$. Кольцо A/J является кольцом Коэна–Маколея тогда и только тогда, когда множество $F(J)$ содержит моном вида $\prod_{i=s}^t x_i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через S_i множество всех бесквадратных мономов степени i . Заметим, что $r(u) = \deg u - 1$, размерность A/J равна максимальной степени бесквадратного монома, не принадлежащего J , т.е. $\dim A/J = \min\{i \mid S_i \subseteq J\} - 1$. Из сильной I -устойчивости идеала J следует, что J_i содержит все бесквадратные мономы тогда и только тогда, когда $\prod_{j=n-i+1}^n x_j \in J_i$.

Пусть A/J – кольцо Коэна–Маколея, т.е. $\dim A/J = \text{depth } A/J = n - M(J)$, следовательно, $w = \prod_{j=M(J)}^n x_j \in J$, $\prod_{j=M(J)+1}^n x_j \notin J$. Так как $w \in J$, то существует $u \in G(J)$ такой, что $u|w$. Заметим, что

$$M(u) - \deg u \geq M(w) - \deg w = n - (n - M(J) + 1) = M(J) - 1.$$

Если $M(u) - \deg u > M(J) - 1$, то $M(u) - \deg u + 1 > M(J)$ – противоречие с максимальнойностью $M(J)$. Значит, $M(u) - \deg u = M(w) - \deg w = M(J) - 1$, т.е. $u \in F(J)$, кроме того, $u = \prod_{j=M(J)}^{\deg u + M(J) - 1} x_j$.

Пусть теперь множество $F(J)$ содержит моном $u = \prod_{i=s}^t x_i$; тогда $\text{depth } A/J = n - (t - \deg u + 1)$, кроме того, $u \cdot \prod_{i=t+1}^n x_i \in J$, т.е. $\dim A/J \leq \deg u + n - t - 1$, следовательно, $\dim A/J \leq \text{depth } A/J$. Но так как всегда $\dim A/J \geq \text{depth } A/J$, то $\dim A/J = \text{depth } A/J$, т.е. A/J – кольцо Коэна–Маколея.

Положим $I' = (x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2)A$, $\mathfrak{r}(J)$ – радикал идеала J . Сопоставим каждому моному m моном $\text{sf}(m) = \prod_{i: x_i | m} x_i$. В этом случае $G(\mathfrak{r}(J)) = \{\text{sf}(u) \mid u \in G(J)\}$, в частности, $\mathfrak{r}(J)$ порожден мономами, не принадлежащими I' . Заметим также, что $\dim A/J = \dim A/\mathfrak{r}(J)$.

ТЕОРЕМА 5.6. Пусть J – I -устойчивый идеал, $\mathfrak{r}(J)$ – I' -устойчивый идеал и кольцо A/J является кольцом Коэна–Маколея; тогда $A/\mathfrak{r}(J)$ – кольцо Коэна–Маколея.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $u \in G(J)$, то $r(u) \leq \deg \text{sf}(u) - 1$, следовательно, $\text{depth } A/J \leq \text{depth } A/\mathfrak{r}(J)$. Таким образом, $\text{depth } A/\mathfrak{r}(J) \geq \dim A/\mathfrak{r}(J)$, но так как всегда $\text{depth } A/\mathfrak{r}(J) \leq \dim A/\mathfrak{r}(J)$, то $\text{depth } A/\mathfrak{r}(J) = \dim A/\mathfrak{r}(J)$, т.е. $A/\mathfrak{r}(J)$ – кольцо Коэна–Маколея. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 5.7. Пусть J – сильно I -устойчивый идеал, $\mathfrak{r}(J)$ – сильно I' -устойчивый идеал. Кольцо A/J является кольцом Коэна–Маколея тогда и только тогда, когда множество $F(J)$ содержит моном вида $x_t^{a_t} \cdot \prod_{i=s}^{t-1} x_i^{d_i-1}$, где $d_t > a_t > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A/J – кольцо Коэна–Маколея, в силу теоремы 5.6 $A/\mathfrak{r}(J)$ – кольцо Коэна–Маколея, более того, $\text{depth } A/\mathfrak{r}(J) = \text{depth } A/J$. Применяя лемму 5.5, получаем, что моном $v = \prod_{i=s}^{t-1} x_i$ принадлежит $F(\mathfrak{r}(J))$, следовательно, $u = \prod_{i=s}^{t-1} x_i^{a_i} \in G(J)$, где $0 < a_i < d_i$. Заметим, что

$$n - \text{depth } A/J \geq M(u) - r(u) \geq M(v) - \deg v + 1 = n - \text{depth } A/\mathfrak{r}(J) = n - \text{depth } A/J,$$

т.е. $u \in F(J)$, кроме того, $r(u) = \deg v - 1$, т.е. $a_i = d_i - 1$ при $s \leq i < t$.

Пусть теперь $u = x_t^{a_t} \cdot \prod_{i=s}^{t-1} x_i^{d_i-1} \in F(J)$. Если $u' \in G(J)$, то

$$M(\text{sf}(u')) - \deg \text{sf}(u') + 1 \leq M(u') - r(u') \leq M(u) - r(u) = M(\text{sf}(u)) - \deg \text{sf}(u) + 1,$$

т.е. $\text{sf}(u') \in F(\mathfrak{r}(J))$, более того, $\text{depth } A/\mathfrak{r}(J) = \text{depth } A/J$. В силу леммы 5.5 ($\text{sf}(u) = \prod_{i=s}^t x_i$) $A/\mathfrak{r}(J)$ – кольцо Коэна–Маколея, а так как $\text{depth } A/\mathfrak{r}(J) = \text{depth } A/J$, $\dim A/\mathfrak{r}(J) = \dim A/J$, то A/J – кольцо Коэна–Маколея. Теорема доказана.

Следующая лемма описывает широкий класс идеалов с I' -устойчивыми радикалами.

ЛЕММА 5.8. *Пусть $d_i \geq d_j$ при $i < j$; тогда радикал $\mathfrak{r}(J)$ I -устойчивого (сильно I -устойчивого) идеала J является I' -устойчивым (сильно I' -устойчивым).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем лемму в случае сильно I -устойчивого идеала J , в случае I -устойчивого идеала доказательство аналогично.

Достаточно показать, что для любого $u \in G(J)$ и любых i, j таких, что $j < i \leq M(\text{sf}(u))$, $x_i | \text{sf}(u)$, $x_j \nmid \text{sf}(u)$, имеем $x_j \text{sf}(u)/x_i \in \mathfrak{r}(J)$. Действительно, пусть $u = x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n}$; тогда $x_j^{a_j} u / x_i^{a_i} \in J$ (так как $d_j \geq d_i$), следовательно, $x_j \text{sf}(u)/x_i = \text{sf}(x_j^{a_j} u / x_i^{a_i}) \in \mathfrak{r}(J)$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 5.9. *Пусть $d_i \geq d_j$ при $i < j$, J – I -устойчивый идеал и кольцо A/J является кольцом Коэна–Маколея; тогда $A/\mathfrak{r}(J)$ – кольцо Коэна–Маколея.*

СЛЕДСТВИЕ 5.10. *Пусть $d_i \geq d_j$ при $i < j$, J – сильно I -устойчивый идеал. Кольцо A/J является кольцом Коэна–Маколея тогда и только тогда, когда множество $F(J)$ содержит моном вида $x_t^{a_t} \cdot \prod_{i=s}^{t-1} x_i^{d_i-1}$, где $d_t > a_t > 0$.*

§ 6. Сильно I -устойчивые идеалы

Пусть J – сильно I -устойчивый идеал. Обозначим $J_j = J + (x_1^{d_1}, \dots, x_j^{d_j})A$ и $R_j = A/J_j$ при $0 \leq j \leq n$. Кроме того, пусть $K(R_j)$ – комплекс Козюля A -модуля R_j и $H_q(R_j) \cong \text{Tor}_q^A(R_j, k)$ – его гомологии. Обозначим $\Psi = \{i \mid d_i < +\infty\}$, для каждого $i \in \Psi$ положим $w_i = x_i^{d_i-1}$ и для каждого $\tau \subseteq \Psi$ положим $w_\tau = \prod_{i \in \tau} w_i$ ($w_\emptyset = 1$), кроме того, обозначим $\Omega = \{w_\sigma \mid \sigma \subseteq \Psi, w_\sigma \notin J\}$. Заметим, что $w_\tau \in \Omega$ тогда и только тогда, когда $(J : w_\tau) \neq A$.

ЛЕММА 6.1. *Пусть $w_j \in \Omega$; тогда идеал $J' = ((J : w_j) + (x_j)A)/(x_j)A$ в кольце $A' = k[x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n]$ является сильно I' -устойчивым для $I' = (x_1^{d_1}, \dots, x_{j-1}^{d_{j-1}}, x_{j+1}^{d_{j+1}}, \dots, x_n^{d_n})A' \subseteq A'$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $y \in J' \setminus I'$; тогда $yw_j \in J \setminus I$, следовательно, в силу сильной I -устойчивости идеала J для любых s, t таких, что $s < t \leq M(yw_j)$, $s, t \neq j$, имеем $x_s yw_j / x_t \in I + J$. Поэтому $x_s y / x_t \in J' + I'$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 6.2. *Базис векторного пространства $H_q(R_j)$ состоит из классов гомологий циклов вида*

$$u'w_\tau \otimes e_\sigma \wedge e_{M(u)} \wedge e_\tau,$$

где $w_\tau \in \Omega$, $M(x_\sigma) < M(u)$, $u \in G(J : w_\tau)$, $ux_\sigma \notin I$, $|\sigma| + |\tau| = q - 1$, $M(w_\tau) \leq j$, а также вида

$$w_\tau \otimes e_\tau,$$

где $w_\tau \in \Omega$, $|\tau| = q$, $M(w_\tau) \leq j$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем индукцию по j равномерно по всем n , I , J . База индукции при $j = 0$ следует из теоремы 4.5. Предположим, что для всех $l < j$ теорема доказана; докажем ее для j . Обозначим через B_l множество циклов в $H_q(R_l)$, описанных в формулировке теоремы. По предположению индукции классы гомологий циклов, принадлежащих B_{j-1} , составляют базис в $H_q(R_{j-1})$. Мы будем отождествлять B_{j-1} с множеством тех элементов в B_j , у которых $M(w_\tau) \leq j$.

Если $d_j = +\infty$, то $R_{j-1} = R_j$ и циклов с $M(w_\tau) = j$ в B_j нет, следовательно, $B_j = B_{j-1}$.

Пусть теперь $d_j < +\infty$. Заметим, что $(J : w_j) = (J : x_j^{d_j})$. Действительно, если $y \in G(J : x_j^{d_j})$, то $yx_j^{d_j} = uz$, где $z \in \mathfrak{M}$, $u \in G(J)$, кроме того, $\text{НОД}(y, z) = 1$ и $x_j^{d_j} \nmid u$, поэтому $x_j | z$, следовательно, $yx_j^{d_j-1} \in J$. Таким образом, $(J : x_j^{d_j}) \subseteq (J : w_j)$, обратное включение очевидно.

Обозначим $R' = A/(J_{j-1} : x_j^{d_j})$; так как $(J : w_j) = (J : x_j^{d_j})$, то $R' = A/((J : w_j), x_1^{d_1}, \dots, x_{j-1}^{d_{j-1}})$, с другой стороны, $R'(-d_j \varepsilon_j) \cong (x_j^{d_j})R_j$. Рассмотрим короткую точную последовательность

$$0 \rightarrow R'(-d_j \varepsilon_j) \rightarrow R_{j-1} \rightarrow R_j \rightarrow 0$$

и соответствующую ей длинную точную последовательность для гомологий комплекса Козюля

$$\dots \rightarrow H_q(R'(-d_j \varepsilon_j)) \rightarrow H_q(R_{j-1}) \rightarrow H_q(R_j) \rightarrow \dots$$

Докажем, что отображение $\theta: H_q(R'(-d_j \varepsilon_j)) \rightarrow H_q(R_{j-1})$ нулевое при $q \geq 0$. Так как все отображения в длинной точной последовательности градуированные, то достаточно доказать, что для любого $a \in \mathbb{Z}^n$ отображение $\theta_a: H_q(R')_{a-d_j \varepsilon_j} \rightarrow H_q(R_{j-1})_a$ нулевое. Можно считать, что $H_q(R_{j-1})_a \neq 0$. По предположению индукции классы гомологий циклов, принадлежащих B_{j-1} , составляют базис в $H_q(R_{j-1})$. Заметим, что если $b \in B_{j-1}$, $\deg_n b = a = (a_1, \dots, a_n)$, то $a_j < d_j$. Действительно, если $b = w_\tau \otimes e_\tau$, то $M(w_\tau) \leq j - 1$, т.е. $a_j = 0 < d_j$, а если $b = u'w_\tau \otimes e_\sigma \wedge e_{M(u)} \wedge e_\tau$, то $M(w_\tau) \leq j - 1$ и $ux_\sigma \notin I$, следовательно, $a_j < d_j$. Таким образом, $H_q(R_{j-1})_a \neq 0$ только при $a_j < d_j$, но при таких a выполнено $H_q(R')_{a-d_j \varepsilon_j} = 0$. Следовательно, отображение θ нулевое, и длинная точная последовательность расщепляется на короткие:

$$0 \rightarrow H_q(R_{j-1}) \rightarrow H_q(R_j) \rightarrow H_{q-1}(R'(-d_j \varepsilon_j)) \rightarrow 0.$$

Вложение $H_q(R_{j-1}) \rightarrow H_q(R_j)$ индуцируется отображением $R_{j-1} \rightarrow R_j$ в короткой точной последовательности, поэтому классы гомологий элементов B_{j-1} отображаются в классы гомологий соответствующих им элементов B_j . Таким образом, достаточно показать, что $B_j = B_{j-1} \cup B'$, где B' – элементы $K_q(R_j)$, классы гомологий которых являются прообразами некоторого базиса в $H_{q-1}(R'(-d_j\varepsilon_j))$.

Если $(J : w_j) = A$, то $R' = 0$, $B' = \emptyset$ и теорема доказана, так как базисных циклов с $M(w_\tau) = j$ не существует.

Пусть $(J : w_j) \neq A$, следовательно, $w_j \in \Omega$. Так как элемент $x_j \in A$ регулярен относительно A и R' , то $H_{q-1}(R') \cong H'_{q-1}(R'/x_j)$, где через $H'_{q-1}(R'/x_j)$ обозначены гомологии комплекса Козюля A/x_j -модуля R'/x_j (над кольцом A/x_j). По лемме 6.1 идеал $J' = ((J : w_j) + (x_j)A)/(x_j)A$ в кольце $A' = k[x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n]$ является сильно I' -устойчивым для $I' = (x_1^{d_1}, \dots, x_{j-1}^{d_{j-1}}, x_{j+1}^{d_{j+1}}, \dots, x_n^{d_n})A' \subseteq A'$, следовательно, по предположению индукции базис в $H'_{q-1}(R'/x_j)$ состоит из классов гомологий циклов вида

$$u'w_\tau \otimes_{A/x_j} e_\sigma \wedge e_{M(u)} \wedge e_\tau,$$

где $w_\tau \in \Omega$, $M(x_\sigma) < M(u)$, $u \in G(J' : w_\tau)$, $ux_\sigma \notin I'$, $|\sigma| + |\tau| = q - 2$, $M(w_\tau) \leq j - 1$, $x_j \nmid u$, $j \notin \sigma$, а также вида

$$w_\tau \otimes_{A/x_j} e_\tau,$$

где $w_\tau \in \Omega$, $|\tau| = q - 1$, $M(w_\tau) \leq j - 1$. Обозначим множество этих циклов через B . Напомним, как найти образ класса гомологий $[z] \in H_{q-1}(R')$ при изоморфизме $H_{q-1}(R') \cong H'_{q-1}(R'/x_j)$. Пусть $z = \sum_\sigma r_\sigma \otimes e_\sigma \in K_{q-1}(R')$ – цикл, представляющий класс $[z]$. Так как R' – факторкольцо кольца многочленов по мономиальному идеалу, то z можно представить в следующем виде:

$$z = \sum_{\sigma, j \notin \sigma} \sum_s \alpha_{\sigma,s} a_{\sigma,s} \otimes e_\sigma + \sum_\sigma \sum_s \gamma_{\sigma,s} c_{\sigma,s} \otimes e_\sigma,$$

где $a_{\sigma,s}$ – образы мономов из A , не делящихся на x_j , $c_{\sigma,s}$ – образы мономов из A , делящихся на x_j , а $\alpha_{\sigma,s}, \gamma_{\sigma,s} \in k$. Тогда $\sum_\sigma \sum_s \gamma_{\sigma,s} b_{\sigma,s} \otimes e_\sigma$ – граница, поэтому $[\sum_{\sigma, j \notin \sigma} \sum_s \alpha_{\sigma,s} a_{\sigma,s} \otimes e_\sigma] = [z]$. По определению класс $[z]$ при изоморфизме $H_{q-1}(R') \cong H'_{q-1}(R'/x_j)$ переходит в класс $[\sum_{\sigma, j \notin \sigma} \sum_s \alpha_{\sigma,s} a_{\sigma,s} \otimes_{A/x_j} e_\sigma] \in H'_{q-1}(R'/x_j)$, где $a_{\sigma,s}$ рассматриваются как элементы R'/x_j .

Таким образом, классу каждого цикла $z = r \otimes_{A/x_j} e_\rho \in B$ при этом изоморфизме соответствует класс в $H_{q-1}(R')$, который имеет представителя $z' = r' \otimes e_\rho$, где r' – прообраз r при гомоморфизме $R' \rightarrow R'/x_j$. Цикл z' , соответствующий z , будем обозначать $c(z)$.

Пусть $z \in B$; тогда $w_j c(z) \wedge e_j$ – цикл в $H_q(R_j)$, класс гомологий которого отображается в класс $\pm[z] \in H_{q-1}(R'(-d_j\varepsilon_j))$ при связывающем гомоморфизме. Это и доказывает теорему, так как $B_j = B_{j-1} \cup \{w_j z \wedge e_j \mid z \in B\}$.

Обозначим

$$\Omega_{s,r} = \{w_\tau \in \Omega \mid \deg w_\tau = s, |\tau| = r\},$$

$$|\tau|_u = |\{i \in \tau \mid i < M(u)\}|.$$

СЛЕДСТВИЕ 6.3. Если J – сильно I -устойчивый идеал, то для любого $i \geq 1$ справедлива формула

$$\beta_{i,i+j}^A(A/(J+I)) = \sum_{w_\tau \in \Omega} \left[\sum_{\substack{u \in G(J:w_\tau) \\ \deg u = j+1 - \deg w_\tau}} \binom{M(u) - r(u) - 1 - |\tau|u}{i-1-|\tau|} \right] + |\Omega_{j,i}|,$$

в частности, числа Бетти $\beta_{i,i+j}^A(A/(J+I))$ не зависят от характеристики поля k (если $a > b$ или $a < 0$, то полагаем $\binom{b}{a} = 0$).

§ 7. Слабо I -устойчивые идеалы

Пусть J – слабо I -устойчивый идеал, $G(J) = \{u_1, \dots, u_m\}$, причем $u_1 <_{dl} u_2 <_{dl} \dots <_{dl} u_m$.

ЛЕММА 7.1. Пусть $u_{m+1}, \dots, u_s$ – мономы в $A \setminus I + J$, $u_{m+1} <_{dl} \dots <_{dl} u_s$. Если идеал $J' = (J, u_{m+1}, \dots, u_s)A$ слабо I -устойчивый, то идеалы $(J, u_{m+1}, \dots, u_r)A$ слабо I -устойчивые при $r = m+1, \dots, s$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить выполнение условия 2) определения 2.2 для всех u_l , $m < l \leq r$. Действительно, так как J' слабо I -устойчивый, то для любого $j < M(u'_l)$ существует $i > j$ такое, что $x_i|u_l$ и $x_j u_l/x_i \in J' + I$. Если $x_j u_l/x_i \in J' \setminus I$, то $x_j u_l/x_i = u_t w$ при некотором $t \leq s$, следовательно, $u_t \leq_{dl} x_j u_l/x_i <_{dl} u_l$, т.е. $t < l \leq r$, поэтому $x_j u_l/x_i \in (J, u_{m+1}, \dots, u_r)A$.

ЛЕММА 7.2. Пусть моном $v \in A \setminus I + J$, $\deg v = a$, и идеал $J' = (J, v)A$ слабо I -устойчивый. Если $\deg u_l \leq a$ для любого l , то $J'/J \cong A/L(-a)$, где L – идеал, порожденный всеми переменными x_t , удовлетворяющими условию $vx_t \in J \setminus I$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $\tau = \{t \mid x_t v \in J \setminus I\}$. Поскольку $J'/J \cong A/(J : v)(-a)$, то достаточно показать, что $(J : v) = L$.

Действительно, пусть $i \in \tau$; тогда $vx_i \in J$, т.е. $L \subseteq (J : v)$.

Пусть $y \in G(J : v)$; тогда $yv = u_l w$, где $w \in \mathfrak{M}$. Так как y – порождающая $(J : v)$, то $\text{НОД}(y, w) = 1$, следовательно, $y|u_l$, $w|v$. Кроме того, если $yv \in I$, то существуют p, q такие, что $x_p^q|w$ и $x_p^q u_l \in I$, но так как $\text{НОД}(y, w) = 1$, то $x_p \nmid y$ и, следовательно, $v \in I$. Противоречие. Значит, $yv \notin I$.

Если $\deg y = 0$, то $v \in J$, что противоречит условию.

Если $\deg y = 1$, то $y = x_s$, причем $x_s v \in J \setminus I$, т.е. $s \in \tau$.

Если $\deg y \geq 2$, то $\deg u_l \geq 2$, следовательно, $\deg v \geq 2$ и $\deg w \geq 2$. Пусть u_l – минимальная из порождающих $u_j \in J$, для которых $yv = u_j z$ при некотором $z \in A$. Так как $y|u_l$, $w|v$, то $M(y') \leq M(u'_l)$, $M(w') \leq M(v')$.

Пусть $M(y') < M(v')$; тогда существует $i > M(y')$ такое, что $vx_{M(y')}/x_i \in J' + I$, следовательно, $vx_{M(y')}/x_i \in J + I$, т.е. $vx_{M(y')} \in J + I$, но так как $vy \notin I$, то $vx_{M(y')} \in J \setminus I$, поэтому $x_{M(y')} \in G(J : v)$. Противоречие.

Пусть $M(y') = M(v')$, тогда $M(w') \neq M(v')$, следовательно, $M(w') < M(v') = M(y') \leq M(u'_l)$.

Пусть $M(y') > M(v')$; тогда $M(w') \leq M(v') < M(y') \leq M(u'_l)$.

Таким образом, во всех случаях $M(w') < M(u'_l)$. Поэтому существует $i > M(w')$ такое, что $u_l x_{M(w')}/x_i \in J + I$, но так как $u_l w \notin I$, то $u_l x_{M(w')}/x_i \in J \setminus I$, кроме того, $u_l x_{M(w')}/x_i <_{dl} u_l$, поэтому существует $s < l$ такое, что $u_l x_{M(w')}/x_i = u_s z$, $z \in \mathfrak{M}$. Противоречие с минимальностью u_l , так как $u_l x_{M(w')}|u_l w = yv$.

Таким образом, все мономы из $G(J : v)$ имеют степень 1 и принадлежат L . Лемма доказана.

Обозначим $J_l = (u_1, \dots, u_l)A$, в силу леммы 7.1 идеалы J_l слабо I -устойчивые. Положим $\tau(u_l) = \{i \mid u_l x_i \in J_{l-1} \setminus I\}$, $\deg u_l = a_l$, $R_l = (A/X)(-a_l)$ при $l \geq 2$, где $X = (x_i, i \in \tau(u_l))A$, и $R_1 = A$. Заметим, что $\beta_{i,j}^A(R_l) = 0$ при $j \neq i + a_l$ и $\beta_{i,i+a_l}^A(R_l) = \binom{|\tau(u_l)|}{i}$ при $l \geq 2$.

ТЕОРЕМА 7.3. *Выполнено равенство $\beta_{i,j}^A(J_l) = \sum_{s=1}^l \beta_{i,j}^A(R_s)$, в частности, $\beta_{i,j}^A(J_l)$ не зависят от характеристики поля k .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем индукцию по l . База индукции при $l = 1$ очевидна. Пусть для всех $s < l$ теорема доказана; докажем ее для l .

По лемме 7.2 последовательность

$$0 \rightarrow J_{l-1} \rightarrow J_l \rightarrow R_l \rightarrow 0$$

является точной последовательностью градуированных A -модулей. Поэтому мы имеем длинную точную последовательность производных функторов

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \operatorname{Tor}_{i+1}^A(R_l, k) \rightarrow \operatorname{Tor}_i^A(J_{l-1}, k) \rightarrow \operatorname{Tor}_i^A(J_l, k) \\ \rightarrow \operatorname{Tor}_i^A(R_l, k) \rightarrow \operatorname{Tor}_{i-1}^A(J_{l-1}, k) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

Обозначим $D_{l,i} = \{a_1 + i, \dots, a_l + i\}$. По предположению индукции $\beta_{i,j}^A(J_{l-1}) = \sum_{s=1}^{l-1} \beta_{i,j}^A(R_s)$, следовательно, если $j \notin D_{l,i}$, то $\beta_{i,j}^A(J_{l-1}) = \beta_{i,j}^A(R_l) = 0$, поэтому $\beta_{i,j}^A(J_l) = 0$ и теорема верна. Если $j \in D_{l,i}$, то $j < a_l + 1 + i$, следовательно, $\beta_{i+1,j}^A(R_l) = 0$, кроме того, если $j = a_l + i$, то $\beta_{i-1,j}^A(J_{l-1}) = 0$, а если $j < a_l + i$, то $\beta_{i,j}^A(R_l) = 0$. Поэтому для любого $j \in D_{l,i}$ последовательность

$$0 \rightarrow \operatorname{Tor}_i^A(J_{l-1}, k)_j \rightarrow \operatorname{Tor}_i^A(J_l, k)_j \rightarrow \operatorname{Tor}_i^A(R_l, k)_j \rightarrow 0$$

точна. Следовательно, $\beta_{i,j}^A(J_l) = \beta_{i,j}^A(J_{l-1}) + \beta_{i,j}^A(R_l)$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 7.4. *Если J – слабо I -устойчивый идеал, порожденный в степени d , то модуль A/J имеет d -линейную резольвенту.*

Если J – слабо I -устойчивый идеал, порожденный в степени d , то обозначим J^{st} минимальный I -устойчивый идеал, содержащий J . Очевидно, что J тоже порожден в степени d . Пусть $G(J^{st}) \setminus G(J) = \{u_{m+1}, \dots, u_s\}$, $u_{m+1} <_{dl} u_{m+2} <_{dl} \cdots <_{dl} u_s$, кроме того, при $l > m$ положим $J_l = (J, u_{m+1}, \dots, u_l)$, $\tau(u_l) = \{i \mid u_l x_i \in J_{l-1} \setminus I\}$, $R_l = (A/(x_i, i \in \tau(u_l))A)(-d)$.

ТЕОРЕМА 7.5. Пусть J – слабо I -устойчивый идеал, порожденный в степени d ; тогда:

- 1) $\forall i \geq 1 \quad \beta_i^A(A/J) = \beta_i^A(A/J^{st}) - \sum_{l=m+1}^s \binom{|\tau(u_l)|}{i-1}$;
- 2) $\forall i \geq 1$ последовательность векторных пространств

$$0 \rightarrow H_i(A/J) \rightarrow H_i(A/J^{st}) \xrightarrow{\psi} \bigoplus_{l=m+1}^s H_{i-1}(R_l) \rightarrow 0$$

точна, кроме того, отображение ψ на базисе пространства $H_i(A/J^{st})$, состоящем из классических циклов (см. теорему 4.5), имеет вид

$$\psi([u' \otimes e_\tau]) = \sum_{t \in \rho(\tau, u)} (-1)^{\alpha(\tau, t)} [1 \otimes e_{\tau_t}],$$

где $\rho(\tau, u) = \{t \in \tau \mid \exists l, m+1 \leq l \leq s: x_t u' = u_l, \tau_t \subseteq \tau(u_l)\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 7.1 идеалы J_l слабо I -устойчивые при $l \geq m+1$; применяя лемму 7.2, получаем точную последовательность

$$0 \rightarrow J_{l-1} \rightarrow J_l \rightarrow R_l \rightarrow 0.$$

Снова рассмотрим длинную точную последовательность

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \text{Tor}_{i+1}^A(R_l, k) &\rightarrow \text{Tor}_i^A(J_{l-1}, k) \rightarrow \text{Tor}_i^A(J_l, k) \\ &\rightarrow \text{Tor}_i^A(R_l, k) \rightarrow \text{Tor}_{i-1}^A(J_{l-1}, k) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

По следствию 7.4 модули J_{l-1}, J_l имеют линейные резольвенты, а так как R_l тоже имеет линейную резольвенту, то длинная точная последовательность расщепляется на короткие:

$$0 \rightarrow \text{Tor}_i^A(J_{l-1}, k) \rightarrow \text{Tor}_i^A(J_l, k) \rightarrow \text{Tor}_i^A(R_l, k) \rightarrow 0.$$

Так как $\text{Tor}_i^A(J_l, k) \cong \text{Tor}_{i+1}^A(A/J_l, k)$, то последовательность

$$0 \rightarrow \text{Tor}_i^A(A/J_{l-1}, k) \rightarrow \text{Tor}_i^A(A/J_l, k) \xrightarrow{\delta_l} \text{Tor}_{i-1}^A(R_l, k) \rightarrow 0 \quad (*)$$

точна, что и доказывает первую часть теоремы.

Представим отображение ψ в виде $\psi = \sum_{l=m+1}^s \psi_l$, где $\psi_l: H_i(A/J^{st}) \rightarrow H_{i-1}(R_l)$ определено следующим образом:

$$\psi_l([u' \otimes e_\tau]) = \begin{cases} (-1)^{\alpha(\tau, t)} [1 \otimes e_{\tau_t}], & \exists t \in \tau: x_t u' = u_l, \tau_t \subseteq \tau(u_l), \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Покажем, что $\text{Ker } \psi_l = H_i(A/J_{l-1})$. Из последовательности $(*)$ следует, что $H_i(A/J_{l-1}) \subseteq H_i(A/J_l)$, значит, $H_i(A/J_{l-1}) \subseteq H_i(A/J^{st})$ при $l \geq m+1$, поэтому достаточно доказать, что ограничение отображения ψ_l на подпространство $H_i(A/J_l) \subseteq H_i(A/J^{st})$ совпадает с δ_l . Действительно, пусть $z = \sum c_{\tau, u} u' \otimes e_\tau$,

$c_{\tau,u} \in k$, – цикл в $K_i(A/J_l)$, разложенный по базису из классических циклов (считаем, что $c_{\tau,u} = 0$, если $u' \otimes e_\tau$ неклассический). Имеем

$$\begin{aligned}\psi_l([z]) &= \sum c_{\tau,u} \psi_l([u' \otimes e_\tau]) \\ &= \sum_{\substack{\rho \subseteq \tau(u_l) \\ |\rho|=i-1}} \left(\sum_{t \notin \rho} \sum_{\substack{u \in G(J^{st}) \\ x_t u' = u_l}} (-1)^{\alpha(\rho,t)} c_{\rho \cup t, u} \right) [1 \otimes e_\rho].\end{aligned}$$

С другой стороны, при изоморфизме $\text{Tor}_i^A(A/J_l, k) \rightarrow \text{Tor}_{i-1}^A(J_l, k)$ класс $[z]$ переходит в класс

$$[\partial_i(z)] = \left[\sum_{|\rho|=i-1} \left(\sum_{t \notin \rho} \sum_{u \in G(J^{st})} (-1)^{\alpha(\rho,t)} c_{\rho \cup t, u} x_t u' \right) \otimes e_\rho \right],$$

следовательно, по модулю $H_i(A/J_{l-1})$ справедливо равенство

$$[\partial_i(z)] = \left[\sum_{\substack{\rho \subseteq \tau(u_l) \\ |\rho|=i-1}} \left(\sum_{t \notin \rho} \sum_{\substack{u \in G(J^{st}) \\ x_t u' = u_l}} (-1)^{\alpha(\rho,t)} c_{\rho \cup t, u} u_l \right) \otimes e_\rho \right],$$

поэтому

$$\delta_l([z]) = \sum_{\substack{\rho \subseteq \tau(u_l) \\ |\rho|=i-1}} \left(\sum_{t \notin \rho} \sum_{\substack{u \in G(J^{st}) \\ x_t u' = u_l}} (-1)^{\alpha(\rho,t)} c_{\rho \cup t, u} \right) [1 \otimes e_\rho],$$

что совпадает с выражением для $\psi_l([z])$. Таким образом, $\text{Ker } \psi_l = H_i(A/J_{l-1})$, более того, так как отображения δ_l сюръективны, то ψ_l и ψ тоже сюръективны.

Так как $\text{Ker } \psi_l = H_i(A/J_{l-1})$, то

$$\text{Ker } \psi = \bigcap_{l=m+1}^s \text{Ker } \psi_l = \bigcap_{l=m+1}^s H_i(A/J_{l-1}) = H_i(A/J),$$

что и требовалось доказать.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.6. Стоит отметить, что если J не порожден мономами одной степени, то можно привести пример, когда $H_i(A/J)$ не является подпространством в $H_i(A/J^{st})$ (см. [4, пример 2.6]).

В статье [8] доказано, что если A -модуль M имеет линейную резольвенту, то дифференциал его резольвенты, представленной в виде $A \otimes_k H(M)$, можно построить следующим образом. Каждый элемент $a \in K_i(M)$ можно единственным образом представить в виде $a = a_j - e_j \wedge \pi_j(a)$, где $a_j, \pi_j(a) \in K(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n; M)$; тогда дифференциал элемента $1 \otimes_k [a] \in A \otimes_k H(M)$ определяется как $D(1 \otimes_k [a]) = \sum_{j=1}^n x_j \otimes_k [\pi_j(a)]$.

ТЕОРЕМА 7.7. Пусть J – слабо I -устойчивый идеал, порожденный в степени d ; тогда минимальная свободная резольвента $A \otimes_k H(A/J)$ модуля A/J над A является подкомплексом в резольвенте $A \otimes_k H(A/J^{st})$ для A/J^{st} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 7.5 пространства $H_i(A/J)$ являются подпространствами в $H_i(A/J^{st})$, поэтому остается доказать, что дифференциал в резольвенте для A/J является ограничением дифференциала резольвенты для A/J^{st} . По следствию 7.4 модули A/J и A/J^{st} имеют линейные резольвенты. Пусть D – дифференциал резольвенты для A/J и D_{st} – дифференциал для A/J^{st} , построенные описанным выше образом.

Пусть $[z] = \sum c_{\tau,u} [u' \otimes e_{\tau}]$ – цикл в $K_i(A/J)$; так как все π_j линейны, то

$$D([z]) = \sum c_{\tau,u} \sum_{j=1}^n x_j \otimes_k [\pi(u' \otimes e_{\tau})] = \sum c_{\tau,u} D_{st}([u' \otimes e_{\tau}]) = D_{st}([z]).$$

Теорема доказана.

Список литературы

1. *Eliahou S., Kervaire M.* Minimal resolutions of some monomial ideals // J. Algebra. 1990. V. 129. P. 1–25.
2. *Bigatti A. M.* Upper bounds for the Betti numbers of a given Hilbert function // Comm. Algebra. 1993. V. 21. P. 2317–2334.
3. *Aramova A., Herzog J., Hibi T.* Squarefree lexsegment ideals // Math. Z. 1998. V. 228. P. 353–378.
4. *Aramova A., Herzog J., Hibi T.* Weakly stable ideals // Osaka J. Math. 1997. V. 34. P. 745–755.
5. *Голод Е. С.* О гомологиях некоторых локальных колец // ДАН СССР. 1962. Т. 144. № 3. С. 479–482.
6. *Avramov L. L.* Infinite Free Resolutions, Six Lectures on Commutative Algebra // Progr. Math. 1998. V. 166. P. 1–118.
7. *Bass H.* On the ubiquity of Gorenstein rings // Math. Z. 1963. V. 82. № 1. P. 8–28.
8. *Aramova A., Herzog J.* Resolutions and Koszul homology // J. Pure Appl. Algebra. 1995. V. 105. P. 1–16.
9. *Aramova A., Herzog J.* Koszul cycles and Eliahou–Kervaire type resolutions // J. Algebra. 1996. V. 181. P. 347–370.

Поступило в редакцию
18.IV.2001