Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Горбацевич, Об изометриях некоторых римановых групп Ли, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2002, том 66, выпуск 4, 27–46

DOI: <https://doi.org/10.4213/im394>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 13:35:57

УДК 519.46

В. В. Горбачевич

Об изометриях некоторых римановых групп Ли

Изучаются группы изометрий групп Ли, снабженных левоинвариантной римановой метрикой. Рассмотрены, в основном, треугольные группы Ли, для которых вычисление групп изометрий левоинвариантных метрик сводится в силу известной теоремы Гордон-Вилсона к вычислению групп автоморфизмов соответствующих алгебр Ли и выделению там компактных подгрупп. Более детально рассмотрены нильпотентные группы Ли, среди которых особое внимание уделено филиформным группам Ли и близким к ним (предфилиформным, квазифилиформным). Большинство основных результатов сформулированы в терминах групп автоморфизмов алгебр Ли, этим результатам затем дается геометрическая интерпретация. Особое внимание уделяется нахождению группы связных компонент групп изометрий (она вычислена, в частности, для произвольных филиформных групп Ли) и условий, при которых для некоторых классов римановых групп Ли группа вращений (т.е. изометрий, сохраняющих заданную точку) конечна.

Библиография: 24 наименования.

Работа посвящена изучению изометрий некоторых групп Ли, снабженных левоинвариантной римановой метрикой. В основном, будут рассматриваться треугольные группы Ли (они всегда разрешимы), особое внимание уделяется изучению изометрий филиформных алгебр Ли (которые всегда нильпотентны) и некоторых их обобщений. Изучение изометрий треугольных алгебр Ли тесно связано с изучением групп автоморфизмов соответствующих алгебр Ли, поэтому многие результаты настоящей работы сформулированы в виде утверждений об автоморфизмах треугольных и других алгебр Ли.

В теореме 1 доказана треугольность алгебры Ли, группа автоморфизмов которой не имеет нетривиальных связных компактных подгрупп. В теореме 2 доказано, что связная компонента единицы группы автоморфизмов предфилиформной алгебры Ли односвязна и треугольна. В теореме 3 доказано, что группа автоморфизмов филиформной алгебры Ли не имеет нетривиальных компактных связных подгрупп и что она имеет только одну, две или четыре связные компоненты, а затем даны геометрические следствия этой теоремы. В теореме 4 отсутствие нетривиальных связных компактных групп автоморфизмов доказано еще для одного класса нильпотентных алгебр Ли – для квазифилиформных алгебр Ли. В теореме 5 доказана ограниченность сверху порядка конечных подгрупп в группах автоморфизмов алгебр Ли. Кроме того, рассмотрен ряд вспомогательных понятий (полусвободные

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 01-01-00709).

нильпотентные алгебра Ли, предфилиформные алгебры Ли) и приведены некоторые связанные с ними примеры.

Римановой группой Ли называется группа Ли G , снабженная левоинвариантной римановой метрикой. Левоинвариантная метрика однозначно определяется своим значением на касательном пространстве $T_e(G)$ в единице группы Ли G . Это значение можно рассматривать как скалярное произведение на алгебре Ли $L(G)$ группы Ли G , с которой естественным образом отождествляется $T_e(G)$.

Групповой геометрией будем называть геометрию на римановой группе Ли. Геометрию можно здесь понимать в смысле Клейна, так как группа $\text{Iso}(G)$ изометрий римановой группы Ли G транзитивно действует на G (ибо на G транзитивна уже подгруппа трансляций, изоморфная группе G и состоящая из всех левых сдвигов). В последнее время большую популярность в математике приобрели *геометрии Терстона*, так называют римановы однородные пространства, которые имеют компактную форму (т.е. являющиеся накрытием некоторого компактного риманова многообразия). Такого рода геометрии классифицированы в размерностях 3 (см., например, [1]) и 4 (см. [2]–[4]). Интересно отметить, что имеется всего восемь трехмерных геометрий Терстона и семь из них являются групповыми геометриями (т.е. изометричны трехмерным группам Ли, снабженным левоинвариантной римановой метрикой). Среди четырехмерных геометрий Терстона тоже большинство составляют групповые геометрии. Среди трехмерных и четырехмерных римановых геометрий Терстона наибольший интерес представляют геометрии на разрешимых группах Ли (отметим, что и геометрия Лобачевского может рассматриваться как геометрия на некоторой римановой разрешимой группе Ли), причем при этом фигурируют только треугольные разрешимые группы Ли.

Причина такой значимости геометрий на треугольных группах Ли была недавно выяснена автором (это будет опубликовано в другой статье). Поэтому не удивительно, что ниже будут рассматриваться группы изометрий для групп Ли, так или иначе связанных с понятием треугольности. На этих группах Ли будут рассматриваться произвольные левоинвариантные римановы метрики. Представляет интерес и рассмотрение некоторых специальных типов римановых метрик, например тех из них, которые имеют максимальную или минимальную подвижность. Группа Ли называется *треугольной* (или *вполне разрешимой*, или *типа (R)*), если все характеристические числа линейных операторов $\text{Ad}(g)$ (где $\text{Ad}: G \rightarrow \text{GL}(L(G))$ – присоединенное представление группы Ли G) вещественны для всех $g \in G$. Алгебра Ли называется *треугольной*, если вещественны все характеристические числа линейных операторов $\text{ad}(X)$ (где $\text{ad}: L(G) \rightarrow \text{gl}(L(G))$ – присоединенное линейное представление алгебры Ли $L(G)$) для всех $X \in L(G)$. Связная группа Ли треугольна тогда и только тогда, когда треугольна ее алгебра Ли. Любая треугольная алгебра Ли разрешима, любая нильпотентная группа Ли треугольна. (Более подробно о свойствах треугольных групп и алгебр Ли см., например, [5].)

Пусть G – некоторая риманова группа Ли. В группе $\text{Iso}(G)$ всех ее изометрий (являющейся, как хорошо известно, группой Ли) содержится замкнутая подгруппа, изоморфная G и состоящая из всех левых сдвигов (ее обычно называют *группой переносов* или *трансляций*). Рассмотрим теперь еще одну подгруппу в $\text{Iso}(G)$ –

стационарную подгруппу единичного элемента $e \in G$, обозначим ее через $\text{Iso}_e(G)$. Ее можно рассматривать как (под)группу вращений (вокруг точки e). Подгруппа вращений $\text{Iso}_e(G)$ является компактной группой Ли, она изоморфна подгруппе в $\text{GL}(L(G))$, так как дифференциал действия $\text{Iso}_e(G)$ на G в точке e является точным линейным представлением. Как легко понять, группа $\text{Iso}(G)$ совпадает с произведением своих подгрупп $\text{Iso}_e(G)$ и G . В общем случае это произведение $\text{Iso}(G) = \text{Iso}_e(G) \cdot G$ не полупрямое, так как не всегда подгруппа G нормальна в $\text{Iso}(G)$, хотя пересечение этих подгрупп, очевидно, является тривиальным: $\text{Iso}_e(G) \cap G = \{e\}$.

Так как метрика на римановой группе Ли однозначно определяется своим значением на касательном пространстве $T_e(G)$ (отождествляемым с алгеброй Ли $L(G)$ группы Ли G), то естественно при изучении римановых групп Ли использовать их инфинитезимальный аналог – римановы алгебры Ли.

Римановой алгеброй Ли (употребляют также ряд других названий, среди которых *метрическая алгебра*, *метризуемая алгебра*, *алгебра Ли со скалярным произведением* и др.) называется пара (L, f) , где L – некоторая конечномерная вещественная алгебра Ли, а f – скалярное произведение на L (часто f в явном виде не указывается).

Группу изометрий римановой алгебры Ли (L, f) (определяемую очевидным образом как группу автоморфизмов алгебры Ли, сохраняющих скалярное произведение, т.е. ортогональных автоморфизмов) обозначают $\text{Iso}(L, f)$, или просто $\text{Iso}(L)$. Имеем равенство

$$\text{Iso}(L, f) = \text{Aut}(L) \cap O(f),$$

где $O(f)$ – ортогональная группа формы f . Отметим, что если G – односвязная группа Ли, отвечающая алгебре Ли L , то $\text{Aut}(L)$ естественным образом изоморфна группе автоморфизмов $\text{Aut}(G)$ группы Ли G . Поэтому $\text{Iso}(L, f)$ можно естественным образом рассматривать как подгруппу в $\text{Aut}(G)$. Далее, для односвязной группы Ли G (а мы в дальнейшем будем рассматривать, в основном, односвязные группы Ли) имеется вложение $\text{Iso}(L(G), f) \hookrightarrow \text{Iso}_e(G)$. А именно, для любого $g \in \text{Aut}(G) \cap O(f)$ действие элемента g на G сохраняет точку e , структуру группы Ли на G и метрику f на касательном пространстве $T_e(G)$. Поэтому это действие сохраняет и левоинвариантную метрику на G , порождаемую скалярным произведением f . Но все это означает, что $g \in \text{Iso}_e(G)$. Так как $\text{Aut}(G)$ отождествляется с $\text{Aut}(L(G))$, то мы получаем требуемое вложение группы $\text{Aut}(G) \cap O(f)$ (изоморфной $\text{Iso}(L(G), f)$) в $\text{Iso}_e(G)$. В общем случае это вложение не является сюръективным.

Например, рассмотрим односвязную двухмерную разрешимую группу Ли R_2 . Эту группу Ли можно рассматривать как связную компоненту единицы в группе $\text{Aff}(\mathbb{R}^1)$ всех аффинных преобразований вещественной прямой $\mathbb{R}^1$. Известно, что при выборе подходящей левоинвариантной римановой на этой группе Ли R_2 она будет изометрична (как риманово многообразие) плоскости Лобачевского Λ^2 . Связная компонента группы $\text{Aut}(L(R_2))$ изоморфна, как нетрудно проверить, самой группе Ли R_2 . С другой стороны, связная компонента группы вращений $\text{Iso}_e(R_2)$

изоморфна, как это сразу видно из изометричности группы Ли R_2 с Λ^2 , группе $SO(2)$. Так как группа Ли R_2 односвязна и разрешима, то она не имеет нетривиальных компактных подгрупп. Поэтому $\text{Aut}(L(R_2)) \cap O(f) = \{e\}$, а так как $\text{Iso}(R_2) \supset SO(2)$, то вложение $\text{Aut}(L(R_2)) \hookrightarrow \text{Iso}_e(R_2)$ не сюръективно (не совпадают ни сами группы Ли, ни даже их связные компоненты).

Имеет место очень важное утверждение о группе изометрий треугольных римановых групп Ли. Речь идет о возможности вычислять группу изометрий таких групп Ли в простых и чисто алгебраических терминах (см. ниже теорему 0). Вначале справедливость этого утверждения проверялась для отдельных, достаточно узких классов римановых групп Ли, а подчас и просто для единичных примеров. Затем было получено доказательство для нильпотентных римановых групп Ли [6]. Потом то же было доказано в [7]. Для произвольных треугольных групп Ли теорема 0 была впервые доказана в [8]. Отметим, что близкие результаты были ранее получены в [9]. Напомним, что группа Ли G называется *унимодулярной*, если $\det(\text{Ad}(g)) = 1$ для любого $g \in G$.

ТЕОРЕМА 0. *Если G – односвязная треугольная унимодулярная риманова группа Ли, то $\text{Aut}(L(G)) \cap O(f) = \text{Iso}_e(G)$. При этом подгруппа сдвигов G нормальна в $\text{Iso}(G)$, и потому $\text{Iso}(G)$ разлагается в полупрямое произведение:*

$$\text{Iso}(G) = (\text{Aut}(L(G)) \cap O(f)) \cdot G.$$

В силу теоремы 0 важную роль в изучении группы $\text{Iso}(G)$ для треугольных групп Ли G играет группа автоморфизмов $\text{Aut}(G)$. При этом группа вращений $\text{Iso}_e(G)$ является компактной подгруппой в $\text{Aut}(G)$.

Может оказаться, что в группе Ли $\text{Aut}(G)$ (где G – из теоремы 0) нет нетривиальных связных компактных подгрупп (см., например, теоремы 2 и 4 ниже). Тогда обязательно связная компонента единицы группы вращений тривиальна:

$$((\text{Iso}_e(G))_0 = \{e\}) \quad \text{и} \quad (\text{Iso}(G))_0 = G.$$

Такие римановы группы Ли можно рассматривать как наименее подвижные, так как с точностью до подгруппы конечного индекса в этом случае группа изометрий (при любой левоинвариантной метрике) исчерпывается группой трансляций, здесь существует только конечное число вращений. Следующее утверждение описывает строение таких групп Ли G .

ТЕОРЕМА 1. *Пусть L – вещественная алгебра Ли. Если группа $\text{Aut}(L)$ ее автоморфизмов не имеет нетривиальных компактных связных подгрупп, то L и $(\text{Aut}(L))_0$ треугольны (в частности, они разрешимы).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G – односвязная группа Ли, отвечающая алгебре Ли L (т.е. $L(G) = L$). Рассмотрим ее разложение Леви $G = S \cdot R$; здесь R – радикал в G , а S – полупростая часть (фактор Леви) в G . Пусть $Z(G)$ – центр группы Ли G . Рассмотрим естественное действие G на себе самой внутренними

автоморфизмами. В частности, действие подгруппы $S \subset G$ порождает подгруппу S^* в $\text{Aut}(G)$, изоморфную $S/S \cap Z(G)$. Группа Ли S^* полупроста и линейна (ибо изоморфна подгруппе в $\text{Aut}(G)$, которую в силу односвязности группы Ли G можно отождествить с линейной группой Ли $\text{Aut}(L)$). Так как по условию теоремы в $\text{Aut}(L)$ нет нетривиальных связных компактных подгрупп, то же верно и для ее подгруппы S^* . Но нетривиальная полупростая линейная группа Ли всегда имеет нетривиальную связную компактную подгруппу (этот факт хорошо известен из общей теории полупростых групп и алгебр Ли; см., например, [5]). Следовательно, группа Ли S^* должна быть тривиальной, а с нею тривиальной будет и группа S . Получаем, что $G = R$, т.е. группа Ли G разрешима.

Рассмотрим теперь присоединенное представление $\text{Ad} : G \rightarrow \text{GL}(L)$. Для образа $\text{Ad}(G)$ этого представления возьмем его алгебраическое замыкание $\langle \text{Ad}(G) \rangle$. Группа Ли $\langle \text{Ad}(G) \rangle$ разрешима и алгебраична, поэтому имеем разложение Шевалле [10] $\langle \text{Ad}(G) \rangle = T \cdot U$, где U – унитарный радикал, а T – тор (абелева алгебраическая подгруппа, состоящая из полупростых, т.е. вполне приводимых, элементов). Так как $\text{Ad}(G) \subset \text{Aut}(L)$, а группа $\text{Aut}(L)$ алгебраична, то $\langle \text{Ad}(G) \rangle$ содержится в $\text{Aut}(L)$.

Для тора T имеем разложение $T = T_s \cdot T_a$, где T_s – расщепимый над $\mathbb{R}$ тор (он будет изоморфен $(\mathbb{R}^*)^k$, где $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$), а T_a – анизотропный тор (его связная компонента единицы изоморфна $\text{SO}(2)^l$ при некотором $l \in \mathbb{N}$ (см., например, [10])). Так как тор T содержится в $\text{Aut}(L)$, то и T_a там содержится. Но по условию доказываемой нами теоремы в $\text{Aut}(L)$ нет нетривиальных компактных связных подгрупп. Поэтому должно быть $(T_a)_0 = \{e\}$, а потому $(\langle \text{Ad}(G) \rangle)_0 = (T_s)_0 \cdot U$ треугольна. Так как $\ker(\text{Ad}) = Z(G)$, то и группа Ли G (и ее алгебра Ли L) будет треугольна.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В [9] со ссылкой на [11] отмечается, что любая связная линейная алгебраическая группа, не имеющая нетривиальных связных компактных подгрупп, обязательно будет треугольной. Это утверждение можно применить к группе $\text{Aut}(L)$ из теоремы 1 и получить промежуточный результат из доказательства этой теоремы, но мы предпочли привести полное прямое доказательство и этого промежуточного результата.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В [12] доказано, что если группа Ли G изоморфна связной компоненте единицы группы вещественных точек некоторой разрешимой алгебраической группы и является при этом односвязной (откуда, как известно, следует, что в G нет нетривиальных компактных подгрупп), то G – группа Ли типа (E) (так называются группы Ли, для которых экспоненциальное отображение $\exp : L(G) \rightarrow G$ для односвязной G является диффеоморфизмом; более подробно о таких группах Ли см., например, [5]). Однако в этом случае можно такими же рассуждениями, как и при доказательстве теоремы 1, доказать, что на самом деле G будет даже треугольна (любая треугольная группа Ли экспоненциальна, а вот обратное утверждение в общем случае неверно).

ПРИМЕР 1. Рассмотрим алгебру Ли $L = t_n(\mathbb{R})$, состоящую из вещественных верхнетреугольных матриц, и соответствующую ей связную и односвязную группу Ли $T_n^+(\mathbb{R}) = (T_n(\mathbb{R}))_0$, состоящую из вещественных верхнетреугольных матриц

с положительными диагональными элементами. Эти алгебра и группа Ли треугольны, но не являются унимодулярными (при $n > 1$). Поэтому рассмотрим их унимодулярные ядра. Для группового случая получим группу $G = \text{SUT}_n^+(\mathbb{R})$, образованную теми матрицами из $T_n^+(\mathbb{R})$, для которых $\prod_{i=1}^n a_{ii}^{2i-n-1} = 1$. Нетрудно проверить (используя [13]), что алгебра дифференцирований алгебры Ли $\text{sut}_n(\mathbb{R})$ изоморфна $t_n(\mathbb{R})$ (при $n > 1$). Отсюда следует, что $(\text{Aut}(G))_0 = T_n^+(\mathbb{R})$ (нетрудно вычислить и саму группу $\text{Aut}(G)$). Поэтому группа Ли $\text{Aut}(G)$ имеет односвязную разрешимую компоненту единицы, откуда следует, что эта группа Ли не имеет нетривиальных связных компактных подгрупп. Все эти факты полностью согласуются с теоремой 1.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим теперь группы Ли, аналогичные описанным в примере 1, но только в комплексном, а не в вещественном случае. Группа Ли $G = \text{SUT}_n(\mathbb{C})$, определенная должным образом, тоже унимодулярна, но не треугольна. При этом и она, и ее группа автоморфизмов имеют нетривиальные компактные связные подгруппы (хотя все они абелевы). Для $\text{Aut}(G)$ это следует из того, что ее связная компонента единицы изоморфна $T_n(\mathbb{C})$.

ПРИМЕР 3. Если рассматривать группы Ли треугольных матриц над телом кватернионов $\mathbb{H}$, то ситуация аналогична комплексному случаю: соответствующая группа Ли $\text{SUT}_n(\mathbb{H})$ не треугольна, в ней и в ее группе автоморфизмов имеются нетривиальные связные, компактные подгруппы (причем даже неабелевы, в отличие от комплексного случая).

После рассмотрения одного специального случая свойств римановых групп и алгебр Ли – тривиальности связной группы вращений – рассмотрим другой специальный случай – сверхподвижность, когда группа вращений очень велика. Известно понятие максимально подвижной метрики на римановом пространстве (см. [14]). Однако здесь мы рассмотрим несколько другое понятие.

Если L – абелева риманова алгебра Ли, то $\text{Iso}(L, f) \supset O(f) = O(n)$, где $n = \dim L$. Риманову алгебру Ли (L, f) назовем *сверхподвижной* (и метрику на ней – тоже *сверхподвижной*), если $\text{Iso}(L, f) \supset O(f)$. Это условие эквивалентно, как нетрудно понять, включению $\text{Aut}(L) \supset O(f)$. Существование на алгебре Ли L некоторой сверхподвижной метрики эквивалентно любому из следующих двух условий:

- i) максимальная компактная подгруппа в $\text{Aut}(L)$ содержит ортогональную группу $O(f)$ для некоторого скалярного произведения f на L ;
- ii) для максимальной компактной подгруппы K в $\text{Aut}(L)$ выполняется неравенство $\dim K \geq n(n-1)/2$, где $n = \dim L$ (на самом деле в этом случае имеет место равенство).

Отметим, что существуют и неабелевы алгебры Ли, которые имеют сверхподвижную метрику. Такова, например, ортогональная алгебра $\mathfrak{so}(3)$. Покажем, что этим примеры сверхподвижных алгебр Ли исчерпываются.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть L – конечномерная вещественная алгебра Ли, которая имеет некоторую сверхподвижную метрику. Тогда L абелева или

изоморфна $\mathfrak{so}(3)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что алгебра Ли L имеет хотя бы один нетривиальный характеристический идеал H . Положим $k = \dim H$. Имеем $0 < k < n = \dim L$. Пусть K – максимальная компактная подгруппа в группе автоморфизмов $\text{Aut}(L)$. Тогда подпространство H инвариантно относительно K . Так как K компактна, то существует некоторое дополнительное к H подпространство H' , инвариантное относительно K . Выбрав в H и H' подходящие базисы, можно рассматривать K как подгруппу в $O(k) \times O(n - k)$. Сравнивая размерности, убеждаемся в том, что K не может содержать (как это должно быть в силу условия предложения) подгруппу, изоморфную $O(n)$. Следовательно, L не имеет нетривиальных характеристических идеалов.

Пусть $L = S + R$ – разложение Леви алгебры Ли L (R – радикал в L , а S – полупростая часть алгебры Ли L). Если $R \neq \{0\}$, то R – характеристический идеал в L и в силу сказанного выше он должен совпадать с L , т.е. алгебра Ли $L = R$ должна быть разрешима. Рассмотрим для нее коммутант $[L, L]$, он тоже является характеристическим идеалом, причем в силу разрешимости алгебры Ли L он отличен от L . Но тогда опять на основе сказанного выше получаем, что этот коммутант должен быть равен $\{0\}$, т.е. алгебра Ли L должна быть абелева. Итак, если L имеет ненулевой радикал, то она должна быть абелева.

Остается рассмотреть случай, когда радикал алгебры Ли L нулевой, т.е. она полупроста. В этом случае алгебра Ли группы автоморфизмов $\text{Aut}(L)$ изоморфна, как известно, самой алгебре Ли L . Из условия предложения следует, что $\dim K \geq n(n - 1)/2$, где K – максимальная компактная подгруппа в $\text{Aut}(L)$, а $n = \dim L$. Но тогда мы приходим к неравенству $n \geq n(n - 1)/2$, которое возможно только при $n = 1, 2, 3$. Однако в размерностях $n = 1, 2$ не существует полупростых алгебр Ли, а в размерности 3 их только две: это (с точностью до изоморфизма) алгебры Ли $\mathfrak{so}(3)$ и $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Для $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ имеем $K = \text{SO}(2)$, и приведенное выше неравенство для нее не выполняется. Поэтому остается только $\mathfrak{so}(3)$.

Рассмотрим теперь некоторые возможные обобщения предложения 1 в одном специальном случае – для нильпотентных алгебр Ли. Пусть L – произвольная конечномерная вещественная нильпотентная алгебра Ли. Если K – некоторая компактная группа автоморфизмов алгебры Ли L , то действие K на L вполне приводимо. В частности, так как $[L, L]$ инвариантно относительно K , то это подпространство имеет инвариантное дополнение, которое можно отождествить (как векторное пространство) с абелевой алгеброй $L_{\text{ab}} = L/[L, L]$, называемой *абелианизацией* алгебры Ли L . В результате получим гомоморфизм $\phi: K \rightarrow \text{GL}(L_{\text{ab}})$. Для нильпотентной алгебры Ли известно (см., например, [15]), что автоморфизм, индуцирующий тривиальное действие на L_{ab} , будет обязательно унитарным. Отсюда получаем, что если некоторый элемент из K действует тривиально на $[L, L]$, то он сам тривиален. Другими словами, линейное представление ϕ является точным, и потому K можно рассматривать как подгруппу в $\text{GL}(L_{\text{ab}})$.

Положим $b_1 = \dim L_{\text{ab}}$, это число называется *первым числом Бетти* для L

(оно равно размерности первой группы гомологий алгебры Ли L с тривиальными коэффициентами), для нильпотентных алгебр Ли $b_1 \geq 2$. Из сказанного выше следует, что $\dim K \leq b_1(b_1 - 1)/2$, так как компактная подгруппа $K \subset \mathrm{GL}(L_{\mathrm{ab}})$ содержится в некоторой максимальной компактной подгруппе группы Ли $\mathrm{GL}(L_{\mathrm{ab}})$, изоморфной, конечно, ортогональной группе $O(b_1)$. В результате получаем неравенство $\dim K \leq b_1(b_1 - 1)/2$ для любой компактной группы K автоморфизмов нильпотентной алгебры Ли L . В частности, это неравенство верно и для максимальной компактной подгруппы в группе автоморфизмов.

В некоторых случаях в доказанном выше неравенстве, на самом деле, имеет место знак равенства (ясно, что это может быть только в случае, когда K – максимальная компактная подгруппа в $\mathrm{Aut}(L)$ или, по крайней мере, имеет с нею одинаковую связную компоненту единицы). Например, равенство достигается в случае, если L – свободная нильпотентная алгебра Ли. Свободную нильпотентную алгебру Ли класса нильпотентности l с k образующими будем обозначать $\mathrm{FN}_l(k)$ (или просто FN_l , если число образующих, равное, кстати, числу Бетти b_1 , для нас не очень существенно). Например, при $l = 1$ имеем абелевы алгебры Ли, с которыми тесно связано предложение 1. Поскольку алгебра Ли $L = \mathrm{FN}_l$ свободна, в ее группе автоморфизмов содержится в виде подгруппы группа $\mathrm{GL}(L_{\mathrm{ab}})$. Поэтому в $\mathrm{Aut}(L)$ в этом случае содержится и алгебра Ли $O(b_1)$. Но это означает, что в рассматриваемом случае указанное выше неравенство превращается в равенство.

В качестве некоторого аналога предложения 1 можно было бы предположить, что равенство $\dim K = b_1(b_1 - 1)/2$ (или, что эквивалентно, наличие включения $\mathrm{Aut}(L) \supset O(b_1)$) для максимальной компактной подгруппы K автоморфизмов нильпотентной алгебры Ли L с первым числом Бетти $b_1(L)$ возможно, только если L – свободная нильпотентная алгебра Ли. Однако оказывается, что это не так и существуют несвободные нильпотентные алгебры Ли, группа автоморфизмов которых содержит $O(b_1)$.

ПРИМЕР 4. Рассмотрим свободную нильпотентную алгебру Ли $\mathrm{FN}_2(2)$ класса нильпотентности l с двумя образующими. Пусть X, Y – свободные образующие этой алгебры Ли. Наша алгебра Ли разлагается в прямую сумму подпространств V_n , натянутых на кратные коммутаторы длины n (т.е. содержащие n аргументов) от образующих X, Y : $\mathrm{FN}_2(2) = \bigoplus V_n$. Имеем

$$\begin{aligned} V_1 &= \langle X, Y \rangle, \\ V_2 &= \langle [X, Y] \rangle, \\ V_3 &= \langle [[X, Y], X], [[X, Y], Y] \rangle, \\ V_4 &= \langle [[[X, Y], Y], Y], [[[X, Y], Y], X], [[[X, Y], X], X] \rangle, \\ V_5 &= \langle [[[[X, Y], Y], Y], Y], [[[[X, Y], Y], Y], X], [[[[X, Y], Y], X], X], \\ &\quad [[[[X, Y], X], X], X], [[[X, Y], Y], [X, Y]], [[[X, Y], X], [X, Y]] \rangle. \end{aligned}$$

Естественное действие группы $\mathrm{GL}(V_1) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ на пространстве V_1 продолжается до действия автоморфизмами на всю алгебру $\mathrm{FN}_2(2)$ (так как эта алгебра

Ли свободная нильпотентная). При этом подпространства V_n инвариантны, потому на них индуцируются линейные представления группы Ли $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. На V_1 получаем стандартное (тавтологическое) двумерное представление, на одномерном V_2 получим, конечно, тривиальное (тождественное) представление. На V_3 получим тоже стандартное представление. На V_4 представление будет, как легко убедиться, неприводимым, а потому оно изоморфно присоединенному представлению группы $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. Что касается представления на V_5 , то оно будет приводимо. Точнее, имеем разложение $V_5 = U \oplus W$, где U, W – инвариантные подпространства, натянутые соответственно на первые четыре и последние два из указанных выше коммутаторов, линейно порождающих V_5 . Непосредственно проверяется, что представления $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ на U и W неприводимы.

Для построения конкретного примера положим, что класс нильпотентности l равен 5. Тогда подпространство V_5 совпадает с центром алгебры Ли FN_5 . Поэтому подпространство $W \subset V_5$ является идеалом в FN_5 . Положим $L = \mathrm{FN}_5 / W$, получим нильпотентную алгебру Ли L класса нильпотентности 5. Из конструкции алгебры Ли L видно, что ее группа автоморфизмов содержит подгруппу, изоморфную $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. Отсюда вытекает, что максимальная компактная подгруппа K в $\mathrm{Aut}(L)$ содержит ортогональную группу $O(b_1) = O(2)$. Ясно, что алгебра Ли L не является свободной. В результате мы получили требуемый пример несвободной алгебры Ли, для которой выполняется равенство $\dim K = b_1(b_1 - 1)/2$.

В связи с приведенными выше рассуждениями полезно ввести следующее понятие. Нильпотентную алгебру Ли L будем называть *полусвободной*, если имеется вложение группы $\mathrm{GL}(L_{\mathrm{ab}})$ в $\mathrm{Aut}(L)$. Это означает, что произвольное невырожденное линейное преобразование образующих этой нильпотентной алгебры Ли (кстати, образующие здесь – это в точности максимальное множество элементов, линейно независимых по модулю $[L, L]$) может быть продолжено до автоморфизма всей алгебры Ли. Выше речь шла о вещественных алгебрах Ли, но аналогичное понятие можно ввести и в комплексном случае.

Интересно отметить, что если нильпотентная алгебра Ли L такова, что для нее $\mathrm{Aut}(L) \supset O(b_1)$, то комплексификация этой алгебры Ли очень близка к полусвободной (как комплексная алгебра Ли).

Продолжим рассмотрение компактных подгрупп в группах изометрий римановых групп Ли и в группах автоморфизмов соответствующих алгебр Ли. Пусть K – некоторая связная компактная группа Ли. Естественно спросить, когда такая K может быть реализована в виде $(\mathrm{Iso}_e(G))_0$, т.е. в виде связной компоненты единицы группы вращений некоторой римановой группы Ли G (скажем, нильпотентной или разрешимых или принадлежащей какому-либо другому классу алгебр Ли)?

Ясно, что реализуема группа $\mathrm{SO}(n)$ (достаточно взять $L = \mathbb{R}^n$). Реализуемость тривиальной группы $\{e\}$ уже вызывает некоторые, хотя и небольшие, проблемы. Например, среди разрешимых групп Ли существуют такие (в частности, группа $T_n^+(\mathbb{R})$ – см. выше), для которых связная группа вращений тривиальна. Для нильпотентных групп Ли примеры такого рода приведены ниже (речь идет о

филиформных алгебрах Ли и их обобщениях). В работе [16] доказано, что для любой связной компактной группы Ли K существует локально изоморфная ей группа Ли K' , которая может быть реализована в виде $(\text{Iso}_e(G))_0$ для некоторой односвязной нильпотентной римановой группы Ли G . В другой работе [17] того же автора доказано и существование разрешимой ненильпотентной группы Ли R с таким же свойством. Однако вместо отдельного рассмотрения случая ненильпотентных разрешимых групп Ли, проведенного в [17], можно было бы применить следующий прием. Пусть для заданной K имеется нильпотентная группа Ли N , для которой $K' = (\text{Iso}_e(N))_0$. Положим $R = N \times \text{Sol}$, где Sol – односвязная разрешимая трехмерная группа Ли, фигурирующая в списке трехмерных геометрий Терстона (см. [1]). Как нетрудно доказать, максимальные компактные связные подгруппы групп $\text{Iso}(R)$ и $\text{Iso}(N)$ между собой изоморфны. Поэтому R – искомая ненильпотентная разрешимая группа Ли.

Задача реализуемости произвольных компактных связных групп Ли в виде $(\text{Iso}_e(G))_0$ в целом (а не локально, с точностью до локального изоморфизма) фактически решена в работе [18] (нужное утверждение может быть выведено из основного результата указанной работы, доказанного весьма сложно).

Переходим ко второй основной теме данной работы: к исследованию строения групп изометрий и автоморфизмов для некоторых важных классов нильпотентных групп (и алгебр) Ли. Вначале речь пойдет о классе филиформных алгебр Ли. Напомним соответствующее определение. Алгебра Ли L размерности n называется *филиформной* (от французского *filiforme* – нитевидный), если ее класс нильпотентности равен $n - 2$. Так как класс нильпотентности n -мерной нильпотентной алгебры Ли не может быть больше, чем $n - 2$, то филиформные алгебры Ли – это “самые сложные” из нильпотентных алгебр Ли данной размерности, они имеют самый большой класс нильпотентности. Филиформные алгебры Ли можно охарактеризовать и в более явных терминах. Для произвольной алгебры Ли L через $C^i(L)$ обозначим члены верхнего центрального ряда: $C^0(L) = L$, $C^1(L) = [L, L]$, $C^2(L) = [C^1(L), L]$, $\dots$. Положим также $d_i = \dim C^i(L)/C^{i+1}(L)$. Тогда алгебра Ли L филиформна, если и только если $d_0 = 2$, а $d_i = 1$ при $i = 1, 2, \dots, n - 1$, где $n = \dim L$.

Класс филиформных алгебр Ли был введен и исследован в [19]. Недавно Ю. Хакимджанов сообщил автору, что намного раньше такого рода алгебры изучались в работе [20] (там было введено фундаментальное понятие адаптированного базиса и доказаны некоторые свойства филиформных алгебр Ли, хотя сам термин “филиформные” появился только в работе [21]). Более подробно о филиформных алгебрах см. обзор [5].

В дальнейшем будем рассматривать не только филиформные алгебры Ли, но и один более широкий класс нильпотентных алгебр Ли. Алгебру Ли L назовем *предфилиформной*, если для нее $d_0 = 2$ (т.е. L имеет две образующие) и $d_2 = 1$ (на $d_1, d_3, d_4, \dots$ не накладывается никаких условий). Ясно, что предфилиформной будет любая филиформная алгебра Ли (ибо условие предфилиформности заметно слабее условия филиформности), за исключением алгебры Ли N_3 (трехмерной нильпотентной алгебры Ли, состоящей из всех унитарных матриц третьего

порядка), для которой $d_2 = 0$. Далее, алгебру Ли L будем называть *предфилиформной* *градуса* k , если для нее $d_0 = 2$ и $d_{2k} = 1$. Тем самым введенные выше предфилиформные алгебры Ли имеют градус $k = 1$ (в этом случае градус предфилиформности мы не будем указывать, сохраняя тут термин “предфилиформные”). Покажем на примере, что даже при $k = 1$ класс предфилиформных алгебр Ли строже класса филиформных алгебр Ли (то же верно и для любого другого k).

ПРИМЕР 5. Предфилиформные алгебры Ли можно выделить среди нильпотентных алгебр Ли малой размерности (для которых имеется классификация). Из классификации нильпотентных вещественных алгебр Ли, размерность которых не превосходит шести (см., например, список в [5]), вытекает, что любая предфилиформная алгебра Ли является филиформной. Филиформными будут одна трехмерная, одна четырехмерная, две пятимерных алгебр Ли и пять шестимерных нильпотентных вещественных алгебр Ли. Для размерности 7 опубликовано несколько классификаций нильпотентных алгебр Ли (причем только комплексных), во многих из них имеются неточности. Поэтому выделение всех семимерных предфилиформных алгебр Ли сейчас можно произвести лишь с точностью до ошибок в указанных классификациях.

Одной из важных характеристик нильпотентных алгебр Ли является набор $c_0, c_1, c_2, \dots$ размерностей членов центрального ряда $c_i = \dim C^i(L)$ (начиная с некоторого номера, эти размерности становятся равными нулю, и тогда они уже не выписываются). Для любой нильпотентной алгебры Ли эта последовательность является строго убывающей. Филиформная алгебра Ли характеризуется тем, что указанная последовательность для нее имеет вид $n, n-2, n-3, \dots, 2, 1$ (где n – размерность рассматриваемой алгебры Ли). Для предфилиформных алгебр Ли градуса 1 эта последовательность размерностей должна иметь вид $n, n-2, m, m-1, *, \dots, *$, где символы $*$ обозначают размерности, величина которых не важна, а m – любое число не больше $n-3$. Предфилиформными, но не филиформными, будут, например, те семимерные нильпотентные алгебры Ли, для которых указанная последовательность имеет вид $(7, 5, 4, 3, 2)$. Такой будет алгебра Ли, задаваемая следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} [X_1, X_2] &= X_4, & [X_1, X_3] &= X_5, & [X_1, X_4] &= X_3, & [X_1, X_5] &= X_7, \\ [X_2, X_3] &= X_7, & [X_2, X_4] &= X_5, & [X_2, X_5] &= X_6, & [X_3, X_4] &= X_6. \end{aligned}$$

Интересно отметить, что это один из немногих примеров семимерных предфилиформных, но не филиформных алгебр Ли (в комплексном случае существует всего три такие алгебры Ли).

В работе [21] доказано, что для филиформных алгебр Ли L в группах их автоморфизмов $\text{Aut}(L)$ нет нетривиальных связных компактных подгрупп. Фактически в [21] речь шла об ортогональных дифференцированиях алгебр Ли, но нам удобнее говорить на параллельном групповом языке. Полезно отметить, что на самом деле доказательство, приведенное в [21], применимо для всех предфилиформных алгебр Ли градуса 1. Докажем уточнение и обобщение этой теоремы из [21].

ТЕОРЕМА 2. Пусть L – предфилиформная алгебра Ли некоторого градуса $k \geq 1$. Тогда группа $(\text{Aut}(L))_0$ односвязна и треугольна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть K – некоторая максимальная связная компактная подгруппа в $\text{Aut}(L)$ (она будет максимальной компактной подгруппой в $(\text{Aut}(L))_0$). Действие K на L вполне приводимо. Через V обозначим инвариантное дополнение к $C^1(L) = [L, L]$. Из условия теоремы вытекает, что $\dim V = 2$.

Предположим вначале, что L предфилиформна градуса 1 (случай произвольного градуса разбирается аналогично, об этом будет сказано ниже). Пусть X, Y – базис в V . Действие K на V задает некоторую связную подгруппу K' в $\text{SO}(2)$ – максимальной компактной подгруппе группы Ли $\text{GL}(V)$. Поэтому K' изоморфна $\{e\}$ или $\text{SO}(2)$.

Если $K' = \{e\}$, то действие K' на V тривиально, а потому будет тривиально и действие K на всей нильпотентной алгебре Ли L (подробнее это уже объяснялось выше). Следовательно, в этом случае $K = \{e\}$.

Предположим теперь, что действие K на V нетривиально, тогда оно совпадает с действием всей группы $\text{SO}(2)$. Но тогда существует такой элемент $g_0 \in K$, действие которого на V в базисе X, Y задается матрицей $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Этот автоморфизм переводит X в $-X$, а Y в $-Y$. Рассмотрим коммутаторы $[[X, Y], X]$, $[[X, Y], Y]$, они порождают пространство $C^2(L)/C^3(L)$, которое в силу предфилиформности алгебры Ли L одномерно. Действие K на одномерном векторном пространстве обязательно тривиально. С другой стороны, под действием автоморфизма g_0 элемент $[[X, Y], X]$ будет переходить в $-[[X, Y], X]$, а $[[X, Y], Y]$ перейдет в $-[[X, Y], Y]$, и потому действие g_0 на $C^2(L)/C^3(L)$ нетривиально. Полученное противоречие показывает, что предположение о существовании подгруппы K с нетривиальным действием на L неверно. Тем самым мы доказали, что $\text{Aut}(L)$ не имеет нетривиальных связных компактных подгрупп. В силу теоремы 1 получаем, что $(\text{Aut}(L))_0$ треугольна. Отсутствие у $(\text{Aut}(L))_0$ нетривиальных связных компактных подгрупп влечет за собой односвязность этой группы Ли.

Для произвольного градуса предфилиформности k утверждение теоремы 2 доказывается аналогично. А именно, если $d_{2k} = 1$, то $C^{2k}(L)/C^{2k+1}(L)$ одномерно и действие компактной связной группы Ли тривиально. Однако автоморфизм g_0 на $C^{2k}(L)/C^{2k+1}(L)$ индуцирует, как и выше, умножение на -1 . Полученное противоречие показывает, что и здесь K тривиальна. Далее рассуждаем так же, как и в случае $k = 1$.

СЛЕДСТВИЕ 1 (ср. [21]). Если G – односвязная филиформная риманова группа Ли, то либо ее алгебра Ли L изоморфна трехмерной нильпотентной алгебре Ли $N_2(\mathbb{R})$, либо группа $\text{Iso}_e(G)$ конечна, а $(\text{Iso}(G))_0$ треугольна и односвязна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $d_2 = 1$, то для доказательства достаточно применить теоремы 0 и 2. Равенство же $d_2 = 0$ возможно, только если $L = N_3(\mathbb{R})$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если G – предфилиформная риманова группа Ли, то группа $\text{Iso}_e(G)$ конечна.

Следующая теорема отвечает на естественный вопрос, который возникает в связи с геометрическими следствиями 1 и 2: если группа $\text{Iso}(G)$ конечна, то каково может быть число ее элементов и нельзя ли описать все эти конечные группы?

ТЕОРЕМА 3. *Пусть L – филиформная алгебра Ли. Тогда группа $\pi_0(\text{Aut}(L))$ связных компонент ее группы автоморфизмов изоморфна $\{e\}$, $\mathbb{Z}_2$ или $(\mathbb{Z}_2)^2 = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 2 группа $(\text{Aut}(L))_0$ не имеет нетривиальных компактных подгрупп. В алгебраической группе $\text{Aut}(L)$ (она не обязательно связна, но имеет только конечное число связных компонент) существуют максимальные компактные подгруппы. В силу сказанного выше они конечны. Пусть K – одна из них.

Рассмотрим действие K на алгебру Ли L . Положим $W = L_{\text{аб}}$, тогда K можно рассматривать (рассуждение такого рода приводилось выше при доказательстве теоремы 2) как подгруппу в $O(W) = O(2)$. Действие элементов из $K \cap \text{SO}(2)$ можно записывать в виде вращений

$$X \rightarrow X \cos \alpha + Y \sin \alpha, \quad Y \rightarrow -X \sin \alpha + Y \cos \alpha,$$

где $\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Тогда коммутатор $[X, Y]$ переходит в $[X, Y]$, $[[X, Y], X]$ – в $[[X, Y], X] \cos \alpha + [[X, Y], Y] \sin \alpha$, а $[[X, Y], Y]$ в $-[[X, Y], X] \sin \alpha + [[X, Y], Y] \cos \alpha$. По условию $C^2(L)/C^3(L) = \mathbb{R}$, поэтому индуцированное действие K на $C^2(L)/C^3(L)$ описывается подгруппой в $O(1) = \mathbb{Z}_2$. С другой стороны, рассмотрим подпространство U в $[L, L]$, натянутое на $[[X, Y], X]$ и $[[X, Y], Y]$, оно может быть одномерно или двумерно. Как показано выше, действие на нем тоже представляет собой “вращение” на угол α . Если указанное подпространство двумерно, это действительно вращение плоскости, в одномерном же случае оно превращается в некоторое линейное преобразование прямой.

Предположим вначале, что $\dim U = 2$. Так как по условию $\dim C^2/C^3 = 1$, а $U \subset C^2(L)$, то должно быть $\dim(U \cap C^3(L)) = 1$. Тем самым в U должно существовать K -инвариантное одномерное подпространство. Но вращение плоскости имеет инвариантное одномерное подпространство, только если $\alpha = 0$ или $\alpha = \pi$. Поэтому в этом случае $K \cap \text{SO}(2) \subset \mathbb{Z}_2$.

Пусть теперь U одномерно. Тогда элементы $a = [[X, Y], X]$ и $b = [[X, Y], Y]$ должны быть линейно зависимы, т.е. $a = \lambda b$ при некотором $\lambda \in \mathbb{R}$ (мы считаем, что $b \neq 0$). Применим к этому равенству вращение из группы $K \cap \text{SO}(2)$ на угол α . Получим равенство

$$a \cos \alpha + b \sin \alpha = \lambda(-a \sin \alpha + b \cos \alpha).$$

Подставив сюда соотношение $a = \lambda b$ и приравняв справа и слева коэффициенты при b , получим соотношение $(\lambda^2 + 1) \sin \alpha = 0$, откуда $\alpha = 0, \pi$. Поэтому, как и в предыдущем случае, получаем, что $K \cap \text{SO}(2) \subset \mathbb{Z}_2$. Так как индекс подгруппы

$SO(2)$ в $O(2)$ равен 2, то получаем, что порядок группы K должен делить 4. Покажем, что группа $\mathbb{Z}_4$ здесь не может появиться. Пусть A – ее образующая. Из описания всех конечных подгрупп в $O(2)$ легко следует, что тогда A подобна матрице вида $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. В подходящем базисе X, Y действие A имеет вид $X \rightarrow -Y, Y \rightarrow X$. Но тогда $[X, Y]$ переходит в себя, $[[X, Y], X]$ в $-[[X, Y], Y]$, а $[[X, Y], Y]$ в $[[X, Y], X]$. Отсюда следует, что на подпространстве U (см. выше) нет одномерных инвариантных подпространств, а потому, как и выше, приходим к противоречию. Поэтому K должна быть изоморфна $\{e\}, \mathbb{Z}_2$ или $(\mathbb{Z}_2)^2$.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Конечная нетривиальная группа автоморфизмов филиформной алгебры Ли изоморфна $\mathbb{Z}_2$ или $(\mathbb{Z}_2)^2$.*

СЛЕДСТВИЕ 4. *Конечная нетривиальная группа изометрий филиформной римановой группы Ли изоморфна $\mathbb{Z}_2$ или $(\mathbb{Z}_2)^2$.*

Для односвязной филиформной группы Ли G это утверждение непосредственно вытекает из теоремы 3. Если же G не односвязна, то ее группа изометрий в рассматриваемом случае вкладывается в качестве подгруппы конечного индекса в группу изометрий ее универсальной накрывающей. Подгруппа любой из конечных групп, указанных в данном следствии, тоже является группой того же вида, что и доказывает это следствие для не односвязных G .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В следствиях 3 и 4 действие группы $\mathbb{Z}_2$ на L_{ab} задается в подходящем базисе одной из следующих двух матриц (в зависимости от того, сохраняет или не сохраняет это действие ориентацию):

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Многие результаты о группах изометрий, сформулированные для односвязных групп Ли, можно без особого труда переносить на произвольные связные группы Ли (как это сделано выше, при доказательстве следствия 4).

Рассмотрим теперь еще один класс нильпотентных алгебр (и групп) Ли. Нильпотентная алгебра Ли называется *квазифилиформной*, если для нее $d_i = 1$ при всех $i \geq 1$, а $d_0 = 3$ (напомним, что для филиформных алгебр Ли обязательно $d_0 = 2$). Следующая теорема во многом аналогична результатам, полученным выше для предфилиформных (и, в частности, филиформных) алгебр Ли. Тем самым мы получаем еще один класс нильпотентных алгебр Ли, для которых группа вращений любой римановой метрики конечна.

Рассмотрим одно семейство квазифилиформных алгебр Ли. Пусть D_n – алгебра Ли, задаваемая в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$ коммутационными соотношениями

$$[e_1, e_2] = e_4, \quad [e_k, e_3] = e_{k+1}, \quad k = 4, 5, \dots, n-1.$$

При $n = 3$ получаем абелеву алгебру Ли, а D_4 изоморфна $N_3(\mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}$. Как нетрудно проверить, любое ортогональное вращение элементов e_1, e_2 порождает автоморфизм алгебры Ли D_n . При $n \geq 4$ все такие вращения дают максимальную связную компактную подгруппу в $\text{Aut}(D_n)$ (изоморфную $SO(2)$), а при $n = 3$ этой подгруппой будет $SO(3)$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть L – квазифилиформная алгебра Ли. Тогда любая компактная подгруппа в $\text{Aut}(L)$ конечна или же L изоморфна алгебре Ли D_n , где $n = \dim L$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Попробуем доказать, что в $\text{Aut}(L)$ нет нетривиальных связных компактных подгрупп. Если это не так, то в $\text{Aut}(L)$ имеется подгруппа K , изоморфная $\text{SO}(2)$. Действие K на L вполне приводимо. На факторах C^i/C^{i+1} при $i = 1, 2, \dots$ в силу их одномерности действие связной группы Ли K тривиально. В силу полной приводимости действия K из этой тривиальности на факторах следует тривиальность действия K на всем $[L, L]$. Пусть V – это K -инвариантное дополнение к $[L, L]$. Рассмотрим подробнее действие K на V .

Если это действие тривиально, то и сама группа K должна быть тривиальна (так как она в силу нильпотентности алгебры Ли L может рассматриваться как подгруппа в $\text{GL}(V)$). Если же оно нетривиально, то трехмерное пространство V разлагается в прямую сумму двух K -инвариантных подпространств $V_1 \oplus V_2$, здесь V_1 одномерно и действие K на нем тривиально, а V_2 двумерно и K действует на нем обыкновенными вращениями. Тогда имеется такой элемент $g \in K$, действие которого в подходящих базисах e_1, e_2 в V_2 и e_3 в V_1 соответственно записывается в виде

$$e_1 \rightarrow -e_1, \quad e_2 \rightarrow -e_2, \quad e_3 \rightarrow e_3.$$

Элементы e_1, e_2, e_3 являются образующими алгебры Ли L . На их коммутаторы всевозможного вида натягивается $[L, L]$. Мы рассмотрим действие элемента g на эти коммутаторы. Для этого заметим, что на самом деле $[L, L]$ натянуто на всевозможные “левосторонние” коммутаторы

$$[[\dots [e_{i_1}, e_{i_2}], e_{i_3}], \dots, e_{i_k}].$$

Дело в том, что любые другие коммутаторы можно с помощью тождества Якоби преобразовать к указанному “левостороннему” виду. Например,

$$[[e_1, e_2], [e_3, E]] = [[[e_1, e_2], e_3], E] + [e_3, [[e_1, e_2], E]],$$

где E – некоторый элемент (который тоже может быть коммутатором некоторого порядка, и тогда процедуру приведения к указанному выше виду нужно продолжить). Рассмотрим разложение $[L, L] = U_0 \oplus U_1$ в прямую сумму двух подпространств, составленных соответственно из “левосторонних” коммутаторов, в которые элементы e_1, e_2 входят четное или нечетное число раз.

Ясно, что на U_0 действие элемента g тривиально, а на U_1 оно дает умножение на -1 . Но так как действие $g \in K$ на $[L, L]$ тривиально (см. выше), то должно быть $U_1 = \{0\}$.

Из трех коммутаторов длины 1: $[e_1, e_2], [e_1, e_3], [e_2, e_3]$ – только первый принадлежит U_0 , поэтому остальные два должны быть равны нулю. Так как по условию $d_1 = \dim C^1(L)/C^2(L) = 1$, то $[e_1, e_2]$ дает образующую в $C^1(L)/C^2(L)$. Далее

рассмотрим коммутаторы длины 3. Среди “левосторонних” коммутаторов (а в силу сказанного выше можно ограничиться только такими) длины 3 ненулевым может быть только $[[e_1, e_2], e_3]$ (а остальные принадлежат U_1). Элемент $[[e_1, e_2], e_3]$, если он ненулевой, дает образующую в $C^2(L)/C^3(L)$. Далее, рассуждая так же, получим базисные элементы $e_k = [[[\dots [e_1, e_2], e_3], e_3], \dots, e_3]$, $k \geq 4$, а все остальные “левосторонние” коммутаторы равны нулю. Доказали, что рассматриваемая нами алгебра Ли L изоморфна одной из введенных выше алгебр Ли D_n , задаваемых в базисе $e_1, \dots, e_n$ коммутационными соотношениями

$$[e_1, e_2] = e_4, \quad [e_k, e_3] = e_{k+1}, \quad k = 4, 5, \dots, n-1.$$

СЛЕДСТВИЕ 5. *Если G – квазифилиформная риманова группа Ли, алгебра Ли которой не изоморфна D_n , то группа $\text{Iso}_e(G)$ конечна.*

Порядок конечных подгрупп в $\text{Aut}(L)$ (и соответствующих групп вращений) для квазифилиформных алгебр Ли уже может быть больше, чем для филиформных (для которых он равен 1, 2 или 4). Мы не будем здесь рассматривать вопрос о точном вычислении всех возможных конечных подгрупп в этом случае. Вместо этого докажем один общий результат о порядках конечных подгрупп в группах автоморфизмов алгебр Ли.

Следующая теорема показывает, в частности, что если группа вращений уни-модулярной треугольной группы Ли конечна, то ее порядок в силу теоремы 0 не может быть сколь угодно большим. Точнее, имеется верхняя граница, зависящая только от размерности группы Ли, для порядка таких подгрупп. В частности, это означает, что если в $\text{Aut}(L)$ есть элементы достаточно высокого порядка, то существуют и элементы сколь угодно высокого порядка, ибо тогда $\text{Aut}(L)$ содержит подгруппу, изоморфную $\text{SO}(2)$.

ТЕОРЕМА 5. *Для любой конечномерной алгебры Ли L число связных компонент в группе $\text{Aut}(L)$ не превосходит числа $2 \cdot 3^{n^3/2}$, где $n = \dim L$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Группа $\text{Aut}(L)$ задается уравнениями вида $g_i^k g_j^l c_{ki}^m = g_k^m c_{ij}^k$; $\{e_i\}$ – некоторый базис в L , c_{ij}^k – структурные константы алгебры Ли L в этом базисе. Каждое из этих уравнений полиномиально, степени 2. Всего таких уравнений $N = n^2(n-1)/2$. В [22] доказано (с использованием теории Морса), что для любого вещественного алгебраического многообразия X в $\mathbb{R}^m$, у которого степени задающих его уравнений не превосходят числа d , число связных компонент у X не больше, чем $d(2d-1)^{m-1}$ (на самом деле, этого числа не превосходит сумма всех чисел Бетти многообразия X , мы же взяли только одно, т.е. b_0). В нашем случае эта оценка дает $2 \cdot 3^{n^2(n-1)/2-1}$, откуда и получаем утверждение теоремы.

СЛЕДСТВИЕ 6. *Если в некоторой алгебре Ли L существует конечная группа автоморфизмов, порядок которой больше, чем $2 \cdot 3^{(\dim L)^3/2}$, то в $\text{Aut}(L)$ имеется нетривиальная связная компактная подгруппа.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что L – алгебра Ли, удовлетворяющая условию следствия 5, но $\text{Aut}(L)$ не имеет нетривиальных связных компактных подгрупп. Тогда в силу теоремы 2 связная компонента $(\text{Aut}(L))_0$ треугольна и односвязна. Пусть K – максимальная компактная подгруппа в алгебраической группе $\text{Aut}(L)$, в силу нашего предположения она конечна. Более того, так как $\text{Aut}(L)$ алгебраична, то имеем разложение $\text{Aut}(L) = \Phi \cdot T \cdot U$, где $K \cdot T$ – редуктивная часть (T – расщепимый тор, Φ – конечная группа), а U – унипотентный радикал. Связная компонента единицы группы $T \cdot U$ совпадает с группой $(\text{Aut}(L))_0$ (ибо она треугольна), эта группа в нашем случае односвязна. Поэтому пересечение K с $(\text{Aut}(L))_0$ тривиально. Отсюда следует, что порядок группы K не превосходит числа связных компонент группы $\text{Aut}(L)$, которое в силу теоремы 5 ограничено сверху числом $2 \cdot 3^{(\dim L)^3/2}$, что противоречит предположению следствия 5.

В работе [22] указано, что более тонкое рассуждение может привести к более точной оценке для числа связных компонент. В рассматриваемом нами случае это привело бы к уменьшению указанной в теореме 5 и следствии 6 оценки порядка конечных подгрупп в четыре раза. На самом деле, все эти оценки являются сильно завышенными. В статье [22] отмечено, что во всех известных примерах сумма чисел Бетти не превосходит d^m . В нашем случае это бы дало оценку порядка $2^{n^3/2}$.

СЛЕДСТВИЕ 7. *Если для некоторой треугольной односвязной римановой группы Ли Π существует конечная группа вращений, порядок которой больше, чем $2 \cdot 3^{(\dim L)^3/2}$, то в $\text{Aut}(L)$ имеется нетривиальная связная компактная группа вращений.*

Рассмотрим теперь вкратце некоторые общие вопросы о строении группы автоморфизмов (что дает результаты и о группах изометрий соответствующих римановых групп Ли) предфилиформных алгебр Ли.

Пусть L – некоторая предфилиформная алгебра Ли, а $\text{Aut}(L)$ – группа ее автоморфизмов. Группа $\text{Aut}(L)$ алгебраична, поэтому имеется разложение $\text{Aut}(L) = F \cdot U$, где U – унипотентный радикал, а F – редуктивная часть. В силу теоремы 2 полупростая часть группы F тривиальна, поэтому $F = \Phi \cdot T$ – произведение тора (причем расщепимого над $\mathbb{R}$) T и конечной группы Φ . Размерность расщепимого тора T назовем *расщепимым рангом* алгебры Ли L и обозначим $t(L)$.

Расщепимый тор T есть прямая сумма нескольких экземпляров аддитивной алгебраической группы $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Так как $\mathbb{R}^*$ имеет две связные компоненты, то $\pi_0(T) = \mathbb{Z}_2^{t(L)}$. Кроме того, очевидно, что порядок группы $\pi_0(\text{Aut}(L))$ не меньше, чем $t(L)$.

Для предфилиформных алгебр Ли (и, вообще, для любых нильпотентных алгебр Ли, для которых $d_0 = 2$) величина $t(L)$ равна 0, 1 или 2. Рассмотрим эти случаи по отдельности.

Если $t(L) = 0$, то это означает, что связная компонента единицы группы $\text{Aut}(L)$ унипотентна (в частности, она нильпотентна). Тогда алгебра дифференцирований алгебры Ли L нильпотентна. Напомним, что алгебра Ли называется *характеристически нильпотентной*, если ее алгебра дифференцирований нильпотентна. Поэтому при $t(L) = 0$ алгебра Ли L характеристически нильпотентна. Отметим,

что вся группа $\text{Aut}(L)$ для характеристически нильпотентной алгебры Ли L не обязательно нильпотентна. Дело в том, что указанная выше конечная группа Φ может быть нетривиальна. Однако для филиформных характеристически нильпотентных алгебр Ли группа Φ в силу теоремы 3 либо тривиальна (такие примеры существуют для каждой размерности – см., например, [24]), либо изоморфна $\mathbb{Z}_2$ или $\mathbb{Z}_2^2$. Например, все алгебры Ли в приведенной в [23] серии L_n^2 , $n \geq 7$, нильпотентных алгебр Ли, заданные соотношениями

$$\begin{aligned} [X_1, X_k] &= X_{k+1}, & 2 \leq k \leq n-1, & \quad [X_1, X_n] = 0, \\ [X_2, X_{k+1}] &= X_{k+3} + aX_{k+5}, & 2 \leq k \leq n-5, \\ [X_2, X_{n-3}] &= X_{n-1}, & [X_2, X_{n-2}] &= X_n, \end{aligned}$$

где a – ненулевой вещественный параметр, филиформны и, как доказано в [23], их группы автоморфизмов имеют ровно две связные компоненты. В более сложных примерах реализуется, видимо, и случай группы $\mathbb{Z}_2^2$.

Если $t(L) = 1$, то $T = \mathbb{R}^*$, и потому $\pi_0(\text{Aut}(L))$ обязательно содержит $\mathbb{Z}_2$. Возможно, что для филиформной алгебры L в этом случае окажется, что $\Phi = \{e\}$ (в силу теоремы 3 группа Φ здесь или тривиальна, или изоморфна $\mathbb{Z}_2$). Описание филиформных алгебр Ли ранга 1 приведено в [23] (в него входят вещественные параметры, поэтому явное вычисление групп автоморфизмов всех таких алгебр Ли затруднительно).

Наконец, если $t(L) = 2$, то $T = (\mathbb{R}^*)^2$, и потому $\pi_0(\text{Aut}(L)) \supset \mathbb{Z}_2^2$. В силу теоремы 3 здесь имеет место равенство, поэтому Φ тривиальна. В рассматриваемом случае реализуется конечная группа автоморфизмов $\mathbb{Z}_2^2$. На самом деле, в каждой размерности существуют только две филиформные алгебры Ли с $t(L) = 2$ (см. [24]). Для них непосредственное вычисление показывает, что максимальная конечная группа изоморфизмов в точности и есть группа $\mathbb{Z}_2^2$.

Покажем, например, что если алгебра Ли задается соотношениями $[X_1, X_i] = X_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, то здесь реализуется группа $\mathbb{Z}_2^2$. Образующие двух экземпляров $\mathbb{Z}_2$ задаются соответствиями

$$X_1 \rightarrow X_1, \quad X_2 \rightarrow -X_2, \quad X_3 \rightarrow X_3, \quad X_4 \rightarrow -X_4, \quad \dots$$

и

$$X_1 \rightarrow -X_1, \quad X_2 \rightarrow X_2, \quad X_3 \rightarrow -X_3, \quad X_4 \rightarrow X_4, \quad \dots$$

Итак, уже с помощью группы $\pi_0(T)$ реализуются все возможные значения $\{e\}$, $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_2^2$ конечной группы автоморфизмов филиформных алгебр Ли.

В заключение приведем один пример, который дает возможность строить конечные группы автоморфизмов алгебр Ли (и групп вращений соответствующих римановых алгебр Ли), изоморфных группам $\mathbb{Z}_2^n$ при произвольном натуральном n (тогда как для филиформных алгебр Ли возможны только случаи $n = 0, 1, 2$).

Рассмотрим разрешимую треугольную алгебру Ли L – полупрямую сумму $\mathbb{R} + \mathbb{R}^{n-1}$, которая задается гомоморфизмом $\phi(t): \mathbb{R} \rightarrow \text{End}(\mathbb{R}^{n-1})$. Предположим,

что гомоморфизм ϕ диагонален, т.е. имеет вид $\phi(t) = t \cdot \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1})$, где α_i – вещественные числа. Алгебра Ли L унимодулярна тогда и только тогда, когда сумма всех α_i равна нулю. Предположим дополнительно, что все α_i отличны от нуля.

Рассмотрим группу вращений $\text{Iso}_e(L)$ алгебры Ли L (точнее, вращений соответствующей ей односвязной группы Ли, снабженной некоторой римановой метрикой). Из того, что все $\alpha_i \neq 0$, вытекает, что $[L, L] = \mathbb{R}^{n-1}$, и потому $\mathbb{R}^{n-1}$ – инвариантная относительно всех изометрий гиперплоскость. Группа $\text{Iso}_e(L)$ действует ортогонально на этой гиперплоскости, причем каждый элемент этого действия должен быть перестановочен с матрицей $\text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1})$. Если все α_i между собой различны (т.е. рассматривается гомоморфизм ϕ общего вида), то ограничение $\text{Iso}_e(L)$ на $\mathbb{R}^{n-1}$ будет состоять из матриц вида $\text{diag}(\pm 1, \pm 1, \dots, \pm 1)$. Отсюда следует, что $\text{Iso}_e(L)$ содержит $\mathbb{Z}_2^{n-1}$.

Может оказаться, что $\text{Iso}_e(L)$ больше, чем $\mathbb{Z}_2^{n-1}$. Например, при $n = 3$ для группы Sol (одной из групп Ли, на которых имеется геометрия Терстона) группа $\text{Iso}_e(\text{Sol})$ изоморфна диэдральной группе D_4 – полупрямому произведению $\mathbb{Z}_2$ и $\mathbb{Z}_2^2$ (см. [1]). Это связано с наличием симметрии на подгруппе $\mathbb{R}$ и перестановки базисных векторов плоскости $\mathbb{R}^2$. Такая изометрия имеет место для описанных выше разрешимых групп Ли в случае, если попарно различные числа α_i можно разбить на пары, суммы элементов которых равны нулю (в частности, n должно быть нечетно).

Список литературы

1. *Скомм П.* Геометрии на трехмерных многообразиях. М.: Мир, 1986.
2. *Ishihara S.* Homogeneous Riemannian spaces of four dimensions // J. Math. Soc. of Japan. 1955. V. 7. № 4. P. 345–370.
3. *Filipkiewicz R. P.* Four-dimensional geometries. Ph.D. thesis. Univ. of Warwick, 1984.
4. Четырехмерная риманова геометрия. Семинар Артура Бессе. М.: Мир, 1985.
5. *Винберг Э. Б., Горбачев В. В., Онищук А. Л.* Строение групп и алгебр Ли // Итоги науки и техн. Совр. пробл. матем. Фундам. направл. М.: ВИНТИ, 1990.
6. *Wolf J.* On locally symmetric spaces of nonnegative curvature and certain other locally symmetric spaces // Comm. Math. Helv. 1963. V. 37. № 4. P. 265–295.
7. *Wilson E.* Isometry groups on homogeneous manifolds // Geom. Dedicata. 1982. V. 12. № 3. P. 337–346.
8. *Gordon C., Wilson G.* Isometry groups of Riemannian solvmanifolds // Trans. Amer. Math. Soc. 1988. V. 307. № 1. P. 246–269.
9. *Алексеевский Д. В.* Сопряженность полярных разложений групп Ли // Матем. сб. 1971. Т. 84. № 1. С. 14–26.
10. *Хамфри Дж.* Линейные алгебраические группы. М.: Наука, 1980.
11. *Винберг Э. Б.* Теорема Бореля–Морозова для вещественных групп Ли // ДАН СССР. 1961. Т. 141. № 2. С. 270–274.
12. *Djokovich D.* Three remarks on real analytic groups // Tohoku Math. J. 1976. V. 28. № 3. P. 381–387.
13. *Хакимджанов Ю.* О дифференцировании некоторых нильпотентных алгебр Ли // Изв. вузов. Математика. 1976. № 1. С. 100–110.
14. *Janos L.* On maximal groups of isometries // Proc. Amer. Math. Soc. 1971. V. 28. № 2. P. 584–586.

15. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. Гл. I–III. М.: Мир, 1976.
16. Bajo I. Homogeneous nilmanifolds with prescribed isotropy // Ann. Glob. Anal. and Geom. 1995. V. 13. № 2. P. 149–154.
17. Bajo I. Isotropy of non-nilpotent solvable Lie groups // Ann. Glob. Anal. and Geom. 1996. V. 14. № 1. P. 61–67.
18. Bryant R., Groves J. Algebraic groups of automorphism of nilpotent groups and Lie algebras // J. London Math. Soc. 1986. V. 33. № 2. P. 453–456.
19. Vergne M. Cohomologie des algebres de Lie nilpotentes. Applications a l’etude de la variete des algebres de Lie nilpotentes // Bull. Soc. Math. France. 1970. V. 98. P. 81–116.
20. Vranceanu G. Clasificarea grupurilor lui Lie de rang zero // Studii di cercetari matematice. 1950. V. 1. P. 269–308.
21. Bajo I. Isometrias sobre grupos de Lie Riemannianos y semi-Riemannianos. V. 84. Santiago de Compostelo: Publ. Dept. Geom. Topol., 1995.
22. Milnor J. On Betti numbers of real varieties // Proc. Amer. Math. Soc. 1964. V. 15. № 2. P. 275–280.
23. Yamaguchi S. On some classes of nilpotent Lie algebras and their automorphism groups // Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. 1981. V. 35. № 2. P. 341–351.
24. Goze V., Hakimjanov Ju. Sur les algebres de Lie nilpotentes admettant un tore de derivations // Manus. Math. 1994. V. 84. P. 115–124.

Поступило в редакцию
26.IV.2001