Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Н. Дрождинов, Б. И. Завьялов, Тауберовы теоремы для обобщенных функций со значениями в банаховых пространствах, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2002, том 66, выпуск 4, 47–118

DOI: <https://doi.org/10.4213/im395>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 07:05:36

УДК 517.5

Ю. Н. Дрожжинов, Б. И. Завьялов

Тауберовы теоремы для обобщенных функций со значениями в банаховых пространствах

Сформулированы и доказаны тауберовы теоремы нового типа. В этих теоремах указаны достаточные условия, при которых обобщенная функция, принимающая априори значения в локально выпуклом топологическом пространстве, на самом деле, принимает значения в более узком, банаховом, пространстве. Эти условия формулируются в терминах “общих оценок класса” для стандартного усреднения этой обобщенной функции с фиксированным ядром из основного пространства.

Применение такого рода теорем, в частности, основано на том, что асимптотические и некоторые другие свойства рассматриваемых обобщенных функций можно описать в терминах принадлежности некоторым банаховым пространствам. Доказанные теоремы применяются для изучения асимптотических свойств решений задачи Коши для уравнения теплопроводности в классе медленно растущих обобщенных функций и к изучению банаховых пространств типа Бесова–Никольского.

Библиография: 13 наименований.

Введение

Пусть $f(x) \in \mathcal{S}'$, т.е. является обобщенной функцией медленного роста и

$$L_f^e(x, y) = \left(f(\xi), \frac{1}{y} e\left(\frac{x - \xi}{y}\right) \right) \quad (0.1)$$

– ее стандартное усреднение с некоторым ядром $e(x) \in \mathcal{S}$. Пусть $f(x)$ и $e(x)$ таковы, что

$$\text{supp } \tilde{f}(t) \subset [0, +\infty), \quad \tilde{e}(t) = e^{-t}, \quad t \geq 0, \quad (0.2)$$

где волной обозначено преобразование Фурье. Тогда $L_f^e(x, y)$ – обычное преобразование Лапласа обобщенной функции $\tilde{f}(t)$. Имеет место следующее утверждение, которое является простой переформулировкой общей тауберовой теоремы, рассмотренной в работе [3].

Пусть выполнены условия (0.2); тогда следующие два утверждения эквивалентны:

1) $f(x)$ квазиасимптотически ограничена в нуле относительно правильно меняющейся функции $\rho(k)$, т.е. $\frac{1}{\rho(k)} |(f(\frac{x}{k}), \varphi(x))| < C_\varphi$ при $k > 1$ и всех $\varphi \in \mathcal{S}$;

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 02-01-00076, 00-15-96073).

2) существуют C и b такие, что

$$\frac{1}{\rho(k)} \left| L_f^e \left(\frac{x}{k}, \frac{y}{k} \right) \right| \leq \frac{C}{y^b}, \quad x^2 + y^2 = 1, \quad y > 0, \quad k > 1. \quad (0.3)$$

Отметим, что если на f наложено добавочное *тауберово* условие (например, $\tilde{f}$ есть положительная мера, как в теореме Харди–Литтлвуда, или $f(x + iy)$ имеет неотрицательную мнимую часть, как в общей тауберовой теореме работы [3]), то условие (0.3) может быть заменено на более простое условие

$$\left| \frac{y}{\rho(\frac{1}{y})} L_f^e(0, y) \right| < C, \quad 0 < y < 1. \quad (0.4)$$

В этой формулировке условия (0.2) выглядят весьма обременительными (они и только они содержат преобразование Фурье). Как будет показано в настоящей работе, они являются излишними.

На самом деле, эти и другие сходные проблемы могут быть рассмотрены с более общей позиции, где квазиасимптотические и другие свойства рассматриваемых функций описываются в терминах принадлежности некоторым банаховым пространствам. Пусть f – обобщенная функция из $\mathcal{S}'$ со значениями в банаховом пространстве $\mathbb{B}$, т.е. линейное непрерывное отображение из $\mathcal{S}$ в $\mathbb{B}$ ($f \in \mathbb{L}(\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{B})$). Для ее стандартного усреднения с любым фиксированным ядром $\varphi \in \mathcal{S}$ справедлива оценка

$$\sup_{0 < y \leq 1} \left(y^b \|L_f^\varphi(x, y)\|_{\mathbb{B}} \right) \leq C(1 + |x|)^a, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (0.5)$$

называемая *общей оценкой класса*, для некоторых постоянных a , b и C . Пусть $\mathbb{B}$ вложено в некоторое локально выпуклое топологическое пространство $\mathcal{L}$ и f априори есть линейное непрерывное отображение из $\mathcal{S}$ в $\mathcal{L}$, т.е. $f \in \mathbb{L}(\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{L})$. Тогда условие (0.5) можно рассматривать как необходимое условие принадлежности функции f классу $\mathbb{L}(\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{B})$. Представляет интерес выяснить, насколько это условие является достаточным. Настоящая работа, в основном, посвящена этому. В частности, будет показано, что таким достаточным условием является оценка (0.5), выполненная лишь для одной основной функции такой, что $\int \varphi(\xi) d\xi \neq 0$. Отметим также, что пространство $\mathcal{S}$ можно заменить на другие пространства основных функций, такие как $\mathcal{D}$, $E^\uparrow$, $E^\downarrow$ (см. ниже).

Кроме того, для приложений весьма важно наряду с функционалом $\sup_y(\cdot)$ рассматривать и другие функционалы. Для этой цели введем некий специальный класс функционалов, которые назовем *автомодельными*. Он является естественным для данного круга задач и включает в себя стандартные функционалы типа норм пространств L^p с весом.

Рассмотрим случай, когда в локально выпуклом пространстве $\mathcal{L}$ задано представление $\{T_a: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}, a \in \mathbb{R}^1\}$ группы сдвигов, относительно которой наше банахово пространство $\mathbb{B}$ инвариантно. Это позволит усилить некоторые основные теоремы. В частности, если потребовать ковариантность рассматриваемой функции, т.е.

$$(f(\xi), \varphi(\xi - a)) = T_a(f(\xi), \varphi(\xi)) \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}, \quad (0.6)$$

то оценки типа (0.3) можно заменить оценками типа (0.4). Тем самым условие (0.6) можно рассматривать как *тауберово* условие.

Полученные теоремы применяются для исследования асимптотических свойств решений задачи Коши для уравнения теплопроводности и для изучения пространств типа Бесова–Никольского в $\mathbb{R}^1$. Пространствам такого типа посвящена весьма обширная литература (см., например, [12], [13] и цитируемую там библиографию). Наше рассмотрение предполагает несколько другой подход, который, как нам кажется, содержит ряд интересных моментов. Из их числа упомянем следующие. Во-первых, наши построения являются естественным применением доказанных в настоящей работе основных теорем. Во-вторых, при построении этих пространств традиционно в качестве базового пространства использовались пространства L^p . В рассматриваемом случае базовым пространством может быть функциональное пространство достаточно общего вида, при этом гладкость функций соответствующих пространств определяется некоторым автомодельным функционалом. В-третьих, при построении этих пространств ранее использовались усреднения либо с одной специальной функцией (ядро Пуассона [13]), либо с семейством основных функций (см. [8]). Покажем, что достаточно рассматривать усреднения лишь с одной более или менее произвольной основной функцией.

В приложение мы вынесли несколько лемм, которые являются некоторыми вариантами классической теоремы Карлесона о короне. Их доказательство в основном тексте сильно перегрузило бы изложение и затруднило восприятие основных результатов.

§ 1. Основные обозначения и определения

Через $\mathcal{D}$ обозначаем пространство бесконечно дифференцируемых финитных функций. Точнее, $\mathcal{D}$ – локально выпуклое пространство, являющееся индуктивным пределом (по $a > 0$) пространств $\mathcal{D}_a$, состоящих из функций $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ таких, что $\text{supp } \varphi \subset [-a, a]$, с топологией, задаваемой системой полунорм:

$$\mathcal{P}_N[\varphi] = \max_{0 \leq j \leq N} \sup_{-\infty < \xi < \infty} (1 + \xi^2)^{\frac{N}{2}} |\varphi^{(j)}(\xi)|, \quad N = 0, 1, \dots \quad (1.1)$$

Аналогично, $\mathcal{S}$ – пространство быстроубывающих вместе со всеми производными функций $\varphi(\xi)$ с топологией, задаваемой счетной системой полунорм (1.1).

Соответственно, $\mathcal{D}'$ и $\mathcal{S}'$ – сопряженные пространства (пространство обобщенных функций и пространство обобщенных функций медленного роста).

Введем пространство E_a , состоящее из бесконечно дифференцируемых на всей оси функций $\varphi(\xi)$, для которых

$$P_{a,N}[\varphi] = \max_{0 \leq j \leq N} \sup_{-\infty < \xi < \infty} e^{a|\xi|} (1 + |\xi|)^N |\varphi^{(j)}(\xi)| < \infty, \quad N = 0, 1, \dots \quad (1.2)$$

Эта система полунорм задает в E_a топологию. При любом $a > 0$ это пространство изоморфно пространству $\mathcal{S}$, а при $a = 0$ оно совпадает с $\mathcal{S}$. Функции $\varphi(\xi)$ принадлежат E_a тогда и только тогда, когда $e^{a\xi}\varphi(\xi)$ и $e^{-a\xi}\varphi(\xi)$ принадлежат $\mathcal{S}$. Через $E^\uparrow$ обозначаем индуктивный предел пространств E_a по $a > 0$, так что

$E^\uparrow = \bigcup_{a>0} E_a$. Как обычно, $E^{\uparrow'}$ – пространство линейных непрерывных функционалов на $E^\uparrow$.

Через $E^\downarrow$ обозначаем проективный предел пространств E_a по $a > 0$, так что $E^\downarrow = \bigcap_{a>0} E_a$, и $E^{\downarrow'}$ – пространство линейных непрерывных функционалов на $E^\downarrow$. Ясно¹, что $\mathcal{D} \subset E^\downarrow \subset E^\uparrow \subset \mathcal{S}$.

Совокупность основных функций из $\mathcal{D}_a$, $\mathcal{S}$ или E_a , все моменты которых вплоть до n -го равны нулю, обозначаем $\overset{n}{\mathcal{D}}_a$, $\overset{n}{\mathcal{S}}$ и $\overset{n}{E}_a$. Условимся считать, что $\overset{n}{\mathcal{D}} = \mathcal{D}$ при $n < 0$ (соответственно, $\overset{n}{\mathcal{S}} = \mathcal{S}$, $\overset{n}{E}_a = E_a$). Таким образом,

$$\overset{n}{\mathcal{D}}_a = \left\{ \varphi(\xi) \in \mathcal{D}_a : \int \xi^j \varphi(\xi) d\xi = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n \right\}.$$

Например, $\varphi(\xi) \in \overset{n}{\mathcal{D}} \setminus \overset{n+1}{\mathcal{D}}$ означает, что

$$\varphi(\xi) \in \mathcal{D}, \quad \int \xi^j \varphi(\xi) d\xi = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n; \quad \int \xi^{n+1} \varphi(\xi) d\xi \neq 0. \quad (1.3)$$

В частности, $\varphi(\xi) \in \overset{0}{\mathcal{D}} \setminus \overset{0}{\mathcal{D}}$ означает, что $\varphi(\xi) \in \mathcal{D}$ и $\int \varphi(\xi) d\xi \neq 0$.

Преобразование Фурье осуществляет изоморфизм пространства E_a на пространство $\tilde{E}_a$, состоящее из аналитических в полосе

$$\Pi_{-a}^a = \{z \in \mathbb{C} : z = x + iy, \quad |x| < \infty, \quad -a < y < a\} \quad (1.4)$$

функций $\tilde{\varphi}(z)$, непрерывных вместе со всеми производными в замкнутой полосе $\overline{\Pi}_{-a}^a$ и удовлетворяющих оценке

$$\left| \left(\frac{d}{dz} \right)^\ell \tilde{\varphi}(z) \right| \leq \frac{c_{\ell,m}}{1 + |z|^m}, \quad z \in \overline{\Pi}_{-a}^a, \quad m = 1, 2, \dots, \quad \ell = 0, 1, \dots \quad (1.5)$$

Другими словами, $F[E_a] = \tilde{E}_a$.

Напомним также, что $F[\mathcal{S}] = \mathcal{S}$, $F[\mathcal{D}] = Z$, $F[\mathcal{D}_a] = Z_a$. Пространство Z_a состоит из целых аналитических функций. Топология в нем определяется системой полунорм:

$$\tilde{\mathcal{D}}_{a,N}[\tilde{\varphi}(z)] = \sup_{|x| < \infty} (1 + |z|)^N e^{a|y|} |\tilde{\varphi}(z)|, \quad z = x + iy, \quad N = 0, 1, \dots \quad (1.6)$$

Пусть $Z = F[\overset{n}{\mathcal{D}}]$, так что для любого $a > 0$

$$Z_a = \left\{ \tilde{\varphi}(z) \in Z_a : \left(\frac{d}{dz} \right)^j \tilde{\varphi}(z) \Big|_{z=0} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n \right\}.$$

¹Здесь и далее знак $\subset$ означает непрерывное вложение одного топологического пространства в другое.

Например, $\tilde{\varphi}(z) \in Z_a \setminus Z_a$ означает, что

$$\tilde{\varphi}(z) = z^{n+1} \tilde{\varphi}_1(z), \quad \tilde{\varphi}_1 \in Z_a, \quad \tilde{\varphi}_1(0) \neq 0. \quad (1.7)$$

Подробнее о свойствах пространства Z см.[2].

Через $A_Q(\Pi_{-a}^a)$, где $-\infty < Q < +\infty$, будем обозначать пространство аналитических в полосе Π_{-a}^a функций $\tilde{\varphi}(z)$ таких, что

$$\|\tilde{\varphi}(z)\|_{A_Q(\Pi_{-a}^a)} = \sup_{z \in \Pi_{-a}^a} (1 + |z|)^Q |\tilde{\varphi}(z)| < \infty. \quad (1.8)$$

Через $A(\overline{\Pi}_{-a}^a)$ обозначается множество аналитических в полосе Π_{-a}^a функций $\tilde{\varphi}(z)$, непрерывных вместе со всеми производными вплоть до границы, причем для любого $j = 0, 1, \dots$ существуют Q_j такие, что

$$\tilde{\varphi}^{(j)}(z) \in A_{Q_j}(\Pi_{-a}^a). \quad (1.9)$$

Отметим, что функции из $A(\overline{\Pi}_{-a}^a)$ при любом $a > 0$ являются мультипликаторами в $\tilde{E}_a$.

Всюду далее $\chi_{[a,b]}(\xi)$ – характеристическая функция отрезка $[a, b]$,

$$\chi_{[a,b]}(\xi) = \Theta(b - \xi) - \Theta(a - \xi), \quad (1.10)$$

где $\Theta(\xi)$ – функция Хевисайда, равная нулю при $\xi < 0$ и единице при $\xi > 0$.

Пространство $C_0(\mathbb{R})$ – банахово пространство непрерывных функций, стремящихся к нулю на бесконечности, с нормой $\|\varphi(\xi)\| = \sup_{\xi} |\varphi(\xi)|$. Будем также пользоваться пространством $C_0^\infty(\mathbb{R})$, состоящим из бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(\xi)$, которые вместе со всеми своими производными стремятся к нулю при $|\xi| \rightarrow \infty$. Топология в нем задается системой полунорм:

$$Q_N[\varphi] = \max_{0 \leq j \leq N} \sup_{\xi} |\varphi^{(j)}(\xi)|, \quad N = 0, 1, \dots \quad (1.11)$$

Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{L}$ – произвольные локально выпуклые топологические пространства. Через $\mathbb{L}(\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{L})$ обозначим пространство всех линейных непрерывных отображений из $\mathcal{F}$ в $\mathcal{L}$. В частности, $\mathcal{D}' = \mathbb{L}(\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C})$, а $\mathcal{S}' = \mathbb{L}(\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C})$. Если $\mathcal{L}$ – произвольное локально выпуклое пространство, то пространство $\mathbb{L}(\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{L})$ можно трактовать как пространство обобщенных функций над $\mathcal{D}$ со значениями в $\mathcal{L}$. Так же можно интерпретировать пространства $\mathbb{L}(E^\dagger \rightarrow \mathcal{L})$, $\mathbb{L}(\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{L})$ и т.д.

Пусть $\mathcal{L}$ – некоторое локально выпуклое топологическое пространство и $f \in \mathbb{L}(\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{L})$. Для $\varphi \in \mathcal{D}$ положим

$$L_f^\varphi(x, y) = \left(f(\xi), \frac{1}{y} \varphi\left(\frac{x - \xi}{y}\right) \right), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^1 \times (0, 1]. \quad (1.12)$$

Эта формула также имеет смысл, если $f \in \mathbb{L}(E^\dagger \rightarrow \mathcal{L})$, $\mathbb{L}(\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{L})$, $\mathbb{L}(E^\dagger \rightarrow \mathcal{L})$, а $\varphi \in E^\dagger$, $\mathcal{S}$, $E^\dagger$ соответственно. Очевидно, что $L_f^\varphi(x, y)$ – непрерывная функция в

$\mathbb{R}^1 \times (0, 1]$ со значениями в $\mathcal{L}$. В частном случае, когда $\mathcal{L} = \mathbb{B}$, где $\mathbb{B}$ – банахово пространство, следующие оценки являются прямым следствием конечности порядка функционала на пространствах $\mathcal{D}, E^\uparrow, E^\downarrow, \mathcal{S}$ и называются *общими оценками класса*:

1) пусть $f(\xi) \in \mathbb{L}(\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{B})$; тогда для любых $a > 0$ и $a_1 > 0$ существуют C, N и b такие, что

$$\|L_f^\varphi(x, y)\|_{\mathbb{B}} \leq \frac{C}{y^b} \mathcal{P}_N[\varphi], \quad 0 < y \leq 1, \quad |x| < a_1, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_a; \quad (1.13)$$

2) пусть $f(\xi) \in \mathbb{L}(E^\uparrow \rightarrow \mathbb{B})$; тогда для любых $\varepsilon > 0$ и $\varepsilon_1 > 0$ существуют C, N и b такие, что

$$\|L_f^\varphi(x, y)\|_{\mathbb{B}} \leq \frac{C}{y^b} e^{\varepsilon_1 |x|} P_{\varepsilon, N}[\varphi], \quad 0 < y \leq 1, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \forall \varphi \in E_\varepsilon; \quad (1.14)$$

3) пусть $f \in \mathbb{L}(E^\downarrow \rightarrow \mathcal{L})$; тогда существуют C, N, a и b такие, что

$$\|L_f^\varphi(x, y)\|_{\mathbb{B}} \leq \frac{C}{y^b} e^{a|x|} P_{a, N}[\varphi], \quad 0 < y \leq 1, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \forall \varphi \in E^\downarrow; \quad (1.15)$$

4) пусть $f(\xi) \in \mathbb{L}(\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{B})$; тогда существуют C, N, a и b такие, что

$$\|L_f^\varphi(x, y)\|_{\mathbb{B}} \leq \frac{C}{y^b} (1 + |x|)^a \mathcal{P}_N[\varphi], \quad 0 < y \leq 1, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}. \quad (1.16)$$

Для доказательства (1.13) см. лемму П.5, изложенную в приложении. Оценки (1.14)–(1.16) проверяются аналогично.

Положительная и непрерывная при $k \geq k_0$ функция $\rho(k)$ называется *автомодельной* (правильно меняющейся), если существует предел

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\rho(kt)}{\rho(k)} = \psi(t),$$

причем сходимость равномерная по t на каждом компакте полуоси $(0, \infty)$. Легко видеть, что $\psi(t) = t^\alpha$ при некотором α . В этом случае функцию $\rho(k)$ называем *автомодельной порядка α* .

Отметим следующее свойство этих функций: для любого $\varepsilon > 0$ существуют C_ε и c_ε такие, что

$$c_\varepsilon \varkappa^{\alpha \mp \varepsilon} \leq \frac{\rho(\varkappa k)}{\rho(k)} \leq C_\varepsilon \varkappa^{\alpha \pm \varepsilon}, \quad k > k_0, \quad k \varkappa > k_0. \quad (1.17)$$

Здесь верхний знак берется при $\varkappa \geq 1$, а нижний – при $\varkappa < 1$ (см. [3], [4]).

Автомодельную функцию можно доопределить на отрезке $[0, k_0]$ так, чтобы она стала непрерывной и положительной на всей замкнутой положительной полуоси.

Тогда ясно, что в (1.17) можно считать $k_0 = 1$, кроме того, для любого $\varepsilon > 0$ существует C_ε такое, что при $k > 1$

$$\frac{\rho(\varkappa k)}{\rho(k)} \leq C_\varepsilon \gamma(\varkappa), \quad \gamma(\varkappa) = \begin{cases} \varkappa^{\alpha+\varepsilon}, & \varkappa \geq 1, \\ \varkappa^{-|\alpha|-\varepsilon}, & \varkappa < 1. \end{cases} \quad (1.18)$$

Напомним некоторые сведения из теории интегралов Бохнера. Пусть $\mathbb{B}$ – банахово пространство и $\mu(x)$ – мера на открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, абсолютно непрерывная относительно меры Лебега. Функция $h(x)$ называется *простой*, если

$$h(x) = \sum_{i=1}^N b_i \chi_{\Omega_i}(x), \quad \bigcup_i \Omega_i = \Omega, \quad \Omega_j \cap \Omega_i = \emptyset,$$

где Ω_i – измеримые множества, а $\chi_{\Omega_i}(x)$ – их характеристические функции. Функция $f(x)$ со значениями в $\mathbb{B}$ называется (*сильно*) *измеримой*, если она есть предел простых функций для почти всех $x \in \Omega$. Множество измеримых функций обозначим через $\mathcal{M}(\Omega \rightarrow \mathbb{B})$. Если $f \in \mathcal{M}(\Omega \rightarrow \mathbb{B})$, то $\|f(x)\|_{\mathbb{B}}$ – обычная измеримая функция. Обозначим

$$L^1(\Omega \rightarrow \mathbb{B}, \mu) = \left\{ f(x) \in \mathcal{M}(\Omega \rightarrow \mathbb{B}) : \int_{\Omega} \|f(x)\|_{\mathbb{B}} d\mu(x) < \infty \right\}.$$

Это – банахово пространство, и множество простых функций плотно в нем. Для простой функции $h(x)$ интеграл Бохнера определяется по формуле

$$\int_{\Omega} h(x) d\mu(x) = \sum_{i=1}^N b_i \mu(\Omega_i).$$

Если последовательность простых функций $h_n(x) \rightarrow f(x)$ при $n \rightarrow \infty$ в $L^1(\Omega \rightarrow \mathbb{B}, \mu)$, то последовательность $\int_{\Omega} h_n(x) d\mu(x)$ фундаментальна в $\mathbb{B}$ и ее предельный элемент, обозначаемый как $\int_{\Omega} f(x) d\mu(x)$, называют *интегралом Бохнера*. Имеют место следующие свойства интеграла Бохнера:

$$\left\| \int_{\Omega} f(x) d\mu(x) \right\|_{\mathbb{B}} \leq \int_{\Omega} \|f(x)\|_{\mathbb{B}} d\mu(x).$$

ТЕОРЕМА ФУБИНИ. Пусть $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, где $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^m$, а $d\mu = d\mu_1(x) \times d\mu_2(y)$, где μ_i – меры на Ω_i , $i = 1, 2$. Если $f(x, y) \in L^1(\Omega \rightarrow \mathbb{B})$, то для почти всех $x \in \Omega_1$ функция $f(x, y)$ интегрируема по Бохнеру на Ω_2 по мере $\mu_2(y)$, функция $g(x) = \int_{\Omega_2} f(x, y) d\mu_2(y)$ измерима и интегрируема по Бохнеру на Ω_1 по мере $\mu_1(x)$, причем

$$\int_{\Omega} f(x, y) d\mu = \int_{\Omega_1} d\mu_1(x) \int_{\Omega_2} f(x, y) d\mu_2(y)$$

(см. [10] и [11]).

Пусть $\mathbb{B} = A^*$, где A – сепарабельное банахово пространство. Функция $f(x)$, $x \in \Omega$, принимающая значения в банаховом пространстве $\mathbb{B}$, называется **-слабо измеримой*, если для любого $a \in A$ функция $\langle f(x), a \rangle$ измерима. Множество *-слабо измеримых функций обозначим ${}^*\mathcal{M}(\Omega \rightarrow \mathbb{B})$. Если $f(x) \in {}^*\mathcal{M}(\Omega \rightarrow \mathbb{B})$, то $\|f(x)\|_{\mathbb{B}}$ – обычная измеримая функция. Пусть

$${}^*L^1(\Omega \rightarrow \mathbb{B}, \mu) = \left\{ f(x) \in {}^*\mathcal{M}(\Omega \rightarrow \mathbb{B}) : \int_{\Omega} \|f(x)\|_{\mathbb{B}} d\mu(x) < \infty \right\}.$$

Для $f(x) \in {}^*L^1(\Omega \rightarrow \mathbb{B}, \mu)$ формула

$$\langle I, a \rangle = \int_{\Omega} \langle f(x), a \rangle d\mu(x) \quad \forall a \in A$$

определяет линейный непрерывный функционал на A , т.е. элемент из $\mathbb{B}$. Этот элемент называется **-слабым интегралом Бохнера* и обозначается $\int_{\Omega} f(x) d\mu(x)$. Для *-слабого интеграла Бохнера справедлива теорема Фубини. Ясно, что интеграл Бохнера (если он существует) будет и *-слабым интегралом Бохнера.

Замыкание $\mathcal{D}$ по норме банахова пространства V будем обозначать

$$(V)_0 \quad (\text{иногда еще } \overline{\mathcal{D}}^V). \quad (1.19)$$

§ 2. Автомоделльные функционалы

Пространство измеримых неотрицательных функций на положительной полуоси обозначим $\mathcal{M}_+$.

Пусть $\mathbb{J}(\varphi(k))$ – нетривиальный функционал на $\mathcal{M}_+$ с носителем на $[1, +\infty)$ со значениями в $[0, +\infty]$, принимающий конечные значения на финитных ограниченных функциях со свойствами:

1) обобщенное неравенство треугольника:

$$\mathbb{J}\left(\int \varphi(k, y) dy\right) \leq \int \mathbb{J}(\varphi(k, y)) dy$$

для любой неотрицательной измеримой по (k, y) функции $\varphi(k, y)$;

2) однородность: $\mathbb{J}(\lambda\varphi(k)) = \lambda\mathbb{J}(\varphi(k))$, $\lambda \geq 0$;

3) монотонность: если $\varphi_1(k) \leq \varphi_2(k)$ п.в., то $\mathbb{J}(\varphi_1(k)) \leq \mathbb{J}(\varphi_2(k))$;

4) если $\varphi_n(k) \nearrow \varphi(k)$ п.в., то $\mathbb{J}(\varphi_n(k)) \rightarrow \mathbb{J}(\varphi(k))$, $n \rightarrow \infty$;

5) существует α такое, что для любого $\varepsilon > 0$ существует постоянная C_ε такая, что

$$\mathbb{J}(\varphi(\varkappa k)) \leq \begin{cases} C_\varepsilon \varkappa^{\alpha+\varepsilon} \mathbb{J}(\varphi(k)), & \text{если } \varkappa \geq 1, \\ C_\varepsilon \varkappa^{\alpha-\varepsilon} \mathbb{J}(\varphi(k)), & \text{если } \varkappa < 1, \end{cases}$$

для любой функции $\varphi(k)$ с носителем в $[1, +\infty)$.

Функционалы, удовлетворяющие аксиомам 1)–5), будем называть *автомоделльными* функционалами порядка α .

Ясно, что из обобщенного неравенства треугольников (аксиома 1)) вытекает обычное неравенство

$$1') \mathbb{J}(\varphi_1(k) + \varphi_2(k)) \leq \mathbb{J}(\varphi_1(k)) + \mathbb{J}(\varphi_2(k)), \quad \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{M}_+.$$

Представляет интерес выяснить, при каких условиях из 1') вытекает 1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Будем говорить, что функционал $\mathbb{J}(\varphi)$, для которого выполнены условия 1'), 2)–5), удовлетворяет *теореме Лебега*, если из того, что $\varphi_n(k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi(k)$ п.в. и из существования функции $\varphi_0(k)$ такой, что $\varphi_n(k) \leq \varphi_0(k)$, $\mathbb{J}(\varphi_0(k)) < \infty$, следует, что

$$\mathbb{J}(\varphi_n(k)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{J}(\varphi(k)).$$

Нетрудно доказать, что справедлива следующая

ЛЕММА 2.1. Пусть функционал $\mathbb{J}(\varphi)$ со свойствами 1'), 2)–5) удовлетворяет теореме Лебега. Тогда $\mathbb{J}$ – автомодельный функционал.

Приведем примеры автомодельных функционалов порядка $\alpha = 0$. Положим

$$\mathbb{J}^p(\varphi(k)) = \left(\int_1^\infty \varphi^p(k) \frac{dk}{k} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty, \quad \mathbb{J}^\infty(\varphi(k)) = \operatorname{ess\,sup}_{k>1} \varphi(k). \quad (2.1)$$

Функционалы $\mathbb{J}^p(\varphi)$ при $1 \leq p < \infty$ удовлетворяют теореме Лебега. Функционал $\mathbb{J}^\infty(\varphi)$ не удовлетворяет теореме Лебега, но, тем не менее, для него выполняется обобщенное неравенство треугольника.

Приведем некоторые свойства автомодельных функционалов. Непосредственно из аксиомы 5) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует C_ε такое, что

$$\frac{1}{C_\varepsilon} \varkappa^{\alpha \mp \varepsilon} \mathbb{J}(\varphi(k)) \leq \mathbb{J}(\varphi(\varkappa k)), \quad \operatorname{supp} \varphi \subset [\varkappa, +\infty). \quad (2.2)$$

Здесь берется знак $-$, если $\varkappa \geq 1$, и знак $+$, если $\varkappa < 1$. В частности, если $\varkappa < 1$ и $\operatorname{supp} \varphi \subset [1, +\infty)$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует C_ε такое, что

$$\frac{1}{C_\varepsilon} \varkappa^{\alpha + \varepsilon} \mathbb{J}(\varphi(k)) \leq \mathbb{J}(\varphi(\varkappa k)) \leq C_\varepsilon \varkappa^{\alpha - \varepsilon} \mathbb{J}(\varphi(k)). \quad (2.3)$$

Отсюда следует, что порядок автомодельности функционала α определяется однозначно.

Отметим, что если $\varkappa \geq 1$, то аксиома 5) выполняется для любой функции $\varphi(k) \in \mathcal{M}_+$. Действительно, пользуясь тождеством $1 = \chi_{[0,1]}(\varkappa k) + \chi_{[1,\infty)}(\varkappa k)$, имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{J}(\varphi(\varkappa k)) &\leq \mathbb{J}(\chi_{[1,\infty)}(\varkappa k) \varphi(\varkappa k)) + \mathbb{J}(\chi_{[0,1]}(\varkappa k) \varphi(\varkappa k)) \\ &\leq C_\varepsilon \varkappa^{\alpha + \varepsilon} \mathbb{J}(\varphi(k)). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\chi_{[0,1]}(\varkappa k) = 0$ при $\varkappa \geq 1$, $k > 1$, а $\operatorname{supp} \mathbb{J}(\varphi) \subset [1, \infty)$.

Как следствие аксиом 3) и 4) справедлив следующий аналог теоремы Фату.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $\varphi_n \in \mathcal{M}_+$ и $\varphi_n(k) \rightarrow \varphi(k)$, $n \rightarrow +\infty$, почти всюду; тогда $\varliminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{J}(\varphi_n) \geq \mathbb{J}(\varphi)$.

ЛЕММА 2.2. Пусть $\rho(k)$ – автомодельная функция порядка β , а $\mathbb{J}(\varphi(k))$ – автомодельный функционал порядка α . Положим $\mathbb{J}_1(\varphi(k)) = \mathbb{J}\left(\frac{1}{\rho(k)}\varphi(k)\right)$. Тогда $\mathbb{J}_1$ – автомодельный функционал порядка $\alpha + \beta$.

Действительно, достаточно проверить аксиому 5). Пусть $\text{supp } \varphi \subset [1, +\infty)$. Пользуясь свойствами правильно меняющихся функций (см. (1.17)), имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{J}_1(\varphi(\varkappa k)) &= \mathbb{J}\left(\frac{1}{\rho(k)}\varphi(\varkappa k)\right) = \mathbb{J}\left(\frac{\rho(\varkappa k)}{\rho(k)}\frac{1}{\rho(\varkappa k)}\varphi(\varkappa k)\right) \\ &\leq \mathbb{J}\left(C_\varepsilon^1 \varkappa^{\beta \pm \varepsilon} \frac{1}{\rho(\varkappa k)}\varphi(\varkappa k)\right) = C_\varepsilon^1 \varkappa^{\beta \pm \varepsilon} \mathbb{J}\left(\frac{1}{\rho(\varkappa k)}\varphi(\varkappa k)\right) \\ &\leq C_\varepsilon^1 \varkappa^{\beta \pm \varepsilon} C_\varepsilon^2 \varkappa^{\alpha \pm \varepsilon} \mathbb{J}\left(\frac{\varphi(k)}{\rho(k)}\right) \leq C_\varepsilon \varkappa^{\beta + \alpha \pm 2\varepsilon} \mathbb{J}_1(\varphi(k)). \end{aligned}$$

Здесь берется знак $+$, если $\varkappa \geq 1$, и знак $-$, если $\varkappa < 1$, C_ε^1 берется из (1.17), а C_ε^2 – из аксиомы 5), C_ε – некоторая постоянная.

ЛЕММА 2.3. Пусть $\mathbb{J}(\varphi(k))$ – автомодельный функционал порядка α ; тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует постоянная C_ε такая, что

$$\mathbb{J}(\varphi(k)) \leq C_\varepsilon \text{ess sup}_{k > 1} \frac{\varphi(k)}{k^{\alpha - \varepsilon}}, \quad \varphi \in \mathcal{M}_+. \quad (2.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\alpha > 0$. Тогда покажем, что $\mathbb{J}(1) < \infty$. Действительно, для любого $\varkappa > 1$ при $n > \log_2([\varkappa] + 1)$ в силу аксиом 3) и 5) имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{J}(\chi_{[1, \varkappa]}(k)) &\leq \mathbb{J}(\chi_{[1, 2^n]}(k)) = \mathbb{J}\left(\sum_{j=0}^{n-1} \chi_{[1, 2^j]} \left(\frac{k}{2^j}\right)\right) \\ &\leq \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{J}\left(\chi_{[1, 2^j]} \left(\frac{k}{2^j}\right)\right) \leq C_\varepsilon \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2^j}\right)^{\alpha - \varepsilon} \mathbb{J}(\chi_{[1, 2^j]}(k)). \end{aligned}$$

В последнем неравенстве мы считаем, что $\alpha - \varepsilon > 0$. Переходя к пределу при $\varkappa \rightarrow +\infty$, получим

$$\mathbb{J}(1) \leq C_\varepsilon \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\alpha - \varepsilon}}\right)^j \mathbb{J}(\chi_{[1, 2^j]}(k)) < \infty.$$

Пусть теперь α произвольно. Порядок функционала $\mathbb{J}_1(\varphi(k)) = \mathbb{J}(k^{\alpha - \varepsilon} \varphi(k))$ согласно лемме 2.1 будет равен $\varepsilon > 0$, а потому

$$\mathbb{J}(k^{\alpha - \varepsilon} \psi(k)) = \mathbb{J}_1(1 \cdot \psi(k)) \leq \mathbb{J}_1(1) \text{ess sup}_{k > 1} \psi(k) \leq C_\varepsilon \text{ess sup}_{k > 1} \psi(k).$$

Полагая в этом неравенстве $\varphi(k) = k^{\alpha - \varepsilon} \psi(k)$, получим (2.5).

ЛЕММА 2.4 (неравенства Харди). Пусть $\mathbb{J}(\varphi)$ – автомодельный функционал порядка α . Тогда существует постоянная C такая, что

$$C\mathbb{J}(\varphi(k)) \geq \begin{cases} \mathbb{J}\left(\int_k^{+\infty} \varphi(\varkappa) \frac{d\varkappa}{\varkappa}\right) & \text{при } \alpha < 0, \\ \mathbb{J}\left(\int_1^k \varphi(\varkappa) \frac{d\varkappa}{\varkappa}\right) & \text{при } \alpha > 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

для любой функции $\varphi(k) \in \mathcal{M}_+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно считать, что $\text{supp } \varphi \subset [1, +\infty)$. Пусть $\alpha > 0$. Из аксиомы 5) при $0 < y < 1$ для достаточно малого ε имеем

$$\mathbb{J}\left(\frac{1}{y}\varphi(ky)\right) \leq C_\varepsilon \frac{1}{y} y^{\alpha-\varepsilon} \mathbb{J}(\varphi(k)).$$

Отсюда согласно обобщенной аксиоме треугольника получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{J}\left(\int_1^k \varphi(\varkappa) \frac{d\varkappa}{\varkappa}\right) &= \mathbb{J}\left(\int_0^k \varphi(\varkappa) \frac{d\varkappa}{\varkappa}\right) = \mathbb{J}\left(\int_0^1 \varphi(ky) \frac{dy}{y}\right) \\ &\leq \int_0^1 \mathbb{J}\left(\frac{1}{y}\varphi(ky)\right) dy \leq C_\varepsilon \mathbb{J}(\varphi(k)) \int_0^1 y^{\alpha-\varepsilon} \frac{dy}{y} \leq C \mathbb{J}(\varphi(k)). \end{aligned}$$

Пусть теперь $\alpha < 0$. Из аксиомы 5) при $1 < y < +\infty$ для достаточно малого ε имеем

$$\mathbb{J}\left(\frac{1}{y}\varphi(ky)\right) \leq C_\varepsilon \frac{1}{y} y^{\alpha+\varepsilon} \mathbb{J}(\varphi(k)).$$

Отсюда, аналогично предыдущему, получаем

$$\mathbb{J}\left(\int_k^\infty \varphi(\varkappa) \frac{d\varkappa}{\varkappa}\right) = \mathbb{J}\left(\int_1^\infty \varphi(ky) \frac{dy}{y}\right) \leq C_\varepsilon \mathbb{J}(\varphi(k)) \int_1^\infty y^{\alpha+\varepsilon} \frac{dy}{y} \leq C \mathbb{J}(\varphi(k)).$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 2.5. Пусть $\mathbb{J}(\varphi)$ – автомодельный функционал порядка α . Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует постоянная C такая, что

$$\int_1^\infty \frac{\varphi(k)}{k^{\alpha+\varepsilon}} \frac{dk}{k} \leq C \mathbb{J}(\varphi(k)) \quad (2.7)$$

для любой функции $\varphi(k) \in \mathcal{M}_+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\alpha > 0$. Фиксируя $\varepsilon > 0$, заметим, что при $\varkappa > 1$

$$\chi_{[\varkappa, \infty)}(k) \int_1^\infty \chi_{[1, \varkappa]}(\xi) \varphi(\xi) \frac{d\xi}{\xi} \leq \int_1^k \varphi(\xi) \frac{d\xi}{\xi},$$

а потому

$$\int_1^\infty \chi_{[1, \varkappa]}(\xi) \varphi(\xi) \frac{d\xi}{\xi} \mathbb{J}(\chi_{[\varkappa, \infty)}(k)) \leq \mathbb{J}\left(\int_1^k \varphi(\xi) \frac{d\xi}{\xi}\right) \leq C \mathbb{J}(\varphi(k)), \quad (2.8)$$

здесь и далее C обозначает некоторую постоянную, которая может меняться от формулы к формуле. В последнем неравенстве мы воспользовались леммой 2.4. Согласно формуле (2.3), меняя ε на $\frac{\varepsilon}{2}$ и $\varkappa$ на $\frac{1}{\varkappa}$, имеем

$$\mathbb{J}(\chi_{[\varkappa, \infty]}(k)) \geq \mathbb{J}\left(\chi_{[1, 2]}\left(\frac{k}{\varkappa}\right)\right) \geq C\left(\frac{1}{\varkappa}\right)^{\alpha + \frac{\varepsilon}{2}} \mathbb{J}(\chi_{[1, 2]}(k)).$$

Теперь из (2.8) получаем оценку

$$\int_1^\infty \chi_{[1, \varkappa]}(\xi) \varphi(\xi) \frac{d\xi}{\xi} \leq C \varkappa^{\alpha + \frac{\varepsilon}{2}} \mathbb{J}(\varphi(k)).$$

Пользуясь ею, имеем

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \chi_{[2^j, 2^{j+1}]}(\xi) \frac{\varphi(\xi)}{\xi^{\alpha + \varepsilon}} \frac{d\xi}{\xi} &\leq \frac{1}{2^{j(\alpha + \varepsilon)}} \int_1^\infty \chi_{[1, 2^{j+1}]}(\xi) \varphi(\xi) \frac{d\xi}{\xi} \\ &\leq C_1 \frac{1}{2^{j(\alpha + \varepsilon)}} 2^{(j+1)(\alpha + \frac{\varepsilon}{2})} \mathbb{J}(\varphi(k)) = \frac{2^{\alpha + \frac{\varepsilon}{2}} C_2}{(2^{\frac{\varepsilon}{2}})^j} \mathbb{J}(\varphi(k)) \\ &\leq \frac{C_3}{(2^{\frac{\varepsilon}{2}})^j} \mathbb{J}(\varphi(k)), \end{aligned}$$

где C_1, C_2, C_3 – некоторые постоянные. Далее получаем

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{\varphi(k)}{k^{\alpha + \varepsilon}} \frac{dk}{k} &= \int_1^\infty \sum_{j=0}^\infty \chi_{[2^j, 2^{j+1}]}(\xi) \frac{\varphi(\xi)}{\xi^{\alpha + \varepsilon}} \frac{d\xi}{\xi} \\ &= \sum_{j=0}^\infty \int_1^\infty \chi_{[2^j, 2^{j+1}]}(\xi) \frac{\varphi(\xi)}{\xi^{\alpha + \varepsilon}} \frac{d\xi}{\xi} \leq \sum_{j=0}^\infty \frac{C}{(2^{\frac{\varepsilon}{2}})^j} \mathbb{J}(\varphi(k)) \leq C \mathbb{J}(\varphi(k)). \end{aligned}$$

Пусть теперь $\alpha \leq 0$. Возьмем $\beta > 0$ и положим $\mathbb{J}_1(\varphi) = \mathbb{J}\left(\frac{1}{k^{\beta - \alpha}} \varphi(k)\right)$. Из леммы 2.2 вытекает, что $\mathbb{J}_1(\varphi)$ – автомодельный функционал порядка $\beta > 0$. А потому, пользуясь уже доказанным, для любой неотрицательной измеримой функции $\psi(k)$ имеем

$$\int_1^\infty \frac{\psi(k)}{k^{\beta + \varepsilon}} \frac{dk}{k} \leq C \mathbb{J}_1(\psi(k)) = C \mathbb{J}\left(\frac{1}{k^{\beta - \alpha}} \psi(k)\right).$$

Полагая здесь $\psi(k) = \frac{1}{k^{\alpha - \beta}} \varphi(k)$, заканчиваем доказательство леммы.

Суммируем полученные результаты в виде следующего утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1. Пусть $\mathbb{J}(\varphi)$ – автомодельный функционал порядка α . Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют постоянные C и c такие, что

$$c \mathbb{J}^1\left(\frac{\varphi(k)}{k^{\alpha + \varepsilon}}\right) \leq \mathbb{J}(\varphi(k)) \leq C \mathbb{J}^\infty\left(\frac{\varphi(k)}{k^{\alpha - \varepsilon}}\right) \quad \forall \varphi \in \mathcal{M}_+. \quad (2.9)$$

Наряду с автомодельным функционалом $\mathbb{J}(\cdot)$ удобно рассматривать соответствующий ему функционал $\hat{\mathbb{J}}(\cdot)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Пусть $\mathbb{J}(\varphi(k))$ – автомодельный функционал. Тогда для любой $\psi(y) \in \mathcal{M}_+$ положим

$$\hat{\mathbb{J}}(\psi(y)) = \mathbb{J}\left(\psi\left(\frac{1}{k}\right)\right). \quad (2.10)$$

Очевидно, что $\hat{\mathbb{J}}(\cdot)$ сосредоточен на полуинтервале $(0, 1]$, т.е. $\hat{\mathbb{J}}(\psi(y)) = 0$, если $\text{supp } \psi(y) \subset [1, +\infty)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Пусть $\mathbb{B}$ – банахово пространство, $\mathbb{J}$ – автомодельный функционал. Пусть

$$L^{\mathbb{J}}([1, +\infty) \rightarrow \mathbb{B}) = \{f(k) \in \mathcal{M}([1, +\infty) \rightarrow \mathbb{B}) : \mathbb{J}(\|f(k)\|_{\mathbb{B}}) < \infty\}.$$

Пользуясь оценками (2.9), нетрудно показать, что $L^{\mathbb{J}}([1, +\infty) \rightarrow \mathbb{B})$ – банахово пространство.

Если $f_n(\eta, k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f_\infty(\eta, k)$ в $L^{\mathbb{J}}([1, +\infty) \rightarrow \mathbb{B})$, то можно выделить подпоследовательность $f_{n_m}(\eta, k) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} f_\infty(\eta, k)$ в $\mathbb{B}$ при почти всех $k \in [1, +\infty)$.

Ясно, что $L^{\mathbb{J}}([1, +\infty) \rightarrow \mathbb{B})$ изоморфно пространству $L^{\hat{\mathbb{J}}}((0, 1] \rightarrow \mathbb{B})$, состоящему из функций $f(\eta, y)$, измеримых по $y \in (0, 1)$, со значениями в банаховом пространстве $\mathbb{B}$, и таких, что $\hat{\mathbb{J}}(\|f(\cdot, y)\|_{\mathbb{B}}) < \infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Если порядок автомодельного функционала $\mathbb{J}(\cdot)$ больше нуля, то из (2.9) следует, что $\mathbb{J}\left(\frac{1}{k^j}\right) < \infty$ при $j \geq 0$.

Для обобщенных функций со значениями в банаховом пространстве $\mathbb{B}$ справедливы общие оценки класса относительно автомодельного функционала $\mathbb{J}$. А именно, пусть $\mathbb{J}(\cdot)$ – автомодельный функционал.

1) Если $f \in \mathbb{L}(\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{B})$, то для любых $a > 0$ и $a_1 > 0$ существуют C , N и b такие, что

$$\hat{\mathbb{J}}(y^b \|L_f^\varphi(x, y)\|_{\mathbb{B}}) = \mathbb{J}\left(\frac{1}{k^b} \left\|L_f^\varphi\left(x, \frac{1}{k}\right)\right\|_{\mathbb{B}}\right) \leq C \mathcal{P}_N[\varphi], \quad |x| < a_1, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_a. \quad (2.11)$$

2) Если $f \in \mathbb{L}(E^\uparrow \rightarrow \mathbb{B})$, то для любых $\varepsilon > 0$ и $\varepsilon_1 > 0$ существуют C , N и b такие, что

$$\hat{\mathbb{J}}(y^b \|L_f^\varphi(x, y)\|_{\mathbb{B}}) = \mathbb{J}\left(\frac{1}{k^b} \left\|L_f^\varphi\left(x, \frac{1}{k}\right)\right\|_{\mathbb{B}}\right) \leq C e^{\varepsilon_1 |x|} P_{\varepsilon, N}[\varphi], \quad x \in \mathbb{R}, \quad \forall \varphi \in E_\varepsilon. \quad (2.12)$$

3) Если $f \in \mathbb{L}(E^\downarrow \rightarrow \mathbb{B})$, то существуют a , b , C и N такие, что

$$\hat{\mathbb{J}}(y^b \|L_f^\varphi(x, y)\|_{\mathbb{B}}) = \mathbb{J}\left(\frac{1}{k^b} \left\|L_f^\varphi\left(x, \frac{1}{k}\right)\right\|_{\mathbb{B}}\right) \leq C e^{a|x|} P_{a, N}[\varphi], \quad x \in \mathbb{R}, \quad \forall \varphi \in E^\downarrow. \quad (2.13)$$

4) Если $f \in \mathbb{L}(\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{B})$, то существуют a , b , C и N такие, что

$$\hat{\mathbb{J}}(y^b \|L_f^\varphi(x, y)\|_{\mathbb{B}}) = \mathbb{J}\left(\frac{1}{k^b} \left\|L_f^\varphi\left(x, \frac{1}{k}\right)\right\|_{\mathbb{B}}\right) \leq C(1 + |x|)^a \mathcal{P}_N[\varphi], \quad x \in \mathbb{R}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}. \quad (2.14)$$

Доказательство этих оценок следует из неравенств (1.13)–(1.16) и утверждения 2.1 (см., например, лемму П.5).

§ 3. Основные теоремы

В этом параграфе докажем тауберовы теоремы, касающиеся обобщенных функций над $\mathcal{D}$ со значениями в банаховом пространстве $\mathbb{B}$, т.е. для $f \in \mathbb{L}(\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{B})$. Аналогичные теоремы справедливы и для пространств $\mathbb{L}(E^\dagger \rightarrow \mathbb{B})$, $\mathbb{L}(E^\downarrow \rightarrow \mathbb{B})$ и $\mathbb{L}(\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{B})$. Далее будут приведены их формулировки.

Пусть $\mathcal{L}$ – некоторое локально выпуклое топологическое пространство. Напомним, что для $\omega \in \mathcal{D}$

$$L_f^\omega(x, y) = \left(f(\xi), \frac{1}{y} \omega \left(\frac{x - \xi}{y} \right) \right), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^1 \times (0, 1]. \quad (3.1)$$

Очевидно, что $L_f^\varphi(x, y)$ – непрерывная функция в $\mathbb{R}^1 \times (0, 1]$ со значениями в $\mathcal{L}$.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $\mathbb{J}$ – автомодельный функционал, $\mathbb{B}$ – банахово и $\mathcal{L}$ – локально выпуклое пространства, причем $\mathbb{B} \subset \mathcal{L}$ линейно и непрерывно. Пусть $f \in \mathbb{L}(\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{L})$ и для некоторой $\omega(\xi) \in \overset{n}{\mathcal{D}} \setminus \overset{n+1}{\mathcal{D}}$ выполнены условия: $L_f^\omega(x, y) \in \mathbb{B}$ при п.в. $(x, y) \in \mathbb{R}^1 \times (0, 1]$ и является измеримой функцией со значениями в $\mathbb{B}$, причем для любого $d > 0$ найдется b такое, что

$$\operatorname{ess\,sup}_{|x| < d} \hat{\mathbb{J}}(y^b \|L_f^\omega(x, y)\|_{\mathbb{B}}) < \infty. \quad (3.2)$$

Тогда

$$(f(\xi), \varphi(\xi)) \in \mathbb{B} \quad \forall \varphi \in \overset{n}{\mathcal{D}}. \quad (3.3)$$

Более того, для любого $a > 0$ существует a_1 такое, что для любого b найдутся C и N такие, что

$$\|(f(\xi), \varphi(\xi))\|_{\mathbb{B}} \leq C \operatorname{ess\,sup}_{|x| < a_1} \hat{\mathbb{J}}(y^b \|L_f^\omega(x, y)\|_{\mathbb{B}}) \mathcal{P}_N[\varphi] \quad \forall \varphi \in \overset{n}{\mathcal{D}}_a, \quad (3.4)$$

где a_1 , C и N не зависят от φ , $\mathbb{B}$ и f .

Если $n \geq 0$ и для некоторой функции $\omega_0 \in \overset{0}{\mathcal{D}} \setminus \overset{0}{\mathcal{D}}$ функция $L_f^{\omega_0}(x, 1)$ измерима по x как функция со значениями в $\mathbb{B}$ и

$$\operatorname{ess\,sup}_{|x| < d} \|L_f^{\omega_0}(x, 1)\|_{\mathbb{B}} < \infty \quad \forall d > 0,$$

то $f \in \mathbb{L}(\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{B})$.

Более того, для любого $a > 0$ существует a_1 такое, что для любого b найдутся C и N такие, что

$$\begin{aligned} \|(f(\xi), \varphi(\xi))\|_{\mathbb{B}} &\leq \\ &\leq C \left[\operatorname{ess\,sup}_{|x| < a_1} \hat{\mathbb{J}}(y^b \|L_f^\omega(x, y)\|_{\mathbb{B}}) + \operatorname{ess\,sup}_{|x| < a_1} \|L_f^{\omega_0}(x, 1)\|_{\mathbb{B}} \right] \mathcal{P}_N[\varphi] \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_a, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где a_1 , C и N не зависят от φ , $\mathbb{B}$ и f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть α – порядок автомодельности функционала $\mathbb{J}$. Фиксируем любое $d > 0$. Делая замену переменных $y = \frac{1}{k}$, учитывая (2.9) и (3.2), получаем

$$\begin{aligned} \int_0^1 y^{\alpha+b+\varepsilon} \|L_f^\omega(x, y)\|_{\mathbb{B}} \frac{dy}{y} &= \int_1^\infty \frac{1}{k^{\alpha+b+\varepsilon}} \left\| L_f^\omega\left(x, \frac{1}{k}\right) \right\|_{\mathbb{B}} \frac{dk}{k} \\ &\leq C \mathbb{J}\left(\frac{1}{k^b} \left\| L_f^\omega\left(x, \frac{1}{k}\right) \right\|_{\mathbb{B}}\right) = C \hat{\mathbb{J}}(y^b \|L_f^\omega(x, y)\|_{\mathbb{B}}). \end{aligned}$$

Отсюда, полагая $s > \alpha + b + 1$ и $0 < \beta \leq 1$, для п.в. $|x| < d$ имеем

$$\left\| \int_0^\beta y^s L_f^\omega(x, y) dy \right\|_{\mathbb{B}} \leq \int_0^\beta y^s \|L_f^\omega(x, y)\|_{\mathbb{B}} dy < \operatorname{ess\,sup}_{|x| < d} \hat{\mathbb{J}}(y^s \|L_f^\omega(x, y)\|_{\mathbb{B}}).$$

Здесь первый интеграл есть интеграл Бохнера, и так как

$$\int_{-d}^d dx \int_0^\beta y^s \|L_f^\omega(x, y)\|_{\mathbb{B}} dy < \infty,$$

то $\int_0^\beta y^s L_f^\omega(x, y) dy \in L^1((-d, d) \rightarrow \mathbb{B})$. Поэтому для любой функции $\chi(x) \in \mathcal{D}_d$ интеграл Бохнера $\int \chi(x) \int_0^\beta y^s L_f^\omega(x, y) dy dx$ принадлежит $\mathbb{B}$ и справедлива оценка

$$\left\| \int \chi(x) \int_0^\beta y^s L_f^\omega(x, y) dy dx \right\|_{\mathbb{B}} \leq C \operatorname{ess\,sup}_{|x| < d} \hat{\mathbb{J}}(y^b \|L_f^\omega(x, y)\|_{\mathbb{B}}) \int |\chi(x)| dx. \quad (3.6)$$

Пользуясь теоремой Фубини для интегралов Бохнера (для функций со значениями в банаховом пространстве), имеем

$$\begin{aligned} \int \chi(x) \int_0^\beta y^s L_f^\omega(x, y) dy dx &= \int_0^\beta y^s \int \chi(x) L_f^\omega(x, y) dx dy \\ &= \int_0^\beta y^s dy \int \chi(x) \left(f(\xi), \frac{1}{y} \omega\left(\frac{x-\xi}{y}\right) \right) dx \\ &= \int_0^\beta y^s dy \int \chi(x) (\tilde{f}(t), e^{ixt} \tilde{\omega}(yt)) dx. \end{aligned} \quad (3.7)$$

В частности, при почти всех $y \in (0, 1]$

$$\int \chi(x) (\tilde{f}(t), e^{ixt} \tilde{\omega}(yt)) dx \in \mathbb{B} \quad \forall \chi(x) \in \mathcal{D}_d. \quad (3.8)$$

Здесь мы пользовались формулой (3.1) и в последнем равенстве (3.7) перешли к преобразованию Фурье, учитывая формулу

$$\left(f(\xi), \frac{1}{y} \omega\left(\frac{x-\xi}{y}\right) \right) = \left(F[f(\xi)](t), F\left[\frac{1}{y} \omega\left(\frac{x-\xi}{y}\right)\right](t) \right) = (\tilde{f}(t), e^{ixt} \tilde{\omega}(yt)).$$

Волной обозначаем преобразование Фурье, так что $\tilde{f}(t) \in Z'$ и $\tilde{\omega}(t) \in Z_n$, где $\text{supp } \omega(\xi) \subset [-\gamma, \gamma]$.

Теперь покажем, что почти всюду по y (при тех $y \in (0, 1]$, при которых (3.8) имеет место) выполняется равенство

$$\int \chi(x) (\tilde{f}(t), e^{ixt} \tilde{\omega}(yt)) dx = \left(\tilde{f}(t), \int \chi(x) e^{ixt} \tilde{\omega}(yt) dx \right) \quad (3.9)$$

для элементов пространства $\mathcal{L}$.

Действительно, достаточно показать, что для любой функции $\psi \in \mathcal{L}^*$

$$\left\langle \int \chi(x) (\tilde{f}(t), e^{ixt} \tilde{\omega}(yt)) dx, \psi \right\rangle = \left\langle \left(\tilde{f}(t), \int \chi(x) e^{ixt} \tilde{\omega}(yt) dx \right), \psi \right\rangle. \quad (3.10)$$

Так как слева стоит интеграл Бохнера в $\mathbb{B}$, а $\psi \in \mathcal{L}^* \subset \mathbb{B}^*$ (напомним, что $\mathbb{B} \subset \mathcal{L}$), то

$$\left\langle \int \chi(x) (\tilde{f}(t), e^{ixt} \tilde{\omega}(yt)) dx, \psi \right\rangle = \int \chi(x) \langle (\tilde{f}(t), e^{ixt} \tilde{\omega}(yt)), \psi \rangle dx. \quad (3.11)$$

Рассмотрим выражение, стоящее справа в (3.9). Так как для интегральных сумм выполнено соотношение

$$\sum_j \chi(x_j) e^{ix_j t} \tilde{\omega}(yt) \Delta_j \xrightarrow{\Delta \rightarrow 0} \int \chi(x) e^{ixt} \tilde{\omega}(yt) dx \quad \text{в } Z,$$

то имеем

$$\left(\tilde{f}(t), \sum_j \chi(x_j) e^{ix_j t} \tilde{\omega}(yt) \Delta_j \right) \xrightarrow{\Delta \rightarrow 0} \left(\tilde{f}(t), \int \chi(x) e^{ixt} \tilde{\omega}(yt) dx \right) \quad \text{в } \mathcal{L}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \left\langle \left(\tilde{f}(t), \int \chi(x) e^{ixt} \tilde{\omega}(yt) dx \right), \psi \right\rangle &= \left\langle \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left(\tilde{f}(t), \sum_j \chi(x_j) e^{ix_j t} \tilde{\omega}(yt) \Delta_j \right), \psi \right\rangle \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left\langle \left(\tilde{f}(t), \sum_j \chi(x_j) e^{ix_j t} \tilde{\omega}(yt) \Delta_j \right), \psi \right\rangle \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_j \chi(x_j) \langle (\tilde{f}(t), e^{ix_j t} \tilde{\omega}(yt)), \psi \rangle \Delta_j \\ &= \int \chi(x) \langle (\tilde{f}(t), e^{ixt} \tilde{\omega}(yt)), \psi \rangle dx. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Сравнивая (3.11) и (3.12), получаем равенство (3.9), в котором слева стоит элемент пространства $\mathbb{B}$. Следовательно, и элемент, стоящий справа,

$$\left(\tilde{f}(t), \int \chi(x) e^{ixt} \tilde{\omega}(yt) dx \right) = (\tilde{f}(t), \tilde{\chi}(t) \tilde{\omega}(yt))$$

также принадлежит пространству $\mathbb{B}$. Здесь $\tilde{\chi}(t) = F[\chi(x)](t) \in Z_d$. Точно так же покажем, что интеграл по y можно вынести за знак функционала. Из соотношений (3.7) получим

$$\begin{aligned} \int \chi(x) \int_0^\beta y^s L_f^\omega(x, y) dy dx &= \int_0^\beta y^s \int \chi(x) (\tilde{f}(t), e^{ixt} \tilde{\omega}(yt)) dx dy \\ &= \int_0^\beta y^s (\tilde{f}(t), \tilde{\chi}(t) \tilde{\omega}(yt)) dy \\ &= \left(\tilde{f}(t), \tilde{\chi}(t) \int_0^\beta y^s \tilde{\omega}(yt) dy \right). \end{aligned}$$

Отсюда и из (3.6) имеем

$$\left\| \left(\tilde{f}(t), \tilde{\chi}(t) \int_0^\beta y^s \tilde{\omega}(yt) dy \right) \right\|_{\mathbb{B}} \leq C \operatorname{ess\,sup}_{|x| < d} \hat{\mathbb{J}}(y^b \|L_f^\omega(x, y)\|_{\mathbb{B}}) \int_{-d}^d |\chi(x)| dx. \quad (3.13)$$

Отметим, что

$$\int_0^\beta y^s \tilde{\omega}(yt) dy = \beta^{s+1} \tilde{\eta}(\beta t), \quad \tilde{\eta}(\zeta) = \frac{1}{\zeta^{s+1}} \int_0^\zeta \xi^s \tilde{\omega}(\xi) d\xi, \quad (3.14)$$

и положим $\tilde{\eta}_\beta(t) = \frac{1}{t^{n+1}} \beta^{s+1} \tilde{\eta}(t\beta)$. Таким образом, соотношение (3.13) можно переписать в виде

$$\left\| (\tilde{f}(t), \tilde{\chi}(t) t^{n+1} \tilde{\eta}_\beta(t)) \right\|_{\mathbb{B}} \leq C \operatorname{ess\,sup}_{|x| < d} \hat{\mathbb{J}}(y^b \|L_f^\omega(x, y)\|_{\mathbb{B}}) \int_{-d}^d |\chi(x)| dx. \quad (3.15)$$

Покажем, что семейство функций $\{\tilde{\eta}_\beta(t), t = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}, 0 < \beta \leq 1\}$ удовлетворяет всем условиям леммы П.1 о короне (см. приложение).

Действительно, так как $\tilde{\omega}(\xi) \in Z_n \setminus Z_{n+1}^\gamma$, то $\tilde{\omega}(\xi) = \xi^{n+1} \tilde{\omega}_1(\xi)$, где $\tilde{\omega}_1(0) \neq 0$, и выполнены оценки

$$|\tilde{\omega}(\zeta)| \leq C_N e^{\gamma |\operatorname{Im} \zeta|} (1 + |\operatorname{Re} \zeta|)^{-N}, \quad N = 0, 1, \dots \quad (3.16)$$

Отсюда и из (3.14) вытекает, что для всех $0 < \beta \leq 1$ функции $\tilde{\eta}_\beta(t)$ – целые аналитические, $\tilde{\eta}_\beta(0) \neq 0$ и выполнены оценки

$$\begin{aligned} |\tilde{\eta}_\beta(t)| &\leq \frac{\beta^{s+1}}{|t|^{n+1}} \frac{1}{\beta^{s+1} |t|^{s+1}} \left| \int_0^{t\beta} \zeta^s \tilde{\omega}(\zeta) d\zeta \right| \leq C_\varepsilon e^{(\gamma+\varepsilon)\beta|\tau|} (1 + \beta|\sigma|)^{Q_2} \\ &\leq C_\varepsilon^1 e^{(\gamma+\varepsilon)|\tau|} (1 + |\sigma|)^{Q_2} \end{aligned} \quad (3.17)$$

с некоторыми C_ε^1 и Q_2 , не зависящими от $0 < \beta \leq 1$. Покажем, что выполняется также и приведенная в приложении оценка (П.2). Пусть $|t| \geq 1$; тогда

$$\sup_{0 < \beta \leq 1} |\tilde{\eta}_\beta(t)| \geq \left| \tilde{\eta}_{\frac{1}{(1+\delta)|t|}}(t) \right| = \frac{1}{[(1+\delta)|t|]^{s+1}} \left| \tilde{\eta}\left(\frac{1}{1+\delta} \frac{t}{|t|}\right) \right| \geq \frac{C}{|t|^{s+1}}, \quad (3.18)$$

так как всегда можно выбрать δ таким, чтобы аналитическая функция $\tilde{\eta}(t)$ не обращалась в нуль на окружности радиуса $\frac{1}{1+\delta}$. Если теперь $|t| < 1$, то всегда можно выбрать β_1 и β_2 так, чтобы $\tilde{\eta}(\beta_1 t)$ и $\tilde{\eta}(\beta_2 t)$ не имели общих нулей внутри единичного круга. Поэтому

$$\sup_{0 < \beta \leq 1} |\tilde{\eta}_\beta(t)| \geq \text{const} > 0, \quad |t| < 1. \quad (3.19)$$

Из (3.18) и (3.19) вытекает (П.2).

По лемме П.1 существуют счетное множество индексов I , числа $\lambda_\beta > 0$, $\beta \in I$, $\sum_{\beta \in I} \lambda_\beta = 1$, и целые аналитические функции $\{g_\beta(t), \beta \in I\}$ такие, что

$$|g_\beta(t)| \leq A e^{a_2 |\tau|} (1 + |\sigma|^Q), \quad t \in \mathbb{C}, \quad (3.20)$$

для некоторых A, a_2, Q и

$$\sum_{\beta \in I} \lambda_\beta g_\beta(t) \tilde{\eta}_\beta(t) = 1, \quad t \in \mathbb{C}. \quad (3.21)$$

Пусть $\psi(\xi) \in \mathcal{D}_a^n$; тогда $\tilde{\psi}(t) \in Z_a^n$ и $\tilde{\psi}(t) = t^{n+1} \tilde{\psi}_1(t)$, где $\tilde{\psi}_1 \in Z_a$. Из (3.21) следует, что

$$\tilde{\psi}(t) = \sum_{\beta \in I} \lambda_\beta g_\beta(t) \tilde{\eta}_\beta(t) \tilde{\psi}(t) = \sum_{\beta \in I} \lambda_\beta g_\beta(t) \tilde{\psi}_1(t) t^{n+1} \tilde{\eta}_\beta(t). \quad (3.22)$$

В силу оценок (3.17) и (3.20) множество $\{g_\beta(t) \tilde{\psi}_1(t) t^{n+1} \tilde{\eta}_\beta(t), \beta \in I\}$ ограничено в $Z_{\gamma+a_2+\varepsilon+a}$, следовательно, и в Z , поэтому ряд

$$\sum_{\beta \in I} \lambda_\beta (\tilde{f}(t), g_\beta(t) \tilde{\psi}_1(t) t^{n+1} \tilde{\eta}_\beta(t))$$

сходится в $\mathcal{L}$ к $(\tilde{f}(t), \tilde{\psi}(t))$. Покажем, что он сходится в $\mathbb{B}$, откуда, в частности, будет следовать, что $(f(\xi), \psi(\xi)) \in \mathbb{B}$. Для этого достаточно показать, что множество $\{(\tilde{f}(t), g_\beta(t) \tilde{\psi}_1(t) t^{n+1} \tilde{\eta}_\beta(t)), \beta \in I\}$ ограничено в $\mathbb{B}$. Согласно соотношению (3.15), в котором $\tilde{\chi}(t) = g_\beta(t) \tilde{\psi}_1(t)$, а d выбрано равным $a_1 = \gamma + a_2 + \varepsilon + a$, имеем

$$\begin{aligned} & \|(\tilde{f}(t), g_\beta(t) \tilde{\psi}_1(t) t^{n+1} \tilde{\eta}_\beta(t))\|_{\mathbb{B}} \\ & \leq C \operatorname{ess\,sup}_{|x| < a_1} \hat{\mathbb{J}}(y^b \|L_f^\omega(x, y)\|_{\mathbb{B}}) \int |F^{-1}[g_\beta(t) \tilde{\psi}_1(t)](\xi)| d\xi \\ & \leq C_1 \operatorname{ess\,sup}_{|x| < a_1} \hat{\mathbb{J}}(y^b \|L_f^\omega(x, y)\|_{\mathbb{B}}) \mathcal{P}_{N_1}[\psi_1(\xi)] \\ & \leq C_2 \operatorname{ess\,sup}_{|x| < a_1} \hat{\mathbb{J}}(y^b \|L_f^\omega(x, y)\|_{\mathbb{B}}) \mathcal{P}_N[\psi(\xi)]. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Мы учли (3.20) и тот факт, что $\mathcal{P}_{N_1}[\psi_1(\xi)] \leq C \mathcal{P}_N[\psi(\xi)]$ при достаточно большом N . Таким образом,

$$(f(\xi), \psi(\xi)) = \sum_{\beta \in I} \lambda_\beta (\tilde{f}(t), g_\beta(t) \tilde{\psi}_1(t) t^{n+1} \tilde{\eta}_\beta(t)), \quad (3.24)$$

где ряд справа сходится в $\mathbb{B}$. Отсюда и из оценки (3.23) следует (3.4).

Пусть теперь $n \geq 0$ и нашла функция $\omega_0(\xi) \in \mathcal{D}$, удовлетворяющая условиям теоремы; тогда, рассуждая, как и ранее, имеем

$$\begin{aligned} \left\| \int \chi(x) L_f^{\omega_0}(x, 1) dx \right\|_{\mathbb{B}} &= \|(\tilde{f}(t), \tilde{\chi}(t) \tilde{\omega}_0(t))\|_{\mathbb{B}} \\ &\leq \text{ess sup}_{|x| < d} \|L_f^{\omega_0}(x, 1)\|_{\mathbb{B}} \int |\chi(x)| dx. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Поскольку $\tilde{\omega}_0(0) \neq 0$, очевидно, что семейство функций $\{t^{n+1} \tilde{\eta}_\beta(t), \beta \in I\} \cup \{\tilde{\omega}_0(t)\}$ удовлетворяет всем условиям леммы П.1. Поэтому существуют числа $\nu_\beta > 0$, $\mu > 0$ и функции $g_\beta^1(t)$, $g_0^1(t)$ с надлежащими свойствами такие, что

$$1 = \sum_{\beta \in I} \nu_\beta g_\beta^1(t) t^{n+1} \tilde{\eta}_\beta(t) + \mu \tilde{\omega}_0(t) g_0^1(t).$$

Поэтому для любой $\psi \in \mathcal{D}$ имеем

$$\tilde{\psi}(t) = \sum_{\beta \in I} \nu_\beta g_\beta^1(t) \tilde{\psi}(t) t^{n+1} \tilde{\eta}_\beta(t) + \mu \tilde{\omega}_0(t) g_0^1(t) \tilde{\psi}(t).$$

Теперь, используя оценки (3.23) и (3.25), аналогично предыдущему приходим к оценке (3.5). Теорема доказана.

Отметим, что условие измеримости в теореме 3.1 не является экзотическим. (Существуют простые примеры неизмеримых функций со значениями в банаховых пространствах.) Проверка этого условия иногда бывает достаточно затруднительной, поэтому в некоторых случаях полезны следующие замечания.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Пусть семейство банаховых пространств $\{\mathbb{B}_\varepsilon, \varepsilon > 0\}$ таково, что $\mathbb{B} \subset \mathbb{B}_\varepsilon \subset \mathcal{L}$, причем

$$\mathbb{B} = \left\{ \eta \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathbb{B}_\varepsilon : \sup_{\varepsilon > 0} \|\eta\|_{\mathbb{B}_\varepsilon} < \infty \right\}, \quad \text{кроме того, } \|\eta\|_{\mathbb{B}_\varepsilon} \nearrow \|\eta\|_{\mathbb{B}}, \quad \varepsilon \rightarrow +0. \quad (3.26)$$

Тогда теорема 3.1 останется верной, если вместо измеримости функций $L_f^\omega(x, y)$ и $L_f^{\omega_0}(x, 1)$ как функций со значениями в $\mathbb{B}$ требовать измеримости этих функций как функций со значениями в $\mathbb{B}_\varepsilon$ при любых $\varepsilon > 0$.

Действительно, так как

$$\operatorname{ess\,sup}_{|x|<a_1} \hat{\mathbb{J}}(y^b \|L_f^\omega(x, y)\|_{\mathbb{B}_\varepsilon}) < \infty \quad \text{и} \quad \operatorname{ess\,sup}_{|x|<a_1} \|L_f^{\omega_0}(x, 1)\|_{\mathbb{B}_\varepsilon} < \infty,$$

то, пользуясь теоремой 3.1, для любых $\varepsilon > 0$ и $\varphi \in \mathcal{D}_a^n$ получаем

$$\begin{aligned} & \|(f(\xi), \varphi(\xi))\|_{\mathbb{B}_\varepsilon} \leq \\ & \leq C \left[\operatorname{ess\,sup}_{|x|<a_1} \hat{\mathbb{J}}(y^b \|L_f^\omega(x, y)\|_{\mathbb{B}_\varepsilon}) + \operatorname{ess\,sup}_{|x|<a} \|L_f^{\omega_0}(x, 1)\|_{\mathbb{B}_\varepsilon} \right] \mathcal{P}_N[\varphi]. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Переходя здесь к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ и учитывая, что a_1 , C и N не зависят от банаховых пространств $\mathbb{B}_\varepsilon$, получим (3.5).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Если в условиях теоремы 3.1 $\mathbb{B} = A^*$, где A – сепарабельное банахово пространство, то условие (сильной) измеримости $L_f^\omega(x, y)$ и $L_f^{\omega_0}(x, 1)$ можно заменить условием *-слабой измеримости (см. § 1). При этом в доказательстве вместо (сильного) интеграла Бохнера следует пользоваться *-слабым интегралом Бохнера.

Приведем теперь формулировки аналогичных теорем для пространств $E^\uparrow$, $E^\downarrow$ и $\mathcal{S}$.

ТЕОРЕМА 3.1'. Пусть $\mathbb{J}$ – автомодельный функционал, $\mathbb{B}$ – банахово и $\mathcal{L}$ – локально выпуклое пространства, причем $\mathbb{B} \subset \mathcal{L}$ линейно и непрерывно. Пусть $f \in \mathbb{L}(E^\uparrow \rightarrow \mathcal{L})$ и для некоторой $\omega(\xi) \in E^\uparrow \setminus E^{\uparrow+1}$ выполнено условие: $L_f^\omega(x, y)$ – измеримая при $(x, y) \in \mathbb{R}^1 \times (0, 1]$ функция со значениями в $\mathbb{B}$, причем для любого $\varepsilon > 0$ найдется b такое, что

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}} e^{-\varepsilon|x|} \hat{\mathbb{J}}(y^b \|L_f^\omega(x, y)\|_{\mathbb{B}}) < \infty. \quad (3.28)$$

Тогда

$$(f(\xi), \varphi(\xi)) \in \mathbb{B} \quad \forall \varphi \in E^\uparrow. \quad (3.29)$$

Более того, для любого $\varepsilon > 0$ существует ε_1 такое, что для любого b найдутся C и N такие, что

$$\|(f(\xi), \varphi(\xi))\|_{\mathbb{B}} < C \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}} e^{-\varepsilon_1|x|} \hat{\mathbb{J}}(y^b \|L_f^\omega(x, y)\|_{\mathbb{B}}) P_{\varepsilon, N}[\varphi] \quad \forall \varphi \in E_\varepsilon, \quad (3.30)$$

где ε_1 , C и N не зависят от f , φ и $\mathbb{B}$.

Если $n \geq 0$ и для некоторой основной функции $\omega_0 \in E^\uparrow$ такой, что $\int \omega_0(\xi) d\xi \neq 0$, выполнено следующее: $L_f^{\omega_0}(x, 1)$ – измеримая функция по x со значениями в $\mathbb{B}$ и для любого $\varepsilon > 0$

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}} e^{-\varepsilon|x|} \|L_f^{\omega_0}(x, 1)\|_{\mathbb{B}} < \infty,$$

то $f \in \mathbb{L}(E^\uparrow \rightarrow \mathbb{B})$. Более того, для любого $\varepsilon > 0$ существует ε_1 такое, что для любого b найдутся C и N такие, что

$$\begin{aligned} \|(f(\xi), \varphi(\xi))\|_{\mathbb{B}} & \leq C \left[\operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}} e^{-\varepsilon_1|x|} \hat{\mathbb{J}}(y^b \|L_f^\omega(x, y)\|_{\mathbb{B}}) \right. \\ & \quad \left. + \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}} e^{-\varepsilon_1|x|} \|L_f^{\omega_0}(x, 1)\|_{\mathbb{B}} \right] P_{\varepsilon, N}[\varphi] \quad \forall \varphi \in E_\varepsilon, \end{aligned} \quad (3.31)$$

где ε_1 , C и N не зависят от f , φ и $\mathbb{B}$.

ТЕОРЕМА 3.1''. Пусть $\mathbb{J}$ – автомодельный функционал, $\mathbb{B}$ – банахово и $\mathcal{L}$ – локально выпуклое пространства, причем $\mathbb{B} \subset \mathcal{L}$ линейно и непрерывно. Пусть $f \in \mathbb{L}(E^\downarrow \rightarrow \mathcal{L})$ и для некоторой $\omega(\xi) \in E^\downarrow \setminus E^{\downarrow, n+1}$ выполнено условие: $L_f^\omega(x, y)$ – измеримая при $(x, y) \in \mathbb{R}^1 \times (0, 1]$ функция со значениями в $\mathbb{B}$, причем существуют d и ℓ такие, что

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}} e^{-d|x|} \hat{\mathbb{J}}(y^\ell \|L_f^\omega(x, y)\|_{\mathbb{B}}) < \infty.$$

Тогда $(f(\xi), \varphi(\xi)) \in \mathbb{B} \quad \forall \varphi \in E^{\downarrow, n}$.

Более того, для любых a и b существуют a_1 , C и N такие, что

$$\|(f(\xi), \varphi(\xi))\|_{\mathbb{B}} < C \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}} e^{-a|x|} \hat{\mathbb{J}}(y^b \|L_f^\omega(x, y)\|_{\mathbb{B}}) P_{a_1, N}[\varphi] \quad \forall \varphi \in E^{\downarrow, n},$$

где a_1 , C и N не зависят от f , φ и $\mathbb{B}$.

Если $n \geq 0$ и для некоторой основной функции $\omega_0 \in E^\downarrow$ такой, что $\int \omega_0(\xi) d\xi \neq 0$, выполнено: $L_f^{\omega_0}(x, 1)$ – измеримая функция по x со значениями в $\mathbb{B}$ и существует a такое, что

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}} e^{-a|x|} \|L_f^{\omega_0}(x, 1)\|_{\mathbb{B}} < \infty,$$

то $f \in \mathbb{L}(E^\downarrow \rightarrow \mathbb{B})$. Более того, для любых a и b существуют a_1 , C и N такие, что

$$\begin{aligned} \|(f(\xi), \varphi(\xi))\|_{\mathbb{B}} &\leq C \left[\operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}} e^{-a|x|} \hat{\mathbb{J}}(y^b \|L_f^\omega(x, y)\|_{\mathbb{B}}) \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}} e^{-a|x|} \|L_f^{\omega_0}(x, 1)\|_{\mathbb{B}} \right] P_{a_1, N}[\varphi] \quad \forall \varphi \in E^\downarrow, \end{aligned}$$

где a_1 , C и N не зависят от f , φ и $\mathbb{B}$.

ТЕОРЕМА 3.1'''. Пусть $\mathbb{J}$ – автомодельный функционал, $\mathbb{B}$ – банахово и $\mathcal{L}$ – локально выпуклое пространства, причем $\mathbb{B} \subset \mathcal{L}$ линейно и непрерывно, $f \in \mathbb{L}(\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{L})$, $\omega(\xi) \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{S}^{\downarrow, n+1}$, и пусть $L_f^\omega(x, y)$ – измеримая при $(x, y) \in \mathbb{R}^1 \times (0, 1]$ функция со значениями в $\mathbb{B}$, причем существуют d и ℓ такие, что

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{(1+|x|)^d} \hat{\mathbb{J}}(y^\ell \|L_f^\omega(x, y)\|_{\mathbb{B}}) < \infty.$$

Тогда $(f(\xi), \varphi(\xi)) \in \mathbb{B} \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}^{\downarrow, n}$ и для любых a и b существуют N и C такие, что

$$\|(f(\xi), \varphi(\xi))\|_{\mathbb{B}} < C \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{(1+|x|)^a} \hat{\mathbb{J}}(y^b \|L_f^\omega(x, y)\|_{\mathbb{B}}) \mathcal{P}_N[\varphi] \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}^{\downarrow, n},$$

причем C и N не зависят от f , φ и $\mathbb{B}$.

Если $n \geq 0$ и найдется функция $\omega_0 \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{S}^0$ такая, что $L_f^{\omega_0}(x, 1)$ – измеримая функция по x со значениями в $\mathbb{B}$ и для некоторого d

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{(1 + |x|)^d} \|L_f^{\omega_0}(x, 1)\|_{\mathbb{B}} < \infty,$$

то $f \in \mathbb{L}(\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{B})$. Более того, для любых a и b существуют C и N такие, что

$$\begin{aligned} \|(f(\xi), \varphi(\xi))\|_{\mathbb{B}} &\leq C \left[\operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{(1 + |x|)^a} \hat{\mathbb{J}}(y^b \|L_f^{\omega}(x, y)\|_{\mathbb{B}}) \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{(1 + |x|)^a} \|L_f^{\omega_0}(x, 1)\|_{\mathbb{B}} \right] \mathcal{P}_N[\varphi] \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}, \end{aligned}$$

причем C и N не зависят от f , φ и $\mathbb{B}$.

Теоремы 3.1'–3.1''' доказываются аналогично теореме 3.1, только надо воспользоваться соответствующими общими оценками класса для соответствующих пространств (см. (2.12)–(2.14)) и леммами П.2–П.4 (см. приложение). Замечания 3.1, 3.2 остаются справедливыми и для этих теорем.

Для дальнейшего нам понадобятся несколько лемм.

ЛЕММА 3.1. Пусть $\mathbb{B}$ – банахово пространство и обобщенная функция $f \in \mathbb{L}(\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{B})$ квазиасимптотически ограничена относительно автомодельного функционала $\mathbb{J}$ на $\mathcal{D}^{\ell}$ для некоторого целого ℓ . Другими словами,

$$\mathbb{J} \left(\left\| \left(f \left(\frac{\xi}{k} \right), \varphi(\xi) \right) \right\|_{\mathbb{B}} \right) < \infty \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}^{\ell}. \quad (3.32)$$

Тогда для любого $a > 0$ существуют C и N такие, что

$$\mathbb{J} \left(\left\| \left(f \left(\frac{\xi}{k} \right), \varphi(\xi) \right) \right\|_{\mathbb{B}} \right) \leq C \mathcal{P}_N[\varphi(\xi)] \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_a^{\ell}. \quad (3.33)$$

(Напомним, что если $\ell < 0$, то $\mathcal{D}^{\ell} = \mathcal{D}$.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По аксиоме 3) для любой φ из $\mathcal{D}^{\ell}$ имеем

$$\mathbb{J} \left(\left\| \left(f \left(\frac{\xi}{k} \right), \varphi(\xi) \right) \right\|_{\mathbb{B}} \right) = \lim_{\varkappa \rightarrow +\infty} \mathbb{J} \left(\chi_{[1, \varkappa]}(k) \left\| \left(f \left(\frac{\xi}{k} \right), \varphi(\xi) \right) \right\|_{\mathbb{B}} \right). \quad (3.34)$$

Выражение, стоящее справа, есть предел монотонно возрастающей последовательности непрерывных выпуклых функционалов на $\mathcal{D}^{\ell}$. Действительно, их выпуклость

очевидна, а их непрерывность означает непрерывность на любом $\overset{\ell}{\mathcal{D}}_a$, $a > 0$. Замечая, что $\varphi(k\xi) \in \overset{\ell}{\mathcal{D}}_a$, если $\varphi(\xi) \in \overset{\ell}{\mathcal{D}}_a$ и $k > 1$, и пользуясь леммой 2.3, для $\varphi \in \overset{\ell}{\mathcal{D}}_a$ имеем

$$\begin{aligned} & \mathbb{J}\left(\chi_{[1, \varkappa]}(k) \left\| \left(f\left(\frac{\xi}{k}\right), \varphi(\xi) \right) \right\|_{\mathbb{B}} \right) \\ & \leq C_{\varepsilon} \sup_{1 \leq k \leq \varkappa} \frac{1}{k^{\alpha-\varepsilon}} \left\| \left(f\left(\frac{\xi}{k}\right), \varphi(\xi) \right) \right\|_{\mathbb{B}} \\ & \leq C_{\varepsilon} \sup_{1 \leq k \leq \varkappa} \frac{k}{k^{\alpha-\varepsilon}} \|(f(\xi), \varphi(k\xi))\|_{\mathbb{B}} \leq C_{\varepsilon}^1 \sup_{1 \leq k \leq \varkappa} \frac{k}{k^{\alpha-\varepsilon}} \mathcal{P}_N[\varphi(k\xi)] \\ & = C_{\varepsilon}^2 \sup_{1 \leq k \leq \varkappa} \frac{k^{2N+2}}{k^{\alpha-\varepsilon}} \mathcal{P}_N[\varphi(\xi)] \leq C_{\varepsilon, \varkappa}^1 \mathcal{P}_N[\varphi], \end{aligned}$$

где N зависит от a . Таким образом, функционал, стоящий слева в (3.34), непрерывен снизу на $\overset{\ell}{\mathcal{D}}$. В силу бочечности $\overset{\ell}{\mathcal{D}}$ он будет непрерывен на $\overset{\ell}{\mathcal{D}}$. Отсюда и следует (3.33).

СЛЕДСТВИЕ 3.1. *В условиях леммы для любых a и a_1 существуют A , N и b такие, что*

$$\sup_{\substack{|x| < a_1 \\ 0 < y \leq 1}} y^b \mathbb{J}\left(\left\| L_f^{\varphi}\left(\frac{x}{k}, \frac{y}{k}\right) \right\|_{\mathbb{B}}\right) \leq A \mathcal{P}_N[\varphi] \quad \forall \varphi \in \overset{\ell}{\mathcal{D}}_a.$$

Действительно, фиксируя a и a_1 и подставляя в (3.33) функцию $\frac{1}{y}\varphi\left(\frac{x-\xi}{y}\right)$, где $\text{supp } \varphi(\xi) \subset [-a, a]$, имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{J}\left(\left\| L_f^{\varphi}\left(\frac{x}{k}, \frac{y}{k}\right) \right\|_{\mathbb{B}}\right) &= \mathbb{J}\left(\left\| \left(f\left(\frac{\xi}{k}\right), \frac{1}{y}\omega\left(\frac{x-\xi}{y}\right) \right) \right\|_{\mathbb{B}}\right) \\ &\leq C \mathcal{P}_N\left[\frac{1}{y}\varphi\left(\frac{x-\xi}{y}\right)\right] \leq \frac{A}{y^b} \mathcal{P}_N[\varphi(\xi)] \quad \forall \varphi \in \overset{\ell}{\mathcal{D}}_a, \quad |x| < a_1, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Лемма 3.1 и следствие 3.1 останутся справедливыми, если в (3.32) и (3.33) заменить k на $\frac{1}{k}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. Лемма 3.1, следствие 3.1 и замечание 3.3 останутся справедливыми, если вместо пространства $\mathcal{D}$ рассматривать пространства $E^{\uparrow}$, $E^{\downarrow}$ или $\mathcal{S}$, следует только в оценках (3.33) и следствии заменить правую часть на соответствующую общую оценку класса (см. § 1).

ЛЕММА 3.2. Пусть $\mathbb{B}$ – банахово пространство и обобщенная функция $\tilde{g}(t)$ принадлежит $\mathbb{L}(Z \rightarrow \mathbb{B})$. Тогда для любого целого $q \geq 0$ справедливо соотношение

$$\begin{aligned} k(\tilde{g}(kt), \tilde{\varphi}(t)) = & \sum_{j=0}^q (-1)^j (\tilde{g}(t), t^j \tilde{\varphi}^{(j)}(t)) \int_1^k \frac{1}{k_1} \frac{dk_1}{k_1} \int_1^{k_1} \cdots \frac{1}{k_{j-1}} \frac{dk_{j-1}}{k_{j-1}} \int_1^{k_{j-1}} \frac{1}{k_j} \frac{dk_j}{k_j} \\ & + (-1)^{q+1} \int_1^k \frac{1}{k_1} \frac{dk_1}{k_1} \int_1^{k_1} \cdots \frac{1}{k_q} \frac{dk_q}{k_q} \int_1^{k_q} \frac{d\xi}{\xi} \xi^{q+1} (\tilde{g}(t\xi), t^{q+1} \tilde{\varphi}^{(q+1)}(t)). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Если $\mathbb{J}(\cdot)$ – автомодельный функционал порядка $\alpha > 0$, то

$$\begin{aligned} \mathbb{J}(k \|(\tilde{g}(kt), \tilde{\varphi}(t))\|_{\mathbb{B}}) & \leq \sum_{j=0}^q C_j \cdot \mathbb{J}\left(\frac{1}{k^j}\right) \cdot \|(t^j \tilde{g}(t), \tilde{\varphi}^{(j)}(t))\|_{\mathbb{B}} \\ & + C_{q+1} \cdot \mathbb{J}\left(\frac{1}{k^{q+1}} k \left\| \left((kt)^{q+1} \tilde{g}(kt), \left(\frac{d}{dt}\right)^{q+1} \tilde{\varphi}(t) \right) \right\|_{\mathbb{B}} \right) \quad \forall \tilde{\varphi} \in Z. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Здесь C_j – постоянные, зависящие только от $\mathbb{J}$, причем $C_0 = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $t\tilde{g}(t) = \tilde{f}(t) \in \mathbb{L}(Z \rightarrow \mathbb{B})$. Сперва заметим, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \int_1^k (\tilde{f}(t\xi), \tilde{\varphi}'(t)) \frac{d\xi}{\xi} & = \frac{1}{k} \left(\tilde{f}(t), \int_1^k \tilde{\varphi}'\left(\frac{t}{\xi}\right) \frac{d\xi}{\xi^2} \right) = \frac{1}{k} \left(\tilde{f}(t), \int_{1/k}^1 \tilde{\varphi}'(t\xi) d\xi \right) \\ & = \frac{1}{k} \left(\tilde{f}(t), \frac{1}{t} \int_{t/k}^t \tilde{\varphi}'(\xi) d\xi \right) = \frac{1}{k} \left(\tilde{f}(t), \frac{\tilde{\varphi}(t) - \tilde{\varphi}(t/k)}{t} \right) \\ & = \frac{1}{k} (\tilde{g}(t), \tilde{\varphi}(t)) - \frac{1}{k} \left(\tilde{g}(t), \tilde{\varphi}\left(\frac{t}{k}\right) \right), \end{aligned}$$

откуда имеем

$$k(\tilde{g}(kt), \tilde{\varphi}(t)) = (\tilde{g}(t), \tilde{\varphi}(t)) - \int_1^k \frac{1}{\xi} \frac{d\xi}{\xi} \xi((t\xi)\tilde{g}(t\xi), \tilde{\varphi}'(t)).$$

Применяя эту формулу к подынтегральному выражению (для функций $t\tilde{g}(t)$ и $\tilde{\varphi}'(t)$), получим

$$\begin{aligned} k(\tilde{g}(kt), \tilde{\varphi}(t)) & = (\tilde{g}(t), \tilde{\varphi}(t)) - (t\tilde{g}(t), \tilde{\varphi}'(t)) \int_1^k \frac{1}{k_1} \frac{dk_1}{k_1} \\ & + \int_1^k \frac{1}{k_1} \frac{dk_1}{k_1} \int_1^{k_1} \frac{1}{k_2} \frac{dk_2}{k_2} k_2((tk_2)^2 \tilde{g}(tk_2), \tilde{\varphi}''(t)). \end{aligned}$$

Производя далее то же самое q раз, получим (3.35).

Делая в (3.35) оценку по норме $\mathbb{B}$, применяя к обеим частям полученного неравенства функционал $\mathbb{J}(\cdot)$ и пользуясь неравенством Харди (сперва для $\mathbb{J}(\cdot)$, затем для $\mathbb{J}(\frac{1}{k} \cdot)$ и т.д.; см.(2.6)), получим (3.36). Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.5. Лемма 3.2 останется справедливой, если вместо пространства Z рассматривать пространства $\tilde{E}^\uparrow$, $\tilde{E}^\downarrow$ или $\mathcal{S}$.

ЛЕММА 3.3. Пусть $\mathbb{B}$ – банахово пространство, $\mathbb{J}$ – автомодельный функционал порядка α , $f(\xi) \in \mathbb{L}(\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{B})$ и для некоторого n нашлась функция $\omega(\xi) \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}^{n+1}$ такая, что для любого $a > 0$ существует d такое, что

$$\sup_{\substack{|x| < a \\ 0 < y \leq 1}} y^d \mathbb{J} \left(\left\| L_f^\omega \left(\frac{x}{k}, \frac{y}{k} \right) \right\|_{\mathbb{B}} \right) < \infty. \quad (3.37)$$

Тогда обобщенная функция $f(\xi)$ квазиасимптотически ограничена относительно $\mathbb{J}$ на $\mathcal{D}^n$, т.е.

$$\mathbb{J} \left(\left\| \left(f \left(\frac{\xi}{k} \right), \varphi(\xi) \right) \right\|_{\mathbb{B}} \right) < \infty \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}^n. \quad (3.38)$$

Более того, для любого a существует a_1 такое, что для любого b найдутся C и N такие, что

$$\mathbb{J} \left(\left\| \left(f \left(\frac{\xi}{k} \right), \varphi(\xi) \right) \right\|_{\mathbb{B}} \right) \leq C \sup_{\substack{|x| < a_1 \\ 0 < y \leq 1}} y^b \mathbb{J} \left(\left\| L_f^\omega \left(\frac{x}{k}, \frac{y}{k} \right) \right\|_{\mathbb{B}} \right) \mathcal{P}_N[\varphi] \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_a^n. \quad (3.39)$$

Здесь числа a_1 , C и N не зависят от f и $\mathbb{B}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Рассмотрим множество измеримых на $(1, +\infty)$ функций $\eta(k)$ со значениями в $\mathbb{B}$, т.е. функций из $\mathcal{M}((1, +\infty) \rightarrow \mathbb{B})$, для которых $\mathbb{J}(\frac{1}{k^\varepsilon} \|\eta(k)\|_{\mathbb{B}}) < \infty$. Это множество есть банахово пространство с нормой $\|\eta\|_{H^\varepsilon} = \mathbb{J}(\frac{1}{k^\varepsilon} \|\eta(k)\|_{\mathbb{B}})$ (см. замечание 2.1). Обозначим его H^ε . В качестве локально выпуклого пространства $\mathcal{L}$ рассмотрим пространство измеримых на $[1, +\infty)$ функций со значениями в $\mathbb{B}$ со счетным числом полунорм

$$Q_N[\eta(k)] = \mathbb{J}(\chi_{[1, N]}(k) \|\eta(k)\|_{\mathbb{B}}), \quad N = 2, 3, \dots$$

Ясно, что $H^\varepsilon \subset \mathcal{L}$ линейно и непрерывно, и если $H = \{\eta(k) \in \mathcal{M}((1, +\infty) \rightarrow \mathbb{B}) : \|\eta(k)\|_H = \mathbb{J}(\|\eta(k)\|_{\mathbb{B}}) < \infty\}$, то

$$H = \left\{ \eta \in \bigcap_{\varepsilon > 0} H^\varepsilon : \sup_{\varepsilon} \|\eta\|_{H^\varepsilon} < \infty \right\}, \quad \text{кроме того, } \|\eta\|_{H^\varepsilon} \nearrow \|\eta\|_H, \quad \varepsilon \rightarrow +0$$

(см. аксиому 3) автомодельных функционалов).

Рассмотрим обобщенную функцию $g(\xi) \in \mathbb{L}(\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{L})$, сопоставляющую каждой $\varphi \in \mathcal{D}$ функцию $\eta(k) \in \mathcal{L}$, определяемую формулой

$$\eta(k) = (g(\xi), \varphi(\xi)) = \left(f \left(\frac{\xi}{k} \right), \varphi(\xi) \right) = k(f(\xi), \varphi(k\xi)) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

Очевидно, что функция $\eta(k)$ принадлежит $\mathcal{L}$, поскольку она является непрерывной по k со значениями в $\mathbb{B}$. Далее, имеем

$$L_g^\omega(x, y) = \left(g(\xi), \frac{1}{y} \omega\left(\frac{x - \xi}{y}\right) \right) = k \left(f(\xi), \frac{1}{y} \omega\left(\frac{x - k\xi}{y}\right) \right) = L_f^\omega\left(\frac{x}{k}, \frac{y}{k}\right). \quad (3.40)$$

В силу (3.37) для любого $a > 0$ найдутся A и d такие, что

$$\begin{aligned} \|L_g^\omega(x, y)\|_{H^\varepsilon} &= \mathbb{J}\left(\frac{1}{k^\varepsilon} \left\| L_f^\omega\left(\frac{x}{k}, \frac{y}{k}\right) \right\|_{\mathbb{B}}\right) \leq \mathbb{J}\left(\left\| L_f^\omega\left(\frac{x}{k}, \frac{y}{k}\right) \right\|_{\mathbb{B}}\right) \\ &= \|L_g^\omega(x, y)\|_H \leq \frac{A}{y^d} \end{aligned} \quad (3.41)$$

при $|x| < a$, $0 < y \leq 1$, так что $L_g^\omega(x, y) \in H \subset H^\varepsilon$. Покажем, что функция $L_g^\omega(x, y)$ измерима по (x, y) как функция со значениями в H^ε .

Действительно, из (3.40) следует, что $\psi_n(x, y) = \chi_{[1, n]}(k) L_f^\omega\left(\frac{x}{k}, \frac{y}{k}\right)$ непрерывна по (x, y) как функция со значениями в H^ε (ее носитель по k компактен). Из соотношений

$$\begin{aligned} \|L_g^\omega(x, y) - \psi_n(x, y)\|_{H^\varepsilon} &= \mathbb{J}\left(\frac{1}{k^\varepsilon} \left\| (1 - \chi_{[1, n]}(k)) L_f^\omega\left(\frac{x}{k}, \frac{y}{k}\right) \right\|_{\mathbb{B}}\right) \\ &\leq \frac{1}{n^\varepsilon} \mathbb{J}\left(\left\| L_f^\omega\left(\frac{x}{k}, \frac{y}{k}\right) \right\|_{\mathbb{B}}\right) \\ &\leq \frac{1}{n^\varepsilon} \mathbb{J}\left(\left\| L_f^\omega\left(\frac{x}{k}, \frac{y}{k}\right) \right\|_{\mathbb{B}}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

вытекает, что функция $L_g^\omega(x, y)$ есть предел непрерывных функций со значениями в H^ε , а потому она измерима.

Из соотношений (3.41) имеем

$$\sup_{|x| < a} \hat{\mathbb{J}}^\infty(y^d \|L_g^\omega(x, y)\|_H) < \infty,$$

где, напомним, $\hat{\mathbb{J}}^\infty(\cdot) = \text{ess sup}_{0 < y \leq 1}(\cdot)$.

Замечая теперь, что выполнены все условия теоремы 3.1 (при $\mathbb{J} = \mathbb{J}^\infty$ и $\mathbb{B} = H$), и учитывая замечание 3.1 (где $\mathbb{B}_\varepsilon = H_\varepsilon$), заключаем, что $(g(\xi), \varphi(\xi)) \in H$ для любой $\varphi \in \mathcal{D}$, причем для любого $a > 0$ существует a_1 такое, что для любого b найдутся C и N такие, что

$$\begin{aligned} \|(g(\xi), \varphi(\xi))\|_H &= \left\| \left(f\left(\frac{\xi}{k}\right), \varphi(\xi) \right) \right\|_H \\ &\leq C \sup_{|x| < a_1} \hat{\mathbb{J}}^\infty(y^b \|L_g^\omega(x, y)\|_H) \mathcal{P}_N[\varphi], \quad \varphi \in \mathcal{D}_a^n \end{aligned}$$

(см. (3.4)), при этом a_1 , C и N не зависят от f и $\mathbb{B}$. Отсюда получаем, что для любого $a > 0$ найдется a_1 такое, что для любого b существуют C_1 и N такие, что

$$\begin{aligned} \mathbb{J}\left(\left\|f\left(\frac{\xi}{k}\right), \varphi(\xi)\right\|_{\mathbb{B}}\right) &\leq C \sup_{|x| < a_1} \hat{\mathbb{J}}^\infty\left(y^b \mathbb{J}\left(\left\|L_f^\omega\left(\frac{x}{k}, \frac{y}{k}\right)\right\|_{\mathbb{B}}\right)\right) \mathcal{P}_N[\varphi] \\ &\leq C \sup_{|x| < a_1} \hat{\mathbb{J}}^\infty\left(y^b \frac{A}{y^d}\right) \mathcal{P}_N[\varphi] \leq AC \mathcal{P}_N[\varphi] \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_a^n. \end{aligned}$$

Здесь считаем, что $b > d$ и, следовательно, $\hat{\mathbb{J}}^\infty(y^{b-d}) = 1$. Кроме того, использована оценка (3.41). Неравенство (3.38), а вместе с ним и лемма доказаны.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.6. Лемма 3.3 останется справедливой, если всюду в $L_f^\omega\left(\frac{x}{k}, \frac{y}{k}\right)$ и $f\left(\frac{\xi}{k}\right)$ заменить k на $\frac{1}{k}$.

ЛЕММА 3.4. Пусть выполнены условия леммы 3.3; тогда

$$\mathbb{J}\left(\left\|f\left(\frac{\xi}{k}\right), \varphi(\xi)\right\|_{\mathbb{B}}\right) < \infty \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_a^m, \quad (3.42)$$

где $m = \min\{n, [-\alpha]\}$.

Более того, если $\omega_0(\xi) \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_a^0$, то для любого $a > 0$ существует a_1 такое, что для любого b найдутся C и N такие, что

$$\begin{aligned} \mathbb{J}\left(\left\|f\left(\frac{\xi}{k}\right), \varphi(\xi)\right\|_{\mathbb{B}}\right) &\leq C \left[\sup_{\substack{|x| < a_1 \\ 0 < y \leq 1}} y^b \mathbb{J}\left(\left\|L_f^\omega\left(\frac{x}{k}, \frac{y}{k}\right)\right\|_{\mathbb{B}}\right) \right. \\ &\quad \left. + \sup_{|x| < a_1} \hat{\mathbb{J}}(y^b \|L_f^\omega(x, y)\|_{\mathbb{B}}) + \sup_{|x| < a_1} \|L_f^{\omega_0}(x, 1)\|_{\mathbb{B}} \right] \mathcal{P}_N[\varphi] \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_a^m. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Здесь числа a_1 , C и N не зависят от f и $\mathbb{B}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $n < [-\alpha] + 1$, то $m = n$ и наши утверждения следуют из леммы 3.3. Пусть $n \geq [-\alpha] + 1$. Воспользуемся леммой 3.2. Для этого рассмотрим функционал $\mathbb{J}\left(\frac{1}{k^{m+1}} \cdot\right)$, его порядок равен $\beta = \alpha + [-\alpha] + 1 > 0$ (см. лемму 2.2). Теперь можно воспользоваться соотношением (3.36) для этого функционала и для обобщенной функции $\tilde{g}(t) = t^{m+1} \tilde{f}(t)$. Пусть $\varphi(\xi)$ — произвольная функция из $\mathcal{D}_a^m$; тогда $\tilde{\varphi}(t) = t^{m+1} \tilde{\psi}(t)$, где $\tilde{\psi}(t) \in Z$. Согласно (3.36) для любой $\tilde{\psi}(t) \in Z$ и $q = n - m - 1 \geq 0$ имеем

$$\begin{aligned} &\mathbb{J}\left(\frac{1}{k^{m+1}} k \|((kt)^{m+1} \tilde{f}(kt), \tilde{\psi}(t))\|_{\mathbb{B}}\right) \\ &\leq \sum_{j=0}^{n-m-1} C_j \mathbb{J}\left(\frac{1}{k^{m+1}} \frac{1}{k^j}\right) \|(t^{j+m+1} \tilde{f}(t), \tilde{\psi}^{(j)}(t))\|_{\mathbb{B}} \\ &\quad + C_{n-m} \mathbb{J}\left(\frac{1}{k^{m+1}} \frac{1}{k^{n-m}} k \left\| \left((kt)^{n+1} \tilde{f}(kt), \left(\frac{d}{dt}\right)^{n-m} \tilde{\psi}(t) \right) \right\|_{\mathbb{B}}\right). \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{J}(k \|(\tilde{f}(kt), t^{m+1}\tilde{\psi}(t))\|_{\mathbb{B}}) &\leq c \sum_{j=0}^{n-m-1} \|(\tilde{f}(t), t^j t^{m+1}\tilde{\psi}^{(j)}(t))\|_{\mathbb{B}} \\ &+ c_1 \mathbb{J}\left(k \left\| \left(\tilde{f}(kt), t^{n+1} \left(\frac{d}{dt} \right)^{n-m} \tilde{\psi}(t) \right) \right\|_{\mathbb{B}}\right). \end{aligned} \quad (3.44)$$

Учитывая теперь, что $t^{n+1}\tilde{\psi}^{(n-m)} \in Z_n$, и переходя к преобразованию Фурье, получаем (3.42). Чтобы получить оценку (3.43), снова воспользуемся теоремой 3.1. Согласно (3.5) для любого $a > 0$ существует a_1 такое, что для любого b найдутся C_1 и N_1 такие, что

$$\begin{aligned} \|(\tilde{f}(t), t^j t^{m+1}\tilde{\psi}^{(j)}(t))\|_{\mathbb{B}} &\leq C_1 \left[\sup_{|x| < a_1} \hat{\mathbb{J}}(y^b \|L_f^\omega(x, y)\|_{\mathbb{B}}) + \sup_{|x| < a_1} \|L_f^{\omega_0}(x, 1)\|_{\mathbb{B}} \right] \\ &\times \mathcal{P}_{N_1} [F^{-1}[t^j t^{m+1}\tilde{\psi}^{(j)}(t)](\xi)] \quad \forall \psi \in \mathcal{D}_a, \end{aligned} \quad (3.45)$$

где a_1 , C_1 и N_1 не зависят от f и $\mathbb{B}$. Ясно, что для любого $a > 0$ существуют C_2 и N такие, что

$$\mathcal{P}_{N_1} [F^{-1}[t^j t^{m+1}\tilde{\psi}^{(j)}(t)](\xi)] \leq C_2 \mathcal{P}_N[\varphi], \quad j = 0, 1, \dots, n-m-1, \quad \varphi \in \mathcal{D}_a.$$

Учитывая эту оценку, с помощью (3.45) оцениваем слагаемые справа в (3.44), стоящие под знаком суммы. Последнее же слагаемое в (3.44) оценивается с помощью уже полученного неравенства (3.39). В результате получаем оценку (3.43). Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.7. Леммы 3.3 и 3.4 останутся справедливыми, если пространство $\mathcal{D}$ заменить на одно из пространств $E^\uparrow$, $E^\downarrow$ или $\mathcal{S}$, следует только оценки (3.37), (3.39) и (3.43) заменить на общие оценки класса (см. (2.12)–(2.14)).

ЛЕММА 3.5. Пусть $\mathbb{B}$ – банахово пространство, $\mathbb{J}(\varphi)$ – автомодельный функционал, $f(\xi) \in \mathbb{L}(\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{B})$ и $\omega(\xi) \in \mathcal{D}$. Пусть, далее, существуют A и b такие, что

$$\mathbb{J}\left(\left\|L_f^\omega\left(\frac{x}{k}, \frac{y}{k}\right)\right\|_{\mathbb{B}}\right) \leq \frac{A}{y^b}, \quad x^2 + y^2 = 1, \quad y > 0. \quad (3.46)$$

Тогда для любого $a > 0$ найдутся C и d такие, что

$$\mathbb{J}\left(\left\|L_f^\omega\left(\frac{x}{k}, \frac{y}{k}\right)\right\|_{\mathbb{B}}\right) \leq \frac{C}{y^d}, \quad |x| < a, \quad 0 < y \leq 1. \quad (3.47)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть α – порядок $\mathbb{J}(\cdot)$, $a > 0$ и $|x| < a$. Положим

$$x = k_0 x_0, \quad y = k_0 y_0, \quad \text{где} \quad x_0^2 + y_0^2 = 1, \quad k_0^2 = x^2 + y^2.$$

Рассмотрим два случая.

1) $k_0 \leq 1$. Пользуясь аксиомой 5) автомодельных функционалов, имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{J}\left(\left\|L_f^\omega\left(\frac{x}{k}, \frac{y}{k}\right)\right\|_{\mathbb{B}}\right) &= \mathbb{J}\left(\chi_{[1, \infty)}(k) \left\|L_f^\omega\left(\frac{x_0}{\frac{1}{k_0}k}, \frac{y_0}{\frac{1}{k_0}k}\right)\right\|_{\mathbb{B}}\right) \\ &= \mathbb{J}\left(\chi_{[\frac{1}{k_0}, \infty)}\left(\frac{1}{k_0}k\right) \left\|L_f^\omega\left(\frac{x_0}{\frac{1}{k_0}k}, \frac{y_0}{\frac{1}{k_0}k}\right)\right\|_{\mathbb{B}}\right) \\ &\leq \mathbb{J}\left(\chi_{[1, \infty)}\left(\frac{1}{k_0}k\right) \left\|L_f^\omega\left(\frac{x_0}{\frac{1}{k_0}k}, \frac{y_0}{\frac{1}{k_0}k}\right)\right\|_{\mathbb{B}}\right) \\ &\leq C_\varepsilon \left(\frac{1}{k_0}\right)^{\alpha+\varepsilon} \mathbb{J}\left(\left\|L_f^\omega\left(\frac{x_0}{k}, \frac{y_0}{k}\right)\right\|_{\mathbb{B}}\right) \leq C_\varepsilon \left(\frac{1}{k_0}\right)^{\alpha+\varepsilon} \frac{A}{y_0^b} \\ &\leq C_\varepsilon k_0^{b-\alpha-\varepsilon} \frac{A}{y^d} \leq C_1 \frac{(x^2 + y^2)^{\frac{b-\alpha-\varepsilon}{2}}}{y^b}, \end{aligned}$$

откуда и следует (3.47) в этом случае.

2) $k_0 > 1$. Пользуясь аксиомой 5), а также леммой 2.3 и оценкой класса (1.13), имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{J}\left(\left\|L_f^\omega\left(\frac{x}{k}, \frac{y}{k}\right)\right\|_{\mathbb{B}}\right) &= \mathbb{J}\left(\chi_{[\frac{1}{k_0}, \infty)}\left(\frac{1}{k_0}k\right) \left\|L_f^\omega\left(\frac{x_0}{\frac{1}{k_0}k}, \frac{y_0}{\frac{1}{k_0}k}\right)\right\|_{\mathbb{B}}\right) \\ &\leq \mathbb{J}\left(\chi_{[1, \infty)}\left(\frac{1}{k_0}k\right) \left\|L_f^\omega\left(\frac{x_0}{\frac{1}{k_0}k}, \frac{y_0}{\frac{1}{k_0}k}\right)\right\|_{\mathbb{B}}\right) \\ &\quad + \mathbb{J}\left(\chi_{[\frac{1}{k_0}, 1]}\left(\frac{1}{k_0}k\right) \left\|L_f^\omega\left(\frac{x_0}{\frac{1}{k_0}k}, \frac{y_0}{\frac{1}{k_0}k}\right)\right\|_{\mathbb{B}}\right) \\ &\leq c_\varepsilon \left(\frac{1}{k_0}\right)^{\alpha-\varepsilon} \mathbb{J}\left(\left\|L_f^\omega\left(\frac{x_0}{k}, \frac{y_0}{k}\right)\right\|_{\mathbb{B}}\right) \\ &\quad + C_\varepsilon \operatorname{ess\,sup}_{1 \leq k \leq k_0} \frac{1}{k^{\alpha-\varepsilon}} \left\|L_f^\omega\left(\frac{x}{k}, \frac{y}{k}\right)\right\|_{\mathbb{B}} \\ &\leq c_\varepsilon \left(\frac{1}{k_0}\right)^{\alpha-\varepsilon} \frac{A}{y_0^b} + C_\varepsilon k_0^{|\alpha|+\varepsilon} \frac{C_1}{y^{b_1}} k_0^{|b|} \leq \frac{C_2}{y^{d_1}}. \end{aligned}$$

Мы воспользовались тем, что $k_0^2 = x^2 + y^2 \leq a^2 + 1$. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.8. Лемма 3.5 остается справедливой, если k заменить на $\frac{1}{k}$, т.е. если в условиях леммы вместо (3.46) выполнено соотношение

$$\mathbb{J}(\|L_f^\omega(kx, ky)\|_{\mathbb{B}}) \leq \frac{A}{y^b} \quad \text{при } x^2 + y^2 = 1.$$

Тогда для любого $a > 0$ найдутся C и d такие, что

$$\mathbb{J}(\|L_f^\omega(kx, ky)\|_{\mathbb{B}}) \leq \frac{C}{y^d}, \quad |x| < a, \quad 0 < y \leq 1.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.9. Если в условиях леммы 3.5 заменить $\mathcal{D}$ на одно из пространств $E^\uparrow$, $E^\downarrow$ или $\mathcal{S}$, то из (3.46) будет следовать общая оценка класса (см. (2.12)–(2.14)).

Например, если $f \in \mathbb{L}(\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{B})$ и $\omega \in \mathcal{S}$ таковы, что выполнено условие (3.46), то существуют a , b_1 и C_1 такие, что

$$\mathbb{J}\left(\left\|L_f^\omega\left(\frac{x}{k}, \frac{y}{k}\right)\right\|_{\mathbb{B}}\right) \leq \frac{C(1+|x|)^a}{y^{b_1}}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 < y \leq 1. \quad (3.47')$$

Отметим, что если в (3.46) заменить k на $\frac{1}{k}$, то (3.47') будет иметь место, если в нем сделать такую же замену.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $\mathbb{J}(\cdot)$ – автомодельный функционал порядка α , $\mathbb{B}$ – банахово пространство, $f(\xi) \in \mathbb{L}(\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{B})$ и функция $\omega(\xi) \in \mathcal{D}$ такова, что $\int \omega(\xi) d\xi \neq 0$. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) обобщенная функция $f(\xi)$ квазиасимптотически ограничена относительно $\mathbb{J}$, т.е.

$$\mathbb{J}\left(\left\|f\left(\frac{\xi}{k}\right), \varphi(\xi)\right\|_{\mathbb{B}}\right) < \infty \quad \forall \varphi \in \mathcal{D};$$

2) существуют A и d такие, что

$$\mathbb{J}\left(\left\|L_f^\omega\left(\frac{x}{k}, \frac{y}{k}\right)\right\|_{\mathbb{B}}\right) \leq \frac{A}{y^d}, \quad x^2 + y^2 = 1, \quad y > 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из следствия 3.1 и лемм 3.3 и 3.5.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.10. Теорема 3.2 останется справедливой, если всюду заменить k на $\frac{1}{k}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.11. Теорема 3.2 и замечание 3.10 останутся справедливыми, если $\mathcal{D}$ заменить на одно из пространств $E^\uparrow$, $E^\downarrow$ или $\mathcal{S}$.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть $\mathbb{J}(\varphi)$ – автомодельный функционал порядка α , $\mathbb{B}$ – банахово пространство, $f(\xi) \in \mathbb{L}(\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{B})$. Тогда если обобщенная функция $f(\xi)$ квазиасимптотически ограничена относительно $\mathbb{J}$ на $\overset{n}{\mathcal{D}}$, т.е.

$$\mathbb{J}\left(\left\|f\left(\frac{\xi}{k}\right), \varphi(\xi)\right\|_{\mathbb{B}}\right) < \infty \quad \forall \varphi \in \overset{n}{\mathcal{D}}, \quad (3.48)$$

то для любого $a > 0$ существуют A , N и b такие, что

$$\mathbb{J}\left(\left\|L_f^\psi\left(\frac{x}{k}, \frac{y}{k}\right)\right\|_{\mathbb{B}}\right) \leq \frac{A}{y^b} \mathcal{P}_N[\psi(\xi)], \quad x^2 + y^2 = 1, \quad k > 1, \quad \forall \psi \in \overset{n}{\mathcal{D}}_a. \quad (3.49)$$

Пусть теперь для некоторого целого n найдется функция $\omega(\xi) \in \overset{n}{\mathcal{D}} \setminus \overset{n+1}{\mathcal{D}}$ такая, что существуют A и d такие, что

$$\mathbb{J}\left(\left\|L_f^\omega\left(\frac{x}{k}, \frac{y}{k}\right)\right\|_{\mathbb{B}}\right) \leq \frac{A}{y^d}, \quad x^2 + y^2 = 1, \quad y > 0. \quad (3.50)$$

Тогда обобщенная функция $f(\xi)$ квазиасимптотически ограничена относительно $\mathbb{J}$ на $\overset{m}{\mathcal{D}}$, т.е.

$$\mathbb{J}\left(\left\|f\left(\frac{\xi}{k}\right), \varphi(\xi)\right\|_{\mathbb{B}}\right) < \infty \quad \forall \varphi \in \overset{m}{\mathcal{D}},$$

где $m = \min\{n, [-\alpha]\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из следствия 3.1 и лемм 3.4 и 3.5.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.12. Теорема 3.3 останется справедливой, если $\mathcal{D}$ заменить на одно из пространств $E^\uparrow$, $E^\downarrow$ или $\mathcal{S}$.

ТЕОРЕМА 3.4. Пусть $\rho(k)$ – автомодельная функция порядка α , $f(\xi) \in \mathbb{L}(\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{B})$, где $\mathbb{B}$ – банахово пространство, $\omega \in \overset{n}{\mathcal{D}} \setminus \overset{n+1}{\mathcal{D}}$ и выполнены условия:
1) в $\mathbb{B}$ существует

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\rho(k)} L_f^\omega\left(\frac{x}{k}, \frac{y}{k}\right) = c(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times (0, 1]; \quad (3.51)$$

2) существуют A и b такие, что

$$\sup_{k \geq 1} \frac{1}{\rho(k)} \left\|L_f^\omega\left(\frac{x}{k}, \frac{y}{k}\right)\right\|_{\mathbb{B}} \leq \frac{A}{y^b}, \quad x^2 + y^2 = 1, \quad y > 0. \quad (3.52)$$

Тогда функция $f(\xi)$ обладает квазиасимптотикой в нуле на $\overset{n}{\mathcal{D}}$ относительно $\rho(k)$, т.е. в $\mathbb{B}$ существует

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\rho(k)} \left(f\left(\frac{\xi}{k}\right), \varphi(\xi)\right) = c_\varphi \quad \forall \varphi \in \overset{n}{\mathcal{D}}. \quad (3.53)$$

Здесь $c_\varphi \in \mathbb{B}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем банахово пространство

$$H = \left\{ \eta(k) \in C([1, +\infty) \rightarrow \mathbb{B}): \exists \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho(k)} \eta(k) \text{ в } \mathbb{B} \right\} \quad (3.54)$$

с нормой $\|\eta\|_H = \sup_{k \geq 1} \frac{1}{\rho(k)} \|\eta(k)\|_{\mathbb{B}}$ и локально выпуклое пространство

$$\mathcal{L} = \left\{ \eta(k) \in C([1, +\infty) \rightarrow \mathbb{B}): Q_N[\eta] = \sup_{1 \leq k \leq N} \frac{1}{\rho(k)} \|\eta(k)\|_{\mathbb{B}} < \infty \right\} \quad (3.55)$$

со счетной системой полунорм $Q_N[\cdot]$, $N = 2, 3, \dots$. Ясно, что $H \subset \mathcal{L}$. Зададим функцию $g(\xi) \in \mathbb{L}(\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{L})$ формулой

$$(g(\xi), \varphi(\xi)) = \left(f\left(\frac{\xi}{k}\right), \varphi(\xi) \right) = k(f(\xi), \varphi(k\xi)).$$

Отметим, что в силу (3.51) функция

$$L_g^\omega(x, y) = \left(f(\xi), \frac{k}{y} \omega\left(\frac{x - k\xi}{y}\right) \right) = L_f^\omega\left(\frac{x}{k}, \frac{y}{k}\right)$$

при каждом $(x, y) \in \mathbb{R} \times (0, 1]$ принадлежит H . Согласно лемме П.6 она измерима по (x, y) как функция со значениями в H .

Теперь для $L_g^\omega(x, y)$ по лемме 3.5 из (3.52) следует условие (3.2) теоремы 3.1 при $\mathbb{J}(\cdot) = \mathbb{J}^\infty\left(\frac{1}{\rho(k)}\cdot\right)$, а потому $(g(\xi), \varphi(\xi)) = \left(f\left(\frac{\xi}{k}\right), \varphi(\xi)\right) \in H$ для любой $\varphi \in \overset{n}{\mathcal{D}}$, что и доказывает (3.53). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.13. Если $\int \omega(\xi) d\xi \neq 0$, то (3.53) выполняется для всех $\varphi \in \mathcal{D}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.14. Теорема 3.4 останется справедливой, если всюду в $L_f^\omega\left(\frac{x}{k}, \frac{y}{k}\right)$ и $f\left(\frac{\xi}{k}\right)$ заменить k на $\frac{1}{k}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.15. Теорема 3.4 и замечания 3.13, 3.14 останутся справедливыми, если пространство $\mathcal{D}$ заменить на одно из пространств $E^\uparrow, E^\downarrow$ или $\mathcal{S}$.

ТЕОРЕМА 3.5. Пусть $\rho(k)$ – автомодельная функция порядка α , $f(\xi) \in \mathbb{L}(\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{B})$, где $\mathbb{B}$ – банахово пространство, $\omega \in \overset{n}{\mathcal{D}} \setminus \overset{n+1}{\mathcal{D}}$ и выполнены условия:
1) в $\mathbb{B}$ существует

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\rho(k)} \left(f(\xi + k), \omega\left(\frac{\xi}{y}\right) \right) = c(y), \quad y \in (0, 1]; \quad (3.56)$$

2) существуют A и b такие, что

$$\sup_{k \geq 1} \frac{1}{\rho(k)} \left\| \left(f(\xi + k), \omega\left(\frac{\xi}{y}\right) \right) \right\|_{\mathbb{B}} \leq \frac{A}{y^b}, \quad y \in (0, 1). \quad (3.57)$$

Тогда функция $f(\xi)$ обладает асимптотикой по сдвигам на $\overset{n}{\mathcal{D}}$ относительно $\rho(k)$, т.е. в $\mathbb{B}$ существует

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\rho(k)} (f(\xi + k), \varphi(\xi)) = c_\varphi \quad \forall \varphi \in \overset{n}{\mathcal{D}}. \quad (3.58)$$

Здесь $c_\varphi \in \mathbb{B}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и при доказательстве теоремы 3.4, вводим пространства H и $\mathcal{L}$ по формулам (3.54) и (3.55). Зададим функцию $g(\xi) \in \mathbb{L}(\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{B})$ формулой

$$(g(\xi), \varphi(\xi)) = (f(\xi + k), \varphi(\xi)) = (f(\xi), \varphi(\xi - k)) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

Заметим, что функция $L_g^\omega(x, y) = (f(\xi + k), \frac{1}{y}\omega(\frac{\xi - x}{y})) = L_f^\omega(x + k, y)$ при каждом $(x, y) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty)$ принадлежит H . Непрерывность по k очевидна и

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\rho(k)} L_f^\omega(x + k, y) &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\rho(k - x)} L_f^\omega(k, y) \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\rho(k)}{\rho(k - x)} \frac{1}{\rho(k)} \left(f(\xi), \frac{1}{y} \omega\left(\frac{\xi - k}{y}\right) \right) \\ &= \frac{1}{y} \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\rho(k)}{\rho(k - x)} \frac{1}{\rho(k)} \left(f(\xi + k), \omega\left(\frac{\xi}{y}\right) \right) \\ &= \frac{1}{y} c(y) \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\rho(k)}{\rho(k - x)} = \frac{1}{y} c(y). \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались условием (3.56).

Покажем, что $L_g^\omega(x, y)$ удовлетворяет условию (3.2) для банахова пространства H и автомодельного функционала $\mathbb{J}(\cdot) = \mathbb{J}^\infty(\frac{1}{\rho(k)} \cdot)$. Пусть $a > 0$ и $|x| < a$. При $k_0 > a + 1$ имеем

$$\sup_{k \geq 1} \frac{1}{\rho(k)} \|L_f^\omega(x + k, y)\|_{\mathbb{B}} \leq \left\{ \sup_{1 \leq k \leq k_0 - x} + \sup_{k > k_0 - x} \right\} \frac{1}{\rho(k)} \|L_f^\omega(x + k, y)\|_{\mathbb{B}}. \quad (3.59)$$

Первое слагаемое справа в (3.59) в силу общей оценки класса $(|x| < a, 1 \leq k \leq k_0 + a)$ не превосходит $\frac{A_2}{y^{b_2}}$ при некоторых A_2 и b_2 . Оценим второе слагаемое. Имеем

$$\sup_{k > k_0 - x} \frac{1}{\rho(k)} \|L_f^\omega(x + k, y)\|_{\mathbb{B}} = \sup_{k > k_0 - x} \frac{\rho(k + x)}{\rho(k)} \frac{1}{\rho(k + x)} \|L_f^\omega(x + k, y)\|_{\mathbb{B}} \leq \frac{A_1}{y^{b_1}},$$

так как $\frac{\rho(k + x)}{\rho(k)}$ ограничено $(|x| < a)$, а

$$\sup_{k > k_0 - x} \frac{1}{\rho(k + x)} \|L_f^\omega(x + k, y)\|_{\mathbb{B}} = \sup_{k > k_0} \frac{1}{\rho(k)} \|L_f^\omega(k, y)\|_{\mathbb{B}} \leq \frac{A}{y^{b+1}}$$

по условию (3.57). Итак, условие (3.2) выполнено.

Измеримость $L_g^\omega(x, y)$ по $(x, y) \in \mathbb{R} \times (0, 1)$ как функции со значениями в H следует из леммы П.6. Из изложенного ранее по теореме 3.1 получаем (3.58). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.16. Если $\int \omega(\xi) d\xi \neq 0$, то (3.60) выполняется для всех $\varphi \in \mathcal{D}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.17. В условиях теоремы 3.5 обязательно $c(y) = yc$, где $c \in \mathbb{B}$, а $c_\varphi = c \int \varphi(\xi) d\xi$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.18. Теорема 3.5 и замечания 3.16, 3.17 останутся справедливыми, если пространство $\mathcal{D}$ заменить на одно из пространств $E^\uparrow, E^\downarrow$ или $\mathcal{S}$.

§ 4. Тауберова теорема для банахова пространства, имеющего представление группы сдвигов

Пусть $\mathbb{B}$ – банахово пространство и в нем задано представление группы сдвигов $\{T_a \in \mathbb{L}(\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}), a \in \mathbb{R}\}$ класса (C_0) . Это означает, что каждому $a \in \mathbb{R}$ сопоставлен непрерывный оператор $T_a: \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$ и выполнены свойства:

- 1) $T_a T_b = T_{a+b}$ для всех $a, b \in \mathbb{R}$;
- 2) $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \|T_\Delta e - e\|_{\mathbb{B}} = 0$ для любого $e \in \mathbb{B}$.

Известно [10], что тогда существуют постоянные M и β такие, что

$$\|T_a\| \leq C(a) = M e^{\beta|a|}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $\mathbb{J}$ – автомодельный функционал порядка α , $\mathbb{B}$ – банахово и $\mathcal{L}$ – локально выпуклое пространства, причем $\mathbb{B} \subset \mathcal{L}$ линейно и непрерывно. Кроме того, в $\mathcal{L}$ действует представление $\{T_a \in \mathbb{L}(\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}), a \in \mathbb{R}\}$ группы сдвигов и оно индуцирует представление $\{T_a \in \mathbb{L}(\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}), a \in \mathbb{R}\}$ группы сдвигов класса (C_0) на $\mathbb{B}$. Пусть, далее, функция $f \in \mathbb{L}(\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{L})$ такая, что

$$(f(\xi), \varphi(\xi - a)) = T_a(f(\xi), \varphi(\xi)), \quad a \in \mathbb{R}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}. \quad (4.1)$$

Предположим, что для некоторой $\omega(\xi) \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}^{n, n+1}$ функция $L_f^\omega(0, y)$ измерима по $y \in (0, 1]$ как функция со значениями в $\mathbb{B}$, причем

$$\hat{\mathbb{J}}(\|L_f^\omega(0, y)\|_{\mathbb{B}}) < \infty. \quad (4.2)$$

Если $n \geq 0$, то пусть найдется еще функция $\omega_0 \in \mathcal{D}$, $\int \omega_0(\xi) d\xi \neq 0$, такая, что $L_f^{\omega_0}(0, 1) \in \mathbb{B}$. Тогда

$$f \in \mathbb{L}(\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{B}) \quad \text{и} \quad \mathbb{J}\left(\left\|f\left(\frac{\xi}{k}\right), \varphi(\xi)\right\|_{\mathbb{B}}\right) < \infty \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_a^m, \quad (4.3)$$

где $m = \min\{n, [-\alpha]\}$. Более того, для любого $a > 0$ существуют C и N такие, что

$$\mathbb{J}\left(\left\|f\left(\frac{\xi}{k}\right), \varphi(\xi)\right\|_{\mathbb{B}}\right) \leq C \hat{\mathbb{J}}(\|L_f^\omega(0, y)\|_{\mathbb{B}}) \mathcal{D}_N[\varphi] \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_a^n. \quad (4.4)$$

Кроме того, для любого $a > 0$ существуют C и N такие, что

$$\begin{aligned} \mathbb{J}\left(\left\|f\left(\frac{\xi}{k}\right), \varphi(\xi)\right\|_{\mathbb{B}}\right) &\leq \\ &\leq C [\hat{\mathbb{J}}(\|L_f^\omega(0, y)\|_{\mathbb{B}}) + \|L_f^{\omega_0}(0, 1)\|_{\mathbb{B}}] \mathcal{D}_N[\varphi] \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_a^m. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Здесь, как и в предыдущих теоремах, C и N не зависят от f , $\mathbb{B}$ и φ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что

$$\begin{aligned} L_f^\omega(x+a, y) &= \left(f(\xi), \frac{1}{y} \omega\left(\frac{x - (\xi - a)}{y}\right) \right) = T_a \left(f(\xi), \frac{1}{y} \omega\left(\frac{x - \xi}{y}\right) \right) \\ &= T_a L_f^\omega(x, y). \end{aligned}$$

Поэтому п.в. $L_f^\omega(x, y) = T_x L_f^\omega(0, y) \in \mathbb{B}$. Покажем, что $L_f^\omega(x, y)$ измерима по (x, y) как функция со значениями в $\mathbb{B}$. Действительно, в силу измеримости $L_f^\omega(0, y)$ существуют непрерывные по y функции $G_n(y)$ со значениями в $\mathbb{B}$ такие, что

$$\|L_f^\omega(0, y) - G_n(y)\|_{\mathbb{B}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{п.в. по } y \in (0, 1).$$

Заметим, что функции $T_x G_n(y)$ непрерывны по (x, y) как функции со значениями в $\mathbb{B}$, так как

$$\begin{aligned} \|T_x G_n(y) - T_{x_1} G_n(y_1)\|_{\mathbb{B}} &\leq \|T_x G_n(y) - T_{x_1} G_n(y)\|_{\mathbb{B}} + \|T_{x_1} G_n(y) - T_{x_1} G_n(y_1)\|_{\mathbb{B}} \\ &\leq \|T_x\| \|T_{x_1-x} G_n(y) - G_n(y)\|_{\mathbb{B}} \\ &\quad + \|T_{x_1}\| \|G_n(y) - G_n(y_1)\|_{\mathbb{B}} \xrightarrow{x_1 \rightarrow x, y_1 \rightarrow y} 0. \end{aligned}$$

Первое из слагаемых в этом неравенстве стремится к нулю в силу свойства 2) группы класса (C_0) , а второе – в силу непрерывности $G_n(y)$. Так как

$$\|L_f^\omega(x, y) - T_x G_n(y)\|_{\mathbb{B}} \leq \|T_x\| \|L_f^\omega(0, y) - G_n(y)\|_{\mathbb{B}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{п.в. по } y \in (0, 1),$$

то $L_f^\omega(x, y)$ есть предел п.в. непрерывных функций со значениями в $\mathbb{B}$, т.е. является измеримой функцией.

Пусть $d > 0$; тогда при $|x| < d$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{J}\left(\left\|L_f^\omega\left(x, \frac{1}{k}\right)\right\|_{\mathbb{B}}\right) &= \mathbb{J}\left(\left\|T_x L_f^\omega\left(0, \frac{1}{k}\right)\right\|_{\mathbb{B}}\right) \leq \|T_x\| \mathbb{J}\left(\left\|L_f^\omega\left(0, \frac{1}{k}\right)\right\|_{\mathbb{B}}\right) \\ &\leq C(d) \mathbb{J}\left(\left\|L_f^\omega\left(0, \frac{1}{k}\right)\right\|_{\mathbb{B}}\right) = C(d) \hat{\mathbb{J}}(\|L_f^\omega(0, y)\|_{\mathbb{B}}), \end{aligned} \tag{4.6}$$

т.е. выполнено условие (3.2) теоремы 3.1 при $b = 0$.

Если $n \geq 0$, то функция $L_f^{\omega_0}(x, 1) = T_x L_f^{\omega_0}(0, 1)$ непрерывна по x со значениями в $\mathbb{B}$. Поэтому для любого $d > 0$

$$\sup_{|x| < d} \|L_f^{\omega_0}(x, 1)\|_{\mathbb{B}} \leq \sup_{|x| < d} \|T_x\| \|L_f^{\omega_0}(0, 1)\|_{\mathbb{B}} \leq C(d) \|L_f^{\omega_0}(0, 1)\|_{\mathbb{B}}. \tag{4.7}$$

Значит, выполнены все условия теоремы 3.1. Следовательно, $f \in \mathbb{L}(\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{B})$.

Далее, при $|x| < a_1$, $0 < y \leq 1$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{J}\left(\left\|L_f^\omega\left(\frac{x}{k}, \frac{y}{k}\right)\right\|_{\mathbb{B}}\right) &= \mathbb{J}\left(\left\|T_{\frac{x}{k}}L_f^\omega\left(0, \frac{y}{k}\right)\right\|_{\mathbb{B}}\right) \leq \mathbb{J}\left(\|T_{\frac{x}{k}}\| \left\|L_f^\omega\left(0, \frac{y}{k}\right)\right\|_{\mathbb{B}}\right) \\ &\leq C(a_1)\mathbb{J}\left(\left\|L_f^\omega\left(0, \frac{y}{k}\right)\right\|_{\mathbb{B}}\right) \\ &\leq C_\varepsilon C(a_1)\left(\frac{1}{y}\right)^{\alpha+\varepsilon} \mathbb{J}\left(\left\|L_f^\omega\left(0, \frac{1}{k}\right)\right\|_{\mathbb{B}}\right). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Здесь мы воспользовались соотношением (2.4) для автомодельных функционалов, где $\varkappa = \frac{1}{y} \geq 1$.

Неравенства (4.4) и (4.5) теперь непосредственно следуют из леммы 3.4 (в которой b следует считать большим $|\alpha| + \varepsilon$). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. В условиях теоремы 4.1 для любого $a > 0$ найдутся C_2 и N такие, что

$$\begin{aligned} \mathbb{J}\left(\left\|f\left(\frac{\xi}{k}\right), \varphi(\xi)\right\|_{\mathbb{B}}\right) + \|L_f^{\varphi_0}(0, 1)\|_{\mathbb{B}} &\leq C_2 \left[\mathbb{J}\left(\left\|f\left(\frac{\xi}{k}\right), \omega(\xi)\right\|_{\mathbb{B}}\right) \right. \\ &\quad \left. + \|L_f^{\omega_0}(0, 1)\|_{\mathbb{B}} \right] [\mathcal{P}_N[\varphi] + \mathcal{P}_N[\varphi_0]] \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_a^m, \quad \varphi_0 \in \mathcal{D}_a. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Здесь C_2 и N не зависят от $f, \mathbb{B}, \varphi$ и φ_0 .

Действительно, сперва заметим, что $(f(\frac{\xi}{k}), \psi(\xi)) = L_f^\psi(0, \frac{1}{k})$ и $L_f^{\varphi_0}(0, 1) = (f(\xi), \varphi_0(\xi))$. Из формулы (3.5), учитывая (4.7) и (4.6), получаем, что для любого $a > 0$ существуют C и N такие, что

$$\|L_f^{\varphi_0}(0, 1)\|_{\mathbb{B}} \leq C[\hat{\mathbb{J}}(\|L_f^\omega(0, y)\|_{\mathbb{B}}) + \|L_f^{\omega_0}(0, 1)\|_{\mathbb{B}}] \mathcal{P}_N[\varphi_0] \quad \forall \varphi_0 \in \mathcal{D}_a.$$

Комбинируя эту оценку с (4.5), получим оценку (4.9).

§ 5. Асимптотические свойства решений задачи Коши для уравнения теплопроводности

В этом параграфе полученные выше теоремы применяются для изучения асимптотических свойств решений задачи Коши для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t), \quad \lim_{t \rightarrow +0} u(x, t) = f(x) \quad (\text{в } \mathcal{S}'), \quad f \in \mathcal{S}', \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (5.1)$$

в классе не более чем полиномиально растущих функций, т.е. таких, что $|u(x, t)| < C \frac{1}{t^b} (|x|^N + |t|^N + 1)$ для некоторых b, C и N , зависящих от u . Как известно, в этом классе существует единственное решение задачи (5.1), задаваемое формулой

$$u(x, t) = \left(f(\xi), \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} \right) \equiv L_f^\omega(x, y), \quad (5.2)$$

где $\omega(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\xi^2}$ и $y = 2\sqrt{t}$.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть $\rho(k)$ – автомодельная функция. Для того чтобы начальная функция $f \in \mathcal{S}'$ задачи (5.1) обладала квазиасимптотикой на бесконечности относительно $\rho(k)$, т.е.

$$\frac{1}{\rho(k)}(f(k\xi), \varphi(\xi)) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} c_\varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}, \quad (5.3)$$

необходимо и достаточно, чтобы решение задачи (5.1) удовлетворяло следующим условиям:

1) существует предел

$$\frac{1}{\rho(k)}u(kx, k^2t) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} u_0(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0; \quad (5.4)$$

2) существуют A и d такие, что

$$\left| \frac{1}{\rho(k)}u(kx, k^2t) \right| \leq \frac{A}{t^d}, \quad x^2 + t^2 = 1. \quad (5.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть выполнено (5.3). Подставляя в это соотношение вместо φ функцию $\frac{1}{y}\omega\left(\frac{x-\xi}{y}\right)$, где $y = 2\sqrt{t}$ и $\omega(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\xi^2}$, имеем

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\rho(k)} \left(f(k\xi), \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} \right) &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\rho(k)} \left(f(\xi), \frac{1}{2\sqrt{\pi k^2 t}} e^{-\frac{(kx-\xi)^2}{4tk^2}} \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\rho(k)} u(kx, k^2t) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} c_\omega(x, t), \end{aligned}$$

что и доказывает (5.4). Оценка (5.5) легко следует из общей оценки класса для основной функции $\frac{1}{2\sqrt{t}}\omega\left(\frac{x-\xi}{2\sqrt{t}}\right)$ (см. (2.14)).

Достаточность. Пусть выполнены условия (5.4) и (5.5). Согласно теореме 3.4 (см. также замечания 3.13 и 3.14) из этих условий вытекает (5.3) для любой функции $\varphi \in \overset{n}{\mathcal{S}}$. Так как $\int \omega(\xi) d\xi = 1$, то $\overset{n}{\mathcal{S}} = \mathcal{S}$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть $\rho(k)$ – автомодельная функция. Для того чтобы начальная функция $f \in \mathcal{S}'$ задачи (5.1) обладала асимптотикой по сдвигам на $+\infty$ относительно $\rho(k)$, т.е.

$$\frac{1}{\rho(k)}(f(\xi + k), \varphi(\xi)) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} c_\varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}, \quad (5.6)$$

необходимо и достаточно, чтобы решение задачи (5.1) удовлетворяло следующим условиям:

1) существует предел

$$\frac{1}{\rho(x)}u(x, t) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} c(t), \quad t > 0; \quad (5.7)$$

2) найдутся A и d такие, что

$$\left| \frac{1}{\rho(x)}u(x, t) \right| \leq \frac{A}{t^d}, \quad x > 1, \quad 0 < t < 1. \quad (5.8)$$

Доказательство аналогично доказательству предыдущей теоремы, только вместо теоремы 3.4 следует пользоваться теоремой 3.5 и замечаниями 3.16–3.18.

Замечание 5.1. Нетрудно видеть, что в (5.6) $c_\varphi = c \int \varphi(\xi) d\xi$ и, следовательно, в (5.7) $c(t) = c$, т.е. не зависит от t .

§ 6. Банаховы пространства обобщенных функций

Пусть $\mathbb{B}$ – банахово пространство, для которого выполнены следующие условия (аксиомы).

I. $\mathcal{D} \subset \mathbb{B} \subset \mathcal{D}'$, причем $\mathcal{D}$ плотно вложено в $\mathbb{B}$.

II. $\mathbb{B}$ инвариантно относительно группы сдвигов, действующих в $\mathcal{D}'$, т.е. каждому $a \in \mathbb{R}$ сопоставляется линейный оператор $T_a: \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$, причем предполагается, что этот оператор ограничен и

$$\|T_\xi\| \leq C(a) \quad \text{для } |\xi| \leq a, \quad (6.1)$$

где $C(a)$ – некоторая локально ограниченная функция.

Из плотности и непрерывности вложения $\mathcal{D}$ в $\mathbb{B}$ вытекает, что

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \|T_\Delta e - e\|_{\mathbb{B}} = 0 \quad \forall e \in \mathbb{B},$$

таким образом, группа $\{T_a, a \in \mathbb{R}\}$ является группой класса (C_0) , в частности,

$$\|T_a\| \leq M(1 + |a|)^Q e^{\beta|a|}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad (6.2)$$

для некоторых Q, M и β (см. [10]). Ясно, что

$$\mathcal{D} \subset \mathbb{B}^* \subset \mathcal{D}', \quad (6.3)$$

причем второе вложение плотно (что, вообще говоря, нельзя сказать о первом вложении).

Покажем, что E_b при любом $b \geq \beta$ (см. соотношение (6.2)) плотно и непрерывно вложено в $\mathbb{B}$, т.е.

$$\mathcal{D} \subset E_b \subset \mathbb{B}. \quad (6.4)$$

Для этого достаточно доказать, что $E_\beta \subset \mathbb{B}$.

Пусть $\varphi(\eta) \in E_\beta$. Возьмем специальное разбиение еденицы:

$$\psi(\eta) \in \mathcal{D}, \quad \text{supp } \psi \subset [-1, +1], \quad 1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi(\eta - n). \quad (6.5)$$

Тогда $\varphi(\eta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \psi(\eta - n)\varphi(\eta)$. Оценим отдельные слагаемые этой суммы. Согласно (6.2) имеем

$$\begin{aligned} \|\varphi(\eta)\psi(\eta - n)\|_{\mathbb{B}} &\leq M(1 + |n|)^Q e^{\beta|n|} \|\varphi(\eta + n)\psi(\eta)\|_{\mathbb{B}} \\ &= \frac{M}{(1 + |n|)^2} \|(1 + |n|)^{2+Q} e^{\beta|n|} \varphi(\eta + n)\psi(\eta)\|_{\mathbb{B}}. \end{aligned}$$

Заметим, что множество функций $\{g_n(\eta) = (1+|n|)^{2+Q}e^{\beta|n|}\varphi(\eta+n)\psi(\eta); -\infty < n < +\infty\}$ ограничено в $\mathcal{D}$, так как все они принадлежат $\mathcal{D}_{[-1,+1]}$ и выполнена оценка

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_N[g_n(\eta)] &= \max_{j \leq N} \sup_{\eta} (1+|\eta|)^N (1+|n|)^{2+Q} e^{\beta|n|} |(\varphi(\eta+n)\psi(\eta))^{(j)}| \\ &\leq C_1 \max_{j \leq N} \sup_{|\eta| < 1} (1+|n|)^{2+Q} e^{\beta|n|} |\varphi^{(j)}(\eta+n)| \\ &= C_2 \max_{j \leq N} \sup_{|\xi-n| < 1} (1+|n|)^{2+Q} e^{\beta|n|} |\varphi^{(j)}(\xi)| \\ &\leq C_3 \max_{j \leq N} \sup_{\xi} (1+|\xi|+1)^{2+Q} e^{\beta(|\xi|+1)} |\varphi^{(j)}(\xi)| \leq C_4 P_{\beta, N+Q+2}[\varphi] \end{aligned}$$

для $N = 0, 1, \dots$. В силу непрерывности вложения $\mathcal{D}$ в $\mathbb{B}$ существуют C и N_0 такие, что $\|h\|_{\mathbb{B}} \leq C \mathcal{P}_{N_0}[h]$ для любого $h \in \mathcal{D}_{[-1,+1]}$. Поэтому

$$\|g_n(\eta)\|_{\mathbb{B}} \leq C \mathcal{P}_{N_0}[g_n(\eta)] \leq C_5 P_{\beta, N_0+Q+2}[\varphi].$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{\mathbb{B}} &\leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \|\varphi(\eta)\psi(\eta-n)\|_{\mathbb{B}} \\ &\leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{M}{(1+|n|)^2} \|(1+|n|)^{2+Q} e^{\beta|n|} \varphi(\eta+n)\psi(\eta)\|_{\mathbb{B}} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{M}{(1+|n|)^2} \|g_n\|_{\mathbb{B}} \\ &\leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{M}{(1+|n|)^2} C_6 P_{\beta, N_0+Q+2}[\varphi] \leq C_7 P_{\beta, N_0+Q+2}[\varphi], \end{aligned}$$

что и доказывает (6.4). Плотность этого вложения следует из плотности вложения $\mathcal{D}$ в $\mathbb{B}$.

Если в аксиоме II

$$\|T_{\xi}\| \leq M(1+|\xi|)^Q, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad (6.6)$$

для некоторых M и Q , то пространство $\mathcal{S}$ плотно и непрерывно вложено в $\mathbb{B}$. Это следует из предыдущих рассуждений при $\beta = 0$.

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть $\mathbb{B}$ – банахово пространство, для которого выполнены аксиомы I и II, $\mathbb{J}$ – автомодельный функционал порядка α , $g(\xi) \in \mathcal{D}'$ и $\omega(\xi) \in \overset{n}{\mathcal{D}} \setminus \overset{n+1}{\mathcal{D}}$ для некоторого целого n . Пусть функция $(g(\xi), \frac{1}{y}\omega(\frac{\eta-\xi}{y})) \in \mathbb{B}$ (как функция аргумента η) при п.в. $y \in (0, 1)$ и измерима по y как функция со значениями в $\mathbb{B}$, причем

$$\hat{\mathbb{J}}\left(\left\|\left(g(\xi), \frac{1}{y}\omega\left(\frac{\eta-\xi}{y}\right)\right)\right\|_{\mathbb{B}}\right) < \infty.$$

Пусть, кроме того, функция $\omega_0(\xi) \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}^0$ (т.е. $\int \omega_0(\xi) d\xi \neq 0$) такая, что $(g(\xi), \omega_0(\eta - \xi)) \in \mathbb{B}$. Тогда отображение $\varphi \rightarrow (g(\xi), \varphi(\xi - \eta))$ является непрерывным линейным отображением из $\mathcal{D}$ в $\mathbb{B}$ (т.е. принадлежит $\mathbb{L}(\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{B})$) и для любого $a > 0$ существуют C и N такие, что

$$\begin{aligned} & \hat{\mathbb{J}} \left(\left\| \left(g(\xi), \frac{1}{y} \varphi \left(\frac{\eta - \xi}{y} \right) \right) \right\|_{\mathbb{B}} \right) + \|(g(\xi), \varphi_0(\eta - \xi))\|_{\mathbb{B}} \\ & \leq C \left[\hat{\mathbb{J}} \left(\left\| \left(g(\xi), \frac{1}{y} \omega \left(\frac{\eta - \xi}{y} \right) \right) \right\|_{\mathbb{B}} \right) + \|(g(\xi), \omega_0(\eta - \xi))\|_{\mathbb{B}} \right] [\mathcal{P}_N[\varphi] + \mathcal{P}_N[\varphi_0]] \\ & \quad \forall \varphi \in \overset{m}{\mathcal{D}}_a, \quad \forall \varphi_0 \in \mathcal{D}_a, \end{aligned} \quad (6.7)$$

где $m = \min\{n, [-\alpha]\}$. Здесь функции из пространства $\mathbb{B}$ имеют аргумент η , а автомодельный функционал $\hat{\mathbb{J}}$ действует на функции аргумента y . Постоянные C и N не зависят от g , φ и φ_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем (обобщеннозначную) обобщенную функцию $f \in \mathbb{L}(\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}')$ по формуле

$$(f(\xi), \varphi(\xi))(\eta) = (g(\xi), \varphi(\xi - \eta)) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

Замечая, что

$$L_f^\omega(x, y) = \left(f(\xi), \frac{1}{y} \omega \left(\frac{x - \xi}{y} \right) \right) = \left(g(\xi), \frac{1}{y} \omega \left(\frac{x + \eta - \xi}{y} \right) \right)$$

и, в частности, $L_f^\omega(0, 1) = (g(\xi), \omega(\eta - \xi))$, легко проверить, что выполнены все условия теоремы 4.1. Поэтому отображение $\varphi \mapsto (g(\xi), \varphi(\xi - \eta))$ принадлежит $\mathbb{L}(\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{B})$. Из замечания 4.1 (см. (4.9)) следует оценка (6.7). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.1. Оценку (6.7), учитывая (3.1), можно переписать следующим образом: для любого $a > 0$ существуют C и N такие, что

$$\begin{aligned} & \hat{\mathbb{J}}(\|L_g^\varphi(\eta, y)\|_{\mathbb{B}}) + \|L_g^{\varphi_0}(\eta, 1)\|_{\mathbb{B}} \leq C [\hat{\mathbb{J}}(\|L_g^\omega(\eta, y)\|_{\mathbb{B}}) + \|L_g^{\omega_0}(\eta, 1)\|_{\mathbb{B}}] \\ & \quad \times [\mathcal{P}_N[\varphi] + \mathcal{P}_N[\varphi_0]] \quad \forall \varphi \in \overset{m}{\mathcal{D}}_a, \quad \forall \varphi_0 \in \mathcal{D}_a, \end{aligned} \quad (6.8)$$

где C и N не зависят от g , φ и φ_0 .

Введем обозначение

$$\|g(\xi)\|_{V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}, \omega, \omega_0}} = \hat{\mathbb{J}} \left(\left\| \left(g(\xi), \frac{1}{y} \omega \left(\frac{\eta - \xi}{y} \right) \right) \right\|_{\mathbb{B}} \right) + \|(g(\xi), \omega_0(\eta - \xi))\|_{\mathbb{B}}. \quad (6.9)$$

Если $g \in \mathcal{D}'$ и ω, ω_0 удовлетворяют условиям теоремы 6.1, то для любого $a > 0$ существуют C и N такие, что

$$\|g(\xi)\|_{V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}, \varphi, \varphi_0}} \leq C [\mathcal{P}_N[\varphi] + \mathcal{P}_N[\varphi_0]] \|g(\xi)\|_{V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}, \omega, \omega_0}} \quad \forall \varphi \in \overset{m}{\mathcal{D}}_a, \quad \forall \varphi_0 \in \mathcal{D}_a. \quad (6.10)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.1. Обозначим через $V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}, \omega, \omega_0}$ множество тех $g \in \mathcal{D}'$, для которых $(g(\xi), \frac{1}{y}\omega(\frac{\eta-\xi}{y})) \in \mathbb{B}$ при $0 < y \leq 1$, а также $(g(\xi), \omega_0(\eta - \xi)) \in \mathbb{B}$, и для которых $\|g\|_{V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}, \omega, \omega_0}} < \infty$.

Отметим, что $\|\cdot\|_{V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}, \omega, \omega_0}}$ — полунорма.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6.1. $\|\cdot\|_{V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}, \omega, \omega_0}}$ — норма и отображение $V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}, \omega, \omega_0} \rightarrow \mathcal{D}'$ непрерывно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем φ_0 и γ , принадлежащие $\mathcal{D}_{[-1,1]}^0 \setminus \mathcal{D}$, и обозначим $W = \varphi_0 * \gamma$. Оценим $|L_g^W(x, y)|$. Имеем

$$\begin{aligned} |L_g^W(x, y)| &= \left| \left(g(\xi), \frac{1}{y}W\left(\frac{x-\xi}{y}\right) \right) \right| = \left| \left(g(\xi), \int \frac{1}{y}\gamma\left(\frac{\eta}{y}\right) \frac{1}{y}\varphi_0\left(\frac{\eta-\xi+x}{y}\right) d\eta \right) \right| \\ &\leq \left| \int \frac{1}{y}\gamma\left(\frac{\eta}{y}\right) \left(g(\xi), \frac{1}{y}\varphi_0\left(\frac{\eta-\xi+x}{y}\right) d\eta \right) \right| \\ &\leq \left\| \frac{1}{y}\gamma\left(\frac{\eta}{y}\right) \right\|_{\mathbb{B}^*} \left\| \left(g(\xi), \frac{1}{y}\varphi_0\left(\frac{\eta-\xi+x}{y}\right) \right) \right\|_{\mathbb{B}}. \end{aligned}$$

В силу первого вложения (6.3) $\|\gamma\|_{\mathbb{B}^*} \leq A\mathcal{P}_M[\gamma]$ при $\gamma \in \mathcal{D}_{[-1,1]}^0$ для некоторых A и M . Из (6.8) при $\varphi_0 = \psi$, $\varphi = 0$ вытекает, что для любого $a > 0$ найдутся C и N такие, что

$$\|L_g^\psi(\eta, 1)\|_{\mathbb{B}} = \|(g(\xi), \psi(\eta - \xi))\|_{\mathbb{B}} \leq C\mathcal{P}_N[\psi]\|g\|_{V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}, \omega, \omega_0}},$$

где $\psi \in \mathcal{D}_a^0 \setminus \mathcal{D}$. В частности, для любого a_1 найдутся C_1 и N_1 такие, что

$$\left\| \left(g(\xi), \frac{1}{y}\varphi_0\left(\frac{\eta-\xi+x}{y}\right) \right) \right\|_{\mathbb{B}} \leq C_1\mathcal{P}_{N_1}\left[\frac{1}{y}\varphi_0\left(\frac{\xi-x}{y}\right) \right]\|g\|_{V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}, \omega, \omega_0}}$$

при $|x| < a_1$. Учитывая эти неравенства и продолжая оценку для $|L_g^W(x, y)|$, получим, что для любого a_1 найдутся C_1 и N_1 такие, что

$$\begin{aligned} |L_g^W(x, y)| &= \left| \left(g(\xi), \frac{1}{y}W\left(\frac{\xi-x}{y}\right) \right) \right| \\ &\leq AC_1\mathcal{P}_M\left[\frac{1}{y}\gamma\left(\frac{\eta}{y}\right) \right]\mathcal{P}_{N_1}\left[\frac{1}{y}\varphi_0\left(\frac{\eta+x}{y}\right) \right]\|g\|_{V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}, \omega, \omega_0}} \\ &\leq \frac{A_1}{y^{M+N+4}}\|g\|_{V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}, \omega, \omega_0}}. \end{aligned}$$

Применяя теорему 3.1 для $\mathbb{J}(\cdot) = \sup(\cdot)$ и $\mathbb{B} = \mathbb{C}$, получим, что для любого a_2 существуют C_2 и N_2 такие, что

$$|(g(\xi), \varphi(\xi))| < C_2\mathcal{P}_{N_2}[\varphi]\|g\|_{V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}, \omega, \omega_0}} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_{a_2},$$

что и доказывает утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6.2. *Пространство $V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J},\omega,\omega_0}$ банахово.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно утверждению 6.1 осталось доказать только полноту пространства $V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J},\omega,\omega_0}$. Пусть $f_n(\xi)$ – фундаментальная последовательность в $V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J},\omega,\omega_0}$, т.е.

$$\|f_n - f_m\|_{V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J},\omega,\omega_0}} \rightarrow 0 \text{ при } n, m \rightarrow +\infty.$$

Из предыдущего утверждения и полноты $\mathcal{D}'$ следует, что существует $f_\infty(\xi) \in \mathcal{D}'$ такая, что

$$f_n(\xi) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f_\infty(\xi) \text{ в } \mathcal{D}'. \quad (6.11)$$

Докажем, что $f_n(\xi) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f_\infty(\xi)$ в $V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J},\omega,\omega_0}$.

Фундаментальность последовательности по первой части нормы $\|\cdot\|_{V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J},\omega,\omega_0}}$ (см. (6.9)) означает, что последовательность $L_{f_n}^\omega(\cdot, y)$ фундаментальна в пространстве $\mathbb{L}^{\mathbb{J}}((0, 1) \rightarrow \mathbb{B})$ (см. замечание 2.1). В силу полноты этого пространства существует функция $G_y(\cdot) \in \mathbb{L}^{\mathbb{J}}((0, 1) \rightarrow \mathbb{B})$ такая, что

$$L_{f_n}^\omega(\cdot, y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} G_y(\cdot) \text{ в } \mathbb{L}^{\mathbb{J}}((0, 1) \rightarrow \mathbb{B}).$$

Следовательно, существует подпоследовательность $L_{f_{n_k}}^\omega(\eta, y) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} G_y(\eta)$ почти всюду по $y \in (0, 1)$. С другой стороны, из (6.11) вытекает, что

$$\begin{aligned} L_{f_{n_k}}^\omega(\eta, y) &= \left(f_{n_k}(\xi), \frac{1}{y} \omega\left(\frac{\eta - \xi}{y}\right) \right) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \\ &\xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \left(f_\infty(\xi), \frac{1}{y} \omega\left(\frac{\eta - \xi}{y}\right) \right) = L_{f_\infty}^\omega(\eta, y) \text{ в } \mathcal{D}' \end{aligned}$$

(более того, даже равномерно на компактах по η при всех $y \in (0, 1)$). Итак, последовательность $L_{f_{n_k}}^\omega(\eta, y)$ при п.в. $y \in (0, 1)$ сходится к $G_y(\eta)$ в $\mathbb{B}$ и при всех $y \in (0, 1]$ сходится к $L_{f_\infty}^\omega(\eta, y)$ в $\mathcal{D}'$. Отсюда следует, что $G_y(\eta) = L_{f_\infty}^\omega(\eta, y)$ при п.в. $y \in (0, 1)$, и, следовательно,

$$L_{f_n}^\omega(\eta, y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L_{f_\infty}^\omega(\eta, y) \text{ в } \mathbb{L}^{\mathbb{J}}((0, 1) \rightarrow \mathbb{B}). \quad (6.12)$$

Рассмотрим вторую часть нормы $\|\cdot\|_{V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J},\omega,\omega_0}}$. По условию $L_{f_n}^{\omega_0}(\eta, 1)$ фундаментальна в $\mathbb{B}$, поэтому существует $F(\eta) \in \mathbb{B}$ такая, что $L_{f_n}^{\omega_0}(\eta, 1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F(\eta)$ в $\mathbb{B}$. В силу (6.11) $L_{f_n}^{\omega_0}(\eta, 1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L_{f_\infty}^{\omega_0}(\eta, 1)$ в $\mathcal{D}'$, а поэтому $F(\eta) = L_{f_\infty}^{\omega_0}(\eta, 1)$ в $\mathcal{D}'$, а стало быть, и в $\mathbb{B}$. Таким образом,

$$L_{f_n}^{\omega_0}(\eta, 1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L_{f_\infty}^{\omega_0}(\eta, 1) \text{ в } \mathbb{B}. \quad (6.13)$$

Из (6.12) и (6.13) следует, что f_∞ есть предельная функция нашей фундаментальной последовательности в $V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J},\omega,\omega_0}$. Утверждение доказано.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6.3. Пусть $\mathbb{J}$ – автомодельный функционал порядка α и $\mathbb{B}$ – банахово пространство с аксиомами I, II. Для целых $n = -1, 0, 1, 2, \dots$ рассмотрим следующие случаи².

1) $n \geq [-\alpha]$. Тогда все пространства $V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}, \varphi, \varphi_0}$ для любых различных $\varphi_0 \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}^0$ и любых различных $\varphi \in \mathcal{D}^n$, $\varphi \neq 0$, совпадают как множества, причем все нормы $\|\cdot\|_{V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}, \varphi, \varphi_0}}$ эквивалентны. Тем самым банаховы пространства $V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}, \varphi, \varphi_0}$ с указанными свойствами φ_0 и φ определяют с точностью до эквивалентности норм одно и то же банахово пространство, которое будем обозначать $V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}}$.

2) $n < [-\alpha]$. Возможны два подслучая:

а) $n = -\alpha - 1$ (это возможно только при $\alpha = 0, -1, -2, \dots$); тогда для любых различных $\varphi_0 \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}^0$ и любых различных $\varphi \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}^{n+1}$ пространства $V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}, \varphi, \varphi_0}$ эквивалентны, т.е. с точностью до эквивалентности норм определяют одно и то же банахово пространство, которое будем обозначать $\widehat{V}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}}$;

б) $n < -\alpha - 1$; тогда для любых $\varphi_0 \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}^0$ и любых $\varphi \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}^{n+1}$ пространства $V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}, \varphi, \varphi_0}$ тривиальны в том смысле, что они состоят из полиномов степени не выше n , содержащихся в $\mathbb{B}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случаи 1) и 2,а) вытекают из теоремы 6.1 и замечания 6.1 (в этих случаях в соотношении (6.10) ω , ω_0 и φ , φ_0 можно поменять местами). Остается доказать тривиальность пространств $V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}, \varphi, \varphi_0}$ в случае 2,б).

Действительно, пусть $g \in V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}, \varphi, \varphi_0}$, где $\varphi_0 \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}^0$, $\varphi \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}^{n+1}$ при $n < -\alpha - 1$. Так как $\mathbb{B} \subset \mathcal{D}'$ непрерывно, то для любого $\psi \in \mathcal{D}$ имеем

$$\left| \int \left(g(\xi), \frac{1}{y} \varphi \left(\frac{\eta - \xi}{y} \right) \right) \psi(\eta) d\eta \right| \leq \|\psi\|_{\mathbb{B}^*} \left\| \left(g(\xi), \frac{1}{y} \varphi \left(\frac{\eta - \xi}{y} \right) \right) \right\|_{\mathbb{B}}.$$

Согласно (2.9) после замены переменных $k = \frac{1}{y}$ получим

$$\begin{aligned} \int_0^1 y^{\alpha+\varepsilon} \left| \int \left(g(\xi), \frac{1}{y} \varphi \left(\frac{\eta - \xi}{y} \right) \right) \psi(\eta) d\eta \right| \frac{dy}{y} &\leq \\ &\leq C_\varepsilon \|\psi\|_{\mathbb{B}^*} \widehat{\mathbb{J}} \left(\left\| \left(g(\xi), \frac{1}{y} \varphi \left(\frac{\eta - \xi}{y} \right) \right) \right\|_{\mathbb{B}} \right) < \infty. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая, что $\varphi(\xi) = \varphi_1^{(n+1)}(\xi)$, где $\int \varphi_1(\xi) d\xi = C_1 \neq 0$, и, следовательно, но,

$$\int \left(g(\xi), \frac{1}{y} \varphi \left(\frac{\eta - \xi}{y} \right) \right) \psi(\eta) d\eta = y^{n+1} \int \left(g^{(n+1)}(\xi), \frac{1}{y} \varphi_1 \left(\frac{\eta - \xi}{y} \right) \right) \psi(\eta) d\eta,$$

имеем

$$\int_0^1 y^{\alpha+\varepsilon+n+1} \left| \int \left(g^{(n+1)}(\xi), \frac{1}{y} \varphi_1 \left(\frac{\eta - \xi}{y} \right) \right) \psi(\eta) d\eta \right| \frac{dy}{y} < \infty. \quad (6.14)$$

²Напомним, что по нашему соглашению $\mathcal{D}^{-1} = \mathcal{D}$.

Замечая, что

$$\int \left(g^{(n+1)}(\xi), \frac{1}{y} \varphi_1 \left(\frac{\eta - \xi}{y} \right) \right) \psi(\eta) d\eta \xrightarrow{y \rightarrow +0} C_1(g^{(n+1)}(\xi), \psi(\xi)),$$

а $\alpha + \varepsilon + n + 1 < 0$ при достаточно малом ε , из (6.14) выводим, что

$$(g^{(n+1)}(\xi), \psi(\xi)) = 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{D},$$

т.е. $g(\xi)$ – многочлен степени не выше n . Утверждение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.2. Пространства $V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}}$ (случай 1)) всегда нетривиальны, так как

$$E_{\beta} \subset V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}}, \quad (6.15)$$

где β берется из соотношения (6.2), причем вложение непрерывно.

Действительно, пусть $f \in E_{\beta}$ и $\omega \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}^{n+1}$, $n > -\alpha$, где α – порядок автомодельности $\mathbb{J}$. Учитывая, что $\omega = \omega_1^{(n)}$, где $\omega_1 \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}^0$, $\text{supp } \omega_1 \subset [-1, 1]$, $\int \omega_1(\xi) d\xi \neq 0$ (без ограничения общности можно считать, что $\int \omega_1(\xi) d\xi = 1$), и пользуясь (2.9), имеем

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{J}}(\|L_f^{\omega}(x, y)\|_{\mathbb{B}}) &= \hat{\mathbb{J}}\left(\left\| \left(f(\xi), \frac{1}{y} \omega_1^{(n)} \left(\frac{x - \xi}{y} \right) \right) \right\|_{\mathbb{B}}\right) \\ &= \hat{\mathbb{J}}\left(y^n \left\| \left(f^{(n)}(\xi), \frac{1}{y} \omega_1 \left(\frac{x - \xi}{y} \right) \right) \right\|_{\mathbb{B}}\right) \\ &\leq C_{\varepsilon} \sup_{0 < y \leq 1} y^{\alpha - \varepsilon + n} \left\| \left(f^{(n)}(\xi), \frac{1}{y} \omega_1 \left(\frac{x - \xi}{y} \right) \right) \right\|_{\mathbb{B}} \\ &\leq C_{\varepsilon} \sup_{0 < y \leq 1} P_{\beta, N} \left[\left(f^{(n)}(\xi), \frac{1}{y} \omega_1 \left(\frac{x - \xi}{y} \right) \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.16)$$

В последнем неравенстве мы воспользовались тем, что $\alpha - \varepsilon + n > 0$, и непрерывностью вложения E_{β} в $\mathbb{B}$ (см. (6.4)). Учитывая, что

$$\begin{aligned} P_{\beta, N} \left[\left(f^{(n)}(\xi), \frac{1}{y} \omega_1 \left(\frac{x - \xi}{y} \right) \right) \right] &= \max_{j \leq N} \sup_x (1 + |x|)^N e^{\beta|x|} \left| \int \left(f^{(j+n)}(\xi), \frac{1}{y} \omega_1 \left(\frac{x - \xi}{y} \right) \right) d\xi \right| \\ &\leq \max_{j \leq N} \sup_x (1 + |x|)^N e^{\beta|x|} \sup_{x-1 < \xi < x+1} |f^{(j+n)}(\xi)| \\ &= \max_{j \leq N} \sup_{\xi} |f^{(j+n)}(\xi)| \sup_{\xi-1 < x < \xi+1} (1 + |x|)^N e^{\beta|x|} \\ &\leq \max_{j \leq N} \sup_{\xi} |f^{(j+n)}(\xi)| (2 + |\xi|)^N e^{\beta(|\xi|+1)} \leq C_1 P_{\beta, N+n}[f], \end{aligned}$$

из (6.16) получаем, что $\hat{\mathbb{J}}(\|L_f^{\omega}(x, y)\|_{\mathbb{B}}) \leq C_2 P_{\beta, N+n}[f]$. Вторая часть нормы $V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}}$ оценивается аналогично (проще), что и доказывает (6.15).

Пространства $\widehat{V}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}}$ (случай 2,а)) в зависимости от автомодельного функционала $\mathbb{J}$ может быть тривиальным (конечномерным) и нетривиальным.

Из определений пространств непосредственно следует, что

$$\widehat{V}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}} \subset V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}}. \quad (6.17)$$

Например, пространство $V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}^{\infty}}$ состоит из обобщенных функций $f(\xi) \in \mathcal{D}'$ таких, что

$$\sup_{0 < y \leq 1} \left\| \left(f(\xi), \frac{1}{y} \omega \left(\frac{\eta - \xi}{y} \right) \right) \right\|_{\mathbb{B}} < \infty, \quad (f(\xi), \omega_0(\eta - \xi)) \in \mathbb{B},$$

где $\omega \neq 0$, $\int \omega(\xi) d\xi = 0$ и $\int \omega_0(\xi) d\xi \neq 0$. Пространство $\widehat{V}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}^{\infty}}$ состоит из обобщенных функций $f \in \mathcal{D}'$, для которых выполнены те же соотношения, но с ω такой, что $\int \omega(\xi) d\xi \neq 0$.

Вложение (6.17), вообще говоря, строгое. Действительно, положим $\mathbb{J}(\cdot) = \mathbb{J}^{\infty}(\cdot)$ и $\mathbb{B} = C_0(\mathbb{R})$. Пространства $\widehat{V}_{C_0}^{\mathbb{J}^{\infty}}$ и $V_{C_0}^{\mathbb{J}^{\infty}}$ не пусты, так как содержат $\mathcal{D}$. В то же время можно показать, что функция $h(\xi) \ln |\xi|$, где $h(\xi) \in \mathcal{D}$ и $h(0) = 1$, принадлежит $V_{C_0}^{\mathbb{J}^{\infty}}$, но не принадлежит $\widehat{V}_{C_0}^{\mathbb{J}^{\infty}}$.

Отметим, что в $V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}}$ определена группа сдвигов $\{T_a \in L(V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}} \rightarrow V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}}), a \in \mathbb{R}\}$, удовлетворяющая всем условиям аксиомы II, в частности,

$$\|T_a f\|_{V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}}} \leq C(a) \|f\|_{V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}}}, \quad a \in \mathbb{R},$$

где $C(a)$ берется из формулы (6.1).

ЛЕММА 6.1. *Пространство $V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}}$ непрерывно вложено в E'_{β} , где β берется из формулы (6.2).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}}$, из утверждения 6.1 вытекает, что существуют C и N такие, что

$$|(f(\xi), \phi(\xi))| \leq C \|f\|_{V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}}} \mathcal{P}_N[\phi] \quad \forall \phi \in \mathcal{D}_{[-1, +1]}.$$

Отсюда следует, что

$$|(f(\xi + a), \phi(\xi))| \leq C \|f(\xi + a)\|_{V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}}} \mathcal{P}_N[\phi] \leq CM(1 + |\alpha|)^Q e^{\beta|a|} \|f\|_{V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}}} \mathcal{P}_N[\phi].$$

Теперь воспользуемся специальным разбиением еденицы (6.5). Для любой функции $\varphi \in E_{\beta}$ имеем

$$(f(\xi), \varphi(\xi)) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (f(\xi), \psi(\xi - n)\varphi(\xi)) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (f(\xi + n), \psi(\xi)\varphi(\xi + n)).$$

Оценим отдельные слагаемые этой суммы:

$$\begin{aligned}
|(f(\xi + n), \psi(\xi)\varphi(\xi + n))| &\leq M(1 + |n|)^Q e^{\beta|n|} \|f\|_{V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}}} \mathcal{D}_N[\psi(\xi)\varphi(\xi + n)] \\
&\leq C_1(1 + |n|)^Q e^{\beta|n|} \|f\|_{V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}}} \max_{j \leq N} \sup_{|\xi| < 1} |\varphi^{(j)}(\xi + n)| \\
&= \frac{C_2}{(1 + |n|)^2} \|f\|_{V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}}} \max_{j \leq N} \sup_{|\eta - n| < 1} e^{\beta|n|} (1 + |n|)^{2+Q} |\varphi^{(j)}(\eta)| \\
&\leq \frac{C_3}{(1 + |n|)^2} \|f\|_{V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}}} \max_{j \leq N} \sup_{\eta} e^{\beta(|\eta|+1)} (1 + |\eta| + 1)^{2+Q} |\varphi^{(j)}(\eta)| \\
&\leq \frac{C_4}{(1 + |n|)^2} \|f\|_{V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}}} P_{\beta, N+Q+2}[\varphi].
\end{aligned}$$

Отсюда выводим, что для любой функции $\varphi \in E_{\beta}$

$$|(f, \varphi)| \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{C_5}{(1 + |n|)^2} \|f\|_{V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}}} P_{\beta, N+Q+2}[\varphi] \leq C_6 \|f\|_{V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}}} P_{\beta, N+Q+2}[\varphi], \quad (6.18)$$

откуда и вытекает утверждение леммы.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.3. Пусть в аксиоме II для некоторых M и Q

$$\|T_a\| \leq M(1 + |a|)^Q, \quad -\infty < a < +\infty. \quad (6.19)$$

Тогда $V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}}$ непрерывно вложено в $\mathcal{S}'$. Это утверждение вытекает из леммы 6.1 при $\beta = 0$.

Далее будем предполагать, что наряду с аксиомами I и II выполнена также и следующая аксиома.

III. В $\mathbb{B}$ определен оператор умножения на функции из $C_0^\infty(\mathbb{R})$, причем отображение $C_0^\infty \mapsto \mathbb{L}(\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B})$ непрерывно, т.е. существуют постоянные C и N такие, что

$$\|\eta(\xi)g(\xi)\|_{\mathbb{B}} \leq CQ_N[\eta]\|g\|_{\mathbb{B}} \quad \forall \eta \in C_0^\infty \quad (6.20)$$

(см. (1.11)).

СЛЕДСТВИЕ 6.1. Существует постоянная A такая, что для любого $a > 0$ существует функция $\eta(\xi) \in \mathcal{D}$, $\eta(\xi) \equiv 1$ при $|\xi| \leq a$, такая, что

$$\|\eta(\xi)g(\xi)\|_{\mathbb{B}} \leq A\|g\|_{\mathbb{B}} \quad \forall g \in \mathbb{B}. \quad (6.21)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6.4. Из (6.21) вытекает, что

$$|(\eta(\xi)f(\xi), g(\xi))| = |(f(\xi), \eta(\xi)g(\xi))| \leq \|f\|_{\mathbb{B}^*} \|\eta g\|_{\mathbb{B}} \leq A\|f\|_{\mathbb{B}^*} \|g\|_{\mathbb{B}}.$$

Таким образом, существует постоянная A такая, что для любого $a > 0$ существует функция $\eta(\xi) \in \mathcal{D}$, $\eta(\xi) \equiv 1$ при $|\xi| \leq a$, такая, что

$$\|\eta(\xi)f(\xi)\|_{\mathbb{B}^*} \leq A\|f\|_{\mathbb{B}^*} \quad \forall f \in \mathbb{B}^*.$$

Далее мы исследуем некоторые свойства введенных банаховых пространств, вытекающие из аксиом I–III.

Введем в $\mathbb{B}$ новую норму $\mathcal{P}[\cdot]$ по формуле

$$\mathcal{P}[g] = \sup_{\substack{\varphi \in \mathcal{D} \\ \|\varphi\|_{\mathbb{B}^*} \leq 1}} |(g(\xi), \varphi(\xi))|, \quad g \in \mathbb{B},$$

где $(g(\xi), \varphi(\xi))$ – значение обобщенной функции g на основной функции φ . Известно, что для любого банахова пространства $\|g\|_{\mathbb{B}} = \sup_{\varphi \in \mathbb{B}^*, \|\varphi\|_{\mathbb{B}^*} \leq 1} |(g, \varphi)|$. Если $\mathbb{B}$ плотно вложено в $\mathcal{D}'$, то $\mathcal{D} \subset \mathbb{B}^*$. Если это вложение плотно, то $\|g\|_{\mathbb{B}} = \mathcal{P}[g]$. Если же оно не плотно, то можно лишь утверждать, что $\mathcal{P}[g] \leq \|g\|_{\mathbb{B}}$. Однако если выполнены аксиомы I–III, то эти нормы эквивалентны. Точнее, справедлива следующая

ЛЕММА 6.2. Пусть $\mathbb{B}$ – банахово пространство, для которого выполнены аксиомы I–III; тогда $\|\cdot\|_{\mathbb{B}} \sim \mathcal{P}[\cdot]$, при этом

$$\mathcal{P}[g] \leq \|g\|_{\mathbb{B}} \leq M A \mathcal{P}[g] \quad \forall g \in \mathbb{B}, \quad (6.22)$$

где постоянные M и A определяются из формулы (6.2) и следствия 6.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать лишь второе неравенство (6.22). Определим в $\mathbb{B}^*$ топологию τ системой полунорм $\{P_w[f] = |(f, w)|, w \in \mathcal{D}\}$. Обозначим $U_r = \{f \in \mathbb{B}^*, \|f\|_{\mathbb{B}^*} < r\}$, и пусть $\delta > 0$. Сперва покажем, что $\mathcal{D} \cap U_{A(M+\delta)}$ плотно в U_1 в топологии τ .

Действительно, пусть $f \in U_1$, зафиксированы $w_1, w_2, \dots, w_n$ из $\mathcal{D}$ и $\varepsilon > 0$. Возьмем “шапочку” $W(\xi) \in \mathcal{D}$, $W \geq 0$, $\text{supp } W \subset [-1, 1]$, $\int W(\xi) d\xi = 1$, и положим $\varphi_k(\xi) = \eta(\xi)(f * W_k)$, где $W_k(\xi) = kW(k\xi)$, а функция $\eta(\xi) \in \mathcal{D}$ будет подобрана позднее. Считаем, что $\eta \equiv 1$ на $\text{supp } w_i$, $i = 1, \dots, n$. Тогда существует k_ε такое, что

$$P_{w_i}[f - \varphi_k] = |(f - \eta(f * W_k), w_i)| = |(f - f * W_k, w_i)| < \varepsilon, \quad i = 1, \dots, n,$$

при $k > k_\varepsilon$, так как $f * W_k \rightarrow f$ в $\mathcal{D}'$. Оценим норму функционала $f * W_k$ в $\mathbb{B}^*$. Имеем

$$(f * W_k, g) = \int (f(x), g(x - \xi)) W_k(\xi) d\xi = \int (f, T_\xi g) W_k(\xi) d\xi.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \|f * W_k\|_{\mathbb{B}^*} &= \sup_{\|g\|_{\mathbb{B}} \leq 1} \left| \int (f, T_\xi g) W_k(\xi) d\xi \right| \\ &\leq \sup_{\|g\|_{\mathbb{B}} \leq 1} \sup_{\xi \in \text{supp } W_k} \|T_\xi g\|_{\mathbb{B}} \|f\|_{\mathbb{B}^*} \int W_k(\xi) d\xi \\ &\leq \sup_{\xi \in \text{supp } W_k} C(\xi) \leq M + \delta \end{aligned}$$

при достаточно большом k (мы учли, что $\text{supp } W_k \subset [-\frac{1}{k}, +\frac{1}{k}]$). Согласно замечанию 6.4 выбираем η таким, чтобы $\|\varphi_k\|_{\mathbb{B}^*} = \|\eta(f * W_k)\| \leq A(M + \delta)$. Таким образом, плотность $\mathcal{D} \cap U_{A(M+\delta)}$ в U_1 в топологии τ доказана.

Пусть $g \in \mathbb{B}$. Так как $\mathcal{D}$ плотно вложено в $\mathbb{B}$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $w \in \mathcal{D}$ такое, что $\|g - w\|_{\mathbb{B}} < \varepsilon$. Отсюда имеем

$$\|g\|_{\mathbb{B}} \leq \|w\|_{\mathbb{B}} + \varepsilon = \varepsilon + \sup_{\|f\|_{\mathbb{B}^*} \leq 1} |(f, w)| \leq 2\varepsilon + |(f_0, w)| \quad (6.23)$$

для некоторого $\|f_0\|_{\mathbb{B}^*} \leq 1$. Далее, в силу плотности $\mathcal{D} \cap U_{A(M+\delta)}$ в U_1 в топологии τ существует $\psi \in \mathcal{D} \cap U_{A(M+\delta)}$ такая, что

$$\begin{aligned} |(f_0, w)| &\leq \varepsilon + |(\psi, w)| \leq \varepsilon + \sup_{\substack{\varphi \in \mathcal{D} \\ \|\varphi\|_{\mathbb{B}^*} \leq A(M+\delta)}} |(\varphi, w)| \\ &= \varepsilon + A(M + \delta) \sup_{\substack{\varphi \in \mathcal{D} \\ \|\varphi\|_{\mathbb{B}^*} \leq 1}} |(\varphi, g)| \\ &\leq \varepsilon + A(M + \delta) \sup_{\substack{\varphi \in \mathcal{D} \\ \|\varphi\|_{\mathbb{B}^*} \leq 1}} |(\varphi, g - w)| + A(M + \delta) \sup_{\substack{\varphi \in \mathcal{D} \\ \|\varphi\|_{\mathbb{B}^*} \leq 1}} |(\varphi, w)| \\ &\leq \varepsilon + A(M + \delta)\varepsilon + A(M + \delta)\mathcal{P}[g] \leq \varepsilon_1 + A(M + \delta)\mathcal{P}[g]. \end{aligned}$$

Здесь учтено, что $|(\varphi, g - w)| \leq \|\varphi\|_{\mathbb{B}^*} \|g - w\|_{\mathbb{B}} < \varepsilon$. Отсюда и из (6.23) получаем, что $\|g\|_{\mathbb{B}} \leq \varepsilon_2 + A(M + \delta)\mathcal{P}[g]$. Так как ε_2 и δ можно считать сколь угодно малыми, лемма доказана.

Из плотности вложений $\mathcal{D} \subset \mathbb{B} \subset \mathcal{D}'$ вытекают вложения $\mathcal{D} \subset \mathbb{B}^* \subset \mathcal{D}'$, причем последнее вложение плотное. Заметим, что каноническое отображение $\mathbb{B}^{**} \rightarrow \mathcal{D}'$, вообще говоря, не взаимно однозначно. Обозначим через K ядро этого отображения. Тогда факторпространство $\mathbb{B}^{**}/K$ вложено в $\mathcal{D}'$. Нетрудно показать, что

$$\mathbb{B}^{**}/K = (\overline{\mathcal{D}^{\mathbb{B}^*}})^*.$$

Выясним, из каких обобщенных функций из $\mathcal{D}'$ состоит пространство $\mathbb{B}^{**}/K$.

ЛЕММА 6.3. *Имеет место равенство*

$$\mathbb{B}^{**}/K = \left\{ g \in \mathcal{D}' : \mathcal{P}[g] = \sup_{\substack{\varphi \in \mathcal{D} \\ \|\varphi\|_{\mathbb{B}^*} \leq 1}} |(g(\xi), \varphi(\xi))| < \infty \right\}. \quad (6.24)$$

При этом

$$\mathcal{P}[g] = \|g\|_{\mathbb{B}^{**}/K}. \quad (6.25)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g \in \mathbb{B}^{**}/K$, а $\check{g}$ – любой его представитель в $\mathbb{B}^{**}$. Его ограничение на $\overline{\mathcal{D}}^{\mathbb{B}^*}$ (см. (1.19)) – тоже линейный непрерывный функционал. Обозначим $\check{g}_1$ его продолжение на все $\mathbb{B}^*$, так что

$$\|\check{g}_1\|_{\mathbb{B}^{**}} = \|\check{g}|_{\overline{\mathcal{D}}^{\mathbb{B}^*}}\|_{(\overline{\mathcal{D}}^{\mathbb{B}^*})^*}.$$

Такое продолжение существует в силу теоремы Хана–Банаха. Очевидно, что $\check{g}_1$ также является представителем g , ибо $\check{g}$ и $\check{g}_1$ совпадают на $\mathcal{D}$. Так как $\mathcal{D}$ плотно вложено в $\overline{\mathcal{D}}^{\mathbb{B}^*}$, имеем

$$\begin{aligned} \|\check{g}_1\|_{\mathbb{B}^{**}} &= \|\check{g}|_{\overline{\mathcal{D}}^{\mathbb{B}^*}}\|_{(\overline{\mathcal{D}}^{\mathbb{B}^*})^*} = \sup_{\substack{\varphi \in \overline{\mathcal{D}}^{\mathbb{B}^*} \\ \|\varphi\|_{\mathbb{B}^*} \leq 1}} |\check{g}(\varphi)| \\ &= \sup_{\substack{\varphi \in \mathcal{D} \\ \|\varphi\|_{\mathbb{B}^*} \leq 1}} |\hat{g}(\varphi)| = \sup_{\substack{\varphi \in \mathcal{D} \\ \|\varphi\|_{\mathbb{B}^*} \leq 1}} |(g, \varphi)| = \mathcal{P}[g]. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\|g\|_{\mathbb{B}^{**}/K} = \inf_{\check{g} \in g} \|\check{g}\|_{\mathbb{B}^{**}} \leq \|\check{g}_1\|_{\mathbb{B}^{**}} = \mathcal{P}[g]$. Теперь из очевидного неравенства

$$\|\check{g}\|_{\mathbb{B}^{**}} = \sup_{\substack{\varphi \in \mathbb{B}^* \\ \|\varphi\|_{\mathbb{B}^*} \leq 1}} |\check{g}(\varphi)| \geq \sup_{\substack{\varphi \in \mathcal{D} \\ \|\varphi\|_{\mathbb{B}^*} \leq 1}} |(g, \varphi)| = \mathcal{P}[g],$$

переходя к нижней грани по всем $\check{g} \in g$, получаем неравенство

$$\|g\|_{\mathbb{B}^{**}/K} = \inf_{\check{g} \in g} \|\check{g}\|_{\mathbb{B}^{**}} \geq \mathcal{P}[g].$$

Обратно, пусть $g \in \mathcal{D}'$ и $\mathcal{P}[g] < \infty$; тогда эта обобщенная функция порождает непрерывный линейный функционал на $\overline{\mathcal{D}}^{\mathbb{B}^*}$. По теореме Хана–Банаха его можно продолжить на все $\mathbb{B}^*$, т.е. до элемента из $\mathbb{B}^{**}$. Он порождает класс эквивалентности g по ядру K . Это и есть прообраз g при вложении $\mathbb{B}^{**}/K$ в $\mathcal{D}'$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 6.2. Вложение $\mathbb{B} \subset \mathbb{B}^{**}/K$ изометрическое (в смысле эквивалентности норм).

Утверждение вытекает из того факта, что $\mathbb{B} \subset \mathcal{D}'$ и $\mathbb{B}^{**}/K \subset \mathcal{D}'$. Кроме того, $\|\cdot\|_{\mathbb{B}} \sim \mathcal{P}[\cdot]$ для элементов из $\mathbb{B}$, а $\mathbb{B}^{**}/K$ есть множество обобщенных функций, для которых норма $\mathcal{P}[\cdot]$ конечна.

Таким образом, $\mathbb{B}$ – замкнутое подпространство $\mathbb{B}^{**}/K$.

Обозначим через $(\mathbb{B}^{**}/K)_{\text{fin}}$ пространство, полученное замыканием финитных обобщенных функций из $\mathbb{B}^{**}/K$. Тогда справедливо следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 6.4. Имеем

$$(\mathbb{B}^{**}/K)_{\text{fin}} \subset \widehat{V}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}^\infty} \subset \mathbb{B}^{**}/K. \quad (6.26)$$

При этом оба вложения изометричны (в смысле эквивалентности норм).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть f принадлежит $\mathbb{B}^{**}/K$ и имеет компактный носитель; тогда $L_f^w(x, y) = (f(\xi), \frac{1}{y}w(\frac{x-\xi}{y})) \in \mathcal{D} \subset \mathbb{B}$. Здесь $w \in \mathcal{D}$, $\int w(\xi) d\xi = 1$ и $\text{supp } w \subset [-1, +1]$. Согласно лемме 6.2

$$\begin{aligned} \|L_f^w(x, y)\|_{\mathbb{B}} &\leq C \mathcal{P}[L_f^w(x, y)] = C \sup_{\substack{\varphi \in \mathcal{D} \\ \|\varphi\|_{\mathbb{B}^*} \leq 1}} \left| \int \varphi(x) \left(f(\xi), \frac{1}{y}w\left(\frac{x-\xi}{y}\right) \right) dx \right| \\ &= C \sup_{\substack{\varphi \in \mathcal{D} \\ \|\varphi\|_{\mathbb{B}^*} \leq 1}} \left| \left(f(\xi), \int \varphi(x) \frac{1}{y}w\left(\frac{x-\xi}{y}\right) dx \right) \right|. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Учитывая, что $\|\varphi\|_{\mathbb{B}^*} \leq 1$, имеем

$$\begin{aligned} \left\| \int \varphi(x) \frac{1}{y}w\left(\frac{x-\xi}{y}\right) dx \right\|_{\mathbb{B}^*} &= \left\| \int \varphi(\xi - xy)w(x) dx \right\|_{\mathbb{B}^*} \\ &\leq \sup_{a \in \text{supp } w} \|\varphi(\cdot + a)\|_{\mathbb{B}^*} \left| \int w(x) dx \right| \leq \sup_{a \in \text{supp } w} M e^{\beta|a|} \|\varphi\|_{\mathbb{B}^*} \leq M e^{\beta}. \end{aligned}$$

Теперь из (6.27) получаем

$$\|L_f^w(x, y)\|_{\mathbb{B}} \leq C \sup_{\substack{\psi \in \mathcal{D} \\ \|\psi\|_{\mathbb{B}^*} \leq M e^{\beta}}} |(f, \psi)| = C \mathcal{P}[f].$$

Отсюда, пользуясь леммой 6.3, имеем

$$\|f\|_{\widehat{V}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}^{\infty}}} = \sup_{0 < y \leq 1} \|L_f^w(x, y)\|_{\mathbb{B}} \leq C \mathcal{P}[f] = C \|f\|_{\mathbb{B}^{**}/K}. \quad (6.28)$$

Замыкая множество финитных функций $f \in \mathbb{B}^{**}/K$, получаем первое из включений (6.26).

Пусть теперь $f \in \widehat{V}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}^{\infty}}$. Пользуясь леммой 6.3, имеем

$$\begin{aligned} \|f\|_{\widehat{V}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}^{\infty}}} &= \sup_{0 < y \leq 1} \|L_f^w(x, y)\|_{\mathbb{B}} \geq \sup_{0 < y \leq 1} \mathcal{P}[L_f^w(x, y)] \\ &= \sup_{0 < y \leq 1} \sup_{\substack{\varphi \in \mathcal{D} \\ \|\varphi\|_{\mathbb{B}^*} \leq 1}} \left| \int \varphi(x) \left(f(\xi), \frac{1}{y}w\left(\frac{x-\xi}{y}\right) \right) dx \right|. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Замечая теперь, что для $f \in \mathcal{D}'$ справедливо соотношение

$$\int \varphi(x) \left(f(\xi), \frac{1}{y}w\left(\frac{x-\xi}{y}\right) \right) dx \xrightarrow{y \rightarrow 0} (f, \varphi) \int w(x) dx$$

(напомним, что $\int w(x) dx = 1$), из (6.29) получаем

$$\|f\|_{\widehat{V}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}^{\infty}}} \geq \sup_{\substack{\varphi \in \mathcal{D} \\ \|\varphi\|_{\mathbb{B}^*} \leq 1}} |(f, \varphi)| = \mathcal{P}[f].$$

Снова пользуясь леммой 6.3, имеем

$$\|f\|_{\mathbb{B}^{**}/K} = \mathcal{P}[f] \leq \|f\|_{\widehat{V}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}^{\infty}}}. \quad (6.30)$$

Оба включения доказаны. Теперь если $f \in \widehat{V}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}^{\infty}}$, то $L_f^w(\eta, y) \in \mathbb{B}$ для $y \in (0, 1)$. Повторяя все выкладки, начиная с (6.27), получим оценку (6.28), обратную к (6.30), что доказывает изометричность второго включения в (6.26). А так как

$(\mathbb{B}^{**}/K)_{\text{fin}}$ изометрично вкладывается в $\mathbb{B}^{**}/K$, то отсюда вытекает и изометричность первого включения. Утверждение доказано.

СЛЕДСТВИЕ 6.3. *Имеем*

$$(\widehat{V}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}^\infty})_0 = \mathbb{B}, \quad (6.31)$$

причем нормы эквивалентны.

СЛЕДСТВИЕ 6.4. *Если $\mathbb{B}$ рефлексивно, то $\widehat{V}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}^\infty} = \mathbb{B}$.*

Действительно, в этом случае ядро K тривиально и утверждение вытекает из включений (6.26).

СЛЕДСТВИЕ 6.5. *Справедливы включения $E_\beta \subset \mathbb{B} \subset E'_\beta$, причем E_β плотно вложено в $\mathbb{B}$. Здесь β берется из (6.2).*

Первое включение уже доказано (см. (6.4)), второе вытекает из цепочки доказанных выше включений

$$\mathbb{B} = (\widehat{V}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}^\infty})_0 \subset \widehat{V}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}^\infty} \subset V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}^\infty} \subset E'_\beta. \quad (6.32)$$

Последнее включение следует из леммы 6.1.

СЛЕДСТВИЕ 6.6. *Если автомодельный функционал $\mathbb{J}$ имеет порядок $\alpha > 0$, то $\mathbb{B} \subset V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}}$.*

Это непосредственно следует из того факта, что

$$\mathbb{J}(\eta(k)) \leq C_\varepsilon \mathbb{J}^\infty \left(\frac{1}{k^{\alpha-\varepsilon}} \eta(k) \right) \leq C_\varepsilon \mathbb{J}^\infty(\eta(k)),$$

тем самым $V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}^\infty} \subset V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}}$, и осталось только заметить, что $\mathbb{B} \subset V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}^\infty}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.5. Если группа сдвигов в $\mathbb{B}$ удовлетворяет условию (6.19), то

$$\mathcal{S} \subset \mathbb{B} \subset \mathcal{S}', \quad (6.33)$$

причем $\mathcal{S}$ плотно вложено в $\mathbb{B}$. Это следует из следствия 6.5 при $\beta = 0$.

Пусть фиксированы банахово пространство $\mathbb{B}$ и автомодельный функционал $\mathbb{J}$. Покажем далее, что пространства $V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}(\frac{1}{\rho} \cdot)}$ изоморфны для любой автомодельной функции $\rho(k)$. Изоморфизм осуществляется некоторым псевдодифференциальным оператором. Для этого понадобятся некоторые предварительные построения.

ЛЕММА 6.4. *Пусть $\rho(k)$ – автомодельная функция порядка α . Обобщенная функция f принадлежит $V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}^\infty(\frac{1}{\rho} \cdot)}$ тогда и только тогда, когда*

$$f' \in V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}^\infty(\frac{1}{k\rho(k)} \cdot)} \quad \text{и} \quad f * \varphi_0 \in \mathbb{B} \quad \forall \varphi_0 \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}^0. \quad (6.35)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} L_{f'}^{\varphi} \left(x, \frac{1}{k} \right) &= \frac{1}{k} (f'(\xi), k\varphi(k(x - \xi))) = (f(\xi), k\varphi'(k(x - \xi))) = L_f^{\varphi'} \left(x, \frac{1}{k} \right), \\ L_{f'}^{\varphi_0}(x, 1) &= (f'(\xi), \varphi_0(x - \xi)) = (f(\xi), \varphi'_0(x - \xi)) = L_f^{\varphi'_0}(x, 1). \end{aligned}$$

Пусть $\varphi \in \mathcal{D}^n$, где $n > [-\alpha] + 1$. Замечая, что $\varphi' \in \mathcal{D}^{n+1}$, получим

$$\sup_{k>1} \frac{1}{k\rho(k)} \left\| L_{f'}^{\varphi} \left(x, \frac{1}{k} \right) \right\|_{\mathbb{B}} = \sup_{k>1} \frac{1}{\rho(k)} \left\| L_f^{\varphi'} \left(x, \frac{1}{k} \right) \right\|_{\mathbb{B}} \leq C \|f\|_{V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}^{\infty}(\frac{1}{\rho} \cdot)}}.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \|L_{f'}^{\varphi_0}(x, 1)\|_{\mathbb{B}} &= \|L_f^{\varphi'_0}(x, 1)\|_{\mathbb{B}} \leq c \left(\|L_f^{\varphi_0}(x, 1)\|_{\mathbb{B}} + \sup_{k>1} \frac{1}{\rho(k)} \left\| L_f^{\varphi'} \left(x, \frac{1}{k} \right) \right\|_{\mathbb{B}} \right) \\ &\leq C \|f\|_{V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}^{\infty}(\frac{1}{\rho} \cdot)}} \end{aligned}$$

(см. формулу (6.8)). Отсюда следует, что если $f \in V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}^{\infty}(\frac{1}{\rho} \cdot)}$, то выполнено первое включение (6.35). Второе включение тривиально.

Достаточность. Пусть выполнены условия (6.35); тогда, учитывая, что $\varphi \in \mathcal{D}^n$, где $n > [-\alpha] + 1$, имеем

$$\sup_{k>1} \frac{1}{k\rho(k)} \left\| L_f^{\varphi'} \left(x, \frac{1}{k} \right) \right\|_{\mathbb{B}} = \sup_{k>1} \frac{1}{\rho(k)} \left\| L_{f'}^{\varphi} \left(x, \frac{1}{k} \right) \right\|_{\mathbb{B}} \leq C \|f'\|_{V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}^{\infty}(\frac{1}{\rho} \cdot)}}.$$

Кроме того, по условию $\|L_f^{\varphi_0}(x, 1)\|_{\mathbb{B}} = \|f * \varphi_0\|_{\mathbb{B}} < \infty$. Отсюда и вытекает, что $\|f\|_{V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}^{\infty}(\frac{1}{\rho} \cdot)}} < \infty$. Лемма доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.2. Пусть $\rho(k)$ – автомодельная (правильно меняющаяся) функция. Определим множество $\mathcal{R}_{\rho}$ комплекснозначных функций $\check{\rho}(k)$, удовлетворяющих свойствам:

- 1) $\check{\rho}(k) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^1)$;
- 2) $\check{\rho}(k)$ не обращается в нуль при $k \in \mathbb{R}^1$;
- 3) $\frac{\check{\rho}(\pm k)}{\rho(k)} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \text{const} \neq 0$;
- 4) для любого $n = 0, 1, \dots$ найдутся c_n такие, что $|\check{\rho}^{(n)}(\pm k)| \leq c_n \frac{\rho(k)}{k^n}$.

Положим

$$f_{\check{\rho}}(x) = F[\check{\rho}(k)] \quad (6.36)$$

для любой $\check{\rho}(k)$, удовлетворяющей условиям 1), 3) и 4).

Отметим, что $\check{\rho}(k)$ является мультипликатором в $\mathcal{S}$, а следовательно, $f_{\check{\rho}}$ принадлежит $\mathcal{S}'$ и является в нем свертывателем.

ЛЕММА 6.5. Пусть $\rho(k)$ – автомодельная функция порядка α , $C(x) = M(1+|x|)^Q$ с любым фиксированным M и целым Q и $\check{\rho}(k)$ – комплекснозначная функция, удовлетворяющая свойствам 1), 3) и 4) определения 6.2. Тогда

$$f_{\check{\rho}}(x) \in V_{L^1(C(x))}^{\mathbb{J}^\infty(\frac{1}{\rho} \cdot)}, \quad (6.37)$$

где $L^1(C(x))$ – пространство $L^1(\mathbb{R}^1)$ с весом $C(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, заметим, что

$$L_{f_{\check{\rho}}}^\varphi(x, y) = \left(f_{\check{\rho}}(\xi), \frac{1}{y} \varphi\left(\frac{x-\xi}{y}\right) \right) = \int \check{\rho}(t) \tilde{\varphi}(yt) e^{ixt} dt,$$

где $\tilde{\varphi}(t)$ – преобразование Фурье функции $\varphi(\xi) \in \mathcal{D}$. Так как $\check{\rho}(t) \tilde{\varphi}(t) \in \mathcal{S}$, то $L_{f_{\check{\rho}}}^{\varphi_0}(x, 1) \in \mathcal{S}$, а потому

$$\|L_{f_{\check{\rho}}}^{\varphi_0}(x, 1)\|_{L^1(C(x))} = \int |L_{f_{\check{\rho}}}^{\varphi_0}(x, 1)| C(x) dx < \infty \quad \forall \varphi_0 \in \mathcal{D}. \quad (6.38)$$

Тем самым мы оценили второе слагаемое в норме пространства $V_{L^1(C(x))}^{\mathbb{J}^\infty(\frac{1}{\rho} \cdot)}$ для $f_{\check{\rho}}(x)$. Теперь оценим первое слагаемое этой нормы. Выбирая функцию $\varphi(\xi) \in \mathcal{D}$ такой, чтобы все ее моменты вплоть до порядка $|Q| + 2 + |\alpha|$ обращались в нуль, имеем

$$\begin{aligned} |x^N L_{f_{\check{\rho}}}^\varphi(x, y)| &\leq \left| \int \check{\rho}(t) \tilde{\varphi}(ty) \left(\frac{d}{dt}\right)^N e^{ixt} dt \right| = \left| \int e^{ixt} \left(\frac{d}{dt}\right)^N (\check{\rho}(t) \tilde{\varphi}(ty)) dt \right| \\ &\leq \int \sum_{i+j=N} c_{ij} y^i |\check{\rho}^{(j)}| |\tilde{\varphi}^{(i)}(yt)| dt. \end{aligned}$$

Оценим любое (типичное) слагаемое суммы в последнем интеграле. Имеем

$$\begin{aligned} \int y^i |\check{\rho}^{(j)}| |\tilde{\varphi}^{(i)}(yt)| dt &\leq y^i c_j \int \frac{\rho(t)}{|t|^j} |\tilde{\varphi}^{(i)}(yt)| dt \\ &\leq C_1 y^{i+j-1} \rho\left(\frac{1}{y}\right) \int \frac{\rho(\frac{t}{y})}{\rho(\frac{1}{y})} \left| \frac{\tilde{\varphi}^{(i)}(t)}{t^j} \right| dt \leq C_2 y^{N-1} \rho\left(\frac{1}{y}\right). \end{aligned}$$

Мы воспользовались свойством 4), оценками (1.17), (1.18) при условии, что $N \leq |Q| + 2$, и учли, что $\tilde{\varphi}^{(i)}(t)$ имеет в нуле нуль, по крайней мере, порядка $|Q| + 3 + |\alpha| - i$. Из полученных оценок выводим, что

$$|x^N L_{f_{\check{\rho}}}^\varphi(x, y)| \leq C_3 y^{N-1} \rho\left(\frac{1}{y}\right), \quad 0 < y \leq 1, \quad N \leq |Q| + 2. \quad (6.39)$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} \|L_{f_{\bar{\rho}}}^{\varphi}(x, y)\|_{L^1(C(x))} &= \int |L_{f_{\bar{\rho}}}^{\varphi}(x, y)|C(x) dx \\ &= \left\{ \int_{|x|<y} + \int_{y<|x|<1} + \int_{|x|>1} \right\} |L_{f_{\bar{\rho}}}^{\varphi}(x, y)|C(x) dx. \end{aligned}$$

Оценим эти три интеграла. Имеем

$$\int_{|x|<y} |L_{f_{\bar{\rho}}}^{\varphi}(x, y)|C(x) dx \leq C_4 \frac{1}{y} \rho\left(\frac{1}{y}\right) \int_{-y}^y dx \leq C_5 \rho\left(\frac{1}{y}\right).$$

Здесь мы воспользовались оценкой (6.39) с $N = 0$. Далее,

$$\begin{aligned} \int_{y<|x|<1} |L_{f_{\bar{\rho}}}^{\varphi}(x, y)|C(x) dx &\leq \int_{y<|x|<1} |x^2 L_{f_{\bar{\rho}}}^{\varphi}(x, y)| \frac{C(x)}{x^2} dx \\ &\leq C_6 y \rho\left(\frac{1}{y}\right) \int_{y<|x|<1} \frac{dx}{x^2} \leq C_7 y \rho\left(\frac{1}{y}\right) \left[\frac{1}{y} - 1\right] \leq C_8 \rho\left(\frac{1}{y}\right). \end{aligned}$$

Здесь использована оценка (6.39) с $N = 2$. Далее,

$$\begin{aligned} \int_{|x|>1} |L_{f_{\bar{\rho}}}^{\varphi}(x, y)|C(x) dx &= \int_{|x|>1} |x|^{|Q|+2} L_{f_{\bar{\rho}}}^{\varphi}(x, y)| \frac{C(x)}{x^{|Q|+2}} dx \\ &\leq C_9 y^{|Q|+1} \rho\left(\frac{1}{y}\right) \leq C_{10} \rho\left(\frac{1}{y}\right). \end{aligned}$$

Здесь также использована оценка (6.39) с $N = |Q| + 2$. Эти оценки показывают, что

$$\sup_{0<y\leq 1} \frac{1}{\rho\left(\frac{1}{y}\right)} \|L_{f_{\bar{\rho}}}^{\varphi}(x, y)\|_{L^1(C(x))} \leq C_{11}. \quad (6.40)$$

Из (6.38) и (6.40) следует утверждение леммы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.3. Пусть $\rho(k)$ – автомодельная функция и $\beta > 0$. Через Z_{β}^{ρ} обозначаем класс аналитических в $\Pi_{-\beta}^{\beta}$ функций $\check{\rho}(\zeta)$, удовлетворяющих условиям:

- 1) $\check{\rho}(\zeta) \in A(\overline{\Pi}_{-\beta}^{\beta})$ (см. § 1);
- 2) $\check{\rho}(\zeta) \neq 0$ для $\forall \zeta = t + i\tau \in \overline{\Pi}_{-\beta}^{\beta}$;
- 3) $\frac{\check{\rho}(\zeta)}{\rho(|\zeta|)} \longrightarrow \text{const} \neq 0$ при $|\zeta| \rightarrow +\infty$, $\zeta \in \overline{\Pi}_{-\beta}^{\beta}$;
- 4) для любого $n = 0, 1, \dots$ найдутся c_n и k_0 такие, что $|\check{\rho}^{(n)}(\zeta)| \leq c_n \frac{1}{|\zeta|^n} \rho(|\zeta|)$

при $|\zeta| > k_0$ и $\zeta \in \overline{\Pi}_{-\beta}^{\beta}$.

Множество преобразований Фурье функций из класса Z_{β}^{ρ} будем обозначать $\tilde{Z}_{\beta}^{\rho}$, т.е.

$$\tilde{Z}_{\beta}^{\rho} = \{f_{\bar{\rho}}(x) = F[\check{\rho}(t)]; \check{\rho}(t) \in Z_{\beta}^{\rho}\}. \quad (6.41)$$

Отметим, что $\check{\rho}$ является мультипликатором в $\tilde{E}_{\beta}$, а $f_{\bar{\rho}}$ является свертывателем в E'_{β} . Отметим также, что если $\check{\rho}(\zeta) \in Z_{\beta}^{\rho}$, то $\check{\rho}(\zeta \pm i\beta) \in \mathcal{R}_{\rho}$.

Нетрудно показать, что для любой автомодельной функции $\rho(k)$ порядка α при любом $\beta > 0$ класс Z_{β}^{ρ} не пуст.

ЛЕММА 6.6. Пусть $g \in V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}^\infty(\frac{1}{\rho}, \cdot)}$, где $\mathbb{B}$ – банахово пространство, удовлетворяющее аксиомам I–III, и $\rho(k)$ – автомодельная функция порядка $\alpha > 0$. Тогда для любого a и любого ограниченного в $\mathcal{D}_a$ семейства $\{\omega^y(\xi) \in \mathcal{D}_a, 0 < y \leq 1\}$

$$\frac{1}{\rho(\frac{1}{y})} \|L_g^{\omega^y}(x, y)\|_{\mathbb{B}} < \text{const}, \quad 0 < y \leq 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из соотношения (6.7) вытекает, что

$$\sup_{0 < y \leq 1} \frac{1}{\rho(\frac{1}{y})} \|L_g^{\omega}(x, y)\|_{\mathbb{B}} \leq C \mathcal{P}_N[\omega] \quad \forall \omega \in \mathcal{D}_a$$

с некоторыми C и N . Мы воспользовались тем, что $m < 0$ при $\alpha > 0$, а стало быть, $\mathcal{D}_a^m = \mathcal{D}_a$. Отсюда

$$\frac{1}{\rho(\frac{1}{y})} \|L_g^{\omega^y}(x, y)\|_{\mathbb{B}} \leq C \mathcal{P}_N[\omega^y] < \text{const}.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 6.7. Пусть $\rho(k)$ – автомодельная функция порядка α , $C(x) = M(1 + |x|)^Q e^{\beta|x|}$ с $M > 0$ и любым целым Q и $\check{\rho}(\zeta)$ удовлетворяет условиям 1), 3) и 4) определения 6.3. Тогда

$$f_{\check{\rho}}(x) \in V_{L^1(C(x))}^{\mathbb{J}^\infty(\frac{1}{\rho}, \cdot)}. \quad (6.42)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\alpha > 0$. Для $\varphi \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}^0$ согласно утверждению 6.3 имеем

$$\begin{aligned} \|f_{\check{\rho}}(x)\|_{V_{L^1(C(x))}^{\mathbb{J}^\infty(\frac{1}{\rho}, \cdot)}} &= \left[\sup_{0 < y \leq 1} \frac{1}{\rho(\frac{1}{y})} \int \left| \left(f_{\check{\rho}}(\xi), \frac{1}{y} \varphi\left(\frac{x-\xi}{y}\right) \right) \right| e^{\beta|x|} M(1 + |x|)^Q dx \right. \\ &\quad \left. + \int \left| \left(f_{\check{\rho}}(\xi), \varphi(x-\xi) \right) \right| e^{\beta|x|} M(1 + |x|)^Q dx \right] \\ &\leq C \max_{\pm} \sup_{0 < y \leq 1} \frac{1}{\rho(\frac{1}{y})} \int \left| \left(f_{\check{\rho}}(\xi), \frac{1}{y} \varphi\left(\frac{x-\xi}{y}\right) \right) \right| e^{\pm\beta x} M(1 + |x|)^Q dx. \end{aligned} \quad (6.43)$$

Оценим выражение, стоящее справа в (6.43), для знака $+$ (для знака $-$ оно оценивается аналогично). Имеем

$$\begin{aligned} &\sup_{0 < y \leq 1} \frac{1}{\rho(\frac{1}{y})} \int \left| \left(f_{\check{\rho}}(\xi), \frac{1}{y} \varphi\left(\frac{x-\xi}{y}\right) \right) \right| e^{\beta x} M(1 + |x|)^Q dx \\ &= \sup_{0 < y \leq 1} \frac{1}{\rho(\frac{1}{y})} \int \left| \left(e^{\beta \xi} f_{\check{\rho}}(\xi), \frac{1}{y} e^{y\beta \frac{x-\xi}{y}} \varphi\left(\frac{x-\xi}{y}\right) \right) \right| M(1 + |x|)^Q dx \\ &= \sup_{0 < y \leq 1} \frac{1}{\rho(\frac{1}{y})} \int \left| \left(f_{\check{\rho}(\cdot - i\beta)}(\xi), \frac{1}{y} \omega^y\left(\frac{x-\xi}{y}\right) \right) \right| M(1 + |x|)^Q dx \\ &= \mathbb{J}^\infty \left(\frac{1}{\rho(\frac{1}{y})} \|L_{f_{\check{\rho}(\cdot - i\beta)}}^{\omega^y}(x, y)\|_{L^1(M(1 + |x|)^Q)} \right), \end{aligned} \quad (6.44)$$

где $\omega^y(\xi) = e^{y\beta\xi}\varphi(\xi)$. Так как $\check{\rho}(\zeta \mp i\beta)$ удовлетворяет условиям 1), 3) и 4) определения 6.2, то, согласно лемме 6.5

$$f_{\check{\rho}(\cdot - i\beta)}(x) \in V_{L^1(M(1+|x|)^Q)}^{\mathbb{J}^\infty(\frac{1}{\rho}\cdot)}. \quad (6.45)$$

Учитывая, что семейство функций $\{\omega^y(\xi): 0 < y \leq 1\}$ ограничено в $\mathcal{D}_a$ (а таково, что $\text{supp } \varphi \subset [-a, a]$), и пользуясь леммой 6.6, из (6.44) выводим (6.42).

Пусть теперь $\alpha \leq 0$. Подберем n таким, чтобы $n + \alpha > 0$. Заметим, что $f_{\check{\rho}}^{(n)}(x) = f_{(i\zeta)^n \check{\rho}(\zeta)}(x)$ и $(i\zeta)^n \check{\rho}(\zeta)$ удовлетворяет условиям 1), 3) и 4) определения 6.3 для автомодельной функции $k^n \rho(k)$, а ее порядок равен $n + \alpha > 0$. По уже доказанному

$$f_{(i\zeta)^n \check{\rho}(\zeta)} \in V_{L^1(C(x))}^{\mathbb{J}^\infty(\frac{1}{k^n \rho(k)}\cdot)}.$$

Пусть теперь $\varphi_0 \in \mathcal{D}$, $\int \varphi_0(\xi) d\xi \neq 0$; тогда

$$\begin{aligned} \|f_{\check{\rho}} * \varphi_0\|_{L^1(C(x))} &= \int |(f_{\check{\rho}}(\xi), \varphi_0(x - \xi))| e^{\beta|x|} M(1 + |x|)^Q dx \\ &\leq C \max_{\pm} \int |(f_{\check{\rho}}(\xi), \varphi_0(x - \xi))| e^{\pm\beta x} M(1 + |x|)^Q dx. \end{aligned} \quad (6.46)$$

Оценим выражение, стоящее справа в (6.46), для знака $+$ (для знака $-$ оно оценивается аналогично). Имеем

$$\begin{aligned} &\int |(f_{\check{\rho}}(\xi), \varphi_0(x - \xi))| e^{\beta x} M(1 + |x|)^Q dx \\ &= \int |(e^{\beta\xi} f_{\check{\rho}}(\xi), e^{\beta(x-\xi)} \varphi_0(x - \xi))| M(1 + |x|)^Q dx \\ &= \int |(f_{\check{\rho}(\cdot - i\beta)}(\xi), \omega(x - \xi))| M(1 + |x|)^Q dx \leq \|f_{\check{\rho}(\cdot - i\beta)}(x)\|_{V_{L^1(M(1+|x|)^Q)}^{\mathbb{J}^\infty(\frac{1}{\rho}\cdot)}} < \infty. \end{aligned}$$

Здесь $\omega(\xi) = e^{\beta\xi}\varphi_0(\xi)$, а для последнего неравенства мы воспользовались (6.45). Таким образом, $f_{\check{\rho}} * \varphi_0 \in L^1(C(x))$. Применяя теперь n раз лемму 6.4, получим (6.42) и в этом случае. Лемма доказана.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6.5. Пусть $\mathbb{B}$ – банахово пространство, в котором выполнены аксиомы I–III, с группой сдвигов $\{T_a: a \in \mathbb{R}^1\}$, удовлетворяющей условию

$$\|T_a\| \leq M(1 + |a|)^Q e^{\beta|a|} \quad (6.47)$$

с некоторыми M , Q и β , $\mathbb{J}$ – автомодельный функционал и $\rho(k)$ – автомодельная функция. Тогда для любой $\check{\rho}(\zeta) \in Z_\beta^\rho$ отображение

$$f_{\check{\rho}}*: V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}(\cdot)} \mapsto V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}(\frac{1}{\rho}\cdot)} \quad (6.48)$$

непрерывно. Здесь $f_{\check{\rho}}(x)$ – преобразование Фурье функции $\check{\rho}$, а $f_{\check{\rho}}^*$ – оператор свертки с ядром $f_{\check{\rho}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}}$. Так как $V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}} \subset E'_{\beta}$, а $f_{\bar{\rho}}$ – свертыватель в E'_{β} , то свертка $f_{\bar{\rho}} * f$ принадлежит E'_{β} . Оценим ее норму в $V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}(\frac{1}{\rho}, \cdot)}$. Имеем

$$\|f_{\bar{\rho}} * f\|_{V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}(\frac{1}{\rho}, \cdot)}} = \hat{\mathbb{J}}\left(\frac{1}{\rho(\frac{1}{y})}\|L_{f_{\bar{\rho}}*f}^{\varphi}(x, y)\|_{\mathbb{B}}\right) + \|L_{f_{\bar{\rho}}*f}^{\varphi_0}(x, 1)\|_{\mathbb{B}}. \quad (6.49)$$

Положим $\varphi = \omega^1 * \omega^2$, где ω^j , $j = 1, 2$, из $\mathcal{D}$ и имеют достаточно большое число моментов, равных нулю. Положим также $\varphi_0 = \omega_0^1 * \omega_0^2$, где ω_0^j из $\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}^0$. Далее нам понадобится следующая

ЛЕММА 6.8. Пусть в условиях утверждения 6.5 $h \in \mathbb{B}$, а $g \in L^1(C(x))$; тогда $\|h * g\|_{\mathbb{B}} \leq \|g\|_{L^1(C(x))}\|h\|_{\mathbb{B}}$.

Действительно, понимая $\int h(x-a)g(a) da$ как интеграл Фреше в банаховом пространстве $\mathbb{B}$, имеем

$$\begin{aligned} \left\| \int h(x-a)g(a) da \right\|_{\mathbb{B}} &\leq \int |g(a)| \|h(x-a)\|_{\mathbb{B}} da \leq \int C(a)|g(a)| da \|h\|_{\mathbb{B}} \\ &= \|g\|_{L^1(C(x))}\|h\|_{\mathbb{B}}, \end{aligned}$$

что и требовалось показать.

Продолжим доказательство утверждения. Пользуясь леммой 6.8, получим

$$\|L_{f_{\bar{\rho}}*f}^{\omega^1*\omega^2}(x, y)\|_{\mathbb{B}} = \|L_{f_{\bar{\rho}}}^{\omega^1}(x, y) * L_f^{\omega^2}(x, y)\|_{\mathbb{B}} \leq \|L_f^{\omega^2}(x, y)\|_{\mathbb{B}} \|L_{f_{\bar{\rho}}}^{\omega^1}(x, y)\|_{L^1(C(x))}.$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{J}}\left(\frac{1}{\rho(\frac{1}{y})}\|L_{f_{\bar{\rho}}*f}^{\omega^1*\omega^2}(x, y)\|_{\mathbb{B}}\right) &\leq \hat{\mathbb{J}}\left(\frac{1}{\rho(\frac{1}{y})}\|L_f^{\omega^2}(x, y)\|_{\mathbb{B}}\|L_{f_{\bar{\rho}}}^{\omega^1}(x, y)\|_{L^1(C(x))}\right) \\ &\leq \sup_{0 < y \leq 1} \frac{1}{\rho(\frac{1}{y})}\|L_{f_{\bar{\rho}}}^{\omega^1}(x, y)\|_{L^1(C(x))} \hat{\mathbb{J}}(\|L_f^{\omega^2}(x, y)\|_{\mathbb{B}}) \leq \|f_{\bar{\rho}}\|_{V_{L^1(C(x))}^{\mathbb{J}^{\infty}(\frac{1}{\rho}, \cdot)}} \|f\|_{V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}}}. \end{aligned}$$

Аналогично оценивается и второе слагаемое в (6.49). Утверждение доказано.

СЛЕДСТВИЕ 6.7. В условиях утверждения 6.5 отображение (6.48) осуществляет изоморфизм пространств $V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}(\cdot, \cdot)}$ и $V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}(\frac{1}{\rho}, \cdot)}$.

Это легко следует из того, что $\frac{1}{\rho} \in Z_{\beta}^{\frac{1}{\rho}}$ и отображение $f_{\frac{1}{\rho}} *$ является обратным к отображению $f_{\bar{\rho}} *$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6.6. Пусть $\mathbb{B}$ – банахово пространство, в котором выполнены аксиомы I–III, с группой сдвигов $\{T_a : a \in \mathbb{R}^1\}$, удовлетворяющей условию

$$\|T_a\| \leq M(1 + |a|)^Q \quad (6.50)$$

с некоторыми M и Q , $\mathbb{J}(\cdot)$ – автомодельный функционал и $\rho(k)$ – автомодельная (правильно меняющаяся) функция. Тогда отображение

$$f_{\check{\rho}}^* : V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}(\cdot)} \mapsto V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}(\frac{1}{\check{\rho}}\cdot)}, \quad (6.51)$$

где $\check{\rho}$ – любая функция из $\mathcal{R}_{\rho}$, а $f_{\check{\rho}}$ – ее преобразование Фурье, осуществляет изоморфизм пространств $V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}(\cdot)}$ и $V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}(\frac{1}{\check{\rho}}\cdot)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству утверждения 6.5 и следствия 6.7, надо только учесть, что теперь $V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}} \subset \mathcal{S}'$, а $f_{\check{\rho}}$ – свертыватель в $\mathcal{S}'$.

Как уже отмечалось (см. замечание 6.2), $\mathcal{D} \subset V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}}$. Интересно выяснить, когда это вложение плотно. Этому будут посвящены несколько следующих лемм.

ЛЕММА 6.9. Пусть $\mathbb{J}$ – автомодельный функционал порядка α , $\mathbb{B}$ – банахово пространство, удовлетворяющее аксиомам I–III, и $f(\xi) \in V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}}$. Тогда для того, чтобы

$$f(\xi) \in (V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}})_0, \quad (6.52)$$

необходимо и достаточно, чтобы функция $f(\xi + a)$ была непрерывна по a в пространстве $V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Пусть $f(\xi) \in (V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}})_0 = \overline{\mathcal{D}}^{V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}}}$. Тогда $\{f(\xi + a) : a \in \mathbb{R}^1\}$ – непрерывное семейство в $V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}}$, так как сдвиги непрерывны в $\mathcal{D}$, а $\mathcal{D}$ плотно и непрерывно вложено в $(V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}})_0$.

Достаточность. а) Рассмотрим случай $\alpha > 0$. Пусть функция $f(\xi + a)$ непрерывна в $V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}}$. Положим $\omega_k(\xi) = k\omega(k\xi)$, где $\omega(\xi)$ – “шапочка”, т.е. $\omega \in \mathcal{D}$, $\int \omega(\xi) d\xi = 1$, $\omega > 0$ и $\text{supp } \omega \subset [-1, +1]$. Теперь заметим, что

$$\int f(\xi - a)\omega_k(a) da \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} f(\xi) \text{ в } V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}}. \quad (6.53)$$

(Здесь интеграл понимается как интеграл Фреше в банаховом пространстве $V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}}$.) Действительно,

$$\begin{aligned} \left\| \int f(\xi - a)\omega_k(a) da - f(\xi) \right\|_{V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}}} &= \left\| \int (f(\xi - a) - f(\xi))\omega_k(a) da \right\|_{V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}}} \\ &\leq \sup_{a \in \text{supp } \omega_k} \|f(\xi - a) - f(\xi)\|_{V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}}} \int \omega_k(a) da \longrightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Так как $\int f(\xi - a)\omega_k(a) da \in \mathbb{B}$, а $\mathcal{D}$ плотно в $\mathbb{B}$, то эту свертку можно приблизить функциями из $\mathcal{D}$ в топологии $\mathbb{B}$. Поскольку $\mathbb{B} \subset V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}}$ при $\alpha > 0$ (см. следствие 6.6),

то это приближение имеет место и в топологии $V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}}$, что и доказывает утверждение леммы в этом случае.

б) Пусть $\alpha \leq 0$. Рассмотрим автомодельный функционал $\mathbb{J}_1(\cdot) = \mathbb{J}(\frac{1}{\rho}\cdot)$, где $\rho(k) = k^{-\alpha+\varepsilon}$. Его порядок автомодельности равен $\varepsilon > 0$. Функция $f_1(\xi)$, равная $f_{\check{\rho}} * f$, принадлежит $V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}_1}$, и ее сдвиги $\{f_1(\xi + a), a \in \mathbb{R}^1\}$ – непрерывное семейство в $V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}_1}$, так как отображение $f_{\check{\rho}} *$ (согласно утверждению 6.5 и следствию 6.7) устанавливает (топологический) изоморфизм между пространствами $V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}}$ и $V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}_1}$. По уже доказанному f_1 принадлежит $(V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}_1})_0$, следовательно, приближается функциями из $\mathcal{D}$. Так как отображение $f_{\check{\rho}} *$ сохраняет E_{β} и $\check{\rho}$ – мультипликатор в Z_{β} , а $\mathcal{D}$ плотно в E_{β} , то f можно приблизить в $V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}}$ функциями из E_{β} . Поскольку $\mathcal{D}$ плотно в E_{β} , то любую функцию из E_{β} можно приблизить функциями из $\mathcal{D}$ в топологии E_{β} , но в силу непрерывности вложения $E_{\beta} \subset V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}}$ (см. (6.15)) это приближение имеет место и в топологии $V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}}$. Отсюда следует утверждение леммы и в этом случае. Лемма доказана.

ЛЕММА 6.10. Пусть $\mathbb{J}$ – автомодельный функционал, удовлетворяющий теореме Лебега (см. определение 2.1), $\mathbb{B}$ – банахово пространство с аксиомами I–III. Тогда

$$V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}} = (V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}})_0. \quad (6.54)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f(x) \in V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}}$. Рассмотрим семейство сдвигов $\{f(x+a): a \in \mathbb{R}^1\}$ и докажем, что оно непрерывно при $a = 0$, а стало быть, и при любом a в $V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}}$. Имеем

$$\begin{aligned} \|f(x+a) - f(x)\|_{V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}}} &= \hat{\mathbb{J}}(\|L_{f(x+a)}^{\varphi}(x, y) - L_f^{\varphi}(x, y)\|_{\mathbb{B}}) \\ &\quad + \|L_{f(x+a)}^{\varphi_0}(x, 1) - L_f^{\varphi_0}(x, 1)\|_{\mathbb{B}} \\ &= \hat{\mathbb{J}}(\|L_f^{\varphi}(x+a, y) - L_f^{\varphi}(x, y)\|_{\mathbb{B}}) \\ &\quad + \|L_f^{\varphi_0}(x+a, 1) - L_f^{\varphi_0}(x, 1)\|_{\mathbb{B}}. \end{aligned} \quad (6.55)$$

Поскольку сдвиги непрерывны в $\mathbb{B}$, второе слагаемое, стоящее справа в (6.55), стремится к нулю при $a \rightarrow +0$. По тем же соображениям при фиксированном $y \in (0, 1]$

$$\|L_f^{\varphi}(x+a, y) - L_f^{\varphi}(x, y)\|_{\mathbb{B}} \rightarrow 0 \quad \text{при } a \rightarrow +0.$$

Кроме того, считая $a < 1$, имеем

$$\begin{aligned} \|L_f^{\varphi}(x+a, y) - L_f^{\varphi}(x, y)\|_{\mathbb{B}} &\leq \|L_f^{\varphi}(x+a, y)\|_{\mathbb{B}} + \|L_f^{\varphi}(x, y)\|_{\mathbb{B}} \\ &\leq (C(a) + 1)\|L_f^{\varphi}(x, y)\|_{\mathbb{B}} \leq A\|L_f^{\varphi}(x, y)\|_{\mathbb{B}}. \end{aligned}$$

Так как $\hat{\mathbb{J}}(\|L_f^{\varphi}(x, y)\|_{\mathbb{B}}) < \infty$, то по теореме Лебега

$$\hat{\mathbb{J}}(\|L_f^{\varphi}(x+a, y) - L_f^{\varphi}(x, y)\|_{\mathbb{B}}) \xrightarrow{a \rightarrow 0} 0.$$

Теперь по лемме 6.9 $f \in (V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}})_0$. Лемма доказана.

Ранее мы доказали, что $\mathbb{B} \subset V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}^{\infty}}$ (см. (6.32)). Покажем, что

$$V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}^1} \subset \mathbb{B} \subset V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}^{\infty}}. \quad (6.56)$$

ЛЕММА 6.11. Пусть $\mathbb{B}$ – банахово пространство, удовлетворяющее аксиомам I–III. Тогда $V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}^1} \subset \mathbb{B}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\mathbb{B} = (\widehat{V}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}^\infty})_0$ (см. следствие 6.3), то достаточно доказать, что $V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}^1} \subset (\widehat{V}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}^\infty})_0$. Воспользуемся соотношением

$$L_f^\varphi(x, y) = \int_y^1 \frac{d\eta}{\eta} L_f^{\varphi^1}(x, \eta) + L_f^\varphi(x, 1), \quad \varphi_1(\xi) = \frac{d}{d\xi}(\xi\varphi(\xi)). \quad (6.57)$$

Оно получается, если проинтегрировать по η от y до 1 легко проверяемое тождество $\frac{d}{d\eta} L_f^\varphi(x, \eta) = -\frac{1}{\eta} L_f^{\varphi^1}(x, \eta)$. Пусть теперь $f \in V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}^1}$. Пользуясь (6.57), для φ и φ_0 из $\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}^0$ получаем

$$\begin{aligned} \|f\|_{\widehat{V}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}^\infty}} &= \sup_{0 < y \leq 1} \|L_f^\varphi(x, y)\|_{\mathbb{B}} + \|L_f^{\varphi_0}(x, 1)\|_{\mathbb{B}} \\ &= \sup_{0 < y \leq 1} \left\| L_f^\varphi(x, 1) + \int_y^1 \frac{1}{\eta} L_f^{\varphi^1}(x, \eta) d\eta \right\|_{\mathbb{B}} + \|L_f^{\varphi_0}(x, 1)\|_{\mathbb{B}} \\ &\leq [\|L_f^\varphi(x, 1)\|_{\mathbb{B}} + \|L_f^{\varphi_0}(x, 1)\|_{\mathbb{B}}] + \sup_{0 < y \leq 1} \int_y^1 \frac{d\eta}{\eta} \|L_f^{\varphi^1}(x, \eta)\|_{\mathbb{B}} \leq c \|f\|_{V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}^1}}. \end{aligned}$$

(В последнем неравенстве учтено, что $\int \varphi_1(\xi) d\xi = 0$.) Отсюда вытекает, что $V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}^1}$ непрерывно вложено в $\widehat{V}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}^\infty}$, а потому $(V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}^1})_0 \subset (\widehat{V}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}^\infty})_0$. По лемме 6.10 $(V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}^1})_0 = V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}^1}$, так как $\mathbb{J}^1$ удовлетворяет теореме Лебега. Отсюда и следует (6.56). Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 6.8. Пусть в условиях леммы 6.11 $\mathbb{J}$ – автомодельный функционал порядка $\alpha < 0$; тогда

$$V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}} \subset \mathbb{B}. \quad (6.58)$$

Действительно, так как $\alpha + \varepsilon < 0$ при достаточно малом ε , то $\mathbb{J}^1(\psi(k)) \leq \mathbb{J}^1(\frac{1}{k^{\alpha+\varepsilon}}\psi(k)) \leq C_\varepsilon \mathbb{J}(\psi(k))$ (см. (2.9)). Отсюда и из (6.56) имеем

$$V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}} \subset V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}^1(\frac{1}{k^{\alpha+\varepsilon}}\cdot)} \subset V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}^1} \subset \mathbb{B}.$$

Покажем, что введенные банаховы пространства $V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}}$ при $\alpha < 0$ допускают другое, более традиционное, описание и в частных случаях совпадают с широко известными и часто встречающимися на практике пространствами типа Бесова–Никольского.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6.7. Пусть $\mathbb{J}$ – автомодельный функционал порядка α , $-1 < \alpha < 0$, и банахово пространство $\mathbb{B}$ удовлетворяет аксиомам I–III. Тогда

$$V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}} = \{f(x) \in \mathbb{B}: \|f\|_{\Lambda} = \widehat{\mathbb{J}}(\|f(x+y) - f(x)\|_{\mathbb{B}}) + \|f\|_{\mathbb{B}} < \infty\}, \quad (6.59)$$

причем $\|\cdot\|_{\Lambda} \sim \|f\|_{V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}}$. Докажем, что $f \in \mathbb{B}$ и $\|f\|_{\Lambda} \leq C\|f\|_{V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}}}$. Первое включение следует из того, что $\alpha < 0$, и из (6.58). Отсюда же следует, что $\|f\|_{\mathbb{B}} \leq C_1\|f\|_{V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}}}$. Далее, пусть $\varphi \in \mathcal{D}$, $\int \varphi(x) dx = 1$. Имеем

$$\begin{aligned} \|f(x+y) - f(x)\|_{\mathbb{B}} &\leq \|f(x+y) - L_f^{\varphi}(x+y, y)\|_{\mathbb{B}} \\ &\quad + \|L_f^{\varphi}(x+y, y) - L_f^{\varphi}(x, y)\|_{\mathbb{B}} + \|L_f^{\varphi}(x, y) - f(x)\|_{\mathbb{B}}. \end{aligned} \quad (6.60)$$

Оценим каждое слагаемое в правой части. Рассмотрим последнее слагаемое. Так как $f \in \mathbb{B}$, то $L_f^{\varphi}(x, y) \rightarrow f(x)$ при $y \rightarrow 0$ в $\mathbb{B}$. Переходя к пределу в $\mathbb{B}$ при $y_0 \rightarrow 0$ в равенстве $\int_{y_0}^y \frac{d}{d\eta} L_f^{\varphi}(x, \eta) d\eta = L_f^{\varphi}(x, y) - L_f^{\varphi}(x, y_0)$, получим

$$L_f^{\varphi}(x, y) - f(x) = \int_0^y \frac{d}{d\eta} L_f^{\varphi}(x, \eta) d\eta.$$

Так как $\frac{d}{dy} L_f^{\varphi}(x, y) = -\frac{1}{y} L_f^{\varphi_1}(x, y)$, где $\varphi_1(x) = (x\varphi(x))'$, получим

$$L_f^{\varphi}(x, y) - f(x) = - \int_0^y \frac{1}{\eta} L_f^{\varphi_1}(x, \eta) d\eta.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{J}}(\|L_f^{\varphi}(x, y) - f(x)\|_{\mathbb{B}}) &\leq \hat{\mathbb{J}}\left(\int_0^y \frac{1}{\eta} \|L_f^{\varphi_1}(x, \eta)\|_{\mathbb{B}} d\eta\right) \\ &\leq C_2 \hat{\mathbb{J}}(\|L_f^{\varphi_1}(x, \eta)\|_{\mathbb{B}}) \leq C_2 \|f\|_{V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}}}. \end{aligned}$$

В предпоследнем неравенстве мы воспользовались неравенством Харди для $\alpha < 0$, а в последнем неравенстве – тем, что $\int \varphi_1(x) dx = \int \frac{d}{dx}(x\varphi(x)) dx = 0$.

Для первого слагаемого справа в (6.60) получим

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{J}}(\|f(x+y) - L_f^{\varphi}(x+y, y)\|_{\mathbb{B}}) &= \hat{\mathbb{J}}(\|T_y(f(x) - L_f^{\varphi}(x, y))\|_{\mathbb{B}}) \\ &\leq C(1) \hat{\mathbb{J}}(\|f(x) - L_f^{\varphi}(x, y)\|_{\mathbb{B}}) \leq c\|f\|_{V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}}}. \end{aligned}$$

Наконец, для среднего слагаемого в (6.60) имеем

$$\begin{aligned} \|L_f^{\varphi}(x+y, y) - L_f^{\varphi}(x, y)\|_{\mathbb{B}} &= \left\| \left(f(\xi), \frac{1}{y} \left[\varphi\left(\frac{x+y-\xi}{y}\right) - \varphi\left(\frac{x-\xi}{y}\right) \right] \right) \right\|_{\mathbb{B}} \\ &= \left\| \left(f(\xi), \frac{1}{y} \varphi_2\left(\frac{x-\xi}{y}\right) \right) \right\|_{\mathbb{B}}, \quad \varphi_2(\xi) = \varphi(\xi+1) - \varphi(\xi). \end{aligned}$$

Учитывая, что $\int \varphi_2(x) dx = 0$, получаем

$$\hat{\mathbb{J}}(\|L_f^{\varphi}(x+y, y) - L_f^{\varphi}(x, y)\|_{\mathbb{B}}) \leq \hat{\mathbb{J}}(\|L_f^{\varphi_2}(x, y)\|_{\mathbb{B}}) \leq c\|f\|_{V_{\mathbb{B}}^{\mathbb{J}}}.$$

Суммируя полученные неравенства, выводим $\|f\|_\Lambda \leq C\|f\|_{V_{\mathbb{B}}^J}$.

Обратно, пусть $f \in \mathbb{B}$ и $\|f\|_\Lambda < \infty$. Возьмем $\varphi \in \mathcal{D}$, $\int \varphi(x) dx \neq 0$, и $\text{supp } \varphi \subset [-1, +1]$. Учитывая, что $\int \varphi'(x) dx = 0$, имеем

$$\begin{aligned} L_f^{\varphi'}(x, y) &= \left(f(\xi), \frac{1}{y} \varphi' \left(\frac{x - \xi}{y} \right) \right) = (f(x - y\xi), \varphi'(\xi)) = (f(x - y\xi) - f(x), \varphi'(\xi)) \\ &= \left(f(x - \xi) - f(x), \frac{1}{y} \varphi' \left(\frac{\xi}{y} \right) \right) = \int [f(x - \xi) - f(x)] \frac{1}{y} \varphi' \left(\frac{\xi}{y} \right) d\xi. \end{aligned}$$

Здесь интеграл понимается как интеграл Фреше в $\mathbb{B}$ (сдвиги непрерывны в $\mathbb{B}$). Далее имеем

$$\begin{aligned} \|L_f^{\varphi'}(x, y)\|_{\mathbb{B}} &\leq \int \|f(x - \xi) - f(x)\|_{\mathbb{B}} \frac{1}{y} \left| \varphi' \left(\frac{\xi}{y} \right) \right| d\xi \\ &\leq \sup_{\xi} |\xi \varphi'(\xi)| \cdot \int_{-y}^y \frac{d\xi}{\xi} \|f(x - \xi) - f(x)\|_{\mathbb{B}} \\ &\leq C_2 \left\{ \int_{-y}^0 + \int_0^y \right\} \frac{d\xi}{\xi} \|f(x - \xi) - f(x)\|_{\mathbb{B}}. \end{aligned}$$

Отсюда, пользуясь неравенством Харди, получаем

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{J}}(\|L_f^{\varphi'}(x, y)\|_{\mathbb{B}}) &\leq \\ &\leq \hat{\mathbb{J}} \left(\int_0^y \frac{d\xi}{\xi} \|f(x - \xi) - f(x)\|_{\mathbb{B}} \right) + \hat{\mathbb{J}} \left(\int_{-y}^0 \frac{d\xi}{\xi} \|f(x - \xi) - f(x)\|_{\mathbb{B}} \right) \\ &\leq C [\hat{\mathbb{J}}(\|f(x - y) - f(x)\|_{\mathbb{B}}) + \hat{\mathbb{J}}(\|f(x + y) - f(x)\|_{\mathbb{B}})] \\ &\leq C [C(1) \hat{\mathbb{J}}(\|f(x) - f(x + y)\|_{\mathbb{B}}) + \hat{\mathbb{J}}(\|f(x + y) - f(x)\|_{\mathbb{B}})] \leq C_4 \|f\|_\Lambda. \end{aligned}$$

Отсюда и из неравенства

$$\|(f(\xi), \varphi(x - \xi))\|_{\mathbb{B}} \leq c \|f\|_{\mathbb{B}} \int |\varphi(\xi)| d\xi \leq c_1 \|f\|_\Lambda$$

получим $\|f\|_{V_{\mathbb{B}}^J} \leq c \|f\|_\Lambda$. Утверждение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.6. Утверждение 6.7 останется справедливым и при любом отрицательном α , но если $-2 < \alpha < 0$, то вместо разности $f(x + y) - f(x)$ в (6.59) нужно брать вторую разность $[f(x + y) - 2f(x) + f(x - y)]$, при $-3 < \alpha < 0$ — третью разность и т.д.

Приложение

Здесь мы докажем ряд вспомогательных утверждений, которые были использованы в основном тексте.

Следующие четыре леммы являются некоторыми вариантами классической теоремы Карлесона о короне. Мы приводим их в том виде, который нам был нужен

в основном тексте. Идеи доказательства достаточно традиционны и содержатся, например, в [9] (см. также цитируемую там литературу).

ЛЕММА П.1 (о короне для пространства Z). Пусть Ω – произвольное множество индексов и задано семейство целых аналитических функций $\{\chi_\beta(z), \beta \in \Omega\}$, удовлетворяющих следующим оценкам:

$$|\chi_\beta(z)| \leq A e^{a|y|} (1 + |x|)^Q, \quad z = x + iy \in \mathbb{C}, \quad \beta \in \Omega, \quad (\text{П.1})$$

$$\sup_{\beta \in \Omega} |\chi_\beta(z)| \geq \frac{c e^{-a|y|}}{(1 + |z|)^Q}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (\text{П.2})$$

для некоторых A, a, c и Q . Тогда существуют счетное множество индексов $I \subset \Omega$, числа $\lambda_\beta > 0$, $\beta \in I$, $\sum_{\beta \in I} \lambda_\beta = 1$, и целые аналитические функции $\{g_\beta(z), \beta \in I\}$ такие, что

$$|g_\beta(z)| \leq A_1 e^{a_1|y|} (1 + |x|)^{Q_1}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (\text{П.3})$$

для некоторых A_1, a_1, Q_1 и

$$\sum_{\beta \in I} \lambda_\beta g_\beta(z) \chi_\beta(z) = 1, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (\text{П.4})$$

Докажем сначала следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ П.1. Пусть Ω – произвольное множество индексов и задано семейство целых аналитических функций $\{\chi_\beta(z), z \in \mathbb{C}, \beta \in \Omega\}$, удовлетворяющих оценкам (П.1) и (П.2). Тогда существуют счетное множество $I \subset \Omega$, числа c_2, a_2, Q_2 и $\lambda_\beta > 0$, $\beta \in I$, $\sum_{\beta \in I} \lambda_\beta < \infty$, такие, что

$$\sum_{\beta \in I} \lambda_\beta |\chi_\beta(z)| \geq \frac{c_2 e^{-a_2|y|}}{(1 + |x|)^{Q_2}}, \quad z = x + iy \in \mathbb{C}. \quad (\text{П.5})$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если Ω – конечное множество, то утверждение тривиально. Пусть Ω – бесконечное множество. Положим

$$r(\beta, z) = \min \left\{ 1, \frac{d}{(2 + |x|)^{Q_2}} e^{-a_2|y|} |\chi_\beta(z)| \right\}, \quad (\text{П.6})$$

где d – некоторая положительная постоянная. Покажем, что ее можно подобрать так, чтобы

$$|\chi_\beta(\zeta)| \geq \frac{1}{2} |\chi_\beta(z)|, \quad |\zeta - z| < r(\beta, z). \quad (\text{П.7})$$

Действительно, учитывая, что при некотором M выполнено неравенство (легко вытекающее из формулы Коши) $|\chi'_\beta(z)| \leq M e^{a|y|}(1+|x|)^Q$, имеем

$$\begin{aligned} |\chi_\beta(\zeta)| &= \left| \chi_\beta(z) + \int_z^\zeta \chi'_\beta(\tau) d\tau \right| \geq |\chi_\beta(z)| - \left| \int_z^\zeta |\chi'_\beta(\tau)| d|\tau| \right| \\ &\geq |\chi_\beta(z)| - M \left| \int_z^\zeta e^{a|\operatorname{Im} \tau|} (1 + |\operatorname{Re} \tau|^Q) d|\tau| \right| \\ &\geq |\chi_\beta(z)| - M e^{a(|y|+1)} (2 + |x|)^Q |\zeta - z|. \end{aligned}$$

Здесь интегрируем по прямой, соединяющей точки ζ и z . Ясно, что (П.7) будет выполнено, если в (П.6) положить d , например, равным $\frac{1}{2Me^a}$.

В силу (П.2) для каждой точки $z \in \mathbb{C}$ найдется $\beta_z \in \Omega$ такое, что

$$|\chi_{\beta_z}(z)| \geq \frac{c}{2} e^{-a|y|} \frac{1}{(1+|x|)^Q}. \quad (\text{П.8})$$

Покажем, что существует d_1 такое, что

$$|\chi_{\beta_z}(\zeta)| \geq \frac{c}{4} e^{-a|y|} \frac{1}{(1+|x|)^Q}, \quad |\zeta - z| \leq d_1 e^{-2a|y|} \frac{1}{(2+|x|)^{2Q}}. \quad (\text{П.9})$$

Действительно, при достаточно малом d_1

$$\begin{aligned} d_1 e^{-2a|y|} \frac{1}{(2+|x|)^{2Q}} &\leq \min \left\{ 1, \frac{d}{(2+|x|)^Q} e^{-a|y|} \frac{c}{2} e^{-a|y|} \frac{1}{(1+|x|)^Q} \right\} \\ &\leq \min \left\{ 1, \frac{d}{(2+|x|)^Q} e^{-a|y|} |\chi_{\beta_z}(z)| \right\} = r(\beta, z), \end{aligned}$$

а потому $|\chi_{\beta_z}(\zeta)| \geq \frac{1}{2} |\chi_{\beta_z}(z)| \geq \frac{c}{4} e^{-a|y|} \frac{1}{(1+|x|)^Q}$.

Всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$ разобьем на квадратики

$$W_{n,m} = \{z \in \mathbb{C}: n-1 \leq x < n, \quad m-1 \leq y < m\}, \quad n, m \in \mathbb{Z}.$$

Каждый квадратик $W_{n,m}$ окажется покрытым кружками с центрами в точках $z \in W_{n,m}$ радиуса $d_1 e^{-2a|y|} \frac{1}{(2+|x|)^{2Q}}$. Из этого покрытия можно выбрать конечно кратное покрытие, причем его кратность не зависит от n и m (см. [5, с. 33]). Таким образом, каждый $W_{n,m}$ оказался покрытым не более чем $N_{n,m} = \frac{\text{const}}{\pi r_{\min}^2}$ кружками, где

$$r_{\min}(n, m) \geq d_1 e^{-2a(|m|+1)} \frac{1}{(2+|n|+1)^{2Q}} \geq \frac{d_2}{(1+|n|)^{2Q}} e^{-2a|m|}. \quad (\text{П.10})$$

Пусть z_i , $i = 1, 2, \dots$, — центры всех этих кружков, покрывающих все $W_{n,m}$ (а стало быть, и все $\mathbb{C}$) и $I = \{\beta_{z_i}, i = 1, 2, \dots\}$ (см. (П.8)). Положим $\lambda_i =$

$\frac{1}{n^2 m^2 N_{n,m}}$, если кружок с центром z_i является одним из кружков, покрывающих $W_{n,m}$. Проверим, что I и λ_i удовлетворяют условиям утверждения. Имеем

$$\sum_{i \in I} \lambda_i \leq \sum_{n,m} \frac{1}{m^2 n^2 N_{n,m}} \cdot N_{n,m} = \sum_{n,m} \frac{1}{m^2 n^2} < \infty.$$

Проверим оценку (П.5). Пусть точка $z \in \mathbb{C}$ попадет в некоторый квадратик W_{n_0, m_0} , а следовательно, в некоторый кружок с центром z_{i_0} (один из кружков его покрывающих). Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} \lambda_i |\chi_{\beta_{z_i}}(z)| &\geq \lambda_{i_0} |\chi_{\beta_{z_{i_0}}}(z)| \geq \frac{1}{n_0^2 m_0^2 N_{n_0, m_0}} \frac{c}{4} e^{-a|y_{i_0}|} \frac{1}{(1 + |x_{i_0}|)^Q} \\ &\geq \frac{C_1}{n_0^2 m_0^2} \frac{d_2^2 e^{-4a|m_0|}}{(1 + |n_0|)^{4Q}} \frac{c}{4} \frac{e^{-a|y_{i_0}|}}{(1 + |x_{i_0}|)^Q} \geq \frac{C_2 e^{-a_2|y|}}{(1 + |x|)^{Q_2}}, \end{aligned}$$

где C_1, C_2 – некоторые постоянные. Здесь мы учли, что $|y| - 1 \leq |m_0| \leq |y| + 1$, $|x| - 1 \leq |n_0| \leq |x| + 1$, $|y| - 1 \leq |y_{i_0}| \leq |y| + 1$, $|x| - 1 \leq |x_{i_0}| \leq |x| + 1$. Утверждение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ П.1. В условиях утверждения П.1 существуют постоянные d_3, Q_3 и a_3 такие, что

$$\sum_{\beta \in I} \lambda_\beta |\chi_\beta(z)|^2 \geq \frac{d_3}{(1 + |x|)^{Q_3}} e^{-a_3|y|}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (\text{П.11})$$

Действительно, пользуясь неравенством Коши–Буняковского, имеем

$$\sum_{\beta \in I} \lambda_\beta \sum_{\beta \in I} \lambda_\beta |\chi_\beta(z)|^2 \geq \left(\sum_{\beta \in I} \lambda_\beta |\chi_\beta(z)| \right)^2 \geq C \frac{e^{-2a_2|y|}}{(1 + |x|)^{2Q_2}}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ П.2. В условиях утверждения П.1, не нарушая общности, можно считать, что $\sum_{\beta \in I} \lambda_\beta = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ П.1. Согласно уже доказанному существуют счетное множество $I \subset \Omega$, числа $\lambda_\beta > 0$, $\beta \in I$, $\sum_{\beta \in I} \lambda_\beta = 1$, и выполнена оценка (П.11). Рассмотрим семейство функций

$$\psi_\beta(z, \bar{z}) = \frac{\bar{\chi}_\beta(z)}{\sum_{\beta \in I} |\chi_\beta(z)|^2 \lambda_\beta}, \quad \beta \in I. \quad (\text{П.12})$$

Очевидно,

$$\sum_{\beta \in I} \chi_\beta(z) \psi_\beta(z, \bar{z}) \lambda_\beta \equiv 1. \quad (\text{П.13})$$

Заметим, что

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^i \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^j \psi_\beta(z, \bar{z}) \right| \leq A_{i,j} e^{a_{i,j}|y|} (1 + |x|)^{Q_{i,j}}, \quad i, j = 0, 1, \dots, \quad (\text{П.14})$$

где $A_{i,j}$, $a_{i,j}$ и $Q_{i,j}$ не зависят от $\beta \in I$.

Рассмотрим множество функций $G_{\alpha\beta}(z, \bar{z}) = \psi_\alpha(z, \bar{z}) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \psi_\beta(z, \bar{z})$, $\alpha, \beta \in I$. Нетрудно видеть, что $G_{\alpha\beta}(z, \bar{z})$ удовлетворяют оценкам (П.14). Поэтому существуют постоянные A^* , a^* и Q^* такие, что

$$\ln[(1 + |z|^2)|G_{\alpha\beta}(z, \bar{z})|^2] \leq A^* + a^*|y| + Q^* \ln(1 + |z|^2), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (\text{П.15})$$

Функция $\gamma(x, y) = A^* + a^*|y| + Q^* \ln(1 + |x|^2 + |y|^2)$ субгармоническая, и существует постоянная C , не зависящая от α и $\beta \in I$, такая, что

$$\|G_{\alpha\beta}(z, \bar{z})\|_{L^2(\mathbb{C}, \gamma)} = \int |G_{\alpha\beta}(z, \bar{z})|^2 e^{-\gamma(x, y)} dx dy \leq C. \quad (\text{П.16})$$

Согласно [6, теорема 4.4.2] существует обобщенное решение $\bar{\partial}$ задачи

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} b_{\alpha\beta}(z, \bar{z}) = G_{\alpha\beta}(z, \bar{z}), \quad \alpha, \beta \in I, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (\text{П.17})$$

такое, что $\|(1 + |z|^2)^{-1} b_{\alpha\beta}(z, \bar{z})\|_{L^2(\mathbb{C}, \gamma)}$ не превосходит некоторой постоянной, которая не зависит от α и β . Отсюда получаем

$$\|b_{\alpha\beta}(z, \bar{z})\|_{L^2(\mathbb{C}, \gamma_1)} = \int |b_{\alpha\beta}(z, \bar{z})|^2 e^{-\gamma_1(x, y)} dx dy \leq \text{const}, \quad (\text{П.18})$$

где $\gamma_1(x, y) = \gamma(x, y) + 2 \ln(1 + |x|^2 + |y|^2)$. Полагаем теперь

$$g_\beta(z, \bar{z}) = \psi_\beta(z, \bar{z}) + \sum_{\alpha \in I} [b_{\beta\alpha}(z, \bar{z}) - b_{\alpha\beta}(z, \bar{z})] \chi_\alpha(z) \lambda_\alpha, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (\text{П.19})$$

Отметим, что из оценок (П.1) и (П.18) следует сходимость ряда (П.19) в пространстве $L^2(\mathbb{C}, \gamma_2)$, где $\gamma_2(x, y) = \gamma_1(x, y) + 2a|y| + 2Q \ln(1 + |x|^2 + |y|^2)$. Действительно, это легко вытекает из оценки

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\alpha \in I} [b_{\beta\alpha}(z, \bar{z}) - b_{\alpha\beta}(z, \bar{z})] \chi_\alpha(z) \lambda_\alpha \right| &\leq \sup_{\alpha \in I} |\chi_\alpha(z)| \sum_{\alpha \in I} |b_{\beta\alpha}(z, \bar{z}) - b_{\alpha\beta}(z, \bar{z})| \lambda_\alpha \\ &\leq A e^{a|y|} (1 + |x|)^Q \sum_{\alpha \in I} |b_{\beta\alpha}(z, \bar{z}) - b_{\alpha\beta}(z, \bar{z})| \lambda_\alpha. \end{aligned}$$

Вычислим обобщенную производную по $\bar{z}$ от $g_\beta(z, \bar{z})$. Так как ряд (П.19) сходится в $L^2(\mathbb{C}, \gamma_2)$, то он сходится и в $\mathcal{D}'$, а потому его можно дифференцировать почленно. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} g_\beta(z, \bar{z}) &= \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \psi_\beta(z, \bar{z}) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \sum_{\alpha \in I} [b_{\beta\alpha}(z, \bar{z}) - b_{\alpha\beta}(z, \bar{z})] \chi_\alpha(z) \lambda_\alpha \\ &= \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \psi_\beta(z, \bar{z}) + \sum_{\alpha \in I} \frac{\partial b_{\beta\alpha}(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} \chi_\alpha(z) \lambda_\alpha - \sum_{\alpha \in I} \frac{\partial b_{\alpha\beta}(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} \chi_\alpha(z) \lambda_\alpha \\ &= \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \psi_\beta(z, \bar{z}) + \sum_{\alpha \in I} \lambda_\alpha \chi_\alpha(z) [G_{\beta\alpha}(z, \bar{z}) - G_{\alpha\beta}(z, \bar{z})] \\ &= \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \psi_\beta(z, \bar{z}) + \psi_\beta(z, \bar{z}) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \sum_{\alpha \in I} \psi_\alpha(z, \bar{z}) \chi_\alpha(z) \lambda_\alpha \\ &\quad - \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \psi_\beta(z, \bar{z}) \right) \sum_{\alpha \in I} \psi_\alpha(z, \bar{z}) \chi_\alpha(z) \lambda_\alpha = 0. \end{aligned}$$

Мы учли (П.13) и аналитичность функций $\chi_\alpha(z)$. Таким образом, $g_\beta(z, \bar{z}) = g_\beta(z)$ является целой аналитической функцией, причем $g_\beta(z) \in L^2(\mathbb{C}, \gamma_2)$.

Покажем, что для $g_\beta(z)$ выполнена оценка (П.3). Пусть $\chi_{z_0}(z)$ – характеристическая функция единичного круга с центром в точке z_0 . Имеем

$$\begin{aligned} |g_\beta(z_0)| &= \left| \int g_\beta(z) \chi_{z_0}(z) dz d\bar{z} \right| \leq \left| \int g_\beta(z) e^{-\frac{1}{2}\gamma_2(z, \bar{z})} \chi_{z_0}(z) e^{\frac{1}{2}\gamma_2(z, \bar{z})} dz d\bar{z} \right| \\ &\leq \int |g_\beta(z)|^2 e^{-\gamma_2(z, \bar{z})} dx dy \int_{|z-z_0|<1} e^{\gamma_2(z, \bar{z})} dx dy \\ &\leq C e^{\gamma_2(z_0, \bar{z})} \leq A_1 e^{a_1|y_0|} (1 + |z_0|)^{Q_1} \end{aligned}$$

с некоторыми постоянными a_1 , A_1 и Q_1 .

Проверим, наконец, условие (П.4). Учитывая (П.13), имеем

$$\begin{aligned} \sum_{\beta \in I} \lambda_\beta g_\beta(z) \chi_\beta(z) &= \sum_{\beta \in I} \lambda_\beta \chi_\beta(z) \psi_\beta(z, \bar{z}) \\ &\quad + \sum_{\beta \in I} \sum_{\alpha \in I} \lambda_\beta \lambda_\alpha \chi_\beta(z) \chi_\alpha(z) [b_{\beta\alpha}(z, \bar{z}) - b_{\alpha\beta}(z, \bar{z})] \\ &= \sum_{\beta \in I} \lambda_\beta \chi_\beta(z) \psi_\beta(z, \bar{z}) = 1. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА П.2 (о короне для пространства $\widetilde{E}^\dagger$). Пусть Ω – произвольное множество индексов и задано семейство функций $\{\chi_\beta(z) \in A_L(\Pi_{-a}^a), \beta \in \Omega\}$ для некоторого L , причем

$$\sup_{\beta \in \Omega} \|\chi_\beta(z)\|_{A_L(\Pi_{-a}^a)} < \infty, \quad (\text{П.20})$$

существуют постоянные C и m такие, что

$$\sup_{\beta \in \Omega} |\chi_\beta(z)| \geq \frac{C}{1 + |z|^m}, \quad z \in \Pi_{-a}^a. \quad (\text{П.21})$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют счетное множество индексов $I \subset \Omega$, числа $\lambda_\beta > 0$, $\beta \in I$, $\sum_{\beta \in I} \lambda_\beta = 1$, число Q и семейство функций

$$\{g_\beta(z) \in A_Q(\Pi_{-a+\varepsilon}^{a-\varepsilon}), \beta \in I\}, \quad \sup_{\beta \in I} \|g_\beta(z)\|_{A_Q(\Pi_{-a+\varepsilon}^{a-\varepsilon})} < \infty, \quad (\text{П.22})$$

такие, что

$$\sum_{\beta \in I} \lambda_\beta g_\beta(z) \chi_\beta(z) = 1, \quad z \in \Pi_{-a+\varepsilon}^{a-\varepsilon}. \quad (\text{П.23})$$

Доказательство этой леммы содержится в работе [1, леммы П.0 и П.1].

ЛЕММА П.3 (о короне для пространства $\widetilde{E}^\downarrow$). Пусть Ω – произвольное множество индексов и $\{\chi_\beta(z), \beta \in \Omega\}$ – семейство целых функций таких, что для любого $a > 0$ существуют числа q, Q, c, C такие, что

$$|\chi_\beta(z)| \leq C(1 + |z|)^Q, \quad z \in \Pi_{-a}^a, \quad \beta \in \Omega, \quad (\text{П.24})$$

$$\sup_{\beta \in \Omega} |\chi_\beta(z)| \geq \frac{c}{1 + |z|^q}, \quad z \in \Pi_{-a}^a. \quad (\text{П.25})$$

Тогда существуют счетное множество индексов $I \subset \Omega$, числа $\lambda_\beta > 0$, $\beta \in I$, $\sum_{\beta \in I} \lambda_\beta = 1$, и семейство целых функций $\{g_\beta(z), \beta \in I\}$ таких, что для любого $a > 0$ найдутся числа C_1 и Q_1 такие, что

$$|g_\beta(z)| \leq C_1(1 + |z|)^{Q_1}, \quad z \in \Pi_{-a}^a, \quad (\text{П.26})$$

причем

$$\sum_{\beta \in I} \lambda_\beta g_\beta(z) \chi_\beta(z) = 1, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (\text{П.27})$$

Докажем сначала следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ П.2. Пусть Ω – произвольное множество индексов и задано семейство целых аналитических функций $\{\chi_\beta(z), z \in \mathbb{C}, \beta \in \Omega\}$, удовлетворяющих оценкам (П.24) и (П.25). Тогда существуют счетное множество $I \subset \Omega$, числа $\lambda_\beta > 0$, $\beta \in I$, $\sum_{\beta \in I} \lambda_\beta = 1$, такие, что для любого $a > 0$ найдутся числа c_* и q_* такие, что

$$\sum_{\beta \in I} \lambda_\beta |\chi_\beta(z)|^2 \geq \frac{c_*}{(1 + |z|)^{q_*}}, \quad z \in \Pi_{-a}^a.$$

Действительно, зададим последовательность $a_j \rightarrow +\infty$ при $j \rightarrow \infty$. Для полосы $\Pi_{-a_j}^{a_j}$ согласно [1, лемма П.0 (и замечание 1 к ней)] найдутся числа $\mu_i^j > 0$, $i = 1, 2, \dots$, $\sum_i \mu_i^j = 1$, и функции $\chi_i^j(z)$ заданного семейства $\{\chi_\beta(z)\}$ такие, что $\sum_i \mu_i^j |\chi_i^j(z)|^2 \geq \frac{c^j}{(1 + |z|)^{q^j}}$ при $z \in \Pi_{-a_j}^{a_j}$ для некоторых c^j и q^j . Положим $\lambda_{i,j} = \frac{1}{j^2 \sigma} \mu_i^j$, где $\sigma = \sum_j \frac{1}{j^2}$. Отметим, что $\sum_{i,j} \lambda_{i,j} = 1$. Теперь для любого $a > 0$ существует j_0 такое, что $a_{j_0} > a$, и в полосе Π_{-a}^a справедлива оценка

$$\sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{\infty} \lambda_{i,j} |\chi_i^j(z)|^2 \geq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_{i,j_0} |\chi_i^{j_0}(z)|^2 = \frac{1}{j_0^2 \sigma} \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i^{j_0} |\chi_i^{j_0}(z)|^2 \geq \frac{1}{j_0^2 \sigma} \frac{c^{j_0}}{(1 + |z|)^{q^{j_0}}}.$$

Утверждение доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ П.3. Рассмотрим семейство функций $\{\psi_\beta(z, \bar{z}), \beta \in I\}$, определяемое формулой (П.12). Ясно, что для любого $a > 0$ существуют числа $A_{i,j}$ и $Q_{i,j}$ такие, что

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^i \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^j \psi_\beta(z, \bar{z}) \right| \leq A_{i,j} (1 + |x|)^{Q_{i,j}}, \quad i, j = 0, 1, \dots \quad (\text{П.28})$$

Рассмотрим множество функций $G_{\alpha\beta}(z, \bar{z}) = \psi_\alpha(z, \bar{z}) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \psi_\beta(z, \bar{z})$, $\alpha, \beta \in I$. Нетрудно видеть, что $G_{\alpha\beta}(z, \bar{z})$ удовлетворяют оценкам (П.28), а потому можно подобрать бесконечно дифференцируемые функции $A(y)$ и $Q(y)$ такие, чтобы выполнялась оценка

$$\ln |G_{\alpha\beta}(z, \bar{z})|^2 \leq A(y) + Q(y) \ln(1 + x^2), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Увеличивая, если нужно, $A(y)$ и $Q(y)$, можно считать, что функция $\gamma(x, y) = A(y) + Q(y) \ln(1 + x^2)$ субгармоническая.

Действительно, например, вместо $Q(y)$ можно взять функцию

$$Q_1(y) = \int_0^y d\tau \int_0^\tau |Q''(\xi)| d\xi + Q(0) + Q'(0)y$$

и вместо $A(y)$ – функцию

$$A_1(y) = \int_0^y d\tau \int_0^\tau \{|A''(\xi) + 2|Q_1(\xi)|\} d\xi + A(0) + A'(0)y.$$

Тогда $A_1(y) \geq A(y)$, $Q_1(y) \geq Q(y)$, $A_1''(y) \geq 0$, $Q_1''(y) \geq 0$ и $A_1''(y) > 2|Q_1(y)|$. Откуда видно, что $\Delta(A_1(y) + Q_1(y) \ln(1 + x^2)) \geq 0$. Далее доказательство проводится, как в лемме П.1.

ЛЕММА П.4 (о короне для пространства $\mathcal{S}$). Пусть Ω – произвольное множество индексов и $\{\chi_\beta(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^1), \beta \in \Omega\}$ – семейство функций, удовлетворяющих условиям: существуют постоянные q, c, Q_j и C_j , $j = 0, 1, 2, \dots$, такие, что

$$\begin{aligned} |\chi_\beta^{(j)}(x)| &\leq C_j (1 + |x|)^{Q_j}, \quad \beta \in \Omega, \\ \sup_{\beta \in \Omega} |\chi_\beta(x)| &\geq \frac{c}{1 + |x|^q}, \quad x \in \mathbb{R}^1. \end{aligned} \quad (\text{П.29})$$

Тогда существуют счетное множество индексов $I \subset \Omega$, числа $\lambda_\beta > 0$, $\beta \in I$, $\sum_{\beta \in I} \lambda_\beta = 1$, и семейство функций $\{g_\beta(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^1), \beta \in I\}$ такие, что для любого $j = 0, 1, \dots$ найдутся числа C_j^1 и Q_j^1 такие, что

$$|g_\beta^{(j)}(x)| \leq C_j^1 (1 + |x|)^{Q_j^1}, \quad \beta \in I, \quad (\text{П.30})$$

причем

$$\sum_{\beta \in I} \lambda_\beta g_\beta(x) \chi_\beta(x) = 1, \quad x \in \mathbb{R}^1. \quad (\text{П.31})$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя идеи доказательства утверждения П.1, легко показать, что существуют счетное множество I , числа $\lambda_i > 0$, $i \in I$, такие, что $\sum_{i \in I} \lambda_i |\chi_i(x)|^2 \geq \frac{d}{(1+|x|)^\ell}$ для некоторых d и ℓ .

Теперь положим

$$g_\beta(x) = \frac{\bar{\chi}_\beta(x)}{\sum_{\beta \in I} \lambda_\beta |\chi_\beta(x)|^2}. \quad (\text{П.32})$$

Нетрудно проверить, что семейство $\{g_\beta(x), \beta \in I\}$ удовлетворяет требуемым условиям (П.30) и (П.31). Лемма доказана.

ЛЕММА П.5. Пусть $\mathbb{B}$ – банахово пространство и $f(\xi) \in \mathbb{L}(\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{B})$. Тогда для любого $a > 0$ и $a_1 > 0$ существуют C, N и b такие, что

$$\|L_f^\varphi(x, y)\|_{\mathbb{B}} \leq \frac{C}{y^b} \mathcal{P}_N[\varphi], \quad 0 < y \leq 1, \quad |x| < a_1, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_a. \quad (\text{П.33})$$

Пусть еще $\mathbb{J}$ – автомодельный функционал порядка α . Тогда для любых $a > 0$ и $a_1 > 0$ существуют C_1, N и b_1 такие, что

$$\mathbb{J}(y^{b_1} \|L_f^\varphi(x, y)\|_{\mathbb{B}}) = \mathbb{J}\left(\frac{1}{k^{b_1}} \left\|L_f^\varphi\left(x, \frac{1}{k}\right)\right\|_{\mathbb{B}}\right) \leq C_1 \mathcal{P}_N[\varphi], \quad |x| < a_1, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_a. \quad (\text{П.34})$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть фиксированы произвольные $a > 0$ и $a_1 > 0$. Заметим, что для любой $\varphi(\xi) \in \mathcal{D}_a$ множество основных функций $\left\{\frac{1}{y}\varphi\left(\frac{x-\xi}{y}\right): 0 < y \leq 1, |x| < a_1\right\}$ принадлежит $\mathcal{D}_{a_1+a}$. В силу конечности порядка функционала f на $\mathcal{D}_{a_1+a}$ существуют c и N такие, что

$$\|(f(\xi), \psi(\xi))\|_{\mathbb{B}} \leq c \mathcal{P}_N[\psi] \quad \forall \psi \in \mathcal{D}_{a_1+a}.$$

Отсюда при $|x| < a_1$, $0 < y \leq 1$ имеем

$$\begin{aligned} \|L_f^\varphi(x, y)\|_{\mathbb{B}} &= \left\| \left(f(\xi), \frac{1}{y} \varphi\left(\frac{x-\xi}{y}\right) \right) \right\|_{\mathbb{B}} \leq c \mathcal{P}_N \left[\frac{1}{y} \varphi\left(\frac{x-\xi}{y}\right) \right] \\ &= c \max_{0 \leq j \leq N} \sup_{\substack{|\xi| < a \\ |x| < a_1}} (1 + |\xi|)^N \left| \left(\frac{d}{d\xi} \right)^j \frac{1}{y} \varphi\left(\frac{x-\xi}{y}\right) \right| \\ &\leq C_2 \frac{1}{y^{N+1}} \mathcal{P}_N[\varphi(\xi)], \end{aligned}$$

откуда и следует (П.33). Далее, пользуясь (2.5), получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{J}\left(\frac{1}{k^{b_1}} \left\|L_f^\varphi\left(x, \frac{1}{k}\right)\right\|_{\mathbb{B}}\right) &\leq C_\varepsilon \operatorname{ess\,sup}_{k > 1} \frac{1}{k^{\alpha-\varepsilon}} \frac{1}{k^{b_1}} \left\|L_f^\varphi\left(x, \frac{1}{k}\right)\right\|_{\mathbb{B}} \\ &\leq C_3 \operatorname{ess\,sup}_{k > 1} k^{-b_1+\varepsilon-\alpha+N+1} \mathcal{P}_N[\varphi] < C_1 \mathcal{P}_N[\varphi], \end{aligned}$$

если $b_1 > N + 1 - \alpha + \varepsilon$. Откуда вытекает (П.34). Лемма доказана.

ЛЕММА П.6. Пусть $\mathbb{B}$ – банахово пространство, $\mu(k) > 0$ – непрерывная функция при $k \geq 1$ и

$$H_\mu = \{\eta(k) \in C([1, +\infty) \rightarrow \mathbb{B}) : \exists \lim_{k \rightarrow +\infty} \mu(k)\eta(k)\}$$

– банахово пространство с нормой $\|\eta(k)\|_{H_\mu} = \sup_{k \geq 1} \mu(k)\|\eta(k)\|_{\mathbb{B}}$.

Пусть, далее, функция $f(\bar{x}, k) \in C(\Omega \times [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{B})$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, такова, что в $\mathbb{B}$ существует

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mu(k)f(\bar{x}, k) \quad \text{для п.в. } \bar{x} \in \Omega.$$

Тогда $f(\bar{x}, k)$ измерима по $\bar{x} \in \Omega$ как функция со значениями в H_μ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности считаем $\mu(k) \equiv 1$, ибо отображение $\eta(k) \mapsto \mu(k)\eta(k)$ есть изоморфизм пространств $H = H_{\mu \equiv 1}$ на H_μ . Положим $A(\bar{x}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(\bar{x}, n)$. Ясно, что $A(\bar{x})$ как предел последовательности непрерывных функций есть измеримая функция со значениями в $\mathbb{B}$, а стало быть, и в H (каждому $\bar{x} \in \Omega$ сопоставляется постоянная по k функция $A(\bar{x}) \in \mathbb{B}$). Так как $f(\bar{x}, k) = f(\bar{x}, k) - A(\bar{x}) + A(\bar{x})$, то достаточно доказать измеримость $f(\bar{x}, k) - A(\bar{x})$.

Пусть $A_n(\bar{x})$ – последовательность непрерывных по $\bar{x} \in \Omega$ функций со значениями в $\mathbb{B}$ такая, что $A_n(\bar{x}) \rightarrow A(\bar{x})$ при п.в. $\bar{x} \in \Omega$. Рассмотрим последовательность

$$\psi_n(\bar{x}, k) = \omega_n(k)[f(\bar{x}, k) - A_n(\bar{x})], \quad \omega_n(k) = \omega\left(\frac{k}{n}\right), \quad \omega \in \mathcal{D}, \quad \omega(0) = 1.$$

Нетрудно видеть, что $\psi_n(\bar{x}, k)$ – непрерывные функции по $\bar{x} \in \Omega$ со значениями в H (ибо $f(\bar{x}, k)$ и $A_n(\bar{x})$ равномерно непрерывны на компактах по $(\bar{x}, k)$). Покажем, что

$$\psi_n(\bar{x}, k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(\bar{x}, k) - A(\bar{x}) \quad \text{в } H \text{ при п.в. } \bar{x} \in \Omega.$$

Имеем

$$\begin{aligned} & \sup_{k \geq 1} \|\psi_n(\bar{x}, k) - (f(\bar{x}, k) - A(\bar{x}))\|_{\mathbb{B}} \\ &= \sup_{k \geq 1} \|\omega_n(k)[f(\bar{x}, k) - A_n(\bar{x})] - f(\bar{x}, k) + A(\bar{x})\|_{\mathbb{B}} \\ &= \sup_{k \geq 1} \|(\omega_n(k) - 1)[f(\bar{x}, k) - A(\bar{x})] + \omega_n(k)[A(\bar{x}) - A_n(\bar{x})]\|_{\mathbb{B}} \\ &\leq \sup_{k \geq 1} |\omega_n(k) - 1| \|f(\bar{x}, k) - A(\bar{x})\|_{\mathbb{B}} + \|A(\bar{x}) - A_n(\bar{x})\|_{\mathbb{B}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned} \quad (\text{П.35})$$

при п.в. $\bar{x} \in \Omega$.

Действительно, пусть $\varepsilon > 0$. Существует k_0 такое, что $\|f(\bar{x}, k) - A(\bar{x})\|_{\mathbb{B}} < \varepsilon$ при $k > k_0$. В силу равномерной сходимости на компактах к нулю функций $(\omega_n(k) - 1)$ существует n_0 такое, что $|\omega_n(k) - 1| \cdot \|f(\bar{x}, k) - A(\bar{x})\|_{\mathbb{B}} < \varepsilon$ при $n > n_0$ и $1 \leq k \leq k_0$. Таким образом, первое слагаемое правой части неравенства (П.35) не превосходит 2ε при $n > n_0$. Считая $\bar{x}$ таким, что $A_n(\bar{x}) \rightarrow A(\bar{x})$ при $n \rightarrow +\infty$, и увеличивая, если нужно, n_0 , выводим, что и второе слагаемое не превосходит ε при $n > n_0$. Лемма доказана.

Список литературы

1. Дрожджинов Ю. Н., Завьялов Б. И. Теоремы тауберова типа для обобщенной мультипликативной свертки // Изв. РАН. Сер. матем. 2000. Т. 64. № 1. С. 37–94.
2. Гельфанд И. М., Шиллов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1959.
3. Владимиров В. С., Дрожджинов Ю. Н., Завьялов Б. И. Многомерные тауберовы теоремы для обобщенных функций. М.: Наука, 1986.
4. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985.
5. Мазья В. Г. Пространства С. Л. Соболева. Л.: Изд-во ЛГУ, 1985.
6. Хермандер Л. Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных. М.: Мир, 1968.
7. Дрожджинов Ю. Н., Завьялов Б. И. Тауберова теорема типа Винера для обобщенных функций медленного роста // Матем. сб. 1998. Т. 189. № 7. С. 91–130.
8. Muramatu T. On Besov Spaces and Sobolev Spaces of Generalized Functions Defined on a General Region // Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto University. 1974. V. 9. № 2. P. 325–396.
9. Гарнет Дж. Ограниченные аналитические функции. М.: Мир, 1984.
10. Иосида К. Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.
11. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Т. 1. Общая теория. М.: Мир, 1962.
12. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1996.
13. Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва
E-mail: drozzin@mi.ras.ru

Поступило в редакцию
30.VIII.2001