Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Рождественская, Теоремы существования для резонансных краевых задач эллиптического типа с разрывными неограниченными нелинейными частями, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2011, том 75, выпуск 1, 161–180

DOI: <https://doi.org/10.4213/im3955>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 04:22:33

УДК 517.95

Е. А. Рождественская

Теоремы существования для резонансных краевых задач эллиптического типа с разрывными неограниченными нелинейными частями

Доказано существование решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка с разрывной по фазовой переменной нелинейной частью в случаях резонанса слева и резонанса справа от первого собственного значения дифференциального оператора в ситуации, когда условия Ландесмана–Лазера не выполняются.

Библиография: 25 наименований.

Ключевые слова: резонансные эллиптические краевые задачи, разрывные нелинейности, условие Ландесмана–Лазера.

Введение

Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^m$ с границей $\partial\Omega$ класса $\mathbf{C}^{2+\mu}$, $0 < \mu \leq 1$, $x \in \bar{\Omega}$. Введем в рассмотрение дифференциальный оператор второго порядка:

$$Au(x) = - \sum_{i,j=1}^m (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + a_0(x)u(x), \quad (0.1)$$

действующий в $\mathbf{L}^2(\Omega)$ с областью определения $D(A) = \mathbf{W}_2^2(\Omega) \cap \mathring{\mathbf{W}}_2^1(\Omega)$, где $a_{ij} \in \mathbf{C}^{1+\mu}(\bar{\Omega})$, $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ для любого $x \in \bar{\Omega}$, $1 \leq i, j \leq m$, $a_0 \in \mathbf{C}^\mu(\bar{\Omega})$, $a_0(x) \geq 0$ для любого $x \in \bar{\Omega}$. Всюду ниже будем предполагать, что оператор A равномерно эллиптический¹.

Известно [1, § 8.12], что A является замкнутым линейным самосопряженным оператором в $\mathbf{L}^2(\Omega)$ с дискретным спектром

$$\sigma(A) = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty,$$

причем $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ и $\lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_k = +\infty$. Обозначим через $\mathfrak{A}_k$ пространство собственных функций оператора A , удовлетворяющих краевому условию $u|_{\partial\Omega} = 0$ и отвечающих собственному значению λ_k . Известно, что пространство $\mathfrak{A}_1$ одномерно, причем любая ненулевая функция $\varphi \in \mathfrak{A}_1$ либо всюду положительна в Ω и $\frac{\partial \varphi}{\partial n}|_{\partial\Omega} < 0$, либо всюду отрицательна в Ω и $\frac{\partial \varphi}{\partial n}|_{\partial\Omega} > 0$ (см., например, [1, § 8.12]).

¹То есть существует константа $\chi > 0$ такая, что для любых $\xi \in \mathbb{R}^m$ и $x \in \bar{\Omega}$ выполнено неравенство $\sum_{i,j=1}^m a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \chi|\xi|^2$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 07-01-96000-р_урал_a).

Пусть $m < q < \infty$. Рассмотрим задачу Дирихле

$$Au(x) - \lambda_1 u(x) + g(x, u(x)) = h(x), \quad x \in \Omega, \quad (0.2)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (0.3)$$

где $h \in \mathbf{L}^q(\Omega)$, а нелинейная часть $g(x, \xi)$ удовлетворяет следующим ограничениям:

(g1) $g: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ борелева (mod 0), т. е. существует борелева функция $\tilde{g}: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, которая отличается от g лишь на подмножестве $l \subset \Omega \times \mathbb{R}$, проекция которого на Ω имеет меру нуль;

(g2) для п. в. $x \in \Omega$ функция $g(x, \cdot)$ может иметь разрывы только первого рода и

$$g(x, \xi) \in [g_-(x, \xi), g_+(x, \xi)] \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$$

(здесь и далее $g_-(x, \xi) = \liminf_{\eta \rightarrow \xi} g(x, \eta)$, $g_+(x, \xi) = \limsup_{\eta \rightarrow \xi} g(x, \eta)$);

(g3) существуют константа $C_1 > 0$ и функция $C_2 \in \mathbf{L}^q(\Omega)$ такие, что для любого $\xi \in \mathbb{R}$ и п. в. $x \in \Omega$

$$|g(x, \xi)| \leq C_1 |\xi| + C_2(x).$$

В начале 70-х годов прошлого столетия появились первые работы, посвященные изучению задачи вида

$$Au(x) - f(x, u(x)) = h(x), \quad x \in \Omega, \quad (0.4)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0 \quad (0.5)$$

с непрерывной по ξ нелинейной частью $f(x, \xi)$ в *резонансном* случае. К резонансному случаю обычно относят следующие ситуации:

1) существует предел

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \frac{f(x, \xi)}{\xi}, \quad (0.6)$$

который почти всюду на Ω совпадает с одним из собственных значений λ_k оператора A ;

2) существуют конечные нижние пределы

$$\liminf_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{f(x, \xi)}{\xi}, \quad \liminf_{\xi \rightarrow -\infty} \frac{f(x, \xi)}{\xi}$$

и существует такой номер $k \in \mathbb{N}$, что почти всюду на Ω

$$\liminf_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{f(x, \xi)}{\xi} \geq \lambda_k, \quad \liminf_{\xi \rightarrow -\infty} \frac{f(x, \xi)}{\xi} \geq \lambda_k,$$

причем хотя бы один из этих пределов совпадает с λ_k для п. в. $x \in \Omega$; в этом случае мы будем говорить о *резонансе слева* от λ_k ;

3) существуют конечные верхние пределы

$$\limsup_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{f(x, \xi)}{\xi}, \quad \limsup_{\xi \rightarrow -\infty} \frac{f(x, \xi)}{\xi}$$

и существует такой номер $k \in \mathbb{N}$, что почти всюду на Ω

$$\limsup_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{f(x, \xi)}{\xi} \leq \lambda_k, \quad \limsup_{\xi \rightarrow -\infty} \frac{f(x, \xi)}{\xi} \leq \lambda_k,$$

причем хотя бы один из этих пределов совпадает с λ_k для п. в. $x \in \Omega$; в этом случае мы будем говорить о *резонансе справа* от λ_k .

Систематическое исследование резонансных краевых задач эллиптического типа началось с работы [2]. В этой статье был рассмотрен резонансный случай с функцией $f(x, \xi) \equiv \lambda \xi - g(\xi)$, где λ – собственное значение оператора A , пространство собственных функций, соответствующих λ , одномерное, а g – непрерывная, ограниченная на $\mathbb{R}$ функция, для которой существуют пределы $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} g(\xi) = g(+\infty)$, $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} g(\xi) = g(-\infty)$ и $g(+\infty) \leq g(\xi) \leq g(-\infty)$ для любого $\xi \in \mathbb{R}$. При таких допущениях было показано, что задача (0.4), (0.5) имеет решение, если функции g и h удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} g(+\infty) \int_{\psi > 0} \psi(x) dx + g(-\infty) \int_{\psi < 0} \psi(x) dx &< \int_{\Omega} h(x) \psi(x) dx \\ &< g(-\infty) \int_{\psi > 0} \psi(x) dx + g(+\infty) \int_{\psi < 0} \psi(x) dx, \end{aligned} \quad (0.7)$$

где ψ – произвольная собственная функция оператора A , отвечающая собственному значению λ . (Здесь и далее записи $\psi > 0$ и $\psi < 0$ обозначают множества $\{x \in \Omega \mid \psi(x) > 0\}$ и $\{x \in \Omega \mid \psi(x) < 0\}$ соответственно.)

Позднее появилось много статей о существовании решений резонансных эллиптических краевых задач, в которых авторы налагали на нелинейную часть, входящую в уравнение, *условие Ландесмана–Лазера* (0.7) или его обобщения (см., например, работы [3]–[10], а также [11] для уравнений с непрерывными или гладкими нелинейными частями и работы [12]–[17] для уравнений с разрывными нелинейными частями).

Значительный интерес представляют резонансные краевые задачи эллиптического типа, для которых не выполняются даже обобщенные условия Ландесмана–Лазера. Подобные задачи в случае непрерывной по ξ нелинейной части рассматривались в [9], [18], [19] и др. В [19] для задачи (0.2), (0.3) исследовалась ситуация, допускающая случай резонанса справа от λ_1 . В этой работе получен следующий результат.

ТЕОРЕМА 0.1 [19]. Пусть g – каратеодориева² функция, удовлетворяющая условию (g3) и условиям:

- 1) для п. в. x из Ω и любого $\xi \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$g(x, \xi) \xi \leq 0; \quad (0.8)$$

²Функция $g(x, \xi)$ называется *каратеодориевой*, если она измерима по x на Ω при любом фиксированном $\xi \in \mathbb{R}$ и непрерывна по ξ на $\mathbb{R}$ для п. в. $x \in \Omega$.

2) существуют функции Γ_+ и Γ_- из $\mathbf{L}^q(\Omega)$ такие, что для п. в. $x \in \Omega$

$$0 \leq \Gamma_{\pm}(x) \leq \alpha = \lambda_2 - \lambda_1, \quad -\Gamma_-(x) \leq \liminf_{\xi \rightarrow -\infty} \frac{g(x, \xi)}{\xi},$$

$$-\Gamma_+(x) \leq \liminf_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{g(x, \xi)}{\xi}$$

и для любого $w \in \mathfrak{A}_2 \setminus \{0\}$ справедливо неравенство

$$\int_{w>0} (\alpha - \Gamma_+(x)) w^2(x) dx + \int_{w<0} (\alpha - \Gamma_-(x)) w^2(x) dx > 0$$

(нерезонансное условие для λ_2);

3) функция $h \in \mathbf{L}^q(\Omega)$ удовлетворяет условию ортогональности:

$$\int_{\Omega} h(x) \varphi(x) dx = 0 \quad \forall \varphi \in \mathfrak{A}_1. \quad (0.9)$$

Тогда существует сильное³ решение задачи (0.2), (0.3).

ЗАМЕЧАНИЕ 0.1. Если $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} g(x, \xi) \equiv 0$, то условие Ландесмана–Лазера (0.7) не выполняется. Тем не менее, из теоремы 0.1 следует, что если при этом $\int_{\Omega} h(x) \varphi(x) dx = 0$ для любого $\varphi \in \mathfrak{A}_1$ и $g(x, \xi) \xi \leq 0$ для любого $\xi \in \mathbb{R}$ и п. в. $x \in \Omega$, то решение задачи (0.2), (0.3) существует (в качестве функций $\Gamma_{\pm}(x)$ следует взять тождественный нуль).

В работе [9] при использовании метода верхних и нижних решений получены теоремы существования для задачи (0.2), (0.3), позволяющие рассматривать резонанс справа и слева от первого собственного значения λ_1 . Авторы работы [9] предполагали, что нелинейная часть g – каратеодориева функция, удовлетворяющая условию (g3). Отметим, что для ситуации резонанса справа от λ_1 в [9] получен результат, аналогичный теореме 0.1, а в соответствующем утверждении, полученном для резонанса слева от λ_1 , требуется выполнение условия ортогональности (0.9), неравенство (0.8) заменяется условием $g(x, \xi) \xi \geq 0$ (для любого $\xi \in \mathbb{R}$, п. в. $x \in \Omega$), а выполнение условия 2) теоремы 0.1 не предполагается.

Для $r_1 > 0$ обозначим $\Omega_1 = \Omega_1(r_1) = \{x \in \Omega \mid d(x, \partial\Omega) < r_1\}$, а $\Omega_2 = \Omega \setminus \Omega_1$, где $d(x, \partial\Omega)$ – расстояние от точки x до границы $\partial\Omega$ в $\mathbb{R}^m$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.1. Будем говорить, что для нелинейной части g и функции h в уравнении (0.2) выполнено условие (gh1), если существуют числа $r_1 > 0$ и $r_2 \geq 0$ такие, что верно неравенство

$$\int_{\Omega_1} \sup_{\xi < 0} g(x, \xi) \varphi(x) dx + \int_{\Omega_2} \sup_{\xi < -r_2} g(x, \xi) \varphi(x) dx \leq \int_{\Omega} h(x) \varphi(x) dx$$

$$\leq \int_{\Omega_1} \inf_{\xi > 0} g(x, \xi) \varphi(x) dx + \int_{\Omega_2} \inf_{\xi > r_2} g(x, \xi) \varphi(x) dx,$$

где $\varphi(x)$ – произвольная положительная в Ω функция из $\mathfrak{A}_1$.

³ Определение сильного решения приведено ниже (см. определение 1.1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.2. Будем говорить, что для нелинейной части g и функции h в уравнении (0.2) выполнено условие (gh2), если существуют числа $r_1 > 0$ и $r_2 \geq 0$ такие, что верно неравенство

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} \sup_{\xi > 0} g(x, \xi) \varphi(x) dx + \int_{\Omega_2} \sup_{\xi > r_2} g(x, \xi) \varphi(x) dx &\leq \int_{\Omega} h(x) \varphi(x) dx \\ &\leq \int_{\Omega_1} \inf_{\xi < 0} g(x, \xi) \varphi(x) dx + \int_{\Omega_2} \inf_{\xi < -r_2} g(x, \xi) \varphi(x) dx, \end{aligned}$$

где $\varphi(x)$ – произвольная положительная в Ω функция из $\mathfrak{A}_1$.

В настоящей работе будут доказаны две теоремы о существовании решения задачи (0.2), (0.3). Одна из них (теорема 1.1) позволяет рассматривать резонанс слева, а вторая (теорема 1.2) – резонанс справа от первого собственного значения λ_1 в случае, когда условия Ландесмана–Лазера не выполняются. Эти результаты обобщают соответствующие результаты из [9], [18] и [19], в частности теорема 1.2 обобщает теорему 0.1 из [19]. Основное отличие заключается в том, что условие ортогональности (0.9) и требование $g(x, \xi)\xi \geq 0$ для любого $\xi \in \mathbb{R}$, п. в. $x \in \Omega$ (соответственно, $g(x, \xi)\xi \leq 0$ для любого $\xi \in \mathbb{R}$, п. в. $x \in \Omega$) заменено здесь более слабым условием (gh1) (соответственно, (gh2)), а нелинейная часть g может иметь разрывы по фазовой переменной. Действительно, в теоремах 1.1, 1.2 не требуется ортогональности функций h и φ в $L^2(\Omega)$, а условия (gh1) и (gh2), очевидно, не налагают каких-либо ограничений на поведение функции g на множестве

$$M = \{(x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R} \mid d(x, \partial\Omega) \geq r_1, |\xi| \leq r_2\}.$$

Приведем простой пример нелинейной части $g(x, \xi)$ и функции h , для которых выполнены условия (gh1) и (gh2), но не выполнены ни условия Ландесмана–Лазера, ни условие 1) теоремы 0.1. В качестве области Ω рассмотрим единичный шар $\{\sum_{k=1}^m x_k^2 < 1\}$ в $\mathbb{R}^m$. Пусть $h \equiv 0$; нелинейную часть g определим следующим образом:

$$g(x, \xi) = \begin{cases} \left(1 - 4 \sum_{k=1}^m x_k^2\right)(1 - \xi^2) & \text{при } \sum_{k=1}^m x_k^2 < \frac{1}{4}, |\xi| < 1, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Взяв, например, $r_1 = 1/2$, $r_2 = 1$, получим в условиях (gh1) и (gh2) очевидное неравенство $0 \leq 0 \leq 0$.

§ 1. Формулировка основных результатов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Функция $u \in \mathbf{W}_q^2(\Omega) \cap \dot{\mathbf{W}}_q^1(\Omega)$ называется *сильным решением* задачи (0.2), (0.3), если $u(x)$ удовлетворяет уравнению (0.2) при п. в. $x \in \Omega$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Обобщенным решением задачи (0.2), (0.3) называется функция $u \in \mathbf{W}_q^2(\Omega) \cap \dot{\mathbf{W}}_q^1(\Omega)$, удовлетворяющая для п. в. $x \in \Omega$ включению

$$-Au(x) + \lambda_1 u(x) + h(x) \in [g_-(x, u(x)), g_+(x, u(x))]. \quad (1.1)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3 [20]. Сильное решение задачи (0.2), (0.3) называется *полуправильным*, если для п. в. $x \in \Omega$ значения $u(x)$ являются точками непрерывности сечения $g(x, \cdot)$.

Введем в рассмотрение оператор $Lu = Au - \lambda_1 u$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4 [21]. Говорят, что нелинейная часть $g: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ в уравнении (0.2) удовлетворяет *сильному (А)-условию*, если существует не более чем счетное семейство поверхностей $\{S_i: i \in I\}$,

$$S_i = \{(x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R} \mid \xi = \psi_i(x)\}, \quad \psi_i \in \mathbf{W}_{1,\text{loc}}^2(\Omega),$$

таких, что для п. в. $x \in \Omega$ неравенство $g_+(x, \xi) \neq g_-(x, \xi)$ влечет существование $i \in I$, для которого $(x, \xi) \in S_i$ и

$$(L\psi_i(x) + g_-(x, \psi_i(x)) - h(x))(L\psi_i(x) + g_+(x, \psi_i(x)) - h(x)) > 0. \quad (1.2)$$

В свою очередь, нелинейная часть $g: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ в уравнении (0.2) удовлетворяет *сильному (А1)-условию*, если существует не более чем счетное семейство поверхностей

$$S_i = \{(x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R} \mid \xi = \psi_i(x)\}, \quad \psi_i \in \mathbf{W}_{1,\text{loc}}^2(\Omega), \quad i \in I,$$

таких, что для п. в. $x \in \Omega$ из $g_+(x, \xi) \neq g_-(x, \xi)$ следует, что $(x, \xi) \in S_i$ для некоторого $i \in I$ и выполнено либо условие (1.2), либо условие

$$L\psi_i(x) + g(x, \psi_i(x)) = h(x).$$

ТЕОРЕМА 1.1. *Предположим, что:*

- 1) функция $g(x, \xi)$ удовлетворяет условиям (g1)–(g3);
- 2) почти всюду на Ω справедливо $\liminf_{|\xi| \rightarrow \infty} \frac{g(x, \xi)}{\xi} \geq 0$;
- 3) для функций $g(x, \xi)$ и $h(x)$ выполнено условие (gh1).

Тогда задача (0.2), (0.3) имеет обобщенное решение. Это решение является *сильным (полуправильным)*, если дополнительно для уравнения (0.2) выполнено *сильное (А1)-условие* (соответственно, *сильное (А)-условие*).

ТЕОРЕМА 1.2. *Предположим, что:*

- 1) функция $g(x, \xi)$ удовлетворяет условиям (g1)–(g3);
- 2) почти всюду на Ω справедливо $\limsup_{|\xi| \rightarrow \infty} \frac{g(x, \xi)}{\xi} \leq 0$;
- 3) для функций $g(x, \xi)$ и $h(x)$ выполнено условие (gh2);
- 4) существуют функции Γ_+ , Γ_- из $\mathbf{L}^q(\Omega)$ такие, что для п. в. $x \in \Omega$

$$0 \leq \Gamma_{\pm}(x) \leq \alpha = \lambda_2 - \lambda_1, \quad (1.3)$$

$$\liminf_{\xi \rightarrow -\infty} \frac{g(x, \xi)}{\xi} \geq -\Gamma_-(x), \quad \liminf_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{g(x, \xi)}{\xi} \geq -\Gamma_+(x) \quad (1.4)$$

и для любого $w \in \mathfrak{A}_2 \setminus \{0\}$

$$\int_{w>0} (\alpha - \Gamma_+(x)) w^2(x) dx + \int_{w<0} (\alpha - \Gamma_-(x)) w^2(x) dx > 0 \quad (1.5)$$

(нерезонансное условие для λ_2).

Тогда задача (0.2), (0.3) имеет обобщенное решение. Это решение является сильным (полуправильным), если дополнительно для уравнения (0.2) выполнено сильное (A1)-условие (соответственно, сильное (A)-условие).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. В случае, когда выполнено условие 1) теоремы 1.2, условие 4) будет выполняться, если константа C_1 в условии (g3) меньше $\alpha = \lambda_2 - \lambda_1$ (в качестве $\Gamma_{\pm}(x)$ следует взять константу C_1).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Как показывает следующий контрпример, условия (gh1) и (gh2) нельзя ослабить, заменив их существованием положительного числа r , для которого верны соответственно неравенства

$$\int_{\Omega} \sup_{\xi < -r} g(x, \xi) \varphi(x) dx \leq \int_{\Omega} h(x) \varphi(x) dx \leq \int_{\Omega} \inf_{\xi > r} g(x, \xi) \varphi(x) dx, \quad (1.6)$$

$$\int_{\Omega} \sup_{\xi > r} g(x, \xi) \varphi(x) dx \leq \int_{\Omega} h(x) \varphi(x) dx \leq \int_{\Omega} \inf_{\xi < -r} g(x, \xi) \varphi(x) dx. \quad (1.7)$$

Действительно, в ограниченной области $\Omega \in \mathbb{R}^m$ с достаточно гладкой границей Γ рассмотрим задачу

$$-\Delta u(x) - \lambda_1 u(x) + g(u(x)) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (1.8)$$

$$u|_{\Gamma} = 0, \quad (1.9)$$

где λ_1 – наименьшее собственное значение оператора $-\Delta$ с граничным условием (1.9), а $g(\xi)$ определено следующим образом:

$$g(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty), \\ 1, & \xi \in (-1, 1). \end{cases}$$

Очевидно, что для функций g и h (здесь $h(x) \equiv 0$) выполнены условия (1.6) и (1.7) (например, при $r = 1$). Предположим, что существует обобщенное решение задачи (1.8), (1.9). Тогда, домножив обе части уравнения (1.8) на собственную функцию φ оператора $-\Delta$ с граничным условием (1.9), соответствующую первому собственному значению λ_1 , и проинтегрировав полученное выражение по частям, приходим к равенству

$$\int_{\Omega} g(u(x)) \varphi(x) dx = 0.$$

Поскольку функция g неотрицательна, а φ либо положительна, либо отрицательна на Ω , то $g(u(x)) = 0$ для п. в. $x \in \Omega$. Следовательно, $|u(x)| \geq 1$ для п. в. $x \in \Omega$, чего быть не может в силу граничного условия (1.9) и непрерывности u в $\bar{\Omega}$ (где $u \in C^1(\bar{\Omega})$ по теореме Соболева о вложении).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. Если для уравнения (0.2) выполнено сильное (A1)-условие, то любое обобщенное решение задачи (0.2), (0.3) является сильным решением этой задачи. Действительно, пусть $u(x)$ – обобщенное решение (0.2), (0.3) и для нелинейной части $g(x, \xi)$ выполнено сильное (A1)-условие. Рассмотрим множество

$$\Omega_u = \{x \in \Omega \mid g_+(x, u(x)) \neq g_-(x, u(x))\}.$$

Если мера этого множества равна нулю, то для п. в. $x \in \Omega$ из включения (1.1) получаем, что $-Au(x) + \lambda_1 u(x) + h(x) = g(x, u(x))$, и, значит, u – сильное решение задачи (0.2), (0.3).

Пусть $\text{mes}(\Omega_u) \neq 0$ (через $\text{mes}(B)$ обозначаем меру Лебега множества B в $\mathbb{R}^m$). Тогда из определения сильного (A1)-условия следует, что с точностью до множества меры нуль

$$\Omega_u = \bigcup_{i \in I} \Omega^i,$$

где $\Omega^i = \{x \in \Omega \mid g_+(x, u(x)) \neq g_-(x, u(x)), u(x) = \psi_i(x)\}$. Кроме того, для любого $i \in I$ имеем $\text{mes}(\Omega^i) = \text{mes}(\Omega_+^i) + \text{mes}(\Omega_0^i)$, где

$$\begin{aligned} \Omega_+^i &= \{x \in \Omega \mid u(x) = \psi_i(x), \\ &\quad (L\psi_i(x) + g_-(x, \psi_i(x)) - h(x))(L\psi_i(x) + g_+(x, \psi_i(x)) - h(x)) > 0\}, \\ \Omega_0^i &= \{x \in \Omega \mid u(x) = \psi_i(x), L\psi_i(x) + g(x, \psi_i(x)) = h(x)\}. \end{aligned}$$

Заметим, что $\text{mes}(\Omega_+^i) = 0$ для любого $i \in I$, поскольку почти всюду на Ω_+^i

$$(L\psi_i(x) + g_+(x, \psi_i(x)) - h(x))(L\psi_i(x) + g_-(x, \psi_i(x)) - h(x)) > 0$$

и, значит, почти всюду на Ω_+^i

$$(Au(x) - \lambda_1 u(x) + g_+(x, u(x)) - h(x))(Au(x) - \lambda_1 u(x) + g_-(x, u(x)) - h(x)) > 0.$$

Последнее означает, что для п. в. $x \in \Omega_+^i$

$$-Au(x) + \lambda_1 u(x) + h(x) \notin [g_-(x, u(x)), g_+(x, u(x))],$$

а это возможно только лишь на множестве меры нуль в силу определения обобщенного решения. Таким образом, $Lu(x) + g(x, u(x)) = h(x)$ почти всюду на Ω_u . При этом на множестве $\Omega \setminus \Omega_u$ справедливы равенства $g_-(x, u(x)) = g_+(x, u(x)) = g(x, u(x))$ и, значит,

$$[g_-(x, u(x)), g_+(x, u(x))] = \{g(x, u(x))\}.$$

Поэтому $Lu(x) + g(x, u(x)) = h(x)$ почти всюду на Ω и, следовательно, u – сильное решение задачи (0.2), (0.3).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4. Если для уравнения (0.2) выполнено сильное (A)-условие, то любое обобщенное решение u задачи (0.2), (0.3) является полуправильным решением. Действительно, достаточно показать, что мера множества Ω_u равна нулю, так как если $x \in \Omega \setminus \Omega_u$, то $g_-(x, u(x)) = g_+(x, u(x)) = g(x, u(x))$ и, значит, значения $u(x)$ являются точками непрерывности сечения $g(x, \cdot)$.

Предположим, что $\text{mes}(\Omega_u) \neq 0$. Тогда из определения сильного (A)-условия следует существование $i \in I$ такого, что множество

$$\Omega^i = \{x \in \Omega \mid g_+(x, u(x)) \neq g_-(x, u(x)), u(x) = \psi_i(x)\}$$

имеет ненулевую меру. С другой стороны, из сильного (A)-условия для $x \in \Omega^i$ следует, что

$$(L\psi_i(x) + g_+(x, \psi_i(x)) - h(x))(L\psi_i(x) + g_-(x, \psi_i(x)) - h(x)) > 0$$

и, значит, почти всюду на Ω^i

$$-Au(x) + \lambda_1 u(x) + h(x) \notin [g_-(x, u(x)), g_+(x, u(x))],$$

а это противоречит определению обобщенного решения.

§ 2. Операторная постановка задачи (0.2), (0.3)

Выберем $\nu \in \mathbb{R}$ так, чтобы $\lambda_1 + \nu \notin \sigma(A)$. Пусть $B_\nu: D(B_\nu) \subset \mathbf{C}^1(\overline{\Omega}) \rightarrow \mathbf{L}^q(\Omega)$ – линейный оператор с областью определения $D(B_\nu) = \mathbf{W}_q^2(\Omega) \cap \dot{\mathbf{W}}_2^1(\Omega)$, задаваемый равенством

$$B_\nu u(x) = Au(x) - (\lambda_1 + \nu)u(x) \quad \forall u \in D(B_\nu).$$

Заметим, что оператор B_ν замкнутый. Более того, известно [1, § 8.2], что B_ν как оператор, действующий из пространства $\mathbf{W}_q^2(\Omega) \cap \dot{\mathbf{W}}_2^1(\Omega)$ с нормой пространства $\mathbf{W}_q^2(\Omega)$ в пространство $\mathbf{L}^q(\Omega)$, имеет ограниченный обратный. В силу компактности вложения $\mathbf{W}_q^2(\Omega)$ в $\mathbf{C}^1(\overline{\Omega})$ (так как $q > m$) оператор B_ν^{-1} , рассматриваемый как оператор, действующий из $\mathbf{L}^q(\Omega)$ в $\mathbf{C}^1(\overline{\Omega})$, компактен.

Пусть нелинейная часть $g(x, \xi)$ удовлетворяет условиям (g1)–(g3). Рассмотрим порожденный ею оператор Немыцкого $G: \mathbf{C}^1(\overline{\Omega}) \rightarrow \mathbf{L}^q(\Omega)$, $Gu(\cdot) = g(\cdot, u(\cdot))$. Пусть $SG: \mathbf{C}^1(\overline{\Omega}) \rightarrow 2^{\mathbf{L}^q(\Omega)}$ – *секвенциальное замыкание* G (по определению для $u \in \mathbf{C}^1(\overline{\Omega})$ значение SGu есть замыкание выпуклой оболочки множества

$$\{y \in \mathbf{L}^q(\Omega) \mid \exists (u_n), u_n \rightarrow u \text{ в } \mathbf{C}^1(\overline{\Omega}), Gu_n \rightarrow y \text{ в } \mathbf{L}^q(\Omega)\},$$

где через $\rightarrow$ обозначена слабая сходимости последовательности).

Обозначим через $\widehat{G}$ оператор Немыцкого, порожденный функцией $g(x, \xi)$ и действующий из $C(\overline{\Omega})$ в $\mathbf{L}^q(\Omega)$. Тогда $SGu \subset S\widehat{G}u$. Из [22, гл. 5, § 27] и [23] следует, что $S\widehat{G}u = \widehat{G}^\square(u)$, где

$$\begin{aligned} \widehat{G}^\square(u) = \{z: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid z(x) \text{ измерима на } \Omega, z(x) \in [g_-(x, u(x)), g_+(x, u(x))] \\ \text{для п. в. } x \in \Omega\}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Поэтому если $z \in SGu$, $u \in \mathbf{C}^1(\overline{\Omega})$, то $z(x) \in [g_-(x, u(x)), g_+(x, u(x))]$ почти всюду на Ω . Отсюда получаем, что существование обобщенного решения задачи (0.2), (0.3) следует из существования решения операторного включения

$$h - Au + \lambda_1 u \in SGu \quad \Longleftrightarrow \quad h - B_\nu u - \nu u \in SGu.$$

Поскольку оператор B_ν непрерывно обратим, то последнее условие эквивалентно включению

$$u \in B_\nu^{-1}(h - \nu u - SGu). \quad (2.2)$$

Итак, мы приходим к выводу, что $u \in \mathbf{W}_q^2(\Omega) \cap \mathring{\mathbf{W}}_2^1(\Omega)$ является обобщенным решением задачи (0.2), (0.3), если u удовлетворяет включению (2.2).

На банаховом пространстве E функций из $\mathbf{C}^1(\bar{\Omega})$, равных нулю на границе $\partial\Omega$, определим многозначное отображение $\phi_\nu: E \rightarrow 2^E$ по формуле

$$\phi_\nu(u) = B_\nu^{-1}(h - \nu u - SGu). \quad (2.3)$$

Обозначим через $K(E)$ семейство всех непустых выпуклых компактов в E .

ЛЕММА 2.1. *Многозначное отображение ϕ_ν , определенное в (2.3), действует из E в $K(E)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения секвенциального замыкания и ограниченности (в силу условия (g3)) оператора G , для любого $u \in E$ множество $U := h - \nu u - SGu$ замкнуто, выпукло и ограничено в $\mathbf{L}^q(\Omega)$. Поскольку линейный оператор переводит выпуклые множества в выпуклые, то $\phi_\nu(u)$ – выпуклое множество в E . Покажем, что $B_\nu^{-1}(U)$ замкнуто. Пусть (y_k) – некоторая последовательность в $B_\nu^{-1}(U)$, т. е. $y_k = B_\nu^{-1}x_k$, где $x_k \in U$, и пусть $y_k \rightarrow y$. Последовательность (x_k) ограничена как подмножество ограниченного множества U . Отсюда в силу рефлексивности пространства $\mathbf{L}^q(\Omega)$ существует подпоследовательность (x_{k_l}) , слабо сходящаяся в $\mathbf{L}^q(\Omega)$ к некоторой точке x . Выпуклость и замкнутость множества U влечет его слабую замкнутость, откуда получаем, что $x \in U$. Далее, так как оператор B_ν замкнутый и $x_{k_l} = B_\nu y_{k_l} \rightharpoonup x$, $y_{k_l} \rightarrow y$, то $y \in D(B_\nu)$ и $x = B_\nu y$. Следовательно, $y = B_\nu^{-1}(x) \in B_\nu^{-1}(U)$, что доказывает замкнутость множества $B_\nu^{-1}(U)$.

Оператор B_ν^{-1} компактен, и поэтому он переводит ограниченное множество U в предкомпактное множество $B_\nu^{-1}(U)$. Отсюда и из замкнутости $B_\nu^{-1}(U)$ следует компактность этого множества в E . Таким образом, для любого $u \in E$ значения $\phi_\nu(u)$ являются непустым, компактным, выпуклым подмножеством в E . Лемма доказана.

Обозначим через U_R замкнутый шар с радиусом R и центром в нуле в пространстве E , а через S_R – его границу.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Многозначное отображение $\phi: U_R \rightarrow K(E)$ называется *полу непрерывным сверху в точке $x \in U_R$* , если для любой окрестности W множества $\phi(x)$ существует окрестность V точки x такая, что $\phi(V) \subset W$, где $\phi(V) := \bigcup_{y \in V} \phi(y)$. Многозначное отображение $\phi: U_R \rightarrow K(E)$ называется *полу непрерывным сверху на множестве U_R* , если ϕ полу непрерывно сверху в каждой точке $x \in U_R$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Многозначное отображение $\phi: U_R \rightarrow K(E)$ называется *компактным*, если ϕ полу непрерывно сверху на U_R и $\phi(U_R)$ – предкомпактное множество в E .

ЛЕММА 2.2. *Многозначное отображение ϕ_ν , определенное формулой (2.3), компактно на замкнутом шаре U_R при любом $R > 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуется показать, что $\phi_\nu: U_R \rightarrow K(E)$ полу непрерывно сверху и образ $\phi_\nu(U_R)$ шара U_R предкомпактен в E .

Поскольку оператор G в силу условия (g3) ограничен, то ϕ_ν переводит ограниченное множество U_R в ограниченное множество

$$\phi_\nu(U_R) = \bigcup_{u \in U_R} \phi_\nu(u).$$

Предкомпактность $\phi_\nu(U_R)$ в E следует из компактности оператора B_ν^{-1} .

Установим полунепрерывность сверху на E отображения ϕ_ν . Достаточно показать, что оператор $B_\nu^{-1}(SG)$ полунепрерывен сверху. Предположим, что это не так. Тогда найдутся $u \in E$ и открытое множество $V \supset B_\nu^{-1}(SG)(u)$ такие, что для произвольного натурального k существуют u_k , $\|u_k - u\|_{C^1(\bar{\Omega})} < \frac{1}{k}$, и $w_k \in B_\nu^{-1}(SG)(u_k)$, $w_k \notin V$. Определим $b_k \in SG(u_k)$ из уравнения $w_k = B_\nu^{-1}b_k$. Из ограниченности отображения SG следует ограниченность последовательности (b_k) в $L^q(\Omega)$. Отсюда и из рефлексивности $L^q(\Omega)$ заключаем о существовании подпоследовательности (b_{k_l}) , слабо сходящейся к некоторому b в $L^q(\Omega)$. Из определения секвенциального замыкания следует, что $b \in SG(u)$. Поскольку B_ν^{-1} – линейный и компактный оператор, то $w_{k_l} = B_\nu^{-1}b_{k_l} \rightarrow B_\nu^{-1}b \in B_\nu^{-1}SG(u) \subset V$. Отсюда и из открытости множества V заключаем, что для достаточно больших l элемент w_{k_l} принадлежит V , но это противоречит выбору w_k . Полученное противоречие доказывает, что ϕ_ν – компактное многозначное отображение на U_R . Лемма доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3 [24]. *Многозначным компактным полем* на U_R называется отображение $\Phi = I - \phi$, где I – тождественное, а $\phi: U_R \rightarrow K(E)$ – компактное отображения. Говорят, что многозначное компактное поле Φ на U_R принадлежит классу $C(S_R, U_R, 0)$, если $0 \notin \Phi(x)$ для любого $x \in S_R$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4 [24]. *Гомотопией* в $C(S_R, U_R, 0)$ называется отображение $h: U_R \times [0, 1] \rightarrow K(E)$ такое, что $H(x, t) := x - h(x, t)$ – компактное отображение, $x \notin H(x, t)$ при любых $t \in [0, 1]$ и $x \in S_R$.

Из леммы 2.2 следует, что для любого $R > 0$ отображение $\Phi_\nu(u) = u - \phi_\nu(u)$ является многозначным компактным полем класса $C(S_R, U_R, 0)$ при условии, что $0 \notin \Phi_\nu(u)$ для любого $u \in S_R$. Для существования решения включения (2.2) достаточно показать, что найдется $R > 0$, для которого семейство отображений

$$H_\nu(t, u) = (1 - t)u + t\Phi_\nu(u), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

является гомотопией в $C(S_R, U_R, 0)$, связывающей тождественное отображение I и компактное векторное поле $\Phi_\nu(u)$ (в данной ситуации это означает, что $0 \notin H_\nu(t, u)$ для любых $t \in [0, 1]$ и $u \in S_R$). Действительно, тогда совпадают топологические степени отображений I и Φ_ν :

$$\deg(U_R, 0, \Phi_\nu) = \deg(U_R, 0, I) = 1$$

(см. [24]). Отсюда следует, что найдется $u \in E$, удовлетворяющее включению $0 \in \Phi_\nu(u)$, т. е. $u \in \phi_\nu(u)$ (см. [24]). Таким образом, чтобы доказать существование обобщенного решения задачи (0.2), (0.3), достаточно установить ограниченность множества всех решений включения $0 \in H_\nu(t, u)$ в E при $t \in [0, 1]$.

Последнее равносильно равномерной по $t \in [0, 1]$ ограниченности в E решений из $D(B_\nu)$ включений

$$-Au(x) + \lambda_1 u(x) + (1-t)\nu u(x) + th(x) \in t[g_-(x, u(x)), g_+(x, u(x))] \quad (2.4)$$

для п. в. $x \in \Omega$.

Таким образом, $u \in \mathbf{W}_q^2(\Omega) \cap \mathring{\mathbf{W}}_2^1(\Omega)$ является обобщенным решением задачи (0.2), (0.3), если существует $\rho > 0$ такое, что для любого $u \in D(B_\nu)$, удовлетворяющего включению (2.4) с некоторым $t \in [0, 1]$, верна оценка $\|u\|_{\mathbf{C}^1(\bar{\Omega})} \leq \rho$.

§ 3. Доказательство основных результатов

ОБЩАЯ ЧАСТЬ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ 1.1, 1.2. Как показано выше, для доказательства существования обобщенного решения задачи (0.2), (0.3) достаточно установить существование $\rho > 0$ такого, что для любого $u \in D(B_\nu)$, удовлетворяющего включению (2.4) с некоторым $t \in [0, 1]$, верна оценка $\|u\|_{\mathbf{C}^1(\bar{\Omega})} \leq \rho$.

Допустим противное. Тогда существуют последовательности $(t_k) \subset [0, 1]$, $(u_k) \subset \mathbf{W}_q^2(\Omega)$ и $(z_k) \subset \mathbf{L}^q(\Omega)$ такие, что для любого $k \in \mathbb{N}$ верны следующие соотношения:

$$\|u_k\|_{\mathbf{C}^1(\bar{\Omega})} \geq k, \quad (3.1)$$

$$z_k(x) \in [g_-(x, u_k(x)), g_+(x, u_k(x))] \quad \text{почти всюду на } \Omega, \quad (3.2)$$

$$Au_k(x) - \lambda_1 u_k(x) - (1-t_k)\nu u_k(x) + t_k z_k(x) = t_k h(x), \quad (3.3)$$

$$u_k|_{\partial\Omega} = 0. \quad (3.4)$$

Будем брать $\nu < 0$ при доказательстве теоремы 1.1 и $0 < \nu < \alpha = \lambda_2 - \lambda_1$ при доказательстве теоремы 1.2.

С помощью оператора $B_\nu = A - (\lambda_1 + \nu)I$ задачу (3.3), (3.4) запишем в виде

$$B_\nu u_k = t_k(-\nu u_k - z_k + h), \quad u_k \in D(B_\nu).$$

Поделим обе части этого равенства на $\|u_k\|_{\mathbf{C}^1(\bar{\Omega})}$ и обозначим

$$v_k = \frac{u_k}{\|u_k\|_{\mathbf{C}^1(\bar{\Omega})}}.$$

Тогда

$$B_\nu v_k = t_k \left(-\nu v_k - \frac{z_k}{\|u_k\|_{\mathbf{C}^1(\bar{\Omega})}} + \frac{h}{\|u_k\|_{\mathbf{C}^1(\bar{\Omega})}} \right), \quad v_k \in D(B_\nu). \quad (3.5)$$

Из условия (g3) и включения (3.2) следует ограниченность последовательности $(z_k/\|u_k\|_{\mathbf{C}^1(\bar{\Omega})})$ в $\mathbf{L}^q(\Omega)$. Далее, $\|v_k\|_{\mathbf{C}^1(\bar{\Omega})} = 1$ и $h/\|u_k\|_{\mathbf{C}^1(\bar{\Omega})} \rightarrow 0$ в $\mathbf{L}^q(\Omega)$. Поэтому правая часть равенства (3.5) равномерно по k ограничена в пространстве $\mathbf{L}^q(\Omega)$. Из (3.5) с помощью теоремы об оценках $\mathbf{W}_q^2$ -нормы сильных решений эллиптических краевых задач [1, § 9.5], примененной к задаче (3.5), получаем ограниченность последовательности (v_k) в $\mathbf{W}_q^2(\Omega)$. Из рефлексивности

пространства $\mathbf{W}_q^2(\Omega)$ и включения $(t_k) \subset [0, 1]$ заключаем (переходя, если необходимо, к подпоследовательностям), что найдутся $v \in \mathbf{W}_q^2(\Omega)$ и $t \in [0, 1]$ такие, что $v_k \rightharpoonup v$ в $\mathbf{W}_q^2(\Omega)$ и $t_k \rightarrow t$. Поскольку $\mathbf{W}_q^2(\Omega)$ компактно вложено в $\mathbf{C}^1(\bar{\Omega})$, то $v_k \rightarrow v$ в $\mathbf{C}^1(\bar{\Omega})$. Отсюда следует, что $\|v\|_{\mathbf{C}^1(\bar{\Omega})} = 1$ и $v|_{\partial\Omega} = 0$. Заметим, что $t \neq 0$, так как в противном случае, переходя к пределу в (3.5), получим $B_\nu v = 0$. Отсюда в силу непрерывной обратимости B_ν следовало бы, что $v = 0$. Однако $\|v\|_{\mathbf{C}^1(\bar{\Omega})} = 1$.

Поскольку $t \neq 0$, найдется $k_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $t_k > 0$ при $k > k_0$. Из (3.5) для $k > k_0$ имеем

$$\frac{z_k}{\|u_k\|_{\mathbf{C}^1(\bar{\Omega})}} = -\nu v_k + \frac{h}{\|u_k\|_{\mathbf{C}^1(\bar{\Omega})}} - \frac{1}{t_k} B_\nu v_k. \quad (3.6)$$

Учитывая, что $B_\nu v_k \rightharpoonup B_\nu v$ в $\mathbf{L}^q(\Omega)$ (поскольку $v_k \rightharpoonup v$ в $\mathbf{W}_q^2(\Omega)$), из соотношения (3.6) получим, что найдется функция $K(x) \in \mathbf{L}^q(\Omega)$ такая, что имеет место $z_k/\|u_k\|_{\mathbf{C}^1(\bar{\Omega})} \rightharpoonup K(x)$ в $\mathbf{L}^q(\Omega)$ и

$$B_\nu v = t(-\nu v - K(x)). \quad (3.7)$$

Введем новую функцию $k_v(x)$ на Ω следующим образом:

$$k_v(x) = \begin{cases} \frac{K(x)}{v(x)}, & \text{если } v(x) \neq 0, \\ 0, & \text{если } v(x) = 0. \end{cases}$$

Тогда нетрудно видеть, что

$$\frac{z_k(x)}{\|u_k\|_{\mathbf{C}^1(\bar{\Omega})}} \rightharpoonup k_v(x)v(x) \quad \text{в } \mathbf{L}^q(\Omega),$$

и равенство (3.7) можно переписать в виде

$$Av(x) - \lambda_1 v(x) - (1-t)\nu v(x) + tk_v(x)v(x) = 0. \quad (3.8)$$

Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\frac{z_k(x)}{u_k(x)} \rightharpoonup k_v(x) \quad \text{в } \mathbf{L}^q(\Omega_\varepsilon),$$

где $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega \mid |v(x)| > \varepsilon\}$. Действительно, для произвольной функции $\psi \in \mathbf{L}^p(\Omega_\varepsilon)$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\frac{z_k(x)}{u_k(x)} - k_v(x) \right) \psi(x) dx \right| &= \left| \int_{\Omega_\varepsilon} \psi(x) \left(\frac{z_k(x)}{\|u_k\|_{\mathbf{C}^1(\bar{\Omega})} v_k(x)} - \frac{z_k(x)}{\|u_k\|_{\mathbf{C}^1(\bar{\Omega})} v(x)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{z_k(x)}{\|u_k\|_{\mathbf{C}^1(\bar{\Omega})} v(x)} - \frac{K(x)}{v(x)} \right) dx \right| \\ &\leq \left| \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{z_k(x)}{\|u_k\|_{\mathbf{C}^1(\bar{\Omega})}} \psi(x) \frac{v(x) - v_k(x)}{v_k(x)v(x)} dx \right| + \left| \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\frac{z_k(x)}{\|u_k\|_{\mathbf{C}^1(\bar{\Omega})}} - K(x) \right) \frac{\psi(x)}{v(x)} dx \right| \\ &\leq \left\| \frac{z_k}{\|u_k\|_{\mathbf{C}^1(\bar{\Omega})}} \right\|_{\mathbf{L}^q(\Omega_\varepsilon)} \left\| \psi \frac{v - v_k}{v_k v} \right\|_{\mathbf{L}^p(\Omega_\varepsilon)} + \eta_k, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где

$$\eta_k = \left| \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\frac{z_k(x)}{\|u_k\|_{\mathbf{C}^1(\bar{\Omega})}} - K(x) \right) \frac{\psi(x)}{v(x)} dx \right| \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty,$$

поскольку $\psi/v \in \mathbf{L}^p(\Omega_\varepsilon)$ и $z_k/\|u_k\|_{\mathbf{C}^1(\bar{\Omega})} \rightharpoonup K(x)$ в $\mathbf{L}^q(\Omega)$. Отсюда следует, что правая часть неравенства (3.9) стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$, так как последовательность $z_k/\|u_k\|_{\mathbf{C}^1(\bar{\Omega})}$ ограничена в $\mathbf{L}^q(\Omega)$, при этом

$$\psi \frac{v - v_k}{vv_k} \rightarrow 0 \quad \text{в } \mathbf{L}^p(\Omega_\varepsilon) \quad \text{при } k \rightarrow \infty$$

в силу того, что $v_k \rightarrow v$ в $\mathbf{C}^1(\bar{\Omega})$ и $|v(x)v_k(x)| > \varepsilon^2/2$ для любого $x \in \Omega_\varepsilon$. На этом общая часть доказательства теорем 1.1, 1.2 завершается.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1. Пусть выполнены условия теоремы. Покажем, что $0 \leq k_v(x) \leq C_1$ почти всюду на Ω . Заметим, что $\Omega = \bigcup_{\varepsilon>0} \Omega_\varepsilon$, где, как и раньше, $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega \mid |v(x)| > \varepsilon\}$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Из слабой сходимости z_k/u_k к $k_v(x)$ в $\mathbf{L}^q(\Omega_\varepsilon)$, леммы Лебега–Фату о переходе к пределу под знаком интеграла [25, с. 32], формулы (3.2) и условия 2) теоремы для любой неотрицательной на Ω_ε функции $\psi \in \mathbf{L}^p(\Omega_\varepsilon)$ имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} k_v(x) \psi(x) dx &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{z_k(x)}{u_k(x)} \psi(x) dx \\ &\geq \int_{\Omega_\varepsilon} \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{z_k(x)}{u_k(x)} \psi(x) dx \geq \int_{\Omega_\varepsilon} \liminf_{k \rightarrow \infty} \liminf_{\xi \rightarrow u_k(x)} \frac{g(x, \xi)}{\xi} \psi(x) dx \geq 0, \end{aligned}$$

так как из (3.1) и сходимости $v_k(x)$ к $v(x)$ в $\mathbf{C}^1(\bar{\Omega})$ следует, что $|u_k(x)| \geq k|v_k(x)| \rightarrow \infty$ для любого $x \in \Omega_\varepsilon$ при $k \rightarrow \infty$. В силу произвольности выбора неотрицательной функции $\psi \in \mathbf{L}^q(\Omega_\varepsilon)$ отсюда следует неотрицательность $k_v(x)$ почти всюду на Ω_ε , а из произвольности $\varepsilon > 0$ – неотрицательность $k_v(x)$ почти всюду на Ω .

Аналогично, в силу включения (3.2) для любой неотрицательной на Ω_ε функции $\psi \in \mathbf{L}^p(\Omega_\varepsilon)$ имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} k_v(x) \psi(x) dx &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{z_k(x)}{u_k(x)} \psi(x) dx \\ &\leq \int_{\Omega_\varepsilon} \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{z_k(x)}{u_k(x)} \psi(x) dx \leq \int_{\Omega_\varepsilon} C_1 \psi(x) dx, \end{aligned}$$

так как из условия (g3) следует, что

$$\limsup_{\xi \rightarrow \pm\infty} \frac{g(x, \xi)}{\xi} \leq C_1.$$

Отсюда и из произвольности $\psi(x) \geq 0$ и $\varepsilon > 0$ получаем, что $k_v(x) \leq C_1$ почти всюду на Ω . Итак, $0 \leq k_v(x) \leq C_1$ почти всюду на Ω .

Далее, умножим обе части равенства (3.8) на $v(x)$ и проинтегрируем по Ω , получим

$$0 = \int_{\Omega} (Av - \lambda_1 v)v(x) dx - \nu(1-t) \int_{\Omega} v^2(x) dx + t \int_{\Omega} k_v(x)v^2(x) dx. \quad (3.10)$$

Первое слагаемое в правой части (3.10) неотрицательное, так как λ_1 – минимальное собственное значение оператора A с граничным условием (0.3). Поскольку $\nu < 0$, $t \in (0, 1]$, то $-\nu(1-t) \int_{\Omega} v^2(x) dx \geq 0$. Последнее слагаемое в (3.10) неотрицательно в силу неотрицательности $k_v(x)$. Поэтому каждое из рассмотренных слагаемых равно нулю. Поскольку $\|v\|_{C^1(\bar{\Omega})} = 1$, второе слагаемое обращается в нуль только при $t = 1$. Из равенства нулю последнего слагаемого в правой части (3.10) следует, что $k_v(x)v(x) = 0$ почти всюду на Ω . Следовательно, уравнение (3.8) примет вид $Au - \lambda_1 v = 0$, а значит, $v \in \mathfrak{A}_1$. Поэтому $v = M\varphi$, где $M \neq 0$, а φ – собственная функция из условия (gh1).

Напомним, что $\varphi(x) > 0$ в Ω и $\frac{\partial \varphi}{\partial n}|_{\partial\Omega} < 0$. Возможны два случая:

- а) $M > 0$ и, следовательно, $v > 0$ в Ω , а $\partial v / \partial n < 0$ на $\partial\Omega$;
- б) $M < 0$ и, следовательно, $v < 0$ в Ω , а $\partial v / \partial n > 0$ на $\partial\Omega$.

Нетрудно показать, что сходимость последовательности (v_k) к v в $C^1(\bar{\Omega})$ в случае а) (или б)) влечет существование номера $k_0 \in \mathbb{N}$ такого, что для всех $k > k_0$ верно неравенство $v_k(x) > 0$ (или $v_k(x) < 0$) на Ω . Поскольку $u_k = v_k \|u_k\|_{C^1(\bar{\Omega})}$, то для всех k , больших k_0 , получаем, что $u_k(x) > 0$ на Ω (соответственно, $u_k(x) < 0$ на Ω).

Функция u_k является решением задачи (3.3), (3.4). Заметим, что если найдется $t_k = 1$, то

$$Au_k - \lambda_1 u_k + z_k(x) = h(x), \quad u_k|_{\partial\Omega} = 0,$$

т.е. u_k – обобщенное решение задачи (0.2), (0.3), и в этом случае теорему 1.1 можно считать доказанной. Поэтому будем предполагать, что $0 < t_k < 1$ при любом $k > k_1$, где $k_1 > k_0$. При $k > k_1$ умножим обе части равенства (3.3) на элемент v и проинтегрируем полученное выражение по Ω . Учитывая, что $\int_{\Omega} (Au_k - \lambda_1 u_k)v(x) dx = 0$, так как $v \in \mathfrak{A}_1$, получим

$$t_k \int_{\Omega} z_k(x)v(x) dx = t_k \int_{\Omega} h(x)v(x) dx + (1-t_k)\nu \|u_k\|_{C^1(\bar{\Omega})} \int_{\Omega} v_k(x)v(x) dx.$$

Поскольку $\nu < 0$, а $\int_{\Omega} v_k(x)v(x) dx \rightarrow \int_{\Omega} v^2(x) dx > 0$, то для достаточно больших $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$\int_{\Omega} z_k(x)v(x) dx < \int_{\Omega} h(x)v(x) dx. \quad (3.11)$$

Предположим, что $M > 0$. Тогда $v(x) > 0$ и, следовательно, при $k > k_0$ функции $u_k(x) > 0$ на Ω . Из определения функций z_k следует, что почти всюду на Ω верно неравенство $z_k(x) \geq g_-(x, u_k(x))$. Пусть $\Omega_1 = \{x \in \Omega \mid d(x, \partial\Omega) < r_1\}$ – множество из условия (gh1). Имеем для произвольного $k > k_1$

$$\int_{\Omega_1} z_k(x)v(x) dx \geq \int_{\Omega_1} g_-(x, u_k(x))v(x) dx \geq \int_{\Omega_1} \inf_{\xi > 0} g(x, \xi)v(x) dx, \quad (3.12)$$

так как $u_k(x) > 0$ в Ω и

$$g_-(x, u_k(x)) = \liminf_{\eta \rightarrow u_k(x)} g(x, \eta) \geq \inf_{\xi > 0} g(x, \xi).$$

Рассмотрим множество $\Omega_2 = \Omega \setminus \Omega_1$, и пусть $r_2 \geq 0$ – постоянная в условии (gh1). Поскольку $u_k(x) = \|u_k\|_{C^1(\overline{\Omega})} v_k(x) \rightarrow +\infty$ равномерно на компакте Ω_2 (так как $\inf_{\Omega_2} v(x) > 0$), найдется $k_2 > k_1$ такое, что $u_k(x) > r_2$ на Ω_2 при всех $k > k_2$.

Тогда для Ω_2 при $k > k_2$ получаем

$$\int_{\Omega_2} z_k(x) v(x) dx \geq \int_{\Omega_2} g_-(x, u_k(x)) v(x) dx \geq \int_{\Omega_2} \inf_{\xi > r_2} g(x, \xi) v(x) dx. \quad (3.13)$$

Следовательно, для достаточно больших $k \in \mathbb{N}$ из неравенств (3.12), (3.13) и условия (gh1) имеем

$$\int_{\Omega} z_k(x) v(x) dx \geq \int_{\Omega_1} \inf_{\xi > 0} g(x, \xi) v(x) dx + \int_{\Omega_2} \inf_{\xi > r_2} g(x, \xi) v(x) dx \geq \int_{\Omega} h v dx.$$

Получено противоречие с (3.11).

Случай, когда $M < 0$, рассматривается аналогично с использованием левого неравенства в условии (gh1) и неравенства $z_k(x) \leq g_+(x, u_k(x))$. В итоге снова приходим к противоречию с (3.11).

Таким образом, существует обобщенное решение задачи (0.2), (0.3). В силу замечаний 1.3, 1.4 это решение является сильным (полуправильным), если дополнительно для уравнения (0.2) выполнено сильное (A1)-условие (сильное (A)-условие). Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.2. Сначала потребуется следующая лемма, доказательство которой можно найти в [19].

Рассмотрим задачу

$$Au(x) - \lambda_1 u(x) + p_+(x) u^+(x) - p_-(x) u^-(x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (3.14)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (3.15)$$

где $p_{\pm} \in \mathbf{L}^q(\Omega)$ и $u^+(x) = \max\{u(x), 0\}$, $u^-(x) = \max\{-u(x), 0\}$. Заметим, что для любой функции $u(x)$ верно следующее представление: $u(x) = u^+(x) - u^-(x)$.

ЛЕММА 3.1 [19]. Пусть функции $\Gamma_{\pm} \in \mathbf{L}^q(\Omega)$ такие, что:

- 1) $0 \leq \Gamma_{\pm}(x) \leq \alpha = \lambda_2 - \lambda_1$ для п. в. $x \in \Omega$;
- 2) для всех $\omega \in \mathfrak{A}_2 \setminus \{0\}$

$$\int_{\omega > 0} (\alpha - \Gamma_+(x)) \omega^2(x) dx + \int_{\omega < 0} (\alpha - \Gamma_-(x)) \omega^2(x) dx > 0. \quad (3.16)$$

Тогда если $p_{\pm} \in \mathbf{L}^q(\Omega)$ – произвольные функции, удовлетворяющие почти всюду на Ω неравенству

$$-\Gamma_{\pm}(x) \leq p_{\pm}(x) \leq 0, \quad (3.17)$$

то любое решение задачи (3.14), (3.15) принадлежит $\mathfrak{A}_1$.

Таким же образом, как и при доказательстве теоремы 1.1, для функции $k_v(x)$ устанавливается справедливость неравенств

$$-\Gamma_+(x) \leq k_v(x) \leq 0, \quad \text{если } v(x) > 0, \quad (3.18)$$

$$-\Gamma_-(x) \leq k_v(x) \leq 0, \quad \text{если } v(x) < 0, \quad (3.19)$$

для п. в. $x \in \Omega$. Определим на Ω функции $k_v^+(x)$ и $k_v^-(x)$ равенствами

$$k_v^+(x) = \begin{cases} k_v(x), & \text{если } v(x) > 0, \\ 0 & \text{в остальных точках } \Omega, \end{cases}$$

$$k_v^-(x) = \begin{cases} k_v(x), & \text{если } v(x) < 0, \\ 0 & \text{в остальных точках } \Omega. \end{cases}$$

Тогда $k_v(x)v(x) = k_v^+(x)v^+(x) - k_v^-(x)v^-(x)$, где $v^+(x) = \max\{v(x), 0\}$, а $v^-(x) = \max\{-v(x), 0\}$, и равенство (3.8) можно переписать в виде

$$Av - \lambda_1 v + p_+(x)v^+(x) - p_-(x)v^-(x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad v|_{\partial\Omega} = 0,$$

где $p_+(x) = (t-1)\nu + tk_v^+(x)$, $p_-(x) = (t-1)\nu + tk_v^-(x)$. Заметим, что $p_{\pm}(x) \leq 0$ почти всюду на Ω , так как $\nu > 0$, $0 < t \leq 1$, а функции $k_v^+(x)$, $k_v^-(x)$ неположительны для п. в. $x \in \Omega$. Для каждого $0 < \varepsilon < \alpha/2$ определим функции $\gamma_{\pm}^{\varepsilon}$ на Ω равенствами

$$\gamma_+^{\varepsilon}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } \Gamma_+(x) \geq \frac{\alpha}{2}, \\ \varepsilon, & \text{если } \Gamma_+(x) < \frac{\alpha}{2}, \end{cases} \quad \gamma_-^{\varepsilon}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } \Gamma_-(x) \geq \frac{\alpha}{2}, \\ \varepsilon, & \text{если } \Gamma_-(x) < \frac{\alpha}{2}. \end{cases}$$

Из условия 4) теоремы следует, что

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\int_{w>0} (\alpha - \Gamma_+(x) - \gamma_+^{\varepsilon}(x))w^2 dx + \int_{w<0} (\alpha - \Gamma_-(x) - \gamma_-^{\varepsilon}(x))w^2 dx \right) \\ = \int_{w>0} (\alpha - \Gamma_+(x))w^2(x) dx + \int_{w<0} (\alpha - \Gamma_-(x))w^2(x) dx > 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует существование $\varepsilon_0 \in (0, \alpha/2)$ такого, что

$$\int_{w>0} (\alpha - \Gamma_+(x) - \gamma_+^{\varepsilon_0}(x))w^2(x) dx + \int_{w<0} (\alpha - \Gamma_-(x) - \gamma_-^{\varepsilon_0}(x))w^2(x) dx > 0.$$

Положим $\tilde{\Gamma}_+(x) = \Gamma_+(x) + \gamma_+^{\varepsilon_0}(x)$, $\tilde{\Gamma}_-(x) = \Gamma_-(x) + \gamma_-^{\varepsilon_0}(x)$. Тогда $\varepsilon_0 \leq \tilde{\Gamma}_{\pm}(x) \leq \alpha = \lambda_2 - \lambda_1$ на Ω . Не теряя общности, можно считать $0 < \nu < \varepsilon_0$. Следовательно,

$$\begin{aligned} 0 &\geq p_+(x) = (t-1)\nu + tk_v^+(x) \geq (t-1)\tilde{\Gamma}_+(x) - t\tilde{\Gamma}_+(x) = -\tilde{\Gamma}_+(x), \\ 0 &\geq p_-(x) = (t-1)\nu + tk_v^-(x) \geq (t-1)\tilde{\Gamma}_-(x) - t\tilde{\Gamma}_-(x) = -\tilde{\Gamma}_-(x) \end{aligned}$$

почти всюду на Ω . Выполнены все условия леммы 3.1, поэтому $v \in \mathfrak{A}_1$. Поскольку $\|v\|_{C^1(\bar{\Omega})} = 1$, то $v(x) = M\varphi(x)$, где $M \neq 0$. Пусть для определенности

$M > 0$; тогда $v(x) > 0$ в Ω , а $\partial v / \partial n < 0$ на $\partial\Omega$. Отсюда и из сходимости v_k к v в $\mathbf{C}^1(\overline{\Omega})$ следует существование k_0 такого, что для любого $k > k_0$ верно неравенство $v_k(x) > 0$ на Ω , а значит, при $k > k_0$ функция $u_k(x) = \|u_k\|_{\mathbf{C}^1(\overline{\Omega})} v_k(x)$ положительна на Ω . Заметим, что если бы $t_k = 1$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$ в уравнении (3.3), то соответствующая функция $u_k(x)$ была бы решением задачи (0.2), (0.3), и в этом случае теорему можно считать доказанной. Поэтому предположим, что $t_k \in (0, 1)$. Умножим обе части равенства (3.3) на $v(x)$ и проинтегрируем по Ω , в результате получим

$$t_k \int_{\Omega} z_k(x) v(x) dx = t_k \int_{\Omega} h(x) v(x) dx + (1 - t_k) \nu \|u_k\|_{\mathbf{C}^1(\overline{\Omega})} \int_{\Omega} v_k(x) v(x) dx.$$

Отсюда, учитывая, что $\nu > 0$, а $\int_{\Omega} v_k(x) v(x) dx \rightarrow \int_{\Omega} v^2(x) dx$, следует существование $k_1 > k_0$ такого, что для любого $k > k_1$ верно неравенство

$$\int_{\Omega} z_k(x) v(x) dx > \int_{\Omega} h(x) v(x) dx. \quad (3.20)$$

Из определения функции $z_k(x)$ следует, что для п. в. $x \in \Omega$ верно неравенство $z_k(x) \leq g_+(x, u_k(x))$. Пусть $\Omega_1 = \{x \in \Omega \mid d(x, \partial\Omega) < r_1\}$ – множество из условия (gh2); тогда для произвольного $k > k_1$

$$\int_{\Omega_1} z_k(x) v(x) dx \leq \int_{\Omega_1} g_+(x, u_k(x)) v(x) dx \leq \int_{\Omega_1} \sup_{\xi > 0} g(x, \xi) v(x) dx, \quad (3.21)$$

так как $u_k(x) > 0$ в Ω при $k > k_1$ и

$$g_+(x, u_k(x)) = \limsup_{\eta \rightarrow u_k(x)} g(x, \eta) \leq \sup_{\xi > 0} g(x, \xi).$$

Рассмотрим множество $\Omega_2 = \Omega \setminus \Omega_1$. Поскольку

$$u_k(x) = \|u_k\|_{\mathbf{C}^1(\overline{\Omega})} v_k(x) \rightarrow +\infty \quad \text{на } \Omega$$

и Ω_2 – компакт, найдется номер k_2 такой, что $u_k(x) > r_2$ на Ω_2 при всех $k > k_2$ (где r_2 – константа из условия (gh2)).

Тогда для Ω_2 при $k > k_2$ получаем

$$\int_{\Omega_2} z_k(x) v(x) dx \leq \int_{\Omega_2} g_+(x, u_k(x)) v(x) dx \leq \int_{\Omega_2} \sup_{\xi > r_2} g(x, \xi) v(x) dx. \quad (3.22)$$

Отсюда для достаточно больших $k \in \mathbb{N}$ в силу неравенств (3.21), (3.22) и условия (gh2) заключаем, что для любого $k > k_2$

$$\int_{\Omega} z_k(x) v(x) dx \leq \int_{\Omega_1} \sup_{\xi > 0} g(x, \xi) v(x) dx + \int_{\Omega_2} \sup_{\xi > r_2} g(x, \xi) v(x) dx \leq \int_{\Omega} h v dx.$$

Получено противоречие с (3.20).

Случай, когда $v(x) = M\varphi(x)$ и $M < 0$, рассматривается аналогично с использованием правого неравенства в условии (gh2) вместо левого и неравенства $z_k(x) \geq g_-(x, u_k(x))$. В итоге снова приходим к противоречию с (3.20).

Таким образом, существует обобщенное решение задачи (0.2), (0.3). Согласно замечаниям 1.3, 1.4 это решение является сильным (полуправильным), если дополнительно для уравнения (0.2) выполнено сильное (A1)-условие (сильное (A)-условие). Теорема доказана.

Автор выражает признательность профессору В. Н. Павленко за полезные обсуждения.

Список литературы

1. Д. Гилбарг, Н. С. Трудингер, *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка*, Наука, М., 1989; пер. с англ.: D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Grundlehren Math. Wiss., **224**, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
2. E. M. Landesman, A. C. Lazer, "Nonlinear perturbations of linear elliptic boundary value problems at resonance", *J. Math. Mech.*, **19**:3 (1970), 609–623.
3. S. Ahmad, A. C. Lazer, J. L. Paul, "Elementary critical point theory and perturbations of elliptic boundary value problems at resonance", *Indiana Univ. Math. J.*, **25**:10 (1976), 933–944.
4. H. Brézis, L. Nirenberg, "Characterizations of the ranges of some nonlinear operators and applications to boundary value problems", *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* (4), **5**:2 (1978), 225–326.
5. P. H. Rabinowitz, "Some minimax theorems and applications to nonlinear partial differential equations", *Nonlinear analysis*, Academic Press, New York–San Diego, CA, 1978, 161–177.
6. A. Ambrosetti, G. Mancini, "Existence and multiplicity results for nonlinear elliptic problems with linear part at resonance. The case of the simple eigenvalue", *J. Differential Equations*, **28**:2 (1978), 220–245.
7. A. Ambrosetti, G. Mancini, "Theorems of existence and multiplicity for nonlinear elliptic problems with noninvertible linear part", *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* (4), **5**:1 (1978), 15–28.
8. H. Berestycki, D. G. de Figueiredo, "Double resonance in semilinear elliptic problems", *Comm. Partial Differential Equations*, **6**:1 (1981), 91–120.
9. J.-P. Gossez, P. Omari, "Non-ordered lower and upper solutions in semilinear elliptic problems", *Comm. Partial Differential Equations*, **19**:7–8 (1994), 1163–1184.
10. R. Iannacci, M. N. Nkashama, "Nonlinear elliptic partial differential equations at resonance: Higher eigenvalues", *Nonlinear Anal.*, **25**:5 (1995), 455–471.
11. Т. Рунст, "Полулинейные эллиптические краевые задачи в резонансе с суперлинейными нелинейностями", *Дифференц. уравнения*, **34**:9 (1998), 1179–1185; англ. пер.: T. Runst, "Semilinear elliptic boundary value problems in resonance with superlinear nonlinearities", *Differential Equations*, **34**:9 (1998), 1181–1187.
12. P. J. McKenna, "Discontinuous perturbations of elliptic boundary value problems at resonance", *Nonlinear equations in abstract spaces* (Univ. Texas, Arlington, TX, 1977), Academic Press., New York, 1978, 375–386.
13. N. Basile, M. Mininni, "Some solvability results for elliptic boundary value problems in resonance at the first eigenvalue with discontinuous nonlinearities", *Boll. Un. Mat. Ital. B* (5), **17**:3 (1980), 1023–1033.
14. I. Massabó, "Elliptic boundary value problems at resonance with discontinuous nonlinearities", *Boll. Un. Mat. Ital. B* (5), **17**:3 (1980), 1308–1320.
15. K.-Ch. Chang, "Variational methods for non-differentiable functionals and their applications to partial differential equations", *J. Math. Anal. Appl.*, **80**:1 (1981), 102–129.

16. В. Н. Павленко, В. В. Винокур, “Резонансные краевые задачи для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями”, *Изв. вузов. Матем.*, 2001, №5, 43–58; англ. пер.: V.N. Pavlenko, V.V. Vinokur, “Resonance boundary value problems for elliptic equations with discontinuous nonlinearities”, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **45**:5 (2001), 40–55.
17. В. Н. Павленко, В. В. Винокур, “Теоремы существования для уравнений с некоэрцитивными разрывными операторами”, *Укр. матем. журн.*, **54**:3 (2002), 349–363; англ. пер.: V.N. Pavlenko, V.V. Vinokur, “Existence theorems for equations with noncoercive discontinuous operators”, *Ukrainian Math. J.*, **54**:3 (2002), 429–447.
18. D. G. de Figueiredo, W.-N. Ni, “Perturbations of second order linear elliptic problems by nonlinearities without Landesman–Lazer condition”, *Nonlinear Anal.*, **3**:5 (1979), 629–634.
19. R. Iannacci, M. N. Nkashama, J. R. Ward, jun., “Nonlinear second order elliptic partial differential equations at resonance”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **311**:2 (1989), 711–726.
20. М. А. Красносельский, А. В. Покровский, “Об эллиптических уравнениях с разрывными нелинейностями”, *Докл. РАН*, **342**:6 (1995), 731–734; англ. пер.: М. А. Krasnosel’skii, A. V. Pokrovskii, “Elliptic equations with discontinuous nonlinearities”, *Dokl. Math.*, **51**:3 (1995), 415–418.
21. В. Н. Павленко, “О существовании полуправильных решений задачи Дирихле для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями”, *Укр. матем. журн.*, **41**:12 (1989), 1659–1664; англ. пер.: V.N. Pavlenko, “Existence of semiregular solutions of the Dirichlet problem for quasilinear equations of elliptic type with discontinuous nonlinearities”, *Ukrainian Math. J.*, **41**:12 (1989), 1429–1433.
22. М. А. Красносельский, А. В. Покровский, *Системы с гистерезисом*, Наука, М., 1983; англ. пер.: М. А. Krasnosel’skii, A. V. Pokrovskii, *Systems with hysteresis*, Springer-Verlag, Berlin, 1990.
23. В. Н. Павленко, “О существовании полуправильных решений первой краевой задачи для уравнений параболического типа с разрывной немонотонной нелинейностью”, *Дифференц. уравнения*, **27**:3 (1991), 520–526; англ. пер.: V.N. Pavlenko, “Existence of semiregular solutions of a first boundary-value problem for a parabolic equation with a nonmonotonic discontinuous nonlinearity”, *Differential Equations*, **27**:3 (1991), 374–379.
24. Т.-W. Ма, “Topological degrees of set-valued compact fields in locally convex spaces”, *Dissertationes Math. Rozprawy Mat.*, **92** (1972), 3–47.
25. К. Иосида, *Функциональный анализ*, Мир, М., 1967; пер. с англ.: K. Yosida, *Functional analysis*, Grundlehren Math. Wiss., **123**, Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg; Academic Press, New York, 1965.

Е. А. РОЖДЕСТВЕНСКАЯ (Е. А. ROZHDESTVENSKAYA)

Челябинский государственный университет

E-mail: eachizh@rambler.ru

Поступило в редакцию

26.08.2008