Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Задорожний, О нахождении моментных функций решения задачи Коши уравнения диффузии со случайными коэффициентами, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2002, том 66, выпуск 4, 119–136

DOI: <https://doi.org/10.4213/im396>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 10:30:13

УДК 517.972

В. Г. Задорожний

О нахождении моментных функций решения задачи Коши уравнения диффузии со случайными коэффициентами

Рассматривается задача Коши для дифференциального уравнения диффузии одной пространственной переменной. Коэффициенты уравнения и начальные условия являются случайными процессами. Получены формулы для первой и второй моментных функций решения.

Библиография: 16 наименований.

1. Постановка задачи. Пусть $\mathbb{R}$ – вещественная ось, $\mathbb{C}$ – комплексная плоскость, $[t_0, t_1] = T \in \mathbb{R}$, $L_1(T)$ – пространство суммируемых на отрезке T функций, $L_\infty(T)$ – пространство существенно ограниченных на T функций [1], $F_x[f](\xi)$ – преобразование Фурье [2] по переменной x , F_ξ^{-1} – обратное преобразование Фурье по переменной ξ , знак $*$ обозначает свертку функций по переменной x .

Пусть X – банахово пространство функций на отрезке T и $y: X \rightarrow \mathbb{C}$. Если дифференциал Фреше [3, с. 469] $dy(x_0, h)$ этого функционала в точке x_0 имеет вид

$$dy(x_0, h) = \int_T \varphi(t, x_0) h(t) dt,$$

где интеграл понимается в смысле Лебега, $\varphi: T \times X \rightarrow \mathbb{C}$, то $\varphi(t, x_0)$ называется *вариационной (функциональной) производной* (см. [4], [5]) функционала y в точке x_0 и обозначается $\delta y(x_0)/\delta x(t)$.

Задача Коши для уравнения диффузии имеет вид

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \varepsilon_1(t) \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} + \varepsilon_2(t) \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} + f(t, x), \quad (1)$$

$$u(t_0, x) = u_0, \quad (2)$$

где u – искомая функция, $\varepsilon_1: T \rightarrow \mathbb{R}$, $\varepsilon_2: T \rightarrow \mathbb{R}$, $f: T \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $u_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – случайные процессы (зависимость от случайного события в записи не отражается). Предполагается, что случайный процесс u_0 не зависит от случайных процессов $\varepsilon_1, \varepsilon_2, f$.

Будем предполагать, что случайные процессы $\varepsilon_1, \varepsilon_2, f$ заданы характеристическим функционалом, т. е. известно

$$\varphi(v_1, v_2, w) = Me(v_1, v_2, w),$$

где M – знак математического ожидания по функции распределения процессов $\varepsilon_1, \varepsilon_2, f$ и

$$e(v_1, v_2, w) = \exp \left(i \int_T [\varepsilon_1(s)v_1(s) + \varepsilon_2(s)v_2(s)] ds + i \int_T \int_{\mathbb{R}} f(s_1, s_2)w(s_1, s_2) ds_1 ds_2 \right),$$

$v_1, v_2 \in L_1(T), w \in L_1(T \times \mathbb{R})$.

Требуется найти моментные функции решения задачи (1), (2).

Для нахождения моментных функций решений дифференциальных уравнений, коэффициенты которых являются случайными процессами, применяется несколько подходов. Строятся цепочки дифференциальных уравнений для моментных функций. Как правило, такие цепочки бывают связанными, бесконечными и незамкнутыми. Иногда их удается разорвать или замкнуть [6]–[8].

Для некоторых задач решение можно выписать в явном виде через коэффициенты уравнения и затем найти моментные функции. Таким способом получены первые две моментные функции решения задачи Коши для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с гауссовскими коэффициентами [9], [10].

Для уравнений с малыми случайными возмущениями строятся асимптотические приближения [11]. Развита теория стохастических дифференциальных уравнений.

В случае линейных дифференциальных уравнений задача может быть сведена к дифференциальным уравнениям с вариационными производными (см. [12], [4], [5]). Этим способом удалось получить формулы для моментных функций решений линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка [13] и для дифференциального уравнения теплопроводности (см. [4], [14], [15]). В настоящей работе получена рекуррентная последовательность дифференциальных уравнений с вариационными производными, из решений которой легко находятся моментные функции. Для первых двух моментных функций получены явные формулы.

2. Уравнение для характеристического функционала. Введем обозначения

$$e_1(v_1, v_2, w, z) = \exp \left(i \int_T [\varepsilon_1(s)v_1(s) + \varepsilon_2(s)v_2(s)] ds + i \int_T \int_{\mathbb{R}} [f(s_1, s_2)w(s_1, s_2) + u(s_1, s_2)z(s_1, s_2)] ds_1 ds_2 \right),$$

$$Y(v_1, v_2, w, z) = M e_1(v_1, v_2, w, z),$$

где $z \in L_1(T \times \mathbb{R})$, M – знак математического ожидания по функции распределения процессов $\varepsilon_1, \varepsilon_2, f, u_0$.

Умножим уравнение (1) на $e_1(v_1, v_2, w, z)$. При этом математическое ожидание полученного равенства формально можно записать с помощью отображения Y в виде

$$\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta Y}{\delta z(t, x)} = \frac{1}{i^2} \frac{\delta}{\delta v_1(t)} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta Y}{\delta z(t, x)} + \frac{1}{i^2} \frac{\delta}{\delta v_2(t)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\delta Y}{\delta z(t, x)} + \frac{1}{i} \frac{\delta Y}{\delta w(t, x)}$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta Y}{\delta z(t, x)} = -i \frac{\delta}{\delta v_1(t)} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta Y}{\delta z(t, x)} - i \frac{\delta}{\delta v_2(t)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\delta Y}{\delta z(t, x)} + \frac{\delta Y}{\delta w(t, x)}. \quad (3)$$

Умножая (2) на $e_1(v_1, v_2, w, z)$ и переходя к средним значениям, получаем

$$\left. \frac{\delta Y(v_1, v_2, w, z)}{\delta w(t, x)} \right|_{t=t_0} = i M(u_0(x) e_1(v_1, v_2, w, z)). \quad (4)$$

Таким образом, для Y получена детерминированная задача (3), (4), причем коэффициенты уравнения (3) не зависят от статистических характеристик процессов $\varepsilon_1, \varepsilon_2, f, u_0$. Если известно Y , то легко находятся моментные функции решения задачи (1), (2) и даже корреляционные функции процессов $\varepsilon_1, \varepsilon_2, f, u$. Например,

$$\begin{aligned} M u(t, x) &= \frac{1}{i} \left. \frac{\delta Y(v_1, v_2, w, z)}{\delta z(t, x)} \right|_{v_1=0, v_2=0, w=0, z=0}, \\ M(u(t, x) \varepsilon_1(s)) &= - \left. \frac{\delta^2 Y(v_1, v_2, w, z)}{\delta z(t, x) \delta v_1(s)} \right|_{v_1=0, v_2=0, w=0, z=0}. \end{aligned}$$

Таким образом, важно найти решение задачи (3), (4) в малой окрестности точки $(0, 0, 0, 0)$ переменных v_1, v_2, w, z .

3. Степенной ряд для характеристического функционала. Будем искать решение задачи (3), (4) в виде степенного ряда:

$$\begin{aligned} Y &= Y_0(v_1, v_2, w) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k}{k!} \int \cdots \int Y_k(v_1, v_2, w, s_1, \dots, s_k, x_1, \dots, x_k) \\ &\quad \times z(s_1, x_1) \dots z(s_k, x_k) ds_1 \dots ds_k dx_1 \dots dx_k, \end{aligned}$$

где интегралы по переменным $s_1, \dots, s_k$ вычисляются по промежутку T , а по переменным $x_1, \dots, x_k$ — по $\mathbb{R}$, отображения Y_k симметричны по переменным (s_i, x_i) , $i = 1, 2, \dots, k$. Полагая в этом равенстве $z = 0$, из определения Y и φ получаем

$$Y(t, x, v_1, v_2, w, 0) = \varphi(v_1, v_2, w) = Y_0(v_1, v_2, w).$$

Подставим разложение для Y в уравнение (3), получим

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k}{(k-1)!} \int \cdots \int \frac{\partial}{\partial t} Y_k(v_1, v_2, w, t, s_2, \dots, s_k, x, x_2, \dots, x_k) \\
& \quad \times z(s_2, x_2) \dots z(s_k, x_k) ds_2 \dots ds_k dx_2 \dots dx_k \\
& = -i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k}{(k-1)!} \int \cdots \int \frac{\delta}{\delta v_1(t)} \frac{\partial}{\partial x} Y_k(v_1, v_2, w, t, s_2, \dots, s_k, x, x_2, \dots, x_k) \\
& \quad \times z(s_2, x_2) \dots z(s_k, x_k) ds_2 \dots ds_k dx_2 \dots dx_k \\
& \quad - i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k}{(k-1)!} \int \cdots \int \frac{\delta}{\delta v_2(t)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} Y_k(v_1, v_2, w, t, s_2, \dots, s_k, x, x_2, \dots, x_k) \\
& \quad \times z(s_2, x_2) \dots z(s_k, x_k) ds_2 \dots ds_k dx_2 \dots dx_k \\
& \quad + \frac{\delta Y_0(v_1, v_2, w)}{\delta w(t, x)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k}{k!} \int \cdots \int \frac{\delta}{\delta w(t, x)} Y_k(v_1, v_2, w, s_1, \dots, s_k, x_1, \dots, x_k) \\
& \quad \times z(s_1, x_1) \dots z(s_k, x_k) ds_1 \dots ds_k dx_1 \dots dx_k.
\end{aligned}$$

Приравнявая степени по переменной z , получим

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} Y_k(v_1, v_2, w, t, s_2, \dots, s_k, x, x_2, \dots, x_k) z(s_2, x_2) \dots z(s_k, x_k) \\
& = -i \frac{\delta}{\delta v_1(t)} \frac{\partial}{\partial x} Y_k(v_1, v_2, w, t, s_2, \dots, s_k, x, x_2, \dots, x_k) z(s_2, x_2) \dots z(s_k, x_k) \\
& \quad - i \frac{\delta}{\delta v_2(t)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} Y_k(v_1, v_2, w, t, s_2, \dots, s_k, x, x_2, \dots, x_k) z(s_2, x_2) \dots z(s_k, x_k) \\
& \quad - i \frac{\delta}{\delta w(t, x)} Y_{k-1}(v_1, v_2, w, s_2, \dots, s_k, x_2, \dots, x_k) z(s_2, x_2) \dots z(s_k, x_k)
\end{aligned}$$

при $k = 1, 2, \dots$ и при всех $z(s_2, x_2), \dots, z(s_k, x_k) \in L_1(T \times \mathbb{R})$. Это равносильно равенствам

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} Y_k(v_1, v_2, w, t, s_2, \dots, s_k, x, x_2, \dots, x_k) \\
& = -i \frac{\delta}{\delta v_1(t)} \frac{\partial}{\partial x} Y_k(v_1, v_2, w, t, s_2, \dots, s_k, x, x_2, \dots, x_k) \\
& \quad - i \frac{\delta}{\delta v_2(t)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} Y_k(v_1, v_2, w, t, s_2, \dots, s_k, x, x_2, \dots, x_k) \\
& \quad - i \frac{\delta}{\delta w(t, x)} Y_{k-1}(v_1, v_2, w, s_2, \dots, s_k, x_2, \dots, x_k) \tag{5}
\end{aligned}$$

при $k = 1, 2, \dots$

Вычислим вариационную производную $(k-1)$ -го порядка по z от выражения (4) в точке $(v_1, v_2, w, 0, t_0, \dots, t_0, x_1, x_2, \dots, x_k)$. Учитывая независимость случайного процесса u_0 от $\varepsilon_1, \varepsilon_2, f$, получим

$$\begin{aligned} i^k Y_k(v_1, v_2, 0, t_0, \dots, t_0, x_1, x_2, \dots, x_k) \\ = i^k M(u_0(x_1)u_0(x_2) \dots u_0(x_k)e_1(v_1, v_2, w, 0)) \\ = i^k M(u_0(x_1)u_0(x_2) \dots u_0(x_k))\varphi(v_1, v_2, w), \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

т. е.

$$\begin{aligned} Y_k(v_1, v_2, 0, t_0, \dots, t_0, x_1, x_2, \dots, x_k) \\ = M(u_0(x_1)u_0(x_2) \dots u_0(x_k))\varphi(v_1, v_2, w), \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (6)$$

Получили рекуррентную последовательность детерминированных задач (5), (6) для нахождения коэффициентов Y_k .

Если $Y(v_1, v_2, w, z)$ — характеристический функционал случайных процессов $\varepsilon_1, \varepsilon_2, f, u$, то

$$\begin{aligned} Y_k(0, 0, 0, s_1, s_2, \dots, s_k, x_1, x_2, \dots, x_k) \\ = i^{-k} \frac{\delta^k Y(v_1, v_2, w, z)}{\delta z(s_1, x_1) \delta z(s_2, x_2) \dots \delta z(s_k, x_k)} \Big|_{v_1=0, v_2=0, w=0, z=0} \\ = M(u(s_1, x_1)u(s_2, x_2) \dots u(s_k, x_k)). \end{aligned}$$

Последнее является основанием для следующего определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $Y_k(v_1, v_2, w, s_1, s_2, \dots, s_k, x_1, x_2, \dots, x_k)$ является симметрическим по переменным $s_i, x_i, i = 1, 2, \dots, k$, решением, в смысле обобщенных функций (в классическом смысле), задачи (5), (6); тогда $Y_k(0, 0, 0, s_1, s_2, \dots, s_k, x_1, x_2, \dots, x_k)$ называется *моментной функцией k -го порядка* решения задачи (1), (2), в смысле обобщенных функций (в классическом смысле).

4. Решение дифференциального уравнения третьего порядка с обычными и вариационными производными. Уравнения (5) одного типа. Имеет смысл сначала исследовать этот тип уравнений. Рассмотрим задачу с начальным условием

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} y(v_1, v_2, t, x) = -i \frac{\delta}{\delta v_1(t)} \frac{\partial}{\partial x} y(v_1, v_2, t, x) \\ - i \frac{\delta}{\delta v_2(t)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} y(v_1, v_2, t, x) + b(v_1, v_2, t, x), \end{aligned} \quad (7)$$

$$y(v_1, v_2, t_0, x) = y_0(v_1, v_2, x), \quad (8)$$

где $v_1 \in L_1(T)$, $v_2 \in L_1(T)$, $t \in T$, $x \in \mathbb{R}$, $y: L_1(T) \times L_1(T) \times T \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ – искомое отображение, b и y_0 заданы.

В дальнейшем $\chi(\tau, t, \cdot)$ обозначает характеристическую функцию отрезка $[\tau, t]$, т. е. $\chi(\tau, t, s) = 1$ при $s \in [\tau, t]$ и $\chi(\tau, t, s) = 0$ в противном случае.

В формулировке следующей теоремы отображение y_0 и его производные вычисляются в точках $(v_1 - \xi\chi(t_0, t, \cdot), v_2 + i\xi^2\chi(t_0, t, \cdot), x)$, а отображение b и его производные вычисляются в точках $(v_1 - \xi\chi(\tau, t, \cdot), v_2 + i\xi^2\chi(\tau, t, \cdot), \tau, x)$.

Теорема 1. Пусть существует окрестность $U(r)$ нуля радиуса r в $L_1(T) \times L_1(T)$ такая, что при всех $(v_1, v_2) \in U(r)$ функции

$$\begin{aligned} &|y|, \left| \frac{\delta y_0}{\delta v_1(t)} \right|, \left| \frac{\delta y_0}{\delta v_2(t)} \right|, \left| F_x \left[\frac{\delta y_0}{\delta v_1(t)} \right] (\xi) \right|, \left| F_x \left[\frac{\delta y_0}{\delta v_2(t)} \right] (\xi) \right|, \\ &|\xi^2 F_x[y_0](\xi)|, \left| \xi F_x \left[\frac{\delta y_0}{\delta v_1(t)} \right] (\xi) \right|, \left| \xi F_x \left[\frac{\delta y_0}{\delta v_2(t)} \right] (\xi) \right|, \left| \xi^2 F_x \left[\frac{\delta y_0}{\delta v_2(t)} \right] (\xi) \right|, \\ &|b|, \left| \frac{\delta b}{\delta v_1(t)} \right|, \left| \frac{\delta b}{\delta v_2(t)} \right|, \left| F_x \left[\frac{\delta b}{\delta v_1(t)} \right] (\xi) \right|, \left| F_x \left[\frac{\delta b}{\delta v_2(t)} \right] (\xi) \right|, \\ &|\xi^2 F_x[b](\xi)|, \left| \xi F_x \left[\frac{\delta b}{\delta v_1(t)} \right] (\xi) \right|, \left| \xi F_x \left[\frac{\delta b}{\delta v_2(t)} \right] (\xi) \right|, \left| \xi^2 F_x \left[\frac{\delta b}{\delta v_2(t)} \right] (\xi) \right| \end{aligned}$$

при $t \in T$, $\tau \in T$ ограничены суммируемыми на $\mathbb{R}$ функциями. Тогда

$$\begin{aligned} y(v_1, v_2, t, x) &= F_\xi^{-1} [F_x [y_0(v_1 - \xi\chi(t_0, t, \cdot), v_2 + i\xi^2\chi(t_0, t, \cdot), x)] (\xi)] (x) \\ &+ \int_{t_0}^t F_\xi^{-1} [F_x [b(v_1 - \xi\chi(\tau, t, \cdot), v_2 + i\xi^2\chi(\tau, t, \cdot), \tau, x)] (\xi)] (x) d\tau \end{aligned} \quad (9)$$

является единственным решением задачи (7), (8).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что существует преобразование Фурье по переменной x решения задачи (7), (8). Применяя преобразование Фурье к уравнениям (7), (8), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} F_x [y(v_1, v_2, t, x)] (\xi) &= -i \frac{\delta}{\delta v_1(t)} (-i\xi) F_x [y(v_1, v_2, t, x)] (\xi) \\ &- i \frac{\delta}{\delta v_2(t)} (-i\xi)^2 F_x [y(v_1, v_2, t, x)] (\xi) + F_x [b(v_1, v_2, t, x)] (\xi), \end{aligned} \quad (10)$$

$$F_x [y(v_1, v_2, t_0, x)] (\xi) = F_x [y_0(v_1, v_2, x)] (\xi). \quad (11)$$

Эта задача имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y(v_1, v_2, t)}{\partial t} &= a_1(t) \frac{\delta Y(v_1, v_2, t)}{\delta v_1(t)} + a_2(t) \frac{\delta Y(v_1, v_2, t)}{\delta v_2(t)} + B(v_1, v_2, t), \\ Y(v_1, v_2, t_0) &= Y_0(v_1, v_2). \end{aligned}$$

Такая задача изучена в [13]. Оказывается, если функции $a_i: T \rightarrow \mathbb{C}$, $i = 1, 2$, непрерывны и существуют вариационные производные

$$\frac{\delta Y_0(v_1 + a_1\chi(t_0, t, \cdot), v_2 + a_2\chi(t_0, t, \cdot))}{\delta v_i(t)}, \quad \frac{\delta B(v_1 + a_1\chi(\tau, t, \cdot), v_2 + a_2\chi(\tau, t, \cdot), \tau)}{\delta v_i(t)},$$

$i = 1, 2$, $t_0 \leq \tau \leq t$, то

$$Y(v_1, v_2, t) = Y_0(v_1 + a_1\chi(t_0, t, \cdot), v_2 + a_2\chi(t_0, t, \cdot)) + \int_{t_0}^t B(v_1 + a_1\chi(\tau, t, \cdot), v_2 + a_2\chi(\tau, t, \cdot), \tau) d\tau$$

является единственным решением последней задачи. (Это можно проверить, вычислив производную $\partial Y(v_1, v_2, t)/\partial t$ и подставив в уравнение.)

Воспользовавшись этим результатом, находим решение задачи (10), (11)

$$F_x[y(v_1, v_2, t, x)](\xi) = F_x[y_0(v_1 - \xi\chi(t_0, t, \cdot), v_2 + i\xi^2\chi(t_0, t, \cdot), x)](\xi) + \int_{t_0}^t F_x[b(v_1 - \xi\chi(\tau, t, \cdot), v_2 + i\xi^2\chi(\tau, t, \cdot), \tau, x)](\xi) d\tau.$$

Для получения формулы (9) нужно применить к последнему равенству обратное преобразование Фурье.

Подставим (9) в уравнение (10). Предположения теоремы о существовании суммируемых мажорант обеспечивают существование вариационных производных по v_i , $i = 1, 2$, и смешанных производных, а также обеспечивают дифференцируемость под знаками интегралов. При этом получается тождество, что и доказывает теорему.

5. Математическое ожидание решения. Для нахождения математического ожидания решения задачи (1), (2) выпишем задачу (5), (6) при $k = 1$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} Y_1(v_1, v_2, w, t, x) &= -i \frac{\delta}{\delta v_1(t)} \frac{\partial}{\partial x} Y_1(v_1, v_2, w, t, x) \\ &\quad - i \frac{\delta}{\delta v_2(t)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} Y_1(v_1, v_2, w, t, x) - i \frac{\delta}{\delta w(t, x)} \varphi(v_1, v_2, w), \end{aligned} \quad (12)$$

$$Y_1(v_1, v_2, w, t_0, x) = Mu_0(x) \varphi(v_1, v_2, w). \quad (13)$$

Теорема 2. Пусть функция $Mu_0(x)$ суммируема на $\mathbb{R}$ и при малых $w \in L_1(T \times \mathbb{R})$ выполняются условия предыдущей теоремы. Тогда

$$\begin{aligned} Y_1(v_1, v_2, w, t, x) &= Mu_0(x) * F_\xi^{-1} [\varphi(v_1 - \xi\chi(t_0, t, \cdot), v_2 + i\xi^2\chi(t_0, t, \cdot), w)](x) \\ &\quad - i \int_{t_0}^t F_\xi^{-1} \left[F_x \left[\frac{\delta \varphi(v_1 - \xi\chi(\tau, t, \cdot), v_2 + i\xi^2\chi(\tau, t, \cdot), w)}{\delta w(\tau, x)} \right] (\xi) \right] (x) d\tau \end{aligned} \quad (14)$$

является единственным решением задачи (12), (13).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По формуле (9) получаем решение задачи (12), (13)

$$Y_1 = F_\xi^{-1} \left[F_x \left[Mu_0(x) \varphi(v_1 - \xi \chi(t_0, t, \cdot), v_2 + i \xi^2 \chi(t_0, t, \cdot), w) \right] (x) \right. \\ \left. - i \int_{t_0}^t F_\xi^{-1} \left[F_x \left[\frac{\delta \varphi(v_1 - \xi \chi(\tau, t, \cdot), v_2 + i \xi^2 \chi(\tau, t, \cdot), w)}{\delta w(\tau, x)} \right] (\xi) \right] (x) d\tau \right]$$

Далее,

$$F_x \left[Mu_0(x) \varphi(v_1 - \xi \chi(t_0, t, \cdot), v_2 + i \xi^2 \chi(t_0, t, \cdot), w) \right] (\xi) \\ = F_x \left[Mu_0(x) \right] (\xi) \varphi(v_1 - \xi \chi(t_0, t, \cdot), v_2 + i \xi^2 \chi(t_0, t, \cdot), w).$$

Поскольку обратное преобразование Фурье от произведения равно свертке обратных преобразований Фурье от сомножителей, то получаем (14). Теорема доказана.

Теорема 3. При выполнении условий теоремы 2

$$Mu(t, x) = Mu_0(x) \overset{x}{*} F_\xi^{-1} \left[\varphi(-\xi \chi(t_0, t, \cdot), i \xi^2 \chi(t_0, t, \cdot), 0) \right] (x) \\ - i \int_{t_0}^t F_\xi^{-1} \left[F_x \left[\frac{\delta \varphi(-\xi \chi(\tau, t, \cdot), i \xi^2 \chi(\tau, t, \cdot), 0)}{\delta w(\tau, x)} \right] (\xi) \right] (x) d\tau \quad (15)$$

является математическим ожиданием решения задачи (1), (2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО получается подстановкой $v_1 = 0$, $v_2 = 0$, $w = 0$ в формулу (14).

6. Случай независимых процессов f и $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. Формула (15) является достаточно общей, не требуется даже независимости случайных процессов f , ε_1 , ε_2 . При независимых процессах можно продвинуться дальше. Пусть $\psi(v_1, v_2)$ — характеристический функционал процессов $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

Теорема 4. Если случайный процесс f не зависит от случайных процессов $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и выполнены условия теоремы 2, то

$$Mu(t, x) = Mu_0(x) \overset{x}{*} F_\xi^{-1} \left[\psi(-\xi \chi(t_0, t, \cdot), i \xi^2 \chi(t_0, t, \cdot)) \right] (x) \\ + \int_{t_0}^t F_\xi^{-1} \left[\psi(-\xi \chi(\tau, t, \cdot), i \xi^2 \chi(\tau, t, \cdot)) \right] (x) \overset{x}{*} Mf(\tau, x) d\tau \quad (16)$$

является математическим ожиданием решения задачи (1), (2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При независимых случайных процессах f и $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ характеристический функционал φ имеет вид $\varphi(v_1, v_2, w) = \psi(v_1, v_2)\varphi_f(w)$, где $\varphi_f(w)$ – характеристический функционал случайного процесса f . При этом

$$\begin{aligned} \frac{\delta\varphi(-\xi\chi(\tau, t, \cdot), i\xi^2\chi(\tau, t, \cdot), 0)}{\delta w(\tau, x)} &= \psi(-\xi\chi(\tau, t, \cdot), i\xi^2\chi(\tau, t, \cdot)) \frac{\delta\varphi_f(w)}{\delta w(\tau, x)} \Big|_{w=0} \\ &= i\psi(-\xi\chi(\tau, t, \cdot), i\xi^2\chi(\tau, t, \cdot)) Mf(\tau, x). \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} F_\xi^{-1} [F_x [\psi(-\xi\chi(\tau, t, \cdot), i\xi^2\chi(\tau, t, \cdot)) Mf(\tau, x)](\xi)](x) \\ = F_\xi^{-1} [\psi(-\xi\chi(\tau, t, \cdot), i\xi^2\chi(\tau, t, \cdot)) F_x [Mf(\tau, x)](\xi)](x) \\ = F_\xi^{-1} [\psi(-\xi\chi(\tau, t, \cdot), i\xi^2\chi(\tau, t, \cdot))](x) \overset{x}{*} Mf(\tau, x). \end{aligned}$$

Подставляя эти соотношения в (15), получаем (16). Теорема доказана.

7. Случай гауссовских процессов $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. Рассмотрим наиболее частовстречающийся случай гауссовских процессов $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, которые заданы характеристическим функционалом

$$\begin{aligned} \psi(v_1, v_2) = \exp \left(i \int_T M\varepsilon_1(s) v_1(s) ds - \frac{1}{2} \int_T \int_T b_1(s_1, s_2) v_1(s_1) v_1(s_2) ds_1 ds_2 \right. \\ \left. + i \int_T M\varepsilon_2(s) v_2(s) ds - \frac{1}{2} \int_T \int_T b_2(s_1, s_2) v_2(s_1) v_2(s_2) ds_1 ds_2 \right), \end{aligned}$$

где $b_1(s_1, s_2), b_2(s_1, s_2)$ – ковариационные функции процессов ε_1 и ε_2 соответственно.

Теорема 5. Пусть случайный процесс $f(t, x)$ не зависит от случайных процессов $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, математическое ожидание $Mf(t, x)$ локально суммируемо, $b_i \in L_\infty(T \times T)$, $i = 1, 2$. Пусть при всех $t \in T$ и всех $s_1 \in T$, $t_0 \leq \tau < t \leq t_1$, за исключением множества нулевой меры, выполняется условие

$$\int_\tau^t b_1(s_1, s_2) ds_2 + 2M\varepsilon_2(s_1) > 0. \quad (17)$$

Тогда

$$\begin{aligned}
Mu(t, x) = & \left(2\pi \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t b_1(s_1, s_2) ds_1 ds_2 + 4\pi \int_{t_0}^t M\varepsilon_2(s) ds \right)^{-0.5} \\
& \times \exp \left(- \frac{(x + \int_{t_0}^t M\varepsilon_1(s) ds)^2}{2 \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t b_1(s_1, s_2) ds_1 ds_2 + 4 \int_{t_0}^t M\varepsilon_2(s) ds} \right) \\
& \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\int_{t_0}^t \int_{t_0}^t b_2(s_1, s_2) ds_1 ds_2)^k}{2^k k!} \frac{d^{4k}}{dx^{4k}} Mu_0(x) \\
& + \int_{t_0}^t \left(2\pi \int_{\tau}^t \int_{\tau}^t b_1(s_1, s_2) ds_1 ds_2 + 4\pi \int_{\tau}^t M\varepsilon_2(s) ds \right)^{-0.5} \\
& \times \exp \left(- \frac{(x + \int_{\tau}^t M\varepsilon_1(s) ds)^2}{2 \int_{\tau}^t \int_{\tau}^t b_1(s_1, s_2) ds_1 ds_2 + 4 \int_{\tau}^t M\varepsilon_2(s) ds} \right) \\
& \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\int_{\tau}^t \int_{\tau}^t b_2(s_1, s_2) ds_1 ds_2)^k}{2^k k!} \frac{\partial^{4k}}{\partial x^{4k}} Mf(\tau, x) d\tau
\end{aligned} \tag{18}$$

является математическим ожиданием (в смысле обобщенных функций) решения задачи (1), (2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для нахождения $Mu(t, x)$ воспользуемся формулой (16), при этом

$$\begin{aligned}
F_{\xi}^{-1}[\psi(-\xi\chi(t_0, t, \cdot), i\xi^2\chi(t_0, t, \cdot))] &= F_{\xi}^{-1} \left[\exp \left(-i\xi \int_{t_0}^t M\varepsilon_1(s) ds \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{\xi^2}{2} \left(\int_{t_0}^t \int_{t_0}^t b_1(s_1, s_2) ds_1 ds_2 + 2 \int_{t_0}^t M\varepsilon_2(s) ds \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\xi^4}{2} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t b_2(s_1, s_2) ds_1 ds_2 \right) \right] \\
&= F_{\xi}^{-1} \left[\exp \left(-i\xi \int_{t_0}^t M\varepsilon_1(s) ds \right) \right] \\
&\quad {}^x F_{\xi}^{-1} \left[\exp \left(-\frac{\xi^2}{2} \left(\int_{t_0}^t \left(\int_{t_0}^t b_1(s_1, s_2) ds_2 + 2M\varepsilon_2(s_1) \right) ds_1 \right) \right) \right] \\
&\quad {}^x F_{\xi}^{-1} \left[\exp \left(\frac{\xi^4}{2} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t b_2(s_1, s_2) ds_1 ds_2 \right) \right].
\end{aligned}$$

Далее находим [16, с. 145]

$$F_{\xi}^{-1} \left[\exp \left(-i\xi \int_{t_0}^t M\varepsilon_1(s) ds \right) \right] = \delta \left(-x - \int_{t_0}^t M\varepsilon_1(s) ds \right).$$

Так как выполнено условие (17), то

$$\begin{aligned}
 & F_{\xi}^{-1} \left[\exp \left(-\frac{\xi^2}{2} \left(\int_{t_0}^t \left(\int_{t_0}^t b_1(s_1, s_2) ds_2 + 2M\varepsilon_2(s_1) \right) ds_1 \right) \right) \right] \\
 &= \left(2\pi \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t b_1(s_1, s_2) ds_1 ds_2 + 4\pi \int_{t_0}^t M\varepsilon_2(s_1) ds_1 \right)^{-0.5} \\
 &\quad \times \exp \left(-\frac{x^2}{2 \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t b_1(s_1, s_2) ds_1 ds_2 + 4 \int_{t_0}^t M\varepsilon_2(s_1) ds_1} \right), \\
 & F_{\xi}^{-1} \left[\exp \left(\frac{\xi^4}{2} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t b_2(s_1, s_2) ds_1 ds_2 \right) \right] \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k k!} \left(\int_{t_0}^t \int_{t_0}^t b_2(s_1, s_2) ds_1 ds_2 \right)^k \left(-i \frac{d}{dx} \right)^{4k} \delta(-x) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k k!} \left(\int_{t_0}^t \int_{t_0}^t b_2(s_1, s_2) ds_1 ds_2 \right)^k \frac{d^{4k}}{dx^{4k}} \delta(x),
 \end{aligned}$$

где δ – дельта-функция.

Далее,

$$\begin{aligned}
 & \delta \left(-x - \int_{t_0}^t M\varepsilon_1(s) ds \right) \\
 &\quad \times \left(2\pi \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t b_1(s_1, s_2) ds_1 ds_2 + 4\pi \int_{t_0}^t M\varepsilon_2(s_1) ds_1 \right)^{-0.5} \\
 &\quad \times \exp \left(-\frac{x^2}{2 \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t b_1(s_1, s_2) ds_1 ds_2 + 4 \int_{t_0}^t M\varepsilon_2(s_1) ds_1} \right) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta \left(\eta + \int_{t_0}^t M\varepsilon_1(s) ds \right) \\
 &\quad \times \left(2\pi \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t b_1(s_1, s_2) ds_1 ds_2 + 4\pi \int_{t_0}^t M\varepsilon_2(s_1) ds_1 \right)^{-0.5} \\
 &\quad \times \exp \left(-\frac{(x - \eta)^2}{2 \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t b_1(s_1, s_2) ds_1 ds_2 + 4 \int_{t_0}^t M\varepsilon_2(s_1) ds_1} \right) \\
 &= \left(2\pi \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t b_1(s_1, s_2) ds_1 ds_2 + 4\pi \int_{t_0}^t M\varepsilon_2(s_1) ds_1 \right)^{-0.5} \\
 &\quad \times \exp \left(-\frac{(x + \int_{t_0}^t M\varepsilon_1(s) ds)^2}{2 \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t b_1(s_1, s_2) ds_1 ds_2 + 4 \int_{t_0}^t M\varepsilon_2(s_1) ds_1} \right).
 \end{aligned}$$

Аналогично находим

$$\begin{aligned} Mu_0(x) & \overset{x}{*} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k k!} \left(\int_{t_0}^t \int_{t_0}^t b_2(s_1, s_2) ds_1 ds_2 \right)^k \frac{d^{4k}}{dx^{4k}} \delta(x) \\ & = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k k!} \left(\int_{t_0}^t \int_{t_0}^t b_2(s_1, s_2) ds_1 ds_2 \right)^k \frac{d^{4k}}{dx^{4k}} Mu_0(x). \end{aligned}$$

Подставив эти значения в (16), получаем (18). Теорема доказана.

Приведем условия, при которых (18) является математическим ожиданием решения в классическом смысле.

Теорема 6. Пусть гауссовские случайные процессы $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ не зависят от случайного процесса f , выполнено условие (17), b_1, b_2 суммируемы на $T \times T$, Mu_0 имеет производные любого порядка, $Mf(t, x)$ локально суммируемо и имеет частные производные любого порядка по переменной x , существуют неотрицательные постоянные c, c_1, q , при которых выполняются неравенства

$$\begin{aligned} \left| \frac{d^{4k}}{dx^{4k}} Mu_0(x) \right| & \leq ck!q^k, \quad \left| \frac{\partial^{4k}}{\partial x^{4k}} Mf(t, x) \right| \leq c_1 k!q^k, \\ q \int_T \int_T b_2(s_1, s_2) ds_1 ds_2 & < 2. \end{aligned}$$

Тогда (18) определяет математическое ожидание $Mu(t, x)$ решения задачи (1), (2) и справедлива оценка

$$\begin{aligned} |Mu(t, x)| & \leq \frac{2c}{2 - q \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t b_2(s_1, s_2) ds_1 ds_2} \\ & \quad + 2c_1 \int_{t_0}^t \left(2 - q \int_{\tau}^t \int_{\tau}^t b_2(s_1, s_2) ds_1 ds_2 \right)^{-1} d\tau. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оцениваем выражение (18):

$$\begin{aligned}
|Mu(t, x)| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left(2\pi \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t b_1(s_1, s_2) ds_1 ds_2 + 4\pi \int_{t_0}^t M\varepsilon_2(s) ds \right)^{-0.5} \\
&\quad \times \exp \left(- \frac{(x - \eta + \int_{t_0}^t M\varepsilon_1(s) ds)^2}{2 \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t b_1(s_1, s_2) ds_1 ds_2 + 4 \int_{t_0}^t M\varepsilon_2(s) ds} \right) \\
&\quad \times c \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \left(q \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t b_2(s_1, s_2) ds_1 ds_2 \right)^k d\eta \\
&\quad + \int_{t_0}^t \left(2\pi \int_{\tau}^t \int_{\tau}^t b_1(s_1, s_2) ds_1 ds_2 + 4\pi \int_{\tau}^t M\varepsilon_2(s) ds \right)^{-0.5} \\
&\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(- \frac{(x - \eta + \int_{\tau}^t M\varepsilon_1(s) ds)^2}{2 \int_{\tau}^t \int_{\tau}^t b_1(s_1, s_2) ds_1 ds_2 + 4 \int_{\tau}^t M\varepsilon_2(s) ds} \right) \\
&\quad \times c_1 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{q}{2} \int_{\tau}^t \int_{\tau}^t b_2(s_1, s_2) ds_1 ds_2 \right)^k d\eta d\tau.
\end{aligned}$$

Используя хорошо известное равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2 a^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a}, \quad a > 0,$$

получаем

$$\begin{aligned}
|Mu(t, x)| &\leq c \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{q}{2} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t b_2(s_1, s_2) ds_1 ds_2 \right)^k \\
&\quad + \int_{t_0}^t c_1 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{q}{2} \int_{\tau}^t \int_{\tau}^t b_2(s_1, s_2) ds_1 ds_2 \right)^k \\
&= \frac{2c}{2 - q \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t b_2(s_1, s_2) ds_1 ds_2} \\
&\quad + 2c_1 \int_{t_0}^t \left(2 - q \int_{\tau}^t \int_{\tau}^t b_2(s_1, s_2) ds_1 ds_2 \right)^{-1} d\tau.
\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Заметим, что при $b_1 = b_2 = 0$ коэффициенты $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ являются детерминированными и равными $M\varepsilon_1, M\varepsilon_2$. Устремив в (18) b_1 и b_2 к нулю, в пределе получим формулу для

математического ожидания решения задачи (1), (2) с детерминированными $\varepsilon_1, \varepsilon_2$:

$$\begin{aligned} Mu(t, x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(4\pi \int_{t_0}^t M\varepsilon_2(s) ds \right)^{-0.5} \\ &\quad \times \exp \left(-\frac{(x - \eta + \int_{t_0}^t M\varepsilon_1(s) ds)^2}{4 \int_{t_0}^t M\varepsilon_2(s) ds} \right) Mu_0(\eta) d\eta \\ &\quad + \int_{t_0}^t \int_{-\infty}^{\infty} \left(4\pi \int_{\tau}^t M\varepsilon_2(s) ds \right)^{-0.5} \\ &\quad \times \exp \left(-\frac{(x - \eta + \int_{\tau}^t M\varepsilon_1(s) ds)^2}{4 \int_{\tau}^t M\varepsilon_2(s) ds} \right) Mf(\tau, \eta) d\eta d\tau. \end{aligned}$$

При $M\varepsilon_1 = 0$ отсюда получаем обобщение формулы Пуассона решения задачи Коши для уравнения теплопроводности на случай задачи со случайным начальным условием $u_0(x)$ и случайным возмущением $f(t, x)$.

8. Случай равномерно распределенного процесса и гауссовского процесса. Формула (16) позволяет рассматривать задачи со случайными процессами $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, имеющими различные законы распределения.

Введем обозначения

$$A(\tau, t) = \int_{\tau}^t a(s) ds, \quad B(\tau, t) = \int_{\tau}^t M\varepsilon_2(s) ds.$$

Теорема 7. Пусть случайный процесс ε_1 имеет равномерное распределение с характеристическим функционалом

$$\psi_{\varepsilon_1}(v) = \frac{\sin \int_T a(s)v(s) ds}{\int_T a(s)v(s) ds} \exp \left(i \int_T M\varepsilon_1(s)v(s) ds \right), \quad a(t) \geq 0,$$

случайный процесс $\varepsilon_2(t)$ имеет характеристический функционал

$$\psi_{\varepsilon_2}(v) = \exp \left(i \int_T M\varepsilon_2(s)v(s) ds - \frac{1}{2} \int_T \int_T b_2(s_1, s_2)v(s_1)v(s_2) ds_1 ds_2 \right),$$

процессы $\varepsilon_1, \varepsilon_2, f$ независимы и $M\varepsilon_2(t) > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} Mu(t, x) &= \frac{1}{4A(t_0, t)(\pi B(t_0, t))^{0.5}} \int_{-B(t_0, t)-A(t_0, t)}^{-B(t_0, t)+A(t_0, t)} \exp \left(-\frac{(x - \eta)^2}{4B(t_0, t)} \right) d\eta \\ &\quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k k!} \left(\int_{t_0}^t \int_{t_0}^t b_2(s_1, s_2) ds_1 ds_2 \right)^k \frac{d^{4k}}{dx^{4k}} Mu_0(x) \\ &\quad + \int_{t_0}^t \frac{1}{4A(\tau, t)(\pi B(\tau, t))^{0.5}} \int_{-B(\tau, t)-A(\tau, t)}^{-B(\tau, t)+A(\tau, t)} \exp \left(-\frac{(x - \eta)^2}{4B(\tau, t)} \right) d\eta \\ &\quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k k!} \left(\int_{\tau}^t \int_{\tau}^t b_2(s_1, s_2) ds_1 ds_2 \right)^k \frac{d^{4k}}{dx^{4k}} Mf(\tau, x) d\tau \end{aligned}$$

является математическим ожиданием (в обобщенном смысле) решения задачи (1), (2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся формулой (16):

$$\begin{aligned} Mu(t, x) &= Mu_0(x) * F_{\xi}^{-1}[\psi_{\varepsilon_1}(-\xi\chi(t_0, t, \cdot))](x) * F_{\xi}^{-1}[\psi_{\varepsilon_2}(i\xi^2\chi(t_0, t, \cdot))](x) \\ &+ \int_{t_0}^t F_{\xi}^{-1}[\psi_{\varepsilon_1}(-\xi\chi(\tau, t, \cdot))](x) * F_{\xi}^{-1}[\psi_{\varepsilon_2}(i\xi^2\chi(\tau, t, \cdot))](x) * Mf(\tau, x) d\tau. \end{aligned}$$

Используя свойства преобразования Фурье [2], находим

$$\begin{aligned} F_{\xi}^{-1}[\psi_{\varepsilon_1}(-\xi\chi(\tau, t, \cdot))](x) &= F_{\xi}^{-1}\left[\frac{\sin A(\tau, t)\xi}{A(\tau, t)\xi} \exp(-i\xi B(\tau, t))\right](x) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2A(\tau, t)} & \text{при } |x + B(\tau, t)| < A(\tau, t), \\ 0 & \text{при } |x + B(\tau, t)| > A(\tau, t), \end{cases} \\ F_{\xi}^{-1}[\psi_{\varepsilon_2}(i\xi^2\chi(\tau, t, \cdot))](x) &= \left(4\pi \int_{\tau}^t M\varepsilon_2(s) ds\right)^{-0.5} \exp\left(-\frac{x^2}{4 \int_{\tau}^t M\varepsilon_2(s) ds}\right) \\ & * \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k k!} \left(\int_{\tau}^t \int_{\tau}^t b_2(s_1, s_2) ds_1 ds_2\right)^k \frac{d^{4k}}{dx^{4k}} \delta(x). \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} F_{\xi}^{-1}[\psi_{\varepsilon_1}(-\xi\chi(\tau, t, \cdot))](x) * \left(4\pi \int_{\tau}^t M\varepsilon_2(s) ds\right)^{-0.5} \exp\left(-\frac{x^2}{4 \int_{\tau}^t M\varepsilon_2(s) ds}\right) \\ = \frac{1}{4A(\tau, t)(\pi B(\tau, t))^{0.5}} \int_{-B(\tau, t)-A(\tau, t)}^{-B(\tau, t)+A(\tau, t)} \exp\left(-\frac{(x-\eta)^2}{4B(\tau, t)}\right) d\eta, \\ Mu_0(x) * \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k k!} \left(\int_{\tau}^t \int_{\tau}^t b_2(s_1, s_2) ds_1 ds_2\right)^k \frac{d^{4k}}{dx^{4k}} \delta(x) \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k k!} \left(\int_{\tau}^t \int_{\tau}^t b_2(s_1, s_2) ds_1 ds_2\right)^k \frac{d^{4k}}{dx^{4k}} Mu_0(x). \end{aligned}$$

Подставляя эти соотношения в выражение для $Mu(t, x)$, приходим к результату, приведенному в теореме. Теорема доказана.

9. Нахождение Y_2 . Выпишем задачу (5), (6) для Y_2 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} Y_2(v_1, v_2, w, t, s_2, x, x_2) &= -i \frac{\delta}{\delta v_1(t)} \frac{\partial}{\partial x} Y_1(v_1, v_2, w, t, s_2, x, x_2) \\ &- i \frac{\delta}{\delta v_2(t)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} Y_1(v_1, v_2, w, t, s_2, x, x_2) - i \frac{\delta}{\delta w(t, x)} Y_1(v_1, v_2, w, s_2, x_2), \end{aligned} \quad (19)$$

$$Y_2(v_1, v_2, w, t_0, t_0, x, x_2) = M(u_0(x)u_0(x_2))\varphi(v_1, v_2, w). \quad (20)$$

Чтобы воспользоваться теоремой 1 для нахождения $Y_2(v_1, v_2, w, t, s_2, x, x_2)$, нужно знать начальное условие $Y_2(v_1, v_2, w, t_0, s_2, x, x_2)$, однако выполнено только условие (20). Оказывается, что условие симметричности Y_2 по переменным (t, x) , (s_2, x_2) позволяет найти Y_2 .

Положим в уравнении (19) $s_2 = t_0$. Получим задачу для $Y_2(v_1, v_2, w, t, t_0, x, x_2)$. Для нее применима теорема 1, и мы находим

$$\begin{aligned} Y_2(v_1, v_2, w, t_0, t, x_2, x) &= Y_2(v_1, v_2, w, t, t_0, x, x_2) \\ &= F_\xi^{-1} \left[F_x \left[M(u_0(x)u_0(x_2)) \varphi(v_1 - \xi\chi(t_0, t, \cdot), v_2 + i\xi^2\chi(t_0, t, \cdot), w) \right] (\xi) \right] (x) \\ &\quad - i \int_{t_0}^t F_\xi^{-1} \left[F_x \left[\frac{\delta}{\delta w(\tau, x)} Y_1(v_1 - \xi\chi(\tau, t, \cdot), v_2 + i\xi^2\chi(\tau, t, \cdot), w, t_0, x_2) \right] (\xi) \right] (x) d\tau. \end{aligned}$$

Отсюда получаем начальное условие для уравнения (19)

$$\begin{aligned} Y_2(v_1, v_2, w, t_0, s_2, x, x_2) &= \\ &= F_\xi^{-1} \left[F_x \left[M(u_0(x_2)u_0(x)) \varphi(v_1 - \xi\chi(t_0, s_2, \cdot), v_2 + i\xi^2\chi(t_0, s_2, \cdot), w) \right] (\xi) \right] (x_2) \\ &\quad - i \int_{t_0}^{s_2} F_\xi^{-1} \left[F_{x_2} \left[\frac{\delta}{\delta w(\tau, x_2)} Y_1(v_1 - \xi\chi(\tau, s_2, \cdot), \right. \right. \\ &\quad \left. \left. v_2 + i\xi^2\chi(\tau, s_2, \cdot), w, t_0, x) \right] (\xi) \right] (x_2) d\tau. \end{aligned}$$

Снова воспользуемся теоремой 1, получим

$$\begin{aligned} Y_2(v_1, v_2, w, t, s_2, x, x_2) &= F_\eta^{-1} \left[F_x \left[F_\xi^{-1} \left[F_{x_2} \left[M(u_0(x_2)u_0(x)) \varphi(v_1 - \xi\chi(t_0, s_2, \cdot) \right. \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \eta\chi(t_0, t, \cdot), v_2 + i\xi^2\chi(t_0, s_2, \cdot) + i\xi^2\chi(t_0, t, \cdot), w) \right] (\xi) \right] (x_2) \right. \\ &\quad \left. - i \int_{t_0}^{s_2} F_\xi^{-1} \left[F_{x_2} \left[\frac{\delta}{\delta w(\tau, x_2)} Y_1(v_1 - \xi\chi(\tau, s_2, \cdot) - \eta\chi(t_0, t, \cdot), \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. v_2 + i\xi^2\chi(\tau, s_2, \cdot) + i\eta^2\chi(t_0, t, \cdot), w, t_0, x) \right] (\xi) \right] (x_2) d\tau \right] (\eta) \right] (x) \\ &\quad - i \int_{t_0}^t F_\xi^{-1} \left[F_x \left[\frac{\delta}{\delta w(\tau, x)} Y_1(v_1 - \xi\chi(\tau, t, \cdot), \right. \right. \\ &\quad \left. \left. v_2 + i\xi^2\chi(\tau, t, \cdot), w, s_2, x_2) \right] (\xi) \right] (x) d\tau. \end{aligned} \quad (21)$$

Мы доказали следующий результат.

Теорема 8. Если характеристический функционал $\varphi(v_1, v_2, w)$ имеет вариационные производные до третьего порядка включительно, $Mu_0(x)$ и $M(u_0(x)u_0(x_1))$ локально суммируемы, то (21) является единственным симметрическим по переменным (t, x) , (s_2, x_2) решением задачи (19), (20) в обобщенном смысле.

10. Вторая моментная функция решения задачи (1), (2). Теперь из (21) при $v_1 = 0$, $v_2 = 0$, $w = 0$ получаем вторую моментную функцию решения задачи (1), (2).

Теорема 9. Пусть выполняются условия теоремы 8. Тогда

$$\begin{aligned} & M(u(t, x)u(s_2, x_2)) \\ &= F_\eta^{-1} \left[F_x \left[F_\xi^{-1} [F_{x_2} [M(u_0(x_2)u_0(x)) \right. \right. \\ &\quad \times \varphi(-\xi\chi(t_0, s_2, \cdot) - \eta\chi(t_0, t, \cdot), i\xi^2\chi(t_0, s_2, \cdot) + i\xi^2\chi(t_0, t, \cdot), w)](\xi)](x_2) \\ &\quad - i \int_{t_0}^{s_2} F_\xi^{-1} \left[F_{x_2} \left[\frac{\delta}{\delta w(\tau, x_2)} Y_1(-\xi\chi(\tau, s_2, \cdot) - \eta\chi(t_0, t, \cdot), \right. \right. \\ &\quad \left. \left. i\xi^2\chi(\tau, s_2, \cdot) + i\eta^2\chi(t_0, t, \cdot), w, t_0, x) \right](\xi) \right](x_2) d\tau \right](\eta) \right](x) \\ &\quad - i \int_{t_0}^t F_\xi^{-1} \left[F_x \left[\frac{\delta}{\delta w(\tau, x)} Y_1(-\xi\chi(\tau, t, \cdot), i\xi^2\chi(\tau, t, \cdot), w, s_2, x_2) \right](\xi) \right](x) d\tau \right](\eta) \right](x) \end{aligned} \quad (22)$$

является второй моментной функцией (в смысле обобщенных функций) решения задачи (1), (2).

Отметим, что Y_1 определяется формулой (14). Кроме того, если в (22) положить $s_2 = t$, $x_2 = x$, то получим дисперсионную функцию решения задачи (1), (2).

11. Вторая смешанная функция. Из разложения характеристического функционала Y в степенной ряд (см. п. 3) следует, что

$$\begin{aligned} Y_1(v_1, v_2, w, t, x) = & M \left(u(t, x) \exp \left(i \int_T (\varepsilon_1(s)v_1(s) \right. \right. \\ & \left. \left. + \varepsilon_2(s)v_2(s)) ds + i \int_T \int_{\mathbb{R}} f(s_1, s_2)w(s_1, s_2) ds_1 ds_2 \right) \right). \end{aligned}$$

Это позволяет находить смешанные моментные функции. Приведем один такой результат.

Теорема 10. Пусть случайные процессы ε_1 , ε_2 не зависят от процесса f , $\psi(v_1, v_2)$ — характеристический функционал процессов ε_1 , ε_2 — имеет вариационные производные до второго порядка включительно и $Mu_0(x)$, $Mf(t, x)$ локально суммируемы. Тогда

$$\begin{aligned} M(u(t, x)\varepsilon_1(t_1)) = & \frac{1}{i} Mu_0(x) \overset{x}{*} F_\xi^{-1} \left[\frac{\delta\psi(-\xi\chi(t_0, t, \cdot), i\xi^2\chi(t_0, t, \cdot))}{\delta v_1(t_1)} \right](x) \\ & - i \int_{t_0}^t F_\xi^{-1} \left[\frac{\delta\psi(-\xi\chi(\tau, t, \cdot), i\xi^2\chi(\tau, t, \cdot))}{\delta v_1(t_1)} \right](x) \overset{x}{*} Mf(\tau, x) d\tau \end{aligned}$$

является второй моментной функцией $M(u(t, x)\varepsilon_1(t_1))$ (в смысле обобщенных функций) для решения задачи (1), (2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся найденным выражением (14) для Y_1 . При этом

$$\begin{aligned}
 M(u(t, x) \varepsilon_1(t_1)) &= \frac{1}{i} \frac{\delta Y_1(v_1, v_2, w, t, x)}{\delta v_1(t_1)} \Big|_{v_1=0, v_2=0, w=0} \\
 &= \left\{ \frac{1}{i} M u_0(x) * F_\xi^{-1} \left[\frac{\delta \varphi(v_1 - \xi \chi(t_0, t, \cdot), v_2 + i \xi^2 \chi(t_0, t, \cdot), w)}{\delta v_1(t_1)} \right] (x) \right. \\
 &\quad \left. - \int_{t_0}^t F_\xi^{-1} \left[F_x \left[\frac{\delta^2 \varphi(v_1 - \xi \chi(\tau, t, \cdot), v_2 + i \xi^2 \chi(\tau, t, \cdot), w)}{\delta w(\tau, x) \delta v_1(t_1)} \right] (\xi) \right] (x) d\tau \right\} \Big|_{\substack{v_1=0 \\ v_2=0 \\ w=0}} \\
 &= \frac{1}{i} M u_0(x) * F_\xi^{-1} \left[\frac{\delta \psi(-\xi \chi(t_0, t, \cdot), i \xi^2 \chi(t_0, t, \cdot))}{\delta v_1(t_1)} \right] (x) \\
 &\quad - i \int_{t_0}^t F_\xi^{-1} \left[F_x \left[\frac{\delta \psi(-\xi \chi(\tau, t, \cdot), i \xi^2 \chi(\tau, t, \cdot))}{\delta v_1(t_1)} M f(\tau, x) \right] (\xi) \right] (x) d\tau \\
 &= \frac{1}{i} M u_0(x) * F_\xi^{-1} \left[\frac{\delta \psi(-\xi \chi(t_0, t, \cdot), i \xi^2 \chi(t_0, t, \cdot))}{\delta v_1(t_1)} \right] (x) \\
 &\quad - i \int_{t_0}^t F_\xi^{-1} \left[\frac{\delta \psi(-\xi \chi(\tau, t, \cdot), i \xi^2 \chi(\tau, t, \cdot))}{\delta v_1(t_1)} F_x [M f(\tau, x)] (\xi) \right] (x) d\tau.
 \end{aligned}$$

Отсюда следует искомый результат. Теорема доказана.

12. Заключение. Полученные формулы для математического ожидания (15) и для второй моментной функции (22) являются довольно общими. Они могут быть использованы для уравнений, коэффициенты которых являются различными случайными процессами. Рассмотренный пример с гауссовскими случайными коэффициентами показывает, что для конкретных процессов формулы допускают дальнейшие упрощения. Формулы (14) для Y_1 и (21) для Y_2 позволяют находить некоторые смешанные моментные функции более высокого порядка с помощью вычисления вариационных производных (см. п. 11). Из вида формулы (21) для Y_2 трудно усмотреть ее симметричность по переменным (t, x) и (s_2, x_2) . Для этого нужно подставить в нее найденное ранее значение Y_1 .

Автор благодарен профессору Н. Х. Розову и профессору В. М. Миллионщикову за полезные обсуждения проблемы.

Список литературы

1. Данфорд Н., Шварц Д. Линейные операторы. Т. I. М.: ИЛ, 1962.
2. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1976.
3. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.
4. Задорожний В. Г. Дифференциальные уравнения с вариационными производными. Воронеж: ВорГУ, 2000.
5. Кляцкин В. И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. М.: Наука, 1980.

6. *Фурсиков А. В.* Проблема замыкания цепочек моментных уравнений, соответствующих трехмерной системе уравнений Навье–Стокса в случае больших чисел Рейнольдса // ДАН СССР. 1991. Т. 319. № 1. С. 83–87.
7. *Фурсиков А. В.* Моментная теория для уравнений Навье–Стокса со случайной правой частью // Изв. РАН. Сер. матем. 1992. Т. 56. № 6. С. 1273–1315.
8. *Шапиро В. Е., Логинов В. М.* Динамические системы при случайных воздействиях. Новосибирск: Наука, 1983.
9. *Тихонов В. И.* Воздействие флуктуаций на простейшие параметрические системы // Автоматика и телемеханика. 1958. Т. 19. № 8. С. 717–723.
10. *Адомиан Дж.* Стохастические системы. М.: Мир, 1987.
11. *Вентцель А. Д., Фрейдлин М. И.* Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М.: Наука, 1979.
12. *Монин А. С., Яглом А. М.* Статистическая гидромеханика. Ч. 2. М.: Наука, 1967.
13. *Задорожний В. Г., Строева Л. Н.* О моментных функциях решения начальной задачи линейного дифференциального уравнения первого порядка со случайными коэффициентами // Дифференц. уравн. 2000. Т. 36. № 3. С. 377–385.
14. *Задорожний В. Г.* Дифференциальное уравнение в банаховом пространстве, содержащее вариационную производную // СМЖ. 1992. Т. 33. № 2. С. 80–93.
15. *Задорожний В. Г.* Моментные функции решения задачи Коши стохастического уравнения теплопроводности // Докл. РАН. 1999. Т. 364. № 6. С. 735–737.
16. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Второй специальный курс. М.: Наука, 1965.

Воронежский государственный университет
E-mail: zador@zador.vsu.ru

Поступило в редакцию
09.I.2001