Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Н. Солтанов, Э. Б. Новрузов, Об одной задаче со свободной границей, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2002, том 66, выпуск 4, 155–176

DOI: <https://doi.org/10.4213/im398>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 10:59:04

УДК 517.957

К. Н. Солтанов, Э. Б. Новрузов

Об одной задаче со свободной границей

Изучена гладкая разрешимость смешанной задачи для параболического уравнения с двойной нелинейностью. С использованием полученных результатов о гладкости рассматриваемого уравнения исследована задача со свободной границей.

Библиография: 13 наименований.

Введение

Предметом настоящего исследования является одна задача со свободной границей (см. § 3) для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D(|u|^{p_0} Du + |Du|^{p_1} Du) = f(x, t). \quad (0.1)$$

Для этого изучаются гладкостные свойства решений уравнения (0.1) в некоторой области с фиксированной границей. Отметим, что необходимость получения гладкого решения уравнения является естественной при изучении задач со свободной границей. Получение такого решения еще более актуально в данном случае, поскольку для уравнения (0.1) преобразования, используемые, например, в работах [1], [2] и позволяющие либо избавиться от нелинейности в главной части уравнения, либо свести задачу к некоторой вариационной проблеме, неприменимы. В частности, преобразование Кирхгофа (см. [1], [10]), позволяющее избавиться от нелинейности в главной части в случае уравнения с первым из нелинейных членов (0.1), в данном случае использовать невозможно.

Заметим, что задачам со свободной границей, в том числе и задаче Стефана для различных уравнений параболического типа, посвящено достаточно много работ (см., например, [2], [1]). В этих работах, в основном, рассмотрены либо линейные уравнения, либо уравнения, содержащие в главной части нелинейности, имеющие вид первого слагаемого в скобке уравнения (0.1). В некоторых работах указанные задачи для уравнений с подобного вида нелинейностями исследованы при достаточно общих условиях.

Определенные результаты о гладкости решений подобных уравнений содержатся, например, в работах [3], [4].

Отметим также, что вопросы разрешимости для уравнений такого вида, при довольно общих условиях на нелинейность, достаточно подробно исследованы в работах [5]–[7].

§ 1. Исследование начально-краевой задачи

В этом параграфе при достаточно общих условиях доказано существование гладкого решения уравнения (0.1) в цилиндрической области, благодаря чему, в частности, можно сделать заключение о гладкости гиперповерхности $u(x, t) = 0$. В дальнейшем можно использовать полученный результат при исследовании свойств свободной границы.

Рассмотрим следующую задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D(|u|^{p_0} Du + |Du|^{p_1} Du) = f(x, t), \quad (x, t) \in Q \equiv (0, T) \times \Omega, \quad (1.1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega \equiv (a, b), \quad (1.2)$$

$$u|_{\Gamma} = 0, \quad \Gamma \equiv \partial\Omega \times [0, T], \quad (1.3)$$

где $f(x, t)$, $u_0(x)$ – некоторые функции, $D = \frac{\partial}{\partial x}$, $p_0 \geq 2$, $p_1 \geq 1$, (a, b) – ограниченный интервал.

Введем следующее пересечение пространств функций $u: Q \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_1(Q) \equiv & L_{\nu}(0, T; \mathring{S}_{1, p_0 + p_*, 2}(\Omega)) \cap L_{\infty}(0, T; \mathring{W}_{\aleph+2}^1(\Omega)) \cap L_{\mu}(0, T; \mathring{S}_{1, p_*, p_1+2}(\Omega)) \cap \\ & \cap L_{\nu_1}(0, T; S_{1, p_1+\aleph, 2}^1(\Omega)) \cap W_2^1(Q) \cap L_{p_0+2}(0, T; \mathring{S}_{2, p_0, 2}(\Omega)) \cap \\ & \cap L_{p_1+2}(0, T; S_{1, p_1, 2}^1(\Omega)) \cap \{u \mid u(x, 0) = u_0(x)\}, \end{aligned}$$

где $\nu_1 = \aleph + p_1 + 2$, $\nu = p_* + p_0 + 2$, $\aleph \geq p_1$, $\mu = p_1 + p_* + 2$, $p_* = (4p_0 - 2)(\aleph + 2)$;

$$\begin{aligned} \mathring{S}_{1, \beta, \gamma}(\Omega) &= \left\{ u(x) \mid \int_{\Omega} |u|^{\beta} |Du|^{\gamma} dx < +\infty, u|_{\partial\Omega} = 0 \right\}, \\ \mathring{W}_{\gamma}^1(\Omega) &= \left\{ u(x) \mid \left(\int_{\Omega} |u(x)|^{\gamma} + |Du|^{\gamma} dx \right)^{\frac{1}{\gamma}} < +\infty, u|_{\partial\Omega} = 0 \right\}, \\ S_{1, \beta, \gamma}^1(\Omega) &= \left\{ u(x) \mid \int_{\Omega} |Du|^{\beta} |D^2 u|^{\gamma} dx < +\infty, u|_{\partial\Omega} = 0 \right\}, \\ \mathring{S}_{2, \beta, \gamma}(\Omega) &= \left\{ u(x) \mid \int_{\Omega} |u|^{\beta} |D^2 u|^{\gamma} dx < +\infty, u|_{\partial\Omega} = 0 \right\} \end{aligned}$$

(о пространствах $S_{\alpha, \beta, \gamma}^k$ см. [8]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. *Решением задачи (1.1)–(1.3) назовем функцию $u(x, t) \in \mathfrak{R}_1(Q)$, удовлетворяющую уравнению (1.1) в смысле пространства $L_2(Q)$, т.е. для любого $v(x, t) \in L_2(Q)$ выполняется равенство*

$$\int_Q \frac{\partial u}{\partial t} v dx dt - \int_Q D(|u|^{p_0} Du + |Du|^{p_1} Du) v dx dt = \int_Q f v dx dt.$$

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть функции u_0 , f удовлетворяют следующим условиям:

$$u_0 \in \mathring{W}_{\aleph+2}^1(\Omega) \cap L_{p_*+2}(\Omega), \quad f \in L_2(0, T; \mathring{W}_{\aleph+2}^1(\Omega)), \quad p_1 \geq 1, \quad p_0 \geq 2.$$

Тогда задача (1.1)–(1.3) разрешима в смысле определения (более того, п.в. в Q).

Для доказательства этой теоремы будет использован обобщенный метод компактности [5]. Соответствующие априорные оценки будут получены с применением неравенства обобщенной коэрцитивности, справедливость которого, в свою очередь, доказывается с помощью построения некоторого оператора, порождающего коэрцитивную пару с оператором, порожденным рассмотренной задачей.

Остановимся теперь на построении упомянутого оператора. Введем следующие пространства:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_2(Q) &\equiv \mathfrak{R}_1(Q) \cap L_2(0, T; W_2^2(\Omega)) \cap L_{\aleph+2}(0, T; S_{1, \aleph, 2}^1(\Omega)) \cap \\ &\cap \{v \mid |Dv|^{\aleph/2} Dv_t \in L_2(Q)\} \cap \{v \mid Dv_t \in L_2(Q)\}, \\ \mathfrak{R}'_2(Q) &\equiv \mathfrak{R}_1(Q) \cap L_2(0, T; W_2^2(\Omega)) \cap L_{\aleph+2}(0, T; S_{1, \aleph, 2}^1(\Omega)) \cap \\ &\cap \{v \mid \sqrt{T-t} |Dv|^{\aleph/2} Dv_t \in L_2(Q)\} \cap \{v \mid \sqrt{T-t} Dv_t \in L_2(Q)\}. \end{aligned}$$

Пусть $E: \mathfrak{R}_2(Q) \rightarrow W_2^1(Q) \subset L_2(Q)$ – сужение на Q оператора $\tilde{E}: \mathfrak{R}'_2(Q_1) \rightarrow W_2^1(Q_1)$, порожденного задачей

$$c_2 u_t - |Du|^{\aleph} D^2 u - c_3 D^2 u - c_1 |u|^{p_*} u = h(x, t), \quad (x, t) \in Q_1 \equiv (a, b) \times (0, T_1), \quad (1.4)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (1.5)$$

$$u|_{\Gamma_1} = 0, \quad \Gamma_1 \equiv \partial\Omega \times [0, T_1), \quad (1.6)$$

где $T_1 > T$; $\aleph, p_*, c_1, c_2, c_3$ – положительные постоянные.

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть $h(x, t) \in W_2^1(Q_1)$, $Q_1 \equiv \Omega \times [0, T_1)$. Тогда при любых $\aleph > 0$ и $u_0(x) \in W_2^1(\Omega) \cap S_{1, \aleph, 2}^1(\Omega) \cap L_{p_*+2}(\Omega)$ существует, причем единственное, решение $u(x, t) \in \mathfrak{R}'_2(Q_1)$ задачи (1.4)–(1.6) в смысле, аналогичном определению 1.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству соответствующей теоремы из [9], где задача (1.4)–(1.6) исследована в случае, когда $c_2 = 1$, $c_3 = c_1 = 0$. Доказательство, предложенное в [9], позволяет сделать вывод о разрешимости задачи (1.4)–(1.6) в случае произвольных $c_1, c_2, c_3 > 0$.

В дальнейшем будем считать, что $c_3 = 1$. Таким образом, можно определить оператор $E: \mathfrak{R}_2(Q) \rightarrow \mathring{W}_2^1(Q)$, для которого справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 1.1. Оператор $E^{-1}: \mathring{W}_2^1(Q) \rightarrow \mathfrak{R}_2(Q)$ слабо компактен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{h_n\}$ – слабо сходящаяся последовательность из $\overset{\circ}{W}_2^1(Q)$, т.е. $h_n \rightarrow h_0$. Пусть u_n – прообраз элемента h_n . Он существует и единствен в силу теоремы 1.2. Далее, $E(u_n) = h_n \rightarrow h_0 = E(u)$. Естественно, что последовательность u_n равномерно ограничена в $\mathfrak{R}_2(Q)$. Покажем, что $u_n \rightarrow u$ слабо (может быть, после перехода на подпоследовательность).

В самом деле, так как последовательность $\{u_n\}$ равномерно ограничена в $\mathfrak{R}_2(Q)$, то из нее можно выделить подпоследовательность $\{u_{n_k}\}$, сходящуюся к некоторому $v \in \mathfrak{R}_2(Q)$. Следовательно, $E(u_{n_k}) \rightarrow E(v)$. Но $E(u_{n_k}) \rightarrow h_0 = E(u)$. Иначе говоря, $E(v) = E(u)$. Отсюда в силу однозначной разрешимости задачи (1.4)–(1.6) получаем, что $v = u$. Таким образом, $u_{n_k} \rightarrow u$ слабо в $\mathfrak{R}_2(Q)$, что и требовалось доказать.

Введем теперь следующие обозначения:

$$\begin{aligned}\psi(u) &= \frac{\partial u}{\partial t} - (D|u|^{p_0} Du) - D(|u|^{p_1} Du), \\ A(u) &= -D(|u|^{p_1} Du),\end{aligned}\tag{1.7}$$

$$B(u) = -D(|u|^{p_0} Du).\tag{1.8}$$

Докажем, что операторы $A: \mathfrak{R}_1(Q) \rightarrow L_2(Q)$ и $B: \mathfrak{R}_1(Q) \rightarrow L_2(Q)$ являются ограниченными.

Действительно, применяя неравенства Юнга и Гёльдера для любого $u \in \mathfrak{R}_1(Q)$, имеем

$$\begin{aligned}\|A(u)\|_{L_2(Q)}^2 &= (p_1 + 1) \| |Du|^{p_1} D^2 u \|_{L_2(Q)}^2 = (p_1 + 1) \int_Q |Du|^{2p_1} |D^2 u|^2 dx dt \\ &\leq (p_1 + 1) \int_Q |Du|^{p_1 + 8} |D^2 u|^2 dx dt + (p_1 + 1) \int_Q |Du|^{p_1} |D^2 u|^2 dx dt \\ &= (p_1 + 1) \left([u]_{L_{\nu_1}(0, T; S_{1, p_1 + 8, 2}^1(\Omega))} + [u]_{L_{p_1 + 2}(0, T; S_{1, p_1, 2}^1(\Omega))} \right).\end{aligned}$$

Аналогично доказывается ограниченность оператора $B: \mathfrak{R}_1(Q) \rightarrow L_2(Q)$.

Докажем теперь, учитывая сказанное выше, следующую лемму.

ЛЕММА 1.2. *Оператор $\psi: \mathfrak{R}_1(Q) \rightarrow L_2(Q)$, порожденный задачей (1.1)–(1.3), является слабо компактным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть u_m – ограниченная последовательность из пространства $\mathfrak{R}_1(Q)$. “Рефлексивность” данного пространства показывает, что из последовательности u_m можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность. Кроме того, ввиду ограниченности операторов A и B и ввиду рефлексивности $L_2(Q)$ получаем, что из последовательностей $A(u_m)$ и $B(u_m)$ можно выделить слабо сходящиеся подпоследовательности.

Итак, при $m_k \nearrow \infty$ имеем $A(u_{m_k}) \rightarrow \eta$, $B(u_{m_k}) \rightarrow \chi$ в $L_2(Q)$, т.е. имеет место соотношение: $A(u_{m_k}) + B(u_{m_k}) \rightarrow \eta + \chi$ слабо в $L_2(Q)$. Так как $\mathfrak{R}_1(Q)$ вложено в

$$L_{2p_0+2}(0, T; \overset{\circ}{S}_{1, 2p_0, 2}(\Omega)) \cap L_{2p_1+2}(0, T; \overset{\circ}{W}_{2p_1+2}^1(\Omega))$$

и вложено компактно (см. [8]), имеем

$$\begin{aligned} u_{m_k} &\rightarrow u && \text{в } L_{p_0+2}(0, T; \overset{\circ}{S}_{1,p_0,2}(\Omega)), \\ |u_{m_k}|^{p_0} Du_{m_k} &\rightarrow |u|^{p_0} Du && \text{в } L_2(Q), \\ Du_{m_k} &\rightarrow Du && \text{в } L_2(Q), \\ |Du_{m_k}|^{p_1} Du_{m_k} &\rightarrow |Du|^{p_1} Du && \text{в } L_2(Q). \end{aligned}$$

Используя эти соотношения, легко показать, что $A: \mathfrak{R}_1(Q) \rightarrow L_2(Q)$ и $B: \mathfrak{R}_1(Q) \rightarrow L_2(Q)$ – слабо компактные операторы.

Покажем, что $B: \mathfrak{R}_1(Q) \rightarrow L_2(Q)$ является слабо компактным оператором. Действительно, для любого элемента $v \in L_{p_0+2}(0, T; \overset{\circ}{W}_{p_0+2}^1(\Omega))$

$$\begin{aligned} \int_Q B(u_{m_k})v \, dx \, dt &= - \int_Q D(|u_{m_k}|^{p_0} Du_{m_k})v \, dx \, dt = \int_Q |u_{m_k}|^{p_0} Du_{m_k} Dv \, dx \, dt \rightarrow \\ &\rightarrow \int_Q |u|^{p_0} Du Dv \, dx \, dt = - \int_Q D(|u|^{p_0} Du)v \, dx \, dt. \end{aligned}$$

Следовательно, $Bu = \eta$ в $L_{q_0}(0, T; W_{q_0}^{-1}(\Omega))$, где $q_0 = \frac{p_0+2}{p_0+1}$, $q_0 \leq 2$. Так как в силу вышеизложенного $B(u_{m_k}) \rightarrow \eta$ в $L_2(Q)$, то $B(u_{m_k}) \rightarrow Bu$ в $L_2(Q)$.

Итак, $B: \mathfrak{R}_1(Q) \rightarrow L_2(Q)$ – слабо компактный оператор.

Аналогично доказывается слабая компактность оператора A . Слабая компактность оператора $\frac{\partial}{\partial t}: \mathfrak{R}_1(Q) \rightarrow L_2(Q)$ вытекает из его линейности.

Следовательно, оператор $\psi = (\frac{\partial}{\partial t} + A + B)$, $\psi: \mathfrak{R}_1(Q) \rightarrow L_2(Q)$, слабо компактен, что и требовалось доказать.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1. Пусть $\{y_k\}$ – полная система в пространстве $W_2^1(Q)$. Приближенное решение уравнения (1.1) находим в виде

$$u_m = E^{-1}(y_m^*), \quad y_m^* = \sum_{k=1}^m c_{mk} y^k,$$

при этом неизвестные коэффициенты c_{mk} находятся из системы алгебраических уравнений

$$\Phi_k(c_m) \equiv \langle \psi(u_m), y^k \rangle - \langle f, y^k \rangle = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (1.9)$$

($\langle \cdot, \cdot \rangle$ – двойственная форма для пары (X, X^*) ; в данном случае $X = L_2(Q)$). Разрешимость системы (1.9) вытекает из известной леммы об остром угле.

ЛЕММА (об остром угле) [10]. Пусть $\xi \rightarrow P(\xi)$ – такое непрерывное отображение $\mathbb{R}^m$ в себя, что для подходящего $\rho > 0$

$$(P(\xi), \xi) \geq 0 \quad \forall \xi \text{ из сферы } |\xi| = \rho,$$

где для $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_m\} \in \mathbb{R}^m$ и $\eta = \{\eta_1, \dots, \eta_m\} \in \mathbb{R}^m$ полагаем, что

$$(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^m \xi_k \eta_k, \quad |\xi| = (\xi, \xi)^{1/2}.$$

Тогда найдется такое ξ , $|\xi| \leq \rho$, что $P(\xi) = 0$.

В силу введенных обозначений имеем

$$\Phi_k(c_m) \equiv \langle \psi(u_m), y^k \rangle - \langle f, y^k \rangle, \quad \xi = \{\xi_1, \dots, \xi_m\} = \{c_{m1}, \dots, c_{mm}\} = c_m, \\ P(\xi) = \Phi(c_m).$$

Тогда

$$(P(\xi), \xi) = (\Phi(c_m), c_m) = \sum_{k=1}^m c_{mk} \Phi_k(c_m) = \langle \psi(u_m), E(u_m) \rangle - \langle f, E(u_m) \rangle.$$

Заметим, во-первых, что из слабой непрерывности операторов E^{-1} и ψ вытекает непрерывность отображения Φ из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^m$. Поэтому остается проверить, что существует ρ такое, что для любого ξ из сферы $|\xi| = \rho$

$$\langle \psi(u_m), E(u_m) \rangle - \langle f, u_m \rangle \geq 0.$$

Проверим этот факт.

ЛЕММА 1.3. Пусть $u_m(x, t)$ удовлетворяет условию (1.3), $u_m(x, t) \in \mathfrak{R}_2(Q)$. Тогда справедливо следующее равенство:

$$\begin{aligned} \langle \psi(u_m), c_1 |u_m|^{p_*} u_m \rangle \Big|_{\tau} &= \frac{c_1}{p_* + 2} \int_{\Omega} |u_m|^{p_*+2} dx \Big|_{\tau} \\ &+ c_1(p_* + 1) \int_{Q_{\tau}} |u_m|^{p_*+p_0} (Du_m)^2 dx dt \\ &+ c_1(p_* + 1) \int_{Q_{\tau}} |u_m|^{p_*} |Du_m|^{p_1+2} dx dt - \frac{c_1}{p_* + 2} \int_{\Omega} |u_0|^{p_*+2} dx, \end{aligned}$$

где $Q_{\tau} = [0, \tau] \times \Omega$, $p_* = (4p_0 - 2)(N + 2)$, $c_1 > 0$.

Доказательство непосредственно следует из формулы интегрирования по частям.

ЛЕММА 1.4. Пусть $u_m(x, t)$ удовлетворяет условию (1.3), $u_m(x, t) \in \mathfrak{R}_2(Q)$. Тогда справедливо следующее неравенство:

$$\begin{aligned} \langle \psi(u_m), -D^2 u_m \rangle|_\tau &\geq \frac{1}{2} \int_\Omega |Du_m|^2 dx|_\tau + \int_{Q_r} |u_m|^{p_0} |D^2 u_m|^2 dx dt \\ &+ M_1 \int_{Q_r} |Du_m|^{p_1} |D^2 u_m|^2 dx dt - \frac{1}{2} \int_\Omega |Du_0|^2 dx \\ &- M_2 \int_{Q_r} |u_m|^{p_1^*} |Du_m|^{p_1+2} dx dt - M_3 \int_{Q_r} |u_m|^{p_2^*} dx dt, \end{aligned}$$

причем:

а) если числа p_0 и p_1 , удовлетворяют условиям $p_0 \geq 2$, $\frac{1}{2} \leq p_1 \leq 4$, то

$$\begin{aligned} M_1 = p_1 + \frac{2}{3}, \quad M_2 = \frac{3p_0^2}{2} \frac{(p_1 + 2)}{(2p_0 - 1)} \times \frac{9p_0^2}{4} \frac{(p_1 + 2)}{(2p_0 - 1)}, \quad M_3 = \frac{3p_0^2}{2}, \\ p_1^* = 4p_0 - 2, \quad p_2^* = 2p_0 - 2; \end{aligned}$$

б) если $p_0 \geq 2$, $p_1 > 4$, то

$$M_1 = p_1 + 1, \quad M_2 = M_3 = \frac{p_0(p_0 - 1)}{3}, \quad p_1^* = p_2^* = p_0 - 2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $u_m \in \mathfrak{R}_2(Q_\tau)$ справедливо тождество

$$\begin{aligned} \langle \psi(u_m), -D^2 u_m \rangle|_\tau &= - \int_{Q_r} u_{mt} D^2 u_m dx dt + \int_{Q_r} |u_m|^{p_0} |D^2 u_m|^2 dx dt \\ &+ (p_1 + 1) \int_{Q_r} |Du_m|^{p_1} |D^2 u_m|^2 dx dt + p_0 \int_\Omega |u_m|^{p_0-2} u_m |Du_m|^2 D^2 u_m dx dt. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Заметим, что

$$- \int_{Q_r} u_{mt} D^2 u_m dx dt = \int_{Q_r} Du_m Du_{mt} dx dt = \frac{1}{2} \int_{Q_r} \frac{\partial}{\partial t} |Du_m|^2 dx dt, \quad (1.11)$$

так как из равенства $u_m|_\Gamma = 0$ вытекает, что $u_{mt}|_\Gamma = 0$, поскольку в классе рассматриваемых функций гладкие функции всюду плотны.

Далее рассмотрим следующие случаи.

I. Пусть $p_0 > 1$, $\frac{1}{2} \leq p_1 \leq 4$. Докажем справедливость следующего неравенства:

$$\begin{aligned} \int_{Q_r} |u_m|^{p_*} |Du_m|^{p_1+3} dx dt &\leq c(\varepsilon) \int_{Q_r} \frac{p_1 + 2}{p_* + 1} |u_m|^{2p_*+2} |Du_m|^{p_1+2} dx dt \\ &+ \varepsilon \frac{p_1 + 2}{p_* + 1} \int_{Q_r} |Du_m|^{p_1} |D^2 u_m|^2 dx dt, \end{aligned}$$

где $p_* > 0$, $\varepsilon \succ 0$ – произвольные постоянная.

Действительно, используя интегрирование по частям и неравенство Юнга, получаем

$$\begin{aligned} \left| \int_{Q_r} |u_m|^{p_*} |Du_m|^{p_1+1} Du_m Du_m dx dt \right| &\leq \\ &\leq c(\varepsilon) \frac{p_1+2}{p_*+1} \int_{Q_r} |u_m|^{2p_*+2} |Du_m|^{p_1+2} dx dt \\ &\quad + \varepsilon \frac{p_1+2}{p_*+1} \int_{Q_r} |Du_m|^{p_1} |D^2 u_m|^2 dx dt. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Теперь, применяя к интегралу $\int_{Q_r} |u_m|^{p_0-2} u_m |Du_m|^2 D^2 u_m dx dt$ неравенство Юнга, имеем

$$\begin{aligned} &\left| \int_{Q_r} |u_m|^{p_0-2} u_m |Du_m|^2 D^2 u_m dx dt \right| \\ &= \left| \int_{Q_r} |u_m|^{p_0-2} u_m |Du_m|^{2-\frac{p_1}{2}} |Du_m|^{\frac{p_1}{2}} D^2 u_m dx dt \right| \\ &\leq c(\varepsilon_1) \int_{Q_r} |u_m|^{2p_0-2} |Du_m|^{4-p_1} dx dt + \varepsilon_1 \int_{Q_r} |Du_m|^{p_1} |D^2 u_m|^2 dx dt \\ &\leq c(\varepsilon_1) \int_{Q_r} |u_m|^{2p_0-2} |Du_m|^{p_1+3} dx dt + c(\varepsilon_1) \int_{Q_r} |u_m|^{2p_0-2} dx dt \\ &\quad + \varepsilon_1 \int_{Q_r} |Du_m|^{p_1} |D^2 u_m|^2 dx dt. \end{aligned}$$

Последний переход следует из очевидного неравенства $|a|^{4-p_1} \leq a^{p_1+3} + 1$, справедливого для любого $a \geq 0$, при условии $4-p_1 \leq p_1+3$, которое эквивалентно предположению, что $p_1 \geq \frac{1}{2}$.

Применяя неравенство (1.12) при $p_* = 2p_0 - 2$, окончательно имеем

$$\begin{aligned} p_0 \left| \int_{Q_r} |u_m|^{p_0-2} u_m |Du_m|^2 D^2 u_m dx dt \right| &\leq p_0 c(\varepsilon_1) \int_{Q_r} |u_m|^{2p_0-2} dx dt \\ &\quad + p_0 \varepsilon_1 \int_{Q_r} |Du_m|^{p_1} |D^2 u_m|^2 dx dt \\ &\quad + p_0 c(\varepsilon_1) \frac{p_1+2}{2p_0-1} c(\varepsilon) \int_{Q_r} |u_m|^{2(2p_0-2)+2} |Du_m|^{p_1+2} dx dt \\ &\quad + p_0 \varepsilon \frac{p_1+2}{2p_0-1} c(\varepsilon_1) \int_{Q_r} |Du_m|^{p_1} |D^2 u_m|^2 dx dt \\ &= p_0 c(\varepsilon_1) c(\varepsilon) \frac{p_1+2}{2p_0-1} \int_{Q_r} |u_m|^{4p_0-2} |Du_m|^{p_1+2} dx dt \\ &\quad + \left(p_0 c(\varepsilon_1) \varepsilon \frac{p_1+2}{2p_0-1} + p_0 \varepsilon_1 \right) \int_{Q_r} |Du_m|^{p_1} |D^2 u_m|^2 dx dt \\ &\quad + p_0 c(\varepsilon_1) \int_{Q_r} |u_m|^{2p_0-2} dx dt. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Далее, выбирая ε и ε_1 соответствующим образом и возвращаясь к равенствам (1.10) и (1.11), получаем искомый результат.

II. Пусть теперь $p_1 \geq 4$, $p_0 \geq 2$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} p_0 \left| \int_{Q_r} |u_m|^{p_0-2} |Du_m|^2 D^2 u_m dx dt \right| &= \frac{(p_0-1)p_0}{3} \int_{Q_r} |u_m|^{p_0-2} |Du_m|^4 dx dt \\ &\leq \frac{(p_0-1)p_0}{3} \left(\int_{Q_r} |u_m|^{p_0+2} |Du_m|^{p_1+2} dx dt + \int_{Q_r} |u_m|^{p_0-2} dx dt \right). \end{aligned}$$

Учитывая последнее неравенство в (1.10), получаем справедливость неравенства леммы 1.4. Лемма полностью доказана.

ЛЕММА 1.5. Пусть $u_m(x, t)$ удовлетворяет условиям леммы 1.4. Тогда справедливо следующее неравенство:

$$\begin{aligned} \langle \psi(u_m), -|Du_m|^{\aleph} D^2 u_m \rangle_\tau &\geq \frac{1}{\aleph+2} \int_\Omega |Du_m(x, \tau)|^{\aleph+2} dx \\ &+ \int_{Q_r} |u_m|^{p_0} |Du_m|^{\aleph} |D^2 u_m|^2 dx dt \\ &+ \left(p_1 + \frac{1}{3} \right) \int_{Q_r} |Du_m|^{p_1+\aleph} |D^2 u_m|^2 dx dt \\ &- \frac{1}{\aleph+2} \int_\Omega |Du_m(x, 0)|^{\aleph+2} dx - \frac{2}{3} \int_{Q_r} |Du_m|^{p_1} |D^2 u_m|^2 dx dt \\ &- c_1^* \int_{Q_r} |u_m|^{\aleph+2} dx dt - c_2^* \int_{Q_r} |u_m|^{(4p_0-2)(\aleph+2)} dx dt, \end{aligned}$$

где $\aleph \geq p_1$, $p_1 \geq 1$, $p_0 > 1$, c_1^* , c_2^* – некоторые положительные постоянные.

Вся сложность доказательства леммы 1.5 заключается в получении оценки, которая следует из неравенства Юнга:

$$\begin{aligned} &\left| \int_{Q_r} |u_m|^{p_0-2} u_m |Du_m|^{\aleph+2} D^2 u_m dx dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_1^2 (\aleph+2)}{2p_0-1} + 1 \right) \int_{Q_r} |Du_m|^{p_1} |D^2 u_m|^2 dx dt \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_1^2 (\aleph+2)}{2p_0-1} + 1 \right) \int_{Q_r} |Du_m|^{p_1+\aleph} |D^2 u_m|^2 dx dt \\ &+ \frac{(\aleph+1)}{2p_0-1} \varepsilon_2 \cdot \frac{1}{2\varepsilon_1^2} \int_\Omega |Du_m|^{\aleph+2} dx \\ &+ \frac{1}{2\varepsilon_1^2 (2p_0-1) \varepsilon_2^{\aleph+1}} \int_{Q_r} |u_m|^{(4p_0-2)(\aleph+2)} dx dt, \end{aligned}$$

где $\varepsilon_1 \succ 0$, $\varepsilon_2 \succ 0$ – достаточно малые величины.

Далее, легко можно показать, что (см. [8])

$$\begin{aligned} \int_{Q_\tau} |Du_m|^{\aleph+2} dx dt &\leq \int_{Q_\tau} |Du_m|^\aleph |D^2 u_m|^2 dx dt + c^* \int_{Q_\tau} |u_m|^{\aleph+2} dx dt \\ &\leq \int_{Q_\tau} |Du_m|^{\aleph+p_0} |D^2 u_m|^2 dx dt + \int_{Q_\tau} |Du_m|^{p_0} |D^2 u_m|^2 dx dt \\ &\quad + c^* \int_{Q_\tau} |u_m|^{\aleph+2} dx dt, \end{aligned}$$

где $c^* > 0$ – постоянная величина.

Используя последний факт и предыдущее неравенство, после несложных оценок получаем справедливость леммы 1.5.

Для краткости изложения подробное доказательство леммы 1.5 и последующей леммы опустим.

ЛЕММА 1.6. Пусть u_m удовлетворяет условиям леммы 1.4. Тогда справедливо следующее неравенство:

$$\begin{aligned} \langle \psi(u_m), C_2 u_{mt} \rangle|_\tau &\geq \frac{C_2}{2} \int_{Q_\tau} |u_{mt}|^2 dx dt + \frac{C_2}{p_1+2} \int_\Omega |Du_m|^{p_1+2} dx|_\tau \\ &\quad + \frac{C_2}{2} \int_\Omega |u_m|^{p_0} |Du_m|^2 dx - \frac{C_2}{p_1+2} \int_\Omega |Du_m(x, 0)|^{p_1+2} dx \\ &\quad - \frac{C_2}{2} \int_\Omega |u_m|^{p_0} |Du_m|^2 dx|_{t=0} - \frac{p_0^2 C_2}{8} \int_{Q_\tau} |u_m|^{2p_0-2} dx dt \\ &\quad - \frac{p_0^4 C_2^2}{16p_1} \int_{Q_\tau} |u_m|^{4p_0-2} |Du_m|^{p_1+2} dx dt - \frac{p_1}{16} \int_{Q_\tau} |Du_m|^{p_1} |D^2 u_m|^2 dx dt, \end{aligned}$$

где $C_2 > 0$ – некоторая постоянная.

Из лемм 1.3–1.6 получаем справедливость следующей леммы.

ЛЕММА 1.7. Пусть $u_m(x, t)$ удовлетворяет условиям леммы 1.4, $p_1 \geq 1$, $p_0 \geq 2$. Тогда справедливо следующее неравенство:

$$\begin{aligned} \langle \psi(u_m), E(u_m) \rangle|_\tau &\geq M_1 \int_\Omega |u_m(x, \tau)|^{(4p_0-2)(\aleph+2)+2} dx \\ &\quad + M_2 \int_{Q_\tau} |u|^{(4p_0-2)(\aleph+2)+p_0} |Du_m|^2 dx dt \\ &\quad + M_3 \int_{Q_\tau} |u_m|^{(4p_0-2)(\aleph+2)} |Du_m|^{p_1+2} dx dt + M_4 \int_\Omega |Du_m(x, \tau)|^2 dx \\ &\quad + M_5 \int_{Q_\tau} |u_m|^{p_0} |D^2 u_m|^2 dx dt + M_6 \int_{Q_\tau} |Du_m|^{p_1} |D^2 u_m|^2 dx dt \\ &\quad + M_7 \int_\Omega |Du_m(x, \tau)|^{\aleph+2} dx + M_8 \int_{Q_\tau} |u_m|^{p_0} |Du_m|^\aleph |D^2 u_m|^2 dx dt \\ &\quad + M_9 \int_{Q_\tau} |Du_m|^{p_1+\aleph} |D^2 u_m|^2 dx dt + M_{10} \int_{Q_\tau} |u_{mt}|^2 dx dt \\ &\quad + M_{11} \int_\Omega |Du_m(x, \tau)|^{p_1+2} dx + M_{12} \int_\Omega |u_m(x, \tau)|^{p_0} |Du_m(x, \tau)|^2 dx - M_{13}, \end{aligned}$$

где M_i – некоторые положительные постоянные, не зависящие от u_m и t .

Отметим, что последнее неравенство получено в результате сложения правых и левых частей неравенств из лемм 1.3–1.6. При этом в правой части получаются отрицательные интегралы вида $\int_{Q_\tau} |u|^\vartheta dx$ с некоторыми коэффициентами. Но эти интегралы легко можно оценить интегралом из второго слагаемого в правой части вышеприведенного неравенства с некоторым коэффициентом, применяя неравенство Пуанкаре (см. лемму 1.7). Следовательно, для получения вышеприведенного неравенства достаточно в лемме 1.3 постоянную c_1 выбрать сколь угодно большой (см. также определение оператора $E: \mathfrak{R}_2(Q) \rightarrow W_2^1(Q)$).

Далее, оценим сверху второе слагаемое равенства (1.9). Учитывая, что $f \in L_2(0, T; \overset{\circ}{W}_{\aleph+2}^1(\Omega))$, получаем

$$\begin{aligned} |\langle f, E(u_m) \rangle|_\tau &= \left| - \int_{Q_\tau} f |Du_m|^\aleph D^2 u_m dx dt - \int_{Q_\tau} f D^2 u_m dx dt \right. \\ &\quad \left. + c_2 \int_{Q_\tau} f u_{mt} dx dt + c_1 \int_{Q_\tau} f |u_m|^{p_*} u_m dx dt \right| \\ &\leq \frac{c(\varepsilon)}{\aleph+1} \int_{Q_\tau} \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|^{\aleph+2} dx dt + \frac{\varepsilon}{\aleph+1} \int_{Q_\tau} |Du_m|^{\aleph+2} dx dt \\ &\quad + c(\varepsilon) \int_{Q_\tau} \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|^2 dx dt + \varepsilon \int_{Q_\tau} |Du_m|^2 dx dt + c(\varepsilon) c_2 \int_{Q_\tau} |f|^2 dx dt \\ &\quad + \varepsilon c_2 \int_{Q_\tau} |u_{mt}|^2 dx dt + c_1 c(\varepsilon) \int_{Q_\tau} |f|^{p_*+2} dx dt + c_1 \varepsilon \int_{Q_\tau} |u_m|^{p_*+2} dx dt, \end{aligned}$$

где $\varepsilon > 0$ достаточно мало.

Отметим, что интегралы $\frac{\varepsilon}{\aleph+1} \int_{Q_\tau} |Du_m|^{\aleph+2} dx dt$ и $\varepsilon \int_{Q_\tau} |Du_m|^2 dx dt$ легко оцениваются через положительные интегралы из неравенства леммы 1.7 посредством рассуждений, приведенных в доказательстве леммы 1.5.

Таким образом, учитывая неравенство леммы 1.7, получаем, что можно найти число $\rho(f) > 0$ такое, что

$$\langle \psi(u_m), E(u_m) \rangle - \langle f, E(u_m) \rangle \geq 0,$$

или, возвращаясь к первоначальным обозначениям, $(\Phi(c_m), (c_m)) > 0$, т.е. Φ удовлетворяет всем условиям леммы об остром угле. Таким образом получили, что последовательность $\{u_m\}$ содержится в ограниченном подмножестве пространства $\mathfrak{R}_2(Q)$. Проведя рассуждения, аналогичные рассуждениям, проведенным в лемме 1.2, получим $u_m \rightarrow u$ в $\mathfrak{R}_1(Q)$.

Далее, учитывая условия на отображения E^{-1} и ψ , можно переходить к пределу в (1.9) при $t \uparrow +\infty$ для каждого $k = 1, 2, \dots$. Переходя к пределу в (1.9) при $t \uparrow +\infty$ и произвольном $k \leq m$, получаем, что для всякого $k = 1, 2, \dots$ выполняется равенство $\langle \psi(u), y^k \rangle = \langle f, y^k \rangle$.

Учитывая полноту системы $\{y^k\}$ в $W_2^1(Q)$ и замыкая ее в $W_2^1(Q)$, получаем, что для любого $y \in W_2^1(Q)$ выполняется равенство $\langle \psi(u), y \rangle = \langle f, y \rangle$.

Далее, учитывая плотность $W_2^1(Q)$ в $L_2(Q)$ и то, что $\psi(u) \in L_2(Q)$, окончательно имеем

$$\langle \psi(u), y \rangle = \langle f, y \rangle \quad \forall y \in L_2(Q).$$

Теорема 1.1 доказана.

§ 2. Один дополнительный результат о гладкости

Далее приведена одна теорема о гладкости решения задачи (1.1)–(1.3), а именно, при некоторых дополнительных условиях доказано, что решения обладают большей гладкостью и содержатся в пространстве

$$\mathfrak{R}_3(Q) = W_\infty^1(0, T; L_2(\Omega)) \cap \mathfrak{R}_1(Q) \cap \{u \mid |Du|^{\frac{p_1}{2}} Du_t \in L_2(Q), |u|^{\frac{p_0}{2}} Du_t \in L_2(Q)\}.$$

Иначе говоря, справедлива следующая

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть p_0, p_1 – числа, удовлетворяющие условиям $p_0 \geq 2, p_1 \geq 2$. Тогда для любых функций $u_0 \in \mathring{W}_r^1(\Omega)$ и $f \in \mathring{W}_q^1(Q)$ при $r = \max\{p_0 + p_1 + 2; 2p_0 + p_* + 2; \aleph + 2\}$, $q = \max\{4; p_* + 2; \aleph + 2\}$ решение задачи (1.1)–(1.3) содержится в $\mathfrak{R}_3(Q)$.

Сначала приведем некоторые дополнительные объяснения к доказательству теоремы 1.1, точнее, будем пользоваться тем, что доказательство проводится с использованием метода Галёркина. Другими словами, берется полная система функций из соответствующего пространства и находится последовательность приближенных решений. Из этих соображений и из того, как подбираются соответствующие пространства и отображения при доказательстве теоремы 1.1, получаем, что приближенные решения u_m данной задачи для любого m содержатся в ограниченном подмножестве пространства $\mathfrak{R}_2(Q)$.

Из условий теоремы 2.1 в силу теоремы 1.1 следует, что задача разрешима. Если функция $u(x, t)$, принадлежащая $\mathfrak{R}_1(Q)$, является решением этой задачи, то она удовлетворяет уравнению (1.1), точнее, почти всюду выполняется равенство

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D(|u|^{p_0} Du + |Du|^{p_1} Du) = f. \quad (2.1)$$

Теперь, учитывая то, что правая часть этого равенства содержится в $\mathring{W}_q^1(Q)$, по крайней мере, после изменения на множестве меры нуль получим, что и левая часть равенства (2.1) содержится в $\mathring{W}_q^1(Q)$, т.е.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D(|u|^{p_0} Du + |Du|^{p_1} Du) \in \mathring{W}_q^1(Q).$$

Тогда нетрудно видеть, что для любого $v \in L_2(Q)$ справедливо следующее равенство:

$$\int_Q \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} - D(|u|^{p_0} Du + |Du|^{p_1} Du) \right) v \, dx \, dt = \int_Q v \frac{\partial f}{\partial t} \, dx \, dt.$$

Поскольку $u \in \mathfrak{R}_1(Q)$, это равенство для любого $v \in \mathring{W}_2^1(Q)$ можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_Q \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) v \, dx \, dt - \int_Q \frac{\partial}{\partial t} (D(|Du|^{p_1} Du)) v \, dx \, dt \\ - \int_Q \frac{\partial}{\partial t} (D(|u|^{p_0} Du)) v \, dx \, dt = \int_Q \frac{\partial f}{\partial t} v \, dx \, dt. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что если последовательность u_m является последовательностью приближенных решений задачи (1.1)–(1.3), то при $m \uparrow +\infty$ имеем

$$\begin{aligned} \int_Q \frac{\partial^2 u_m}{\partial t^2} v_k \, dx \, dt - \int_Q \frac{\partial}{\partial t} (D(|Du_m|^{p_1} Du_m)) v_k \, dx \, dt \\ - \int_Q \frac{\partial}{\partial t} (D(|u_m|^{p_0} Du_m)) v_k \, dx \, dt = \int_Q \frac{\partial f}{\partial t} v_k \, dx \, dt \quad \forall k = 1, 2, \dots, \quad (2.2) \end{aligned}$$

$\{v_k(x, t)\}_{k=1}^\infty \subset \mathring{W}_2^1(Q)$ – полная система функций в этом пространстве.

В силу вышеизложенного в этом равенстве, кроме первого слагаемого, остальные интегралы определены для произвольного $v_k \in L_2(0, T; \mathring{W}_2^1(\Omega))$. Тогда, пользуясь стандартными рассуждениями и тем, что вместо $v(x, t)$ можно брать элемент полной системы, получаем, что первый интеграл также определен для $v \in L_2(0, T; \mathring{W}_2^1(\Omega))$.

Далее, так как $\frac{\partial u_m}{\partial t} \in L_2(0, T; \mathring{W}_2^1(\Omega))$, то из предыдущих объяснений следует, что вместо $v(x, t)$ в уравнение (2.2) можно подставить $\frac{\partial u_m}{\partial t}$.

Теперь доказательство теоремы вытекает из следующей леммы.

ЛЕММА 2.1. Пусть выполняются условия теоремы 2.1. Тогда для приближенных решений $u_m(x, t)$ справедливы следующие включения:

$$\begin{aligned} u_{mt} \in L_\infty(0, T; L_2(\Omega)), \quad |u_m|^{p_0/2} Du_{mt} \in L_2(Q), \\ |Du_m|^{p_1/2} Du_{mt} \in L_2(Q). \end{aligned}$$

Более того, эти выражения содержатся в ограниченных подмножествах соответствующих пространств.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Продифференцируем уравнение (2.1) по t (это возможно в силу приведенных выше объяснений). Имеем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - D(|u|^{p_0} Du_t) - p_0 D(|u|^{p_0-2} u u_t Du) - (p_1 + 1) D(|Du|^{p_1} Du_t) = f_t.$$

Полученное равенство умножим на u_{mt} и проинтегрируем по $Q_t = \Omega \times [0, t)$:

$$\begin{aligned} \int_{Q_t} \frac{\partial^2 u_m}{\partial t^2} \frac{\partial u_m}{\partial t} \, dx \, dt - \int_{Q_t} D(|u_m|^{p_0} Du_{mt}) u_{mt} \, dx \, dt \\ - p_0 \int_{Q_t} D(|u_m|^{p_0-2} u_m u_{mt} Du_m) u_{mt} \, dx \, dt \\ - (p_1 + 1) \int_{Q_t} D(|Du_m|^{p_1} Du_{mt}) u_{mt} \, dx \, dt = \int_{Q_t} f_t u_{mt} \, dx \, dt. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям последние три интеграла в левой части предыдущего равенства, получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{Q_t} \frac{\partial}{\partial t} |u_{mt}|^2 dx dt + \int_{Q_t} |u_m|^{p_0} |Du_{mt}|^2 dx dt \\ & + (p_1 + 1) \int_{Q_t} |Du_m|^{p_1} |Du_{mt}|^2 dx dt \\ & + p_0 \int_{Q_t} |u_m|^{p_0-2} u_m u_{mt} Du_m Du_{mt} dx dt = \int_{Q_t} f_t u_{mt} dx dt. \end{aligned}$$

Используя здесь неравенство Гёльдера и Юнга, получим

$$\begin{aligned} & p_0 \left| \int_{Q_t} |u_m|^{p_0-2} u_m u_{mt} Du_m Du_{mt} dx dt \right| \\ & \leq (p_0 c(\varepsilon_2) \|u_m\|_{L_\infty(Q_t)}^{p_0-2} + p_0 c(\varepsilon_1) \|u_m\|_{L_\infty(Q_t)}^{2p_0-2}) \int_{Q_t} |u_{mt}|^2 dx dt \\ & + p_0 \varepsilon_2 \int_{Q_t} |u_m|^{p_0} |Du_{mt}|^2 dx dt + p_0 \varepsilon_1 \int_{Q_t} |Du_m|^{p_1} |Du_{mt}|^2 dx dt, \end{aligned}$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — достаточно малы.

Далее, используя последнее неравенство, равенство (2.4), а также условие на функцию $f(x, t)$, после несложных оценок получаем справедливость леммы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1. Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial t} (|u_m|^{p_0/2} Du_m) = |u_m|^{p_0/2} Du_{mt} + \frac{p_0}{2} |u_m|^{p_0/2-2} u_m \frac{\partial u_m}{\partial t} Du_m,$$

то в силу леммы 2.1 и того, что $u_m \in \mathfrak{R}_2(Q)$, имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} (|u_m|^{p_0/2} Du_m) \in L_2(Q).$$

Таким образом, $u_m \in \mathfrak{R}_3(Q)$. Отсюда следует, что u_{mt} ограничено в $L_\infty(0, T; L_2(\Omega))$, а $|Du_m|^{p_1/2} Du_{mt}$ и $\frac{\partial}{\partial t} (|u_m|^{p_0/2} Du_m)$ ограничены в $L_2(Q)$.

Следовательно, из последовательности u_m можно выбрать подпоследовательность, для которой $u_{mt} \rightarrow u_t$ *-слабо в $L_\infty(0, T; L_2(\Omega))$ (см. [10]),

$$|Du_m|^{p_1/2} Du_{mt} \rightarrow \chi \text{ слабо в } L_2(Q), \quad \frac{\partial}{\partial t} (|u_m|^{p_0/2} Du_m) \rightarrow \eta \text{ слабо в } L_2(Q).$$

Далее, рассуждая так же, как при доказательстве слабой компактности оператора, порожденного задачей (1.1)–(1.3), и пользуясь тем, что $u_m \rightarrow u$ в $\mathfrak{R}_1(Q)$, имеем

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (|u_m|^{p_0/2} Du_m) \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} (|u|^{p_0/2} Du) \text{ в } L_2(Q), \\ & |Du_m|^{p_1/2} Du_{mt} \rightarrow |Du|^{p_1/2} Du_t \text{ в } L_2(Q). \end{aligned}$$

Таким образом, получаем, что решение задачи содержится в $\mathfrak{R}_3(Q)$. Теорема доказана.

§ 3. Задача со свободной границей

Далее исследуется задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D(|u|^{p_0} Du + |Du|^{p_1} Du) = f(x, t), \quad (x, t) \in Q(T), \quad (3.1)$$

$$u(s_1(t), t) = c, \quad t \in [0, T), \quad (3.2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \geq c > 0, \quad x \in (s_1(0), s_2(0)), \quad (3.3)$$

где $s_i(t)$ – неизвестные границы области $Q(T) = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in (0, T), s_1(t) \leq x \leq s_2(t)\}$. Отметим, что $u_0(x)$ рассматривается как сужение на $(s_1(0), s_2(0))$ некоторой функции $\tilde{u}_0(x) > 0$, определенной на отрезке $[a, b] \supset [s_1(0), s_2(0)]$, такой, что $D\tilde{u}_0(s_1(0), 0) > 0$, $D\tilde{u}_0(s_2(0), 0) < 0$. (Вместе с тем предполагается, что $\tilde{u}_0(x) < c$ при $x \in [a, s_1(0)] \cup [s_2(0), b]$.)

На свободной границе предполагается выполнение условия типа Стефана (почти всюду)

$$s'_i(t) = -(c_1 + c_2 |Du|^{p_1}) Du(s_i(t), t), \quad i = 1, 2, \quad (3.4)$$

где $c_1 = c^{p_0-1}$, $c_2 = 1/c$. Кроме того, предположим, что

$$u(x, t) = 0 \quad \text{при} \quad x \prec s_1(t), \quad x \succ s_2(t), \quad t \in [0, T), \quad (3.5)$$

и что $\text{supp } f \subset Q(T)$.

Допустим теперь, что существует функция $u(x, t)$, почти всюду удовлетворяющая условиям (3.1)–(3.5). Тогда полученное решение можно рассматривать как решение уравнения с разрывными коэффициентами, точнее говоря, как решение следующего уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D(a_1(x, t)|u|^{p_0} Du + a_2(x, t)|Du|^{p_1} Du) = f, \quad (3.1')$$

где

$$a_i(x, t) = \begin{cases} 1 & \forall (x, t) \in Q_T, \\ 0 & \forall (x, t) \in \{(x, t) \mid t \in [0, T], x < s_1(t) \vee x > s_2(t)\}. \end{cases}$$

Как известно из общей теории квазилинейных уравнений, в дивергентном случае краевые задачи устойчивы по отношению к вариациям коэффициентов и правых частей уравнений (см. [11]). Поэтому решения дифракционных задач, к которым относится и задача с уравнением (3.1') и краевыми условиями, вытекающими из (3.2), (3.3), можно получать как пределы хороших решений уравнений со сглаженными коэффициентами a_{1m} и a_{2m} ($a_{1m} \rightarrow a_1$, $a_{2m} \rightarrow a_2$) и правыми частями f_m , аппроксимирующими функцию f (см. [11]). Используя это, проведем вывод условия (3.4) согласно схеме, изложенной в [11]. Для решений уравнений типа (3.1') со сглаженными коэффициентами a_{1m} и a_{2m} эквивалентны равенства

$$\int_Q \frac{\partial u}{\partial t} \varphi \, dx \, dt - \int_Q D(a_{1m}|u|^{p_0} Du + a_{2m}|Du|^{p_1} Du) \varphi \, dx \, dt = \int_Q f_m \varphi \, dx \, dt, \quad (3.1''_m)$$

$$- \int_Q u \frac{\partial \varphi}{\partial t} \, dx \, dt + \int_Q (a_{1m}|u|^{p_0} Du + a_{2m}|Du|^{p_1} Du) D\varphi \, dx \, dt = \int_Q f_m \varphi \, dx \, dt, \quad (3.1'''_m)$$

где φ такое, что $\text{supp } \varphi \subset Q = [a, b] \times [0, T]$, $\varphi \in \mathring{C}^\infty(Q)$.

Итак, используя вышеизложенное, не умоляя общности, можно считать, что рассмотренная задача является пределом краевой задачи для уравнения с гладкими коэффициентами и правой частью. Учитывая это, получаем, что отмеченные эквивалентные равенства справедливы и для уравнения (3.1'). Отсюда вытекает, что

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{s_1(t)}^{s_2(t)} \frac{\partial u}{\partial t} \varphi \, dx \, dt - \int_0^T \int_{s_1(t)}^{s_2(t)} D(|u|^{p_0} Du + |Du|^{p_1} Du) \varphi \, dx \, dt \\ &= \int_0^T \int_{s_1(t)}^{s_2(t)} f \varphi \, dx \, dt, \end{aligned} \quad (3.1'')$$

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_{s_1(t)}^{s_2(t)} u \frac{\partial \varphi}{\partial t} \, dx \, dt + \int_0^T \int_{s_1(t)}^{s_2(t)} (|u|^{p_0} Du + |Du|^{p_1} Du) D \varphi \, dx \, dt \\ &= \int_0^T \int_{s_1(t)}^{s_2(t)} f \varphi \, dx \, dt. \end{aligned} \quad (3.1''')$$

Далее, преобразуя уравнение (3.1''), получим

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_{s_1(t)}^{s_2(t)} u \frac{\partial \varphi}{\partial t} \, dx \, dt + \int_0^T \int_{s_1(t)}^{s_2(t)} (|u|^{p_0} Du + |Du|^{p_1} Du) D \varphi \, dx \, dt \\ &+ \int_0^T \int_{s_1(t)}^{s_2(t)} \frac{\partial}{\partial t} (u \varphi) \, dx \, dt \\ &- \int_0^T \int_{s_1(t)}^{s_2(t)} D(|u|^{p_0} Du + |Du|^{p_1} Du) \varphi \, dx \, dt = \int_0^T \int_{s_1(t)}^{s_2(t)} f \varphi \, dx \, dt. \end{aligned}$$

Последнее равенство равносильно следующему:

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_{s_1(t)}^{s_2(t)} u \frac{\partial \varphi}{\partial t} \, dx \, dt + \int_0^T \int_{s_1(t)}^{s_2(t)} (|u|^{p_0} Du + |Du|^{p_1} Du) D \varphi \, dx \, dt \\ &- \int_0^T (|u|^{p_0} Du \varphi|_{s_2(t)} - |u|^{p_0} Du \varphi|_{s_1(t)} + |Du|^{p_1} Du \varphi|_{s_2(t)} \\ &- |Du|^{p_1} Du \varphi|_{s_1(t)}) \, dt + \int_0^T \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{s_1(t)}^{s_2(t)} \varphi u \, dx \right) \, dt \\ &- \int_0^T s_2'(t) u(s_2(t), t) \varphi(s_2(t), t) \, dt + \int_0^T s_1'(t) u(s_1(t), t) \varphi(s_1(t), t) \, dt \\ &= \int_0^T \int_{s_1(t)}^{s_2(t)} f \varphi \, dx \, dt. \end{aligned}$$

Теперь, учитывая, что $\text{supp } \varphi \subset Q$, в силу уравнения (3.1''') и произвольности функции φ получаем

$$\int_0^T (|u|^{p_0} + |Du|^{p_1}) Du \varphi|_{s_i(t)} \, dt = - \int_0^T s_i'(t) u(s_i(t), t) \varphi(s_i(t), t) \, dt.$$

Если функция $Du(x, t)$ непрерывна, то почти всюду выполняется равенство

$$s'_i(t)u(s_i(t), t) = -(|u|^{p_0} + |Du|^{p_1})Du(s_i(t), t).$$

Это равенство есть не что иное, как условие (3.4).

Итак, остается показать существование достаточно гладкого решения $u(x, t)$ уравнения (1.1) такого, что вместе с кривыми $s_i(t)$, определенными по (3.2), (3.4), тройка $\{u(x, t), s_1(t), s_2(t)\}$ удовлетворяла бы условиям (3.1)–(3.5).

Для этого рассмотрим следующую задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D(|u|^{p_0} Du + |Du|^{p_1} Du) = f(x, t), \quad (x, t) \in Q, \quad (3.6)$$

$$u(x, 0) = \tilde{u}_0(x) > 0, \quad x \in (a, b), \quad (3.7)$$

$$u|_{\Gamma} = 0, \quad \Gamma = \partial\Omega \times [0, T] \quad (3.8)$$

(как уже отмечалось, $u_0(x)$ является сужением некоторой функции $u(x, 0) = \tilde{u}_0(x) > 0$, определенной на отрезке $[a, b]$).

В предыдущих параграфах было доказано существование определенного гладкого решения задачи (3.6)–(3.8). Однако для дальнейших исследований необходимо доказать следующую лемму.

ЛЕММА 3.1. *Пусть выполнены условия теоремы 2.1. Тогда для решения задачи (3.6)–(3.8) справедливы следующие включения:*

$$u \in C^0(0, T; C^\gamma(\Omega)), \quad 0 < \gamma < 1, \quad (3.9)$$

$$Du \in C^0(0, T; C^\delta(\Omega)), \quad 0 < \delta < 1. \quad (3.10)$$

Предварительно докажем следующие два утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.1. *Пусть $u(x, t) \in \mathfrak{R}_3(Q)$ – решение задачи (3.6)–(3.8) при условиях теоремы 2.1. Тогда справедливо следующее включение: $|Du|^{p_1} Du \in L_\infty(0, T; W_2^1(\Omega))$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перепишем уравнение (3.6) в следующем виде:

$$(p_1 + 1)|Du|^{p_1} D^2 u + |u|^{p_0} D^2 u = f - u_t - p_0|u|^{p_0-2} u |Du|^2.$$

Из результатов предыдущих параграфов и условия на функцию $f(x, t)$ имеем

$$(p_1 + 1)|Du|^{p_1} D^2 u + |u|^{p_0} D^2 u = f - u_t - p_0|u|^{p_0-2} u |Du|^2 \in L_\infty(0, T; L_2(\Omega)).$$

Следовательно, $|Du|^{p_1} D^2 u \in L_\infty(0, T; L_2(Q))$. Учитывая, что

$$|Du|^{p_1} Du \in L_\infty(0, T; L_2(Q))$$

(см. определение $\mathfrak{R}_1(Q)$), получаем справедливость утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.2. В условиях леммы 3.1 справедливо включение $u \in C(\Omega; C^{\frac{1}{2}}(0, T))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $u \in \mathfrak{R}_3(Q)$, то, в частности,

$$|u|^{p_0/2} u \in L_2(\Omega; W_2^1(0, T)), \quad \frac{\partial}{\partial x}(|u|^{p_0/2} u) \in L_2(\Omega; W_2^1(0, T)).$$

Отсюда на основании известной леммы (см. [10]) имеем

$$|u|^{p_0/2} u \in C(\Omega; W_2^1(0, T)).$$

Далее, используя теорему Кондрашова (см. [12]), получим, что

$$C(\Omega; W_2^1(0, T)) \subset C(\Omega; C^{1/2}(0, T)),$$

т.е. $|u|^{p_0/2} u \in C(\Omega; C^{1/2}(0, T))$.

Ввиду того, что

$$|u(x, t_2) - u(x, t_1)|^{\frac{p_0}{2}+1} \leq l_1 |u|^{\frac{p_0}{2}} u(x, t_2) - |u|^{\frac{p_0}{2}} u(x, t_1) \leq l_2 |t_2 - t_1|^{\frac{1}{2}},$$

имеем

$$|u(x, t_2) - u(x, t_1)| \leq l_3 |t_2 - t_1|^{\frac{1}{p_0+2}} \quad \forall t_2, t_1 \in [0, T], \quad x \in \Omega.$$

Следовательно, $u(x, t) \in C(\Omega; C^{1/2}(0, T))$. Тем самым, утверждение доказано.

Отметим, что поскольку $|Du|^{p_1} Du \in L_\infty(0, T; W_2^1(\Omega)) \cap W_2^1(0, T; L_2(\Omega))$ (см. утверждение 3.1 и определение $\mathfrak{R}_3(Q)$), то из теоремы Кондрашова следует, что $Du \in L_\infty(0, T; C^{\frac{1}{2(p_1+1)}}(\Omega))$.

Кроме того, известна следующая лемма.

ЛЕММА 3.2 [11]. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию конуса, функция $u(x, t)$ в $Q = \Omega \times (0, T)$ удовлетворяет условию Гёльдера по t с показателем α и константой Гёльдера μ_1 и имеет производные $D_i u$, которые при любом t из $[0, T]$ удовлетворяют условию Гёльдера по x с показателем β и константой Гёльдера μ_2 . Тогда производные $D_i u$ удовлетворяют в Q условию Гёльдера по t с показателем $\tilde{\delta} = \alpha\beta/(1+\beta)$ и константой Гёльдера $\tilde{\mu}$, определяемой лишь $\alpha, \beta, \mu_1, \mu_2, d$ и телесным углом при вершине конуса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы остается в силе и в том случае, если потребовать, чтобы производные $D_i u$ удовлетворяли условию Гёльдера при почти всех t , с той лишь разницей, что тогда $D_i u$ удовлетворяют в Q условию Гёльдера после соответствующего доопределения этих функций на множестве меры нуль.

Учитывая все вышеизложенное, в силу утверждения 3.2 и последней леммы получаем, что $Du \in C(0, T; C^\delta(\Omega))$. Лемма доказана.

В силу выбора $\tilde{u}_0(x)$, а точнее, в силу того, что $D\tilde{u}_0(s_i(0), 0) \neq 0$, учитывая найденную в лемме 3.1 гладкость, получим на основании теоремы о неявной функции существование некоторых локально единственных кривых $s_i(t)$, исходящих из

точек $(s_i(0), 0)$, на которых выполняется условие $u(x, t) = c$. Нетрудно заметить тогда, что сужение на $Q(T)$ решения задачи (3.6)–(3.8) является искомым решением задачи (3.1)–(3.5).

Поскольку $Du(s_1(0), 0) > 0$ и $Du(s_2(0), 0) < 0$, получаем, что в силу условия (3.4) эти кривые соответственно локально неубывающая и невозрастающая до некоторой точки (x_i, t_i) , в которой $Du = 0$ (если такая точка найдется). Тогда справедлива следующая

ЛЕММА 3.3. *В условиях теоремы 2.1 существуют точки $(x(t_1), t_1)$, $(x(t_2), t_2)$, до которых функции $s_1(t)$, $s_2(t)$ являются неубывающей и невозрастающей соответственно.*

Итак, пусть $Du(x_i, t_i) = 0$, $i = 1, 2$. Тогда, например, из точки (x_1, t_1) может выйти сколь угодно много кривых, на которых $u(x, t) = c$. В силу непрерывности функции $u(x, t)$ эти кривые являются непрерывными. Выберем из этих кривых самую крайнюю при движении по часовой стрелке вокруг точки (x_1, t_1) . Возможны следующие два предположения:

- 1) какую бы точку $(\tilde{x}, \tilde{t})$ кривой мы не взяли, продолжение ее будет лежать выше прямой $t = \tilde{t}$ (рис.1);
- 2) предположение 1) неверно.

Рис. 1

Рассмотрим далее оба предположения.

1) Полученную после продолжения кривую вновь обозначим через $s_1(t)$. Поскольку Du везде удовлетворяет условию (3.10), то ясно, что во всех точках этой части кривой Du определено. Заметим сразу же, что Du на продолженной кривой $s_1(t)$ также не может быть меньше нуля в силу того, что справа от $s_1(t)$ имеет место условие $u > c$ и $u(s_1(t), t) = c$.

Исходя из этого, докажем, что кривая $s_1(t)$ не возрастает.

Предположим обратное, т.е. допустим, что на некотором отрезке $[t', t'']$ функция $s_1(t)$ возрастает. Тогда на этом отрезке в силу теоремы Лебега [13] функция $s_1(t)$

имеет почти всюду производную. Указанная производная будет всюду не меньше нуля. С другой стороны, так как $Du(s_1(t), t) \geq 0$, то $s_1'(t) \leq 0$ в силу условия (3.4). Следовательно, $s_1'(t) = 0$ почти всюду на $[t', t'']$.

Известно (см. [13]), что если производная монотонной абсолютно непрерывной функции равна нулю почти всюду, то эта функция постоянная. Таким образом, если $s_1(t)$ — абсолютно непрерывная функция, то указанная теорема приводит в противоречие с предположением о том, что $s_1(t)$ — возрастающая функция. Иначе говоря, если мы докажем, что $s_1(t)$ абсолютно непрерывна, то отсюда будет следовать, что не существует такого интервала $[t', t'']$, где $s_1(t)$ возрастает.

Известно, что если для двух суммируемых функций v_1 и v_2 выполнено равенство $v_1' = v_2'$ в обобщенном смысле, то $v_1 - v_2 = \text{const}$ (почти всюду). Пусть $v_1 = s_1$, а v_2 — функция, восстановленная по производной $v_2' = (|Du|^{p_1} Du)(s_1(t), t)$. Так как $|Du|^{p_1} Du$ — непрерывная функция, то функция v_2 абсолютно непрерывна. Поскольку $v_1 - v_2 = \text{const}$ почти всюду, то это равенство выполнено всюду, так как s_1 и v_2 — непрерывные функции. Но v_2 абсолютно непрерывна. Следовательно, $s_1 = \text{const} + v_2$ абсолютно непрерывна. Таким образом, получили, что $s_1(t)$ не может быть возрастающей функцией.

Итак, функция $s_1(t)$ невозрастающая.

Рис. 2.

2) Допустим теперь, что в точке (x_1, t_1) предположение 1) нарушается (рис. 2). Продолжение кривой $s_1(t)$ из точки (x_1, t_1) обозначим также через $s_1(t)$. Поскольку в окрестности точки (x_1, t_1) , слева от продолжения кривой $s_1(t)$ выполняется неравенство $u(x, t) > c$, то на этой части кривой справедливо неравенство $Du(s_1(t), t) \leq 0$. Отсюда, вновь применяя условие (3.4) и рассуждения, аналогичные приведенным выше, получаем, что $s_1(t)$ — неубывающая функция начиная с некоторого $t' < t_1$.

Рассмотрим дальнейшее поведение $s_1(t)$. Естественно, что $s_1(t)$ может пересекать ось Ox только в точке $(s_1(0), 0)$, так как $\tilde{u}_0 < c$ на интервале $[a, s_1(0))$. Но и

этого не может произойти, поскольку из точки $(s_1(0), 0)$ исходит лишь одна кривая. Поэтому функция $s_1(t)$, имея конечное или бесконечное число “пиковых точек” типа точки (x_1, t_1) , в случае 2), показанном на рис. 2, будет убывать.

Такие же рассуждения, примененные к точке $(s_1(0), 0)$, можно использовать для доказательства того факта, что из точки $(s_2(0), 0)$ выходит некоторая непрерывная кривая, имеющая почти всюду производную. Но в отличие от кривой $s_1(t)$, кривая, исходящая из точки $(s_2(0), 0)$, не убывает в какой-то окрестности указанной точки.

Рис. 3

Далее, кривая $s_2(t)$, возможно, образуя “пиковые” точки, отдаляется от кривой $s_1(t)$ (рис. 3.).

Таким образом, верна следующая

ЛЕММА 3.4. *Кривая $s_1(t)$, $(s_2(t))$ – глобально невозрастающая (неубывающая). Однако $s_1(t)$ ($s_2(t)$) локально может содержать участки возрастания (убывания), не пересекающиеся с прямой $t = 0$.*

Из проведенных рассуждений вытекает справедливость следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 3.1. *Пусть $p_0 \geq 2$, $p_1 \geq 2$. Тогда для любых функций $f \in \overset{\circ}{W}_q^1(Q(T))$ и $\tilde{u}_0 \in \overset{\circ}{W}_r^1(\Omega)$ при $r = \max\{p_0 + p_1 + 2; 2p_0 + p_* + 2, N + 2\}$, $q = \max\{4, p_* + 2, N + 2\}$ задача (3.1)–(3.5) разрешима в $\mathfrak{R}_3(Q) \times W_2^1(0, T) \times W_2^1(0, T)$, т.е. $s_i(t) \in W_2^1(0, T)$, $u \in \mathfrak{R}_3(Q(T))$.*

Список литературы

1. Данилюк И. И. О задаче Стефана // УМН. 1985. Т. 40. № 5. С. 245.
2. Фридман А. Вариационные принципы и задачи со свободными границами. М.: Наука, 1990.
3. Солтанов К. Н. Теоремы вложения для нелинейных пространств и разрешимость некоторых нелинейных некоэрцитивных уравнений. Деп. в ВИНТИ 16.09.91, № 3697-В 91.

4. Новрузов Э.Б. О гладкой разрешимости уравнений типа уравнений неустойчивой фильтрации // Тр. Ин-та мат. и мех. 1996. Т. 6. С. 179–183.
5. Солтанов К.Н. О нелинейных уравнениях вида $F(x, u, Du, \Delta u) = 0$ // Матем. сб. 1993. Т. 184. № 11. С. 131–160.
6. Солтанов К.Н. Существование и несуществование глобального решения некоторых эллиптико-параболических уравнений // Дифф. уравн. 1993. Т. 29. № 4. С. 646–661.
7. Soltanov K. N., Sprechels J. Nonlinear equations in nonreflexive Banach spaces and fully Nonlinear equations // Adv. in Math. Sci. and Appl. 1999. V. 9. № 2. P. 939–972.
8. Солтанов К.Н. Некоторые теоремы вложения и их приложения к нелинейным уравнениям // Дифф. уравн. 1984. Т. 20. № 12. С. 2181–2184.
9. Вишик М.И. О разрешимости краевых задач для квазилинейных параболических уравнений высших порядков // Матем. сб. 1962. Т. 59. № 7. С. 289–325.
10. Лионс Ж.Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
11. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
12. Гилбарг Д., Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989.
13. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972.

E-mail: soltanov@dcacs.ab.az
soltanov@lan.ab.az
ksoltanov@hotmail.com

Поступило в редакцию
26.XI.1999