Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Н. Туманов, А. А. Шкаликов, О предельном поведении спектра модельной задачи для уравнения Орра–Зоммерфельда с профилем Пуазейля, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2002, том 66, выпуск 4, 177–204

DOI: <https://doi.org/10.4213/im399>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 13:05:55

УДК 517.927+517.928

С. Н. Туманов, А. А. Шкаликов

**О предельном поведении спектра модельной задачи
для уравнения Орра–Зоммерфельда
с профилем Пуазейля**

Изучается задача о предельном поведении спектра оператора $L(\varepsilon)y = i\varepsilon y'' + x^2 y$ с краевыми условиями Дирихле на конечном отрезке, когда положительный параметр ε стремится к нулю. Доказано, что спектр концентрируется вдоль трех кривых в комплексной плоскости, соединяющих точку-узел λ_0 , лежащую в числовом образе оператора с точками 0, 1 и $-i\infty$. Найдены равномерные по ε квазиклассические формулы распределения собственных значений вдоль этих трех кривых.

Библиография: 7 наименований.

§ 1. Введение

В настоящей работе изучается семейство дифференциальных операторов

$$L(\varepsilon)y = i\varepsilon y'' + x^2 y, \quad \varepsilon > 0, \quad (1.1)$$

на отрезке $[-1, 1]$ с краевыми условиями

$$y(-1) = y(1) = 0. \quad (1.2)$$

Цель работы – показать, что при малых значениях ε собственные значения операторов $L(\varepsilon)$ концентрируются около некоторых кривых в комплексной плоскости, вид которых укажем явно. Найдём асимптотические формулы распределения собственных значений, равномерные по ε , и укажем функции распределения собственных значений вдоль критических линий.

Подобная задача, когда вместо функции $q(x) = x^2$ в (1.1) участвует функция $q(x) = x$, изучена в работе [1], где предельное множество, вдоль которого концентрируются собственные значения, названо *спектральным галстуком*. Граф критических линий в изучаемой задаче для $q(x) = x^2$ по форме также напоминает галстук, но только несимметричный. Будем называть его *предельным спектральным графом*.

В [1] отмечено, что форма предельного спектрального графа для профиля $q(x)$ определяется топологией графов Стокса функции $i(q(z) - \lambda)$. В общем случае определение критических линий концентрации собственных значений – сложная задача. Нелегкой эта задача является даже для конкретной функции $q(x) = x^2$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 01-01-00691, № 00-15-96100).

Отметим, что рассматриваемая задача является моделью для известного в гидродинамике уравнения Орра–Зоммерфельда с профилем Пуазейля. Некоторые аргументы, поясняющие, что задача (1.1), (1.2) может служить моделью для уравнения Орра–Зоммерфельда, приведены в [2]. При этом роль малого параметра играет число $\varepsilon = 1/R$, где R – число Рейнольдса, которое обратно пропорционально вязкости жидкости. Таким образом, малым значениям параметра ε соответствует уравнение движения жидкости, близкой к идеальной.

§ 2. Общие замечания о спектре

Пусть $L = L(\varepsilon)$ – оператор, порожденный дифференциальным выражением

$$Ly = i\varepsilon y'' + x^2 y$$

и краевыми условиями

$$y(-1) = y(1) = 0;$$

здесь ε – малый положительный параметр.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Спектр оператора $L(\varepsilon)$ лежит в полуполосе*

$$\Pi_\varepsilon = \left\{ \xi \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Re} \xi < 1, \operatorname{Im} \xi < -\frac{\varepsilon \pi^2}{4} \right\}. \quad (2.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно, что спектр оператора L заключен в его числовом образе, т. е. во множестве значений квадратичной формы (Ly, y) , когда y пробегает единичную сферу. В нашем случае имеем

$$(Ly, y) = -i\varepsilon(y', y') + (x^2 y, y).$$

Первое собственное значение оператора $L_0 y = -y''$ с рассматриваемыми краевыми условиями Дирихле равно $\pi^2/4$, поэтому

$$\frac{\pi^2}{4} \int_{-1}^1 |y(x)|^2 dx \leq \int_{-1}^1 |y'(x)|^2 dx.$$

Отсюда получается сформулированное предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. *При любом $\varepsilon > 0$ спектр L состоит из последовательности собственных значений $\{\lambda_n\}$, для которых существует предел вещественных частей:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \lambda_n = \frac{1}{3}.$$

Более того, справедлива асимптотика

$$\lambda_n = -\frac{\pi^2 i}{4\varepsilon} n^2 + \frac{1}{3} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \quad (2.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем замену $x = 2t/\pi - 1$, $\mu = 4i\lambda/(\pi^2\varepsilon)$. Тогда краевая задача (1.1), (1.2) примет вид

$$-z'' + \frac{i}{\varepsilon} \frac{4}{\pi^2} \left(\frac{2t}{\pi} - 1 \right)^2 z, \quad z(0) = z(\pi) = 0.$$

Известно [3], что собственные значения задачи имеют асимптотику:

$$\sqrt{\mu_n} = n + \frac{b_0}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

где

$$b_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi g(t) dt, \quad g(t) = \frac{4i}{\pi^2\varepsilon} \left(\frac{2t}{\pi} - 1 \right)^2.$$

Делая обратную замену, получим требуемую формулу. Предложение доказано.

Обращаем внимание на то, что остаточный член в формуле (2.2) имеет оценку $|O(n^{-2})| \leq C(\varepsilon)n^{-2}$, где постоянная $C(\varepsilon)$ зависит от ε . Однако далее будет установлена равномерная оценка по ε и по n .

Далее через Π обозначаем полуполосу (2.1) при $\varepsilon = 0$. Из леммы 2.1 следует, что предельное множество концентрации спектра оператора $L(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ лежит в Π .

§ 3. Граф Стокса

Напомним некоторые понятия, используемые в теории графов Стокса целых функций (подробное изложение этой теории см. в [5]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Нули целой функции q называются *точками поворота*. Точка поворота называется *простой*, если она является простым нулем функции q .

Введем многозначную функцию двух переменных

$$S(a, z) = \int_a^z \sqrt{q(\zeta)} d\zeta.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Пусть a – точка поворота целой функции q . Аналитические кривые, определенные уравнением $\operatorname{Re} S(a, z) = 0$, называются *линиями Стокса, выходящими из точки поворота a* . Аналитические кривые, определяемые уравнением $\operatorname{Im} S(a, z) = 0$, называются *сопряженными линиями Стокса, выходящими из точки поворота a* .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Объединение всех линий Стокса называется *графом Стокса*. Связная компонента графа Стокса называется *комплексом Стокса*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4. Максимальные области однолиственности функции S , ограниченные линиями Стокса, будем называть *каноническими областями*.

Легко заметить, что граница канонической области содержит, по меньшей мере, одну точку поворота, а сама область – единственную линию Стокса, выходящую из этой точки.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.5. Тройку (D_j, l_j, a_j) , где a_j – точка поворота, l_j – линия Стокса, выходящая из этой точки, D_j – каноническая область, содержащая l_j , будем называть *канонической*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.6. Пусть (D_j, l_j, a_j) – каноническая тройка. Ветвь функции $S(a_j, z)$, для которой $\operatorname{Im} S(a_j, l_j) = [0; +\infty)$, будем называть *канонической ветвью*, соответствующей данной тройке.

В случае зависимости функции q от некоторого параметра λ получаем семейство графов Стокса $\Phi(\lambda)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.7. Графы $\Phi(\lambda_1)$, $\Phi(\lambda_2)$ *эквивалентны*, если существует гомеоморфизм

$$\phi: \Phi(\lambda_1) \rightarrow \Phi(\lambda_2),$$

при котором точки поворота переходят в точки поворота.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.8. Точка λ_0 называется *допустимой*, если существует окрестность $O(\lambda_0)$ такая, что для всех точек λ этой окрестности графы $\Phi(\lambda_0)$ и $\Phi(\lambda)$ эквивалентны. В противном случае точка λ_0 называется *недопустимой*.

Пусть

$$q(z, \lambda) = a_0(\lambda)(z - b_1(\lambda))^{n_1} \dots (z - b_k(\lambda))^{n_k}, \quad n_j \in \mathbb{N},$$

где b_j – алгебраические функции, $a_0 \not\equiv 0$ – полином.

Положим

$$\Sigma(a, b, \lambda) = \int_a^b \sqrt{q(\zeta, \lambda)} d\zeta.$$

Пусть I_1 – нули $a_0(\lambda)$, I_2 – множество всех λ таких, что $b_j(\lambda) = b_l(\lambda)$ при $j \neq l$, I_3 – множество всех λ таких, что $\operatorname{Re} \Sigma(b_j(\lambda), b_l(\lambda), \lambda) = 0$ при некоторых $j \neq l$.

Справедлива следующая лемма (см. [5, § 3, п. 5]).

ЛЕММА 3.1. *Множество всех недопустимых точек есть*

$$I = I_1 \cup I_2 \cup I_3.$$

В этом параграфе изучим топологию графа Стокса функции $q(z, \lambda) = i(z^2 - \lambda)$ при $\lambda \in \Pi$, где

$$\Pi = \{\xi \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Re} \xi < 1, \operatorname{Im} \xi < 0\}.$$

ЛЕММА 3.2. *Для функции $q(z, \lambda) = i(z^2 - \lambda)$ имеем*

$$I_1 = \emptyset, \quad I_2 = \{0\}, \quad I_3 = \left\{ \lambda \mid \arg \lambda = -\frac{\pi}{4} \right\},$$

т. е. множество недопустимых точек в Π совпадает с лучом $\arg \lambda = -\pi/4$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для множеств I_1 и I_2 утверждение леммы очевидно. Согласно определению множество точек $\lambda \in I_3$ определяется уравнением

$$\operatorname{Re}\left(e^{\frac{\pi}{4}i} \int_{-\sqrt{\lambda}}^{\sqrt{\lambda}} \sqrt{\zeta^2 - \lambda} d\zeta\right) = 0.$$

После замены $\xi = \zeta/\sqrt{\lambda}$ это уравнение приводится к виду

$$\operatorname{Re}\left(\lambda e^{\frac{\pi}{4}i} \int_{-1}^1 \sqrt{\xi^2 - 1} d\xi\right) = 0,$$

что эквивалентно уравнению $\operatorname{Re}(\lambda e^{\frac{\pi}{4}i}) = 0$. Лемма доказана.

Введем ветвь $\sqrt{\lambda}$, которую всюду далее будем называть *основной*: $\arg \sqrt{\lambda} \in (-\pi/4, 0)$ при $\lambda \in \Pi$. Если не оговорено противное, предполагаем, что $\lambda \in \Pi$. Из общей теории графов Стокса [5] следует, что граф Стокса рассматриваемой функции в зависимости от λ может либо быть связным, либо содержать два комплекса Стокса. В последнем случае каждый из комплексов состоит из трех линий Стокса, выходящих из точки поворота под углами $2\pi/3$ по отношению друг к другу. Линии Стокса каждого комплекса можно условно разделить на внутренние (по две на комплекс) и внешние (по одной на комплекс). Внутренние линии характеризуются асимптотическим стремлением к линиям Стокса парного комплекса (см. рис. 1).

Рис. 1. Внешние и внутренние линии графа Стокса

В изучаемом случае точками поворота являются $\pm\sqrt{\lambda}$. Уравнение для графа Стокса будет выглядеть следующим образом:

$$\operatorname{Re}\left(e^{\frac{\pi}{4}i} \int_{\pm\sqrt{\lambda}}^z \sqrt{\zeta^2 - \lambda} d\zeta\right) = 0. \quad (3.1)$$

После замены переменных в интеграле и сокращения на $|\lambda|$ это уравнение можно переписать в виде

$$\operatorname{Re}\left(e^{(\frac{\pi}{4}+\psi)i} \int_1^{\pm z/\sqrt{\lambda}} \sqrt{\zeta^2 - 1} d\zeta\right) = 0, \quad \psi = \arg \lambda \in (-\pi/2, 0). \quad (3.2)$$

Далее через $\Gamma = \Gamma(\lambda)$ обозначим граф Стокса функции $Q(z\lambda) = i(z^2 - \lambda)$.

ЛЕММА 3.3. *Граф Стокса Γ обладает свойством центральной симметрии относительно точки 0.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение следует из четности функции $q = i(z^2 - \lambda)$. Таким образом, если граф Γ не связный, а состоит из двух комплексов, то достаточно изучать топологию одного комплекса Стокса.

ЛЕММА 3.4. *Граф $\Gamma(\lambda)$ связный тогда и только тогда, когда $\psi = \arg \lambda = -\pi/4$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Связность графа Стокса равносильна принадлежности точек $\pm\sqrt{\lambda}$ одному комплексу, из чего согласно (3.2) получим

$$\operatorname{Re} \left(e^{(\frac{\pi}{4} + \psi)i} \int_{-1}^1 \sqrt{\zeta^2 - 1} d\zeta \right) = 0.$$

Поскольку

$$\int_{-1}^1 \sqrt{\zeta^2 - 1} d\zeta = i \frac{\pi}{2},$$

то последнее уравнение выполняется в том и только том случае, когда $\psi = -\pi/4$. Лемма доказана.

Рис. 2. Линии Стокса в случае $\arg \lambda \in (-\pi/4, 0)$ (для $\lambda = 1/2 - i/4$)

Рис. 3. Линии Стокса в случае $\arg \lambda = -\pi/4$ (для $\lambda = 1/4 - i/4$)

Рис. 4. Линии Стокса в случае $\arg \lambda \in (-\pi/2, -\pi/4)$ (для $\lambda = 1/4 - i/2$)

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. В дальнейшем важно понимать, какие области являются каноническими для рассматриваемой функции q . Рассмотрим два случая.

1) $\arg \lambda \neq -\pi/4$. Тогда граф $\Gamma(\lambda)$ состоит из двух комплексов Стокса (см. рис. 1), которые разбивают плоскость на области двух типов: типа полосы (область, ограниченная внутренними линиями Стокса, на рисунке она обозначена Ω_3) и типа полуплоскости (все остальные области). В этом случае канонические области могут быть двух типов:

а) области, состоящие из двух областей типа полуплоскости и содержащие одну внешнюю линию Стокса (например, $\Omega_1 \cup \Omega_2$);

б) области, содержащие область типа полосы и две примыкающие к ней области типа полуплоскости, отвечающие различным комплексам Стокса (например, $\Omega_1 \cup \Omega_3 \cup \Omega_4$, $\Omega_1 \cup \Omega_3 \cup \Omega_5$; см. рис. 1).

2) $\arg \lambda = -\pi/4$. Тогда граф Стокса состоит из одного комплекса, разбивающего плоскость на четыре области типа полуплоскости. В этом случае канонические области состоят из любых двух соседних областей типа полуплоскости.

ЛЕММА 3.5. *Граф Γ связный тогда и только тогда, когда $0 \in \Gamma$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность очевидна, докажем необходимость. Из предыдущей леммы имеем $\psi = -\pi/4$. Подставляя в (3.2) значение аргумента, получаем уравнение, которому удовлетворяет точка 0. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.6. *Если граф Γ состоит из двух комплексов, то точка 0 лежит внутри области, ограниченной внутренними линиями Стокса обоих комплексов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это утверждение вытекает из симметрии графа Γ относительно точки 0.

Далее мы исследуем, какие линии Стокса графа $\Gamma(\lambda)$ пересекают вещественную ось в зависимости от параметра $\lambda \in \Pi$ (см. рис. 2–4).

ЛЕММА 3.7. *Если $\arg \lambda = \psi \in (-\pi/2, -\pi/4)$, то граф $\Gamma(\lambda)$ состоит из двух комплексов. При этом вещественную положительную полуось пересекает не более одной линии Стокса каждого комплекса. Такое же утверждение справедливо и для отрицательной полуоси.*

Рис. 5. Линии и сопряженные линии Стокса функции $p(z) = z^2 - 1$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала линии Стокса и сопряженные линии Стокса функции $p(z) = z^2 - 1$ (см. рис. 5). Первые задаются уравнением

$$\operatorname{Re} \int_{\pm 1}^z \sqrt{\zeta^2 - 1} d\zeta = 0,$$

а вторые – уравнением

$$\operatorname{Im} \int_{\pm 1}^z \sqrt{\zeta^2 - 1} d\zeta = 0.$$

Эти кривые разбивают первую четверть на три области, при переходе через границы которых меняются знаки либо вещественной, либо мнимой части интеграла $\int_1^z \sqrt{\zeta^2 - 1} d\zeta$. Рассмотрим ветвь функции $y = \sqrt{\zeta^2 - 1}$, принимающую положительные значения при $\zeta > 1$.

Пусть $r \rightarrow +\infty$, $\varepsilon \rightarrow +0$. Тогда

$$\int_1^{r+i\varepsilon} \sqrt{\zeta^2 - 1} d\zeta = \int_1^r \sqrt{\zeta^2 - 1} d\zeta + \int_r^{r+i\varepsilon} \sqrt{\zeta^2 - 1} d\zeta.$$

Очевидно, что мнимая и действительная части интеграла положительны. На рис. 5 это отражается знаками ++, проставленными в соответствующей области. На том же рисунке парами знаков обозначены две оставшиеся области. Первый знак соответствует знаку вещественной части интеграла, второй – знаку мнимой.

Предположим, что найдутся две линии Стокса l_1 и l_2 графа $\Gamma(\lambda)$, отвечающего функции $q = i(z^2 - \lambda)$, пересекающие вещественную положительную полуось. Пусть z_1 и z_2 – точки пересечения. Имеем равенство

$$\operatorname{Re} \left(e^{(\frac{\pi}{4} + \psi)i} \int_1^{z_1/\sqrt{\lambda}} \sqrt{\zeta^2 - 1} d\zeta \right) = \operatorname{Re} \left(e^{(\frac{\pi}{4} + \psi)i} \int_1^{z_2/\sqrt{\lambda}} \sqrt{\zeta^2 - 1} d\zeta \right) = 0.$$

Так как линии Стокса различны, то различными будут знаки мнимых частей:

$$\operatorname{sgn} \operatorname{Im} \left(e^{(\frac{\pi}{4} + \psi)i} \int_1^{z_1/\sqrt{\lambda}} \sqrt{\zeta^2 - 1} d\zeta \right) = -\operatorname{sgn} \operatorname{Im} \left(e^{(\frac{\pi}{4} + \psi)i} \int_1^{z_2/\sqrt{\lambda}} \sqrt{\zeta^2 - 1} d\zeta \right).$$

Таким образом, можно считать, что найдется $\alpha \in \mathbb{R}$ такое, что

$$\int_1^\eta \sqrt{\zeta^2 - 1} d\zeta = -\alpha^2 \int_1^{\gamma\eta} \sqrt{\zeta^2 - 1} d\zeta. \quad (3.3)$$

Здесь $\eta = z_1/\sqrt{\lambda}$, $\gamma\eta = z_2/\sqrt{\lambda}$, $\gamma > 0$, а $\arg \eta = \arg \gamma\eta \in (\pi/8, \pi/4)$. Последнее следует из условия леммы: $\arg \lambda \in (-\pi/2, -\pi/4)$.

Обозначим $\theta = \arg \int_1^\eta \sqrt{\zeta^2 - 1} d\zeta$. Из соотношения

$$\operatorname{Re} \left(e^{(\frac{\pi}{4} + \psi)i} e^{\theta i} \left| \int_1^{z_1/\sqrt{\lambda}} \sqrt{\zeta^2 - 1} d\zeta \right| \right) = 0$$

получим $\cos(\pi/4 + \psi + \theta) = 0$, откуда следует $\theta = \pi/4 - \psi + \pi m$. Так как $-\pi/2 < \psi < -\pi/4$, имеем $\pi/2 + \pi m < \theta < 3\pi/4 + \pi m$. Стало быть,

$$\operatorname{sgn} \operatorname{Re} \int_1^\eta \sqrt{\zeta^2 - 1} d\zeta = -\operatorname{sgn} \operatorname{Im} \int_1^\eta \sqrt{\zeta^2 - 1} d\zeta.$$

У интеграла $\int_1^{\gamma\eta} \sqrt{\zeta^2 - 1} d\zeta$ знаки мнимой и вещественной частей тоже различны, следовательно, значения обоих интегралов лежат в области, обозначенной на рис. 5 знаками $-+$, что противоречит (3.3). Тем самым утверждение для положительной полуоси доказано. Для отрицательной полуоси утверждение справедливо в силу симметрии.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $\arg \lambda = \psi \in (-\pi/2, -\pi/4)$. Тогда внешние линии Стокса графа $\Gamma(\lambda)$ не пересекаются с $\mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все рассуждения будут проводиться для одного комплекса Стокса. Так как внутренние линии Стокса одного комплекса асимптотически сближаются с линиями второго комплекса, то хотя бы одна внутренняя линия обязана пересечь вещественную полуось. Допустим, что внешняя линия Стокса тоже пересечет $\mathbb{R}$. Согласно лемме 3.7 она не может пересечь ту же полуось, что и внутренняя линия, пересекающая $\mathbb{R}$, т. е. внутренняя и внешняя линии рассматриваемого комплекса пересекают разные вещественные полуоси. Тогда другая внутренняя линия того же комплекса не может пересекать ни $\mathbb{R}^+$, ни $\mathbb{R}^-$. Теперь, если рассмотреть весь граф Стокса $\Gamma(\lambda)$, состоящий из двух комплексов, мы получаем, что точка 0 не лежит между внутренними линиями Стокса. Это противоречит лемме 3.6. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $\arg \lambda = \psi \in (-\pi/4, 0)$. Тогда внешние линии Стокса графа $\Gamma(\lambda)$ пересекают вещественную ось $\mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть x пробегает значения от 0 до $+\infty$. Проследим значения интеграла $\int_1^\eta \sqrt{\zeta^2 - 1} d\zeta$ при изменении величины $\eta = x/\sqrt{\lambda}$. Здесь число λ фиксировано, $\psi = \arg \lambda \in (-\pi/4, 0)$, поэтому $\arg \eta \in (0, \pi/8)$. Снова рассмотрим линии и сопряженные линии Стокса функции $p = z^2 - 1$ (рис. 5). При росте x значение интеграла последовательно перемещается из третьей четверти во вторую, из второй в первую. Более того, начальное значение интеграла равно $-\pi i/4$.

Найдем предельное значение аргумента при $x \rightarrow +\infty$. Обозначим $\theta = \arg \eta$, $r = |\eta|$. Имеем

$$\begin{aligned} \int_1^{re^{i\theta}} \sqrt{\zeta^2 - 1} d\zeta &= \int_1^r \sqrt{\zeta^2 - 1} d\zeta + \int_r^{re^{i\theta}} \sqrt{\zeta^2 - 1} d\zeta, \\ \int_r^{re^{i\theta}} \sqrt{\zeta^2 - 1} d\zeta &= i \int_0^\theta (re^{i\theta})^2 \sqrt{1 - \frac{1}{(re^{i\theta})^2}} d\theta \\ &= \frac{r^2}{2} (e^{2i\theta} - 1) - i \frac{\theta}{2} + o(1), \quad r \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Таким образом, при $r \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \int_1^{re^{i\theta}} \sqrt{\zeta^2 - 1} d\zeta &= \frac{r^2}{2} \cos 2\theta + o(r^2), \\ \operatorname{Im} \int_1^{re^{i\theta}} \sqrt{\zeta^2 - 1} d\zeta &= \frac{r^2}{2} \sin 2\theta + o(r^2). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \arg \int_1^{re^{i\theta}} \sqrt{\zeta^2 - 1} d\zeta = 2\theta.$$

Поскольку $\theta = -\psi/2$, получаем

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \arg e^{(\pi/4 + \psi)i} \int_1^{re^{i\theta}} \sqrt{\zeta^2 - 1} d\zeta = \frac{\pi}{4}.$$

Поэтому при достаточно больших $x > x_0$ значения функции

$$J(\eta) = e^{(\pi/4 + \psi)i} \int_1^{re^{i\theta}} \sqrt{\zeta^2 - 1} d\zeta, \quad \eta = re^{i\theta},$$

будут находиться в первой четверти. Так как $\psi \in (-\pi/4, 0)$, то значение $J(0)$ находится в четвертой четверти. Следовательно, найдутся точки $x \in (0, +\infty)$, при которых значения $J(\eta)$ лежат на отрицательной и положительной мнимых осях. Стало быть, как минимум, две линии Стокса одного из комплексов $\Gamma(\lambda)$ пересекут вещественную положительную полуось.

Покажем, что одна из них обязана быть внешней. Рассмотрим отрезок $[0, \sqrt{\lambda}]$. Он имеет единственную общую точку с графом Стокса. Следовательно, если две внутренние линии пересекут вещественную положительную полуось, то и внешняя линия тоже ее пересечет. Теорема доказана.

Далее изучим положение точек ± 1 относительно графа Стокса $\Gamma(\lambda)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.9. Точку $\lambda \in \Pi$ будем называть *регулярной*, если точки ± 1 относительно графа Стокса функции $q(z, \lambda)$ лежат в одной канонической области, в противном случае точку λ будем называть *сингулярной*.

ТЕОРЕМА 3.3. *Все значения $\lambda \in \Pi$, для которых $\arg \lambda = \psi \in (-\pi/2, -\pi/4)$, являются регулярными.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 3.4 следует, что граф $\Gamma(\lambda)$ состоит из двух комплексов Стокса, а из теоремы 3.1 следует, что вся вещественная ось лежит в одной канонической области. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3.4. *Если $\lambda = re^{i\pi/4}$, то найдется точка $r = r_0$ такая, что при $r > r_0$ значения λ являются регулярными, а при $0 < r \leq r_0$ — сингулярными. При $r = r_0$ точки ± 1 лежат на линиях Стокса.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае $\arg \lambda = \psi = -\pi/4$ уравнение (3.2) для графа Стокса преобразуется к виду

$$\operatorname{Re} \left(\int_1^{z/\sqrt{\lambda}} \sqrt{\zeta^2 - 1} d\zeta \right) = 0. \quad (3.4)$$

Это равенство эквивалентно принадлежности точки $z/\sqrt{\lambda}$ графу Стокса функции $p(\zeta) = \zeta^2 - 1$. При фиксированном λ и $z \in \mathbb{R}^+$ имеем $\arg z/\sqrt{\lambda} = \pi/8$. Обращаясь к рис. 5, легко заметить, что найдется единственная точка $z \in \mathbb{R}^+$, удовлетворяющая (3.4). Следовательно, найдется единственная точка λ на луче $\arg \lambda = -\pi/4$, которая удовлетворяет (3.4) при фиксированном $z = 1$.

Бесконечные линии Стокса, выходящие из точки 1, лежат правее прямой $\operatorname{Re} z = 1$, что следует из того, что эти линии выходят из точки 1 под углами $\pm\pi/3$ к лучу $[1, +\infty)$ и частная производная не равна нулю:

$$\partial \operatorname{Re} \int_1^\xi \sqrt{\zeta^2 - 1} d\zeta \Big/ \partial \operatorname{Im} \xi \neq 0.$$

Следовательно, если $z/\sqrt{\lambda}$ лежит на указанных линиях Стокса и $z = 1$, то $|1/\sqrt{\lambda}| > 1$, что влечет $r_0 = |\lambda| < 1$. Таким образом показано, что есть одна точка на луче $\arg \lambda = -\pi/4$, обладающая тем свойством, что граф Стокса $\Gamma(\lambda)$ проходит через точку $z = 1$. Поскольку граф симметричен относительно нуля, то он проходит и через точку $z = -1$.

При изменении r граф $\Gamma(\lambda)$ меняется гомотетично, причем с уменьшением r граф сжимается. Следовательно, при малых r точки ± 1 лежат в разных областях, границей которых являются только бесконечные линии Стокса (см. рис. 3). Поэтому они не содержатся в одной канонической области. При $r > r_0$ точки ± 1 попадают в области, частью границ которых является отрезок $[-\sqrt{\lambda}, \sqrt{\lambda}]$. Поэтому точки ± 1 лежат в одной канонической области. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3.5. *При $\lambda = re^{i\psi}$, $\psi \in (-\pi/4, 0)$, найдется единственная точка $r = r_0(\psi)$ такая, что при $r = r_0$ точки ± 1 лежат на линиях Стокса графа $\Gamma(\lambda)$. Линии Стокса, содержащие ± 1 , являются внешними. При прочих r значения λ регулярны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Точки λ из сектора $\arg \lambda = \psi \in (-\pi/4, 0)$, для которых граф $\Gamma(\lambda)$ проходит через точки ± 1 , определяются множеством

$$\gamma_1 = \left\{ \lambda \in \Pi \mid -\frac{\pi}{4} < \arg \lambda < 0, \operatorname{Re} \left(e^{i\frac{\pi}{4}} \int_{\sqrt{\lambda}}^1 \sqrt{\zeta^2 - \lambda} d\zeta = 0 \right) \right\}. \quad (3.5)$$

Покажем сначала, что при фиксированном ψ множество γ_1 содержит не более одной точки. Предположим, что найдутся две точки $\lambda_1, \lambda_2 \in \gamma$ с одинаковым аргументом. Не ограничивая общности, можно считать, что $1/\sqrt{\lambda_2} = \alpha/\sqrt{\lambda_1}$, где $\alpha > 1$.

Рассмотрим функцию

$$\chi(\xi) = \operatorname{Re} \left(e^{i\frac{\pi}{4}} \lambda_1 \int_1^{\xi/\sqrt{\lambda_1}} \sqrt{\zeta^2 - 1} d\zeta \right), \quad \xi \in [0, \alpha].$$

Вновь воспользуемся представлением интеграла из (3.5) интегралом вида (3.2). Тогда из нашего предположения следует, что $\chi(\xi) = 0$ на концах отрезка $[0, \alpha]$. Но тогда существует $\tau \in (1, \alpha)$ такое, что

$$\chi'(\tau) = \operatorname{Re} \left(e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\lambda_1} \sqrt{\tau^2/\lambda_1 - 1} \right) = \operatorname{Re} \left(e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tau^2 - \lambda_1} \right) = 0.$$

Но это невозможно в силу положительности функции $\operatorname{Re} \left(e^{i\pi/4} \sqrt{\xi^2 - \lambda_1} \right)$ при $\lambda_1 \in \Pi$, $\xi > 1$.

Теперь покажем, что при всех $\psi \in (-\pi/4, 0)$ существует точка λ , $\arg \lambda = \psi$, удовлетворяющая условию (3.5), т. е. кривая γ_1 есть функция полярного аргумента ψ . В силу эквивалентности уравнений (3.1) и (3.2) уравнение для кривой γ_1 можно переписать в виде

$$\gamma_1 = \left\{ \lambda \in \Pi \mid -\frac{\pi}{4} < \arg \lambda < 0, \operatorname{Re} \left(e^{(\frac{\pi}{4} + \psi)i} \int_1^{1/\sqrt{\lambda}} \sqrt{\zeta^2 - 1} d\zeta = 0 \right) \right\}. \quad (3.6)$$

Пусть $\lambda \rightarrow 0$ вдоль луча с постоянным аргументом ψ . Повторив рассуждения доказательства теоремы 3.2, можно получить, что при достаточно малых $|\lambda| < r_0$

$$\operatorname{Re} \left(e^{(\frac{\pi}{4} + \psi)i} \int_1^{1/\sqrt{\lambda}} \sqrt{\zeta^2 - 1} d\zeta \right) > 0.$$

При этом $1/\sqrt{\lambda}$ лежит в области $++$ (см. рис. 5). Далее, несложно понять, что

$$\operatorname{Re} \left(e^{(\frac{\pi}{4} + \psi)i} \int_1^{1/\sqrt{\lambda}} \sqrt{\zeta^2 - 1} d\zeta \right) < 0,$$

когда $1/\sqrt{\lambda}$ находится в области $-+$. Следовательно, рассматриваемое выражение аннулируется в области $++$ или на ее границе. Повторяя рассуждения из теоремы 3.4, получаем, что соответствующее значение λ по модулю меньше 1. Следовательно, кривая γ_1 — функция аргумента $\psi = \arg \lambda \in (-\pi/4, 0)$.

Осталось показать, что точки ± 1 лежат на внешних линиях Стокса графа $\Gamma(\lambda)$ при $\lambda \in \gamma_1$. Вспомним, что внешняя линия Стокса пересекает вещественную ось

(теорема 3.2). Обозначим точку пересечения x_0 . Допустим, что точки ± 1 лежат на внутренних линиях Стокса. Из этого следует, что $1 < x_0$. Рассмотрим точку λ_0 , удовлетворяющую равенству

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_0}} = \frac{x_0}{\sqrt{\lambda}}.$$

Эта точка имеет тот же аргумент, что и λ , но меньший модуль, следовательно, тоже лежит в Π , что противоречит единственности.

Доказательство регулярности оставшихся точек λ рассматриваемой области непосредственно следует из того, что для них точки ± 1 не лежат на линиях Стокса, а граф $\Gamma(\lambda)$ состоит из двух компонент. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. *В случае $\arg \lambda \in (-\pi/4, 0)$ точки ± 1 не могут лежать в области, ограниченной внутренними линиями Стокса обоих комплексов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть найдется точка λ^* , $\arg \lambda^* \in (-\pi/4, 0)$, такая, что точки ± 1 находятся в указанной области. Так как внешняя линия Стокса пересекает $\mathbb{R}^+$ (теорема 3.2), скажем, в точке $x_2 > 1$, то одна из внутренних линий Стокса графа $\Gamma(\lambda^*)$ пересечет $\mathbb{R}^+$ в точке $x_1 \in (1, x_2)$.

Если $\psi^* = \arg \lambda^*$, то обе точки $(\frac{1}{x_2})^2 \lambda^*$ и $(\frac{1}{x_1})^2 \lambda^*$ принадлежат Π , имеют аргумент ψ^* и соответствующие им графы Стокса содержат точки ± 1 . Это противоречит теореме 3.5. Следствие доказано.

ТЕОРЕМА 3.6. *Множество сингулярных точек в Π состоит из отрезка $\gamma_0 = [0, r_0 e^{-i\pi/4}]$ и кривой γ_1 , определенной в (3.5). В точке $r_0 e^{-i\pi/4}$ кривые γ_0 и γ_1 пересекаются.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение является следствием теорем 3.3–3.5. Докажем, что точка $r_0 e^{-i\pi/4}$ лежит на γ_1 . Согласно определению число r_0 определяется равенством $r_0 = |\lambda|$, где число λ , $\arg \lambda = -\pi/4$, удовлетворяет уравнению (3.4). Но тогда из (3.6) следует, что $r_0 e^{-i\pi/4} \in \gamma_1$. Поэтому γ_0 и γ_1 пересекаются в этой точке. Теорема доказана.

§ 4. Предельный спектральный граф оператора $L(\varepsilon)$

Изучим поведение собственных значений оператора $L(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. В этом параграфе мы докажем, что собственные значения оператора $L(\varepsilon)$ локализуются при $\varepsilon \rightarrow 0$ вблизи отрезка γ_0 , кривой γ_1 и кривой γ_∞ , выходящей из точки пересечения γ_0 и γ_1 и уходящей в $-i\infty$. Кривые γ_0 и γ_1 были определены в § 3, а уравнение кривой γ_∞ укажем ниже.

Сделаем замену $u = 1/\sqrt{\varepsilon}$ и обозначим через L_u оператор, соответствующий получившейся спектральной задаче:

$$\begin{aligned} W''(z) &= u^2 i(z^2 - \lambda)W, \\ W(-1) &= W(1) = 0. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Далее полагаем

$$\begin{aligned} q(\zeta, \lambda) &= i(\zeta^2 - \lambda), \quad \Psi(z, \lambda) = \int_{\sqrt{\lambda}}^z \sqrt{q(\zeta, \lambda)} d\zeta, \\ \tilde{w}_1(z, \lambda, u) &= q^{-1/4} e^{+u\Psi(z, \lambda)}, \\ \tilde{w}_2(z, \lambda, u) &= q^{-1/4} e^{-u\Psi(z, \lambda)}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Функции $\tilde{w}_1$, $\tilde{w}_2$ известны как ВКБ-приближения решений уравнения (4.1). Следующие две леммы доказаны в [5, §3, п. 5].

ЛЕММА 4.1. *Пусть Ω – связный компакт в λ -плоскости, все точки которого допустимы (в нашем случае в силу леммы 3.2 компакт Ω не содержит точек λ : $\arg \lambda = -\pi/4$). Пусть $D(\lambda)$ – канонические области функции $q(z, \lambda)$, непрерывно зависящие от $\lambda \in \Omega$. Тогда существует фундаментальная система решений w_1 , w_2 уравнения (4.1), для которой при $z \in D = \bigcap_{\lambda \in K} D(\lambda)$ справедливы асимптотики*

$$w_{1,2}(z, \lambda, u) = \tilde{w}_{1,2}(z, \lambda, u) \left(1 + O\left(\frac{1}{u}\right) \right). \quad (4.3)$$

Указанные асимптотики можно дифференцировать по z , u , λ любое число раз.

Если λ_0 – недопустимая точка, то может существовать семейство канонических областей $D(\lambda)$, непрерывно зависящее от λ при $\lambda \notin I_3$, которое при $\lambda \rightarrow \lambda_0$ имеет пределом неодносвязную область, следовательно, не каноническую. Но могут также существовать области $D(\lambda)$, которые остаются непрерывными при λ , принадлежащих всему множеству I_3 или его части. В такой ситуации лемма 4.1 допускает обобщение.

ЛЕММА 4.2. *Пусть Ω – связный компакт в λ -плоскости, все точки которого либо допустимы, либо принадлежат типу I_3 (для рассматриваемого случая функции $q = x^2$ область Ω не содержит 0). Пусть канонические области $D(\lambda)$ таковы, что при $\lambda \in \Omega$ они непрерывны. Тогда справедливо утверждение леммы 4.1.*

Основной смысл следующей леммы состоит в том, что известные асимптотические формулы мы получаем равномерно как по большому параметру u , так и по спектральному параметру $\lambda \rightarrow \infty$.

ЛЕММА 4.3. *Фиксируем произвольное число $u_0 > 0$ и произвольный компакт K в z -плоскости. Тогда найдется число $R_0 > 0$ такое, что уравнение (4.1) имеет пару независимых решений*

$$\begin{aligned} U(z) &= cq^{-1/4} e^{u\Psi(z, \lambda)} \left(1 + \frac{\varepsilon_+(z, u, \lambda)}{u\lambda} \right), \\ V(z) &= cq^{-1/4} e^{-u\Psi(z, \lambda)} \left(1 + \frac{\varepsilon_-(z, u, \lambda)}{u\lambda} \right), \end{aligned}$$

где функция $\Psi(z, \lambda)$ определена равенством (4.2), а функции $\varepsilon_{\pm}(z, u, \lambda)$ равномерно ограничены при $z \in K$, $u > u_0$, $\lambda \in \Pi$, $|\lambda| > R_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В уравнении (4.1) сделаем следующую замену:

$$y(\eta) = W(\sqrt{\lambda}\eta), \quad \mu = \lambda u e^{\frac{\pi}{4}i},$$

после которой получим

$$y'' = \mu^2(\eta^2 - 1)y.$$

Теперь проведем замену Лиувилля

$$w(\xi) = \sqrt{\xi'(z)}y(\eta), \quad \xi(\eta) = \int_1^\eta \sqrt{\zeta^2 - 1} d\zeta,$$

которая корректно определена в любой области однолистности функции $\xi(\eta)$. Здесь фиксируем некоторую ветвь $\xi(\eta)$, например, условием $\xi(0) = i\pi/4$.

Рассмотрим линии Стокса, задаваемые уравнением

$$\operatorname{Re}(e^{-\frac{\pi}{4}i}\xi(\eta)) = 0.$$

Так как $\xi(0) = i\pi/4$, то $\eta = 0$ не лежит на линиях Стокса. Следовательно, найдется δ -окрестность нуля, в которой $\xi(\eta)$ однолистка. Пусть компакт K лежит в круге радиуса R_1 . Из условия $z = \sqrt{\lambda}\eta \in K$ получаем, что при $|\lambda| > R_1^2/\delta^2 = R_0$ переменная η лежит в δ -окрестности нуля. Поэтому при $|\lambda| > R_0$ замена Лиувилля корректна. Проведя эту замену, получим уравнение

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\xi^2}w(\xi) &= (\mu^2 + \phi(\xi))w(\xi), \\ \phi(\xi) &= \dot{\eta}^{\frac{1}{2}} \frac{d^2}{d\xi^2}(\dot{\eta}^{-\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2(\eta^2 - 1)^2} - \frac{5\eta^2}{4(\eta^2 - 1)^3}, \quad \eta = \eta(\xi). \end{aligned}$$

Известно [5], что это уравнение имеет пару независимых решений $w_\pm$, для которых справедливы асимптотические оценки

$$w_\pm(\xi) = e^{\pm\mu\xi}(1 + h_\pm(\mu, \xi)), \quad |h_\pm(\mu, \xi)| < \exp\left(\frac{\Phi_\pm(\xi)}{|\mu|}\right) - 1,$$

где

$$\Phi_\pm(\xi) = \int_{\gamma_\pm(\xi)} |\psi(s)| |ds|,$$

а $\gamma_\pm(\xi)$ – пути, соединяющие некоторые точки $\xi_0^\pm$ с ξ , причем эти пути выбираются так, что выполняется неравенство

$$\operatorname{Re}(\pm\mu[\eta - \xi]) \leq 0 \quad \text{при всех } \eta \in \gamma_\pm(\xi).$$

Так как $\arg \mu \rightarrow -\frac{\pi}{4}$, если $\lambda \in \Pi$ и $\lambda \rightarrow \infty$, а ξ лежит в малой окрестности точки $\xi(0) = i\pi/4$, то построение таких путей, не зависящих от μ , возможно. Следовательно, $|\Phi_\pm| < C$, где C не зависит от μ , а потому

$$|h_\pm(\mu, \xi)| < \frac{2C}{u|\lambda|}.$$

Возвращаясь к исходному уравнению, получим требуемые оценки на функции $\varepsilon_\pm$. Лемма доказана.

В теореме 3.6 было определено множество сингулярных точек, состоящее из отрезка γ_0 и кривой γ_1 . Теперь рассмотрим кривую

$$\gamma_\infty = \left\{ \lambda \in \Pi \mid \operatorname{Re}\left(e^{\frac{\pi}{4}i} \int_{-1}^1 \sqrt{\zeta^2 - \lambda} d\zeta\right) = 0 \text{ \& } \arg \lambda \in \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right] \right\}.$$

Рис. 6. a – предельные спектральные кривые $\gamma = \gamma_0 \cup \gamma_1 \cup \gamma_\infty$, b – спектр оператора $L(\varepsilon)$ при $\varepsilon = 10^{-4}$

Из определения кривых γ_0 , γ_1 и γ_∞ следует, что точка $r_0 e^{-i\pi/4}$ является их общей точкой пересечения. Рассмотрим множество (см. рис. 6)

$$\gamma = \gamma_0 \cup \gamma_1 \cup \gamma_\infty,$$

которое назовем *предельным спектральным графом оператора $L(\varepsilon)$* . Ниже будет показано, что γ является множеством, вблизи которого концентрируются собственные значения оператора $L(\varepsilon)$. Но сначала покажем, что γ_∞ асимптотически приближается к прямой $\operatorname{Re} \lambda = 1/3$.

ЛЕММА 4.4. *При $\lambda \in \gamma_\infty$ справедливо асимптотическое равенство*

$$\operatorname{Re} \left(e^{\frac{\pi}{4}i} \int_{-1}^1 \sqrt{\zeta^2 - \lambda} d\zeta \right) = \frac{1}{|\lambda|^{1/2}} \left(\frac{1}{3} - \operatorname{Re} \lambda \right) + O \left(\frac{1}{|\lambda|^{3/2}} \right), \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

В частности, точки $\lambda \in \gamma_\infty$ асимптотически приближаются к прямой $\operatorname{Re} \lambda = 1/3$ со скоростью $O(|\lambda|^{-1})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\psi = \arg \lambda$, $r = |\lambda|$. Имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(e^{\frac{\pi}{4}i} \int_{-1}^1 \sqrt{\zeta^2 - \lambda} d\zeta \right) &= 2 \operatorname{Re} \left(e^{\frac{\pi}{4}i} \int_0^1 \sqrt{\zeta^2 - \lambda} d\zeta \right) \\ &= 2 \operatorname{Re} \left(e^{\frac{3\pi}{4}i} \left(\sqrt{\lambda} - \frac{1}{6\sqrt{\lambda}} + O\left(\frac{1}{\lambda^{3/2}}\right) \right) \right) \\ &= 2r^{1/2} \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\psi}{2}\right) - \frac{1}{6r^{1/2}} \cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\psi}{2}\right) \right) + O\left(\frac{1}{r^{3/2}}\right) \\ &= 2 \left(-r^{1/2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2}\right) + \frac{1}{6r^{1/2}} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2}\right) \right) + O\left(\frac{1}{r^{3/2}}\right) \\ &= r^{-1/2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2}\right) \left(\frac{1}{3} - 2r \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2}\right) \right) + O\left(\frac{1}{r^{3/2}}\right) \\ &= r^{-1/2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2}\right) \left(\frac{1}{3} - \frac{\operatorname{Re} \lambda}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2}\right)} \right) + O\left(\frac{1}{r^{3/2}}\right). \end{aligned}$$

Далее, имеем $\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2}\right) = 1 + O(r^{-1})$ при $\lambda = re^{i\psi} \rightarrow \infty$ внутри полуполосы Π (в этом случае $\psi \rightarrow -\pi/2$). Из этого соотношения следует утверждение леммы.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Утверждение леммы сохраняет силу не только для $q(x) = x^2$, а для произвольной целой функции q . Только число $1/3$ нужно заменить на число $\int_{-1}^1 q(x) dx$.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $\gamma(\delta)$ – δ -окрестность множества γ . Тогда для любого $\delta > 0$ найдется число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что все собственные значения оператора $L(\varepsilon)$ при $\varepsilon < \varepsilon_0$ лежат внутри $\gamma(\delta)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество $\Pi \setminus \gamma(\delta)$ состоит из трех связанных замкнутых попарно не пересекающихся компонент. Обозначим их через Λ_l , Λ_r , Λ_+ (левая, правая и верхняя соответственно). В наших обозначениях $\varepsilon = u^{-2}$, поэтому нужно доказать, что найдется число u_0 такое, что при $u > u_0$ характеристический определитель

$$\Delta(u, \lambda) = \begin{vmatrix} U(-1) & U(1) \\ V(-1) & V(1) \end{vmatrix}$$

отличен от нуля, где U и V – пара линейно независимых решений уравнения (4.1). Рассмотрим отдельно три случая, когда λ принадлежит одной из компонент Λ_l , Λ_r или Λ_+ .

1. Пусть $\lambda \in \Lambda_l$. Предположим, что утверждение теоремы неверно. Тогда найдутся последовательности $u_n \rightarrow +\infty$ и $\lambda_n \in \Lambda_l$ такие, что

$$\Delta(u_n, \lambda_n) = 0.$$

Сначала покажем, что последовательность λ_n ограничена. При $\lambda \in \Lambda_l$, $|\lambda| > R_0$, можно воспользоваться леммой 4.3. Тогда получаем, что уравнение $\Delta(u, \lambda) = 0$ эквивалентно уравнению

$$e^{2u(\Psi(1, \lambda) - \Psi(-1, \lambda))} = 1 + \frac{\varepsilon(u, \lambda)}{u\lambda}, \quad (4.4)$$

где $|\varepsilon(u, \lambda)| < \text{const}$ при $u > u_0$ и $|\lambda| > R_0$.

Заметим, что функция $Q = \sqrt{i(z^2 - \lambda)}$ допускает выделение однозначных голоморфных ветвей в плоскости $\mathbb{C}$ с разрезами по внешним линиям Стокса. Согласно теореме 3.1 в случае $\arg \lambda \in (-\pi/2, -\pi/4)$ (тем более, при $\lambda \in \Lambda_l$) внешние линии Стокса не пересекают вещественную ось. Но тогда два интеграла от $\sqrt{\lambda}$ до ± 1 можно заменить одним по отрезку $[-1, 1]$, т. е. справедливо равенство

$$T(\lambda) = \Psi(1, \lambda) - \Psi(-1, \lambda) = e^{\frac{\pi}{4}i} \int_{-1}^1 \sqrt{\zeta^2 - 1} d\zeta. \quad (4.5)$$

Далее, в силу леммы 4.4

$$\left| \operatorname{Re} \left(e^{\frac{\pi}{4}i} \int_{-1}^1 \sqrt{\zeta^2 - 1} d\zeta \right) \right| > \frac{C}{|\lambda|^{1/2}}, \quad \text{если } \lambda \in \Lambda_l.$$

Сравнение этого неравенства с (4.4) приводит к противоречию. Следовательно, последовательность λ_n ограничена и лежит в некотором компакте $K \subset \Lambda_l$. Воспользовавшись леммой 4.1, как и ранее, получим, что уравнение $\Delta(u, \lambda) = 0$ эквивалентно уравнению

$$e^{2u(\Psi(1, \lambda) - \Psi(-1, \lambda))} = 1 + O(1/u). \quad (4.6)$$

Но в силу равенства (4.5) имеем

$$|\operatorname{Re} T(\lambda)| > C = C(\delta)$$

при $\lambda \in \Lambda_l$, что противоречит (4.6), если $u > u_0$, где u_0 — достаточно большое число. Поэтому в области Λ_l отсутствуют собственные значения оператора $L(\varepsilon)$, если $u > u_0$.

2. Точно так же, как в предыдущем случае, можно показать, что в области Λ_r при $|\lambda| > R_0$ собственных значений нет. Рассмотрим компакт

$$\Lambda'_r = \{\lambda \in \Lambda_r \mid |\lambda| \leq R_0\}.$$

Пусть $\lambda \in \Lambda'_r$ и $\arg \lambda < -\pi/4$. Как и ранее, в этом случае имеем

$$|\operatorname{Re} T(\lambda)| > c(\lambda) > 0. \quad (4.7)$$

Если $\lambda \in \Lambda'_r$ и $\arg \lambda > -\pi/4$, то представление (4.5) уже неверно (оно будет верно, если вместо интеграла по отрезку $[-1, 1]$ рассматривать интеграл по контуру γ_λ , огибающему точки $\sqrt{\lambda}$ и $-\sqrt{\lambda}$ сверху и снизу соответственно). Однако в силу следствия 3.1 точки ± 1 лежат в одной канонической области и отделены внутренними линиями Стокса, а потому функции $\operatorname{Re} \Psi(1, \lambda)$ и $\operatorname{Re} \Psi(-1, \lambda)$ имеют разные знаки. Следовательно, в рассматриваемом случае также справедливо неравенство (4.7). Наконец, если $\lambda \in \Lambda'_r$ и $\arg \lambda = -\pi/4$, то точки ± 1 лежат в одной канонической области и отделены линией Стокса. Поэтому в этом случае функции $\operatorname{Re} \Psi(1, \lambda)$ и $\operatorname{Re} \Psi(-1, \lambda)$ также имеют разные знаки и выполнена оценка (4.7). Кроме того, точки $\lambda \in \Lambda'_r$ являются регулярными. Поэтому в силу леммы 4.2 функция $T(\lambda)$

является однозначной при $\lambda \in \Lambda_r$ (здесь нужно иметь в виду, что $T(\lambda)$ определяется при $\arg \lambda < -\pi/4$ и $\arg \lambda > -\pi/4$ различным образом, но предельные значения снизу и сверху на луче $\arg \lambda = -\pi/4$ совпадают).

Таким образом, неравенство (4.7) выполнено для всех λ на компакте Λ'_r . Но тогда $|c(\lambda)| \geq c_0 > 0$ при $\lambda \in \Lambda'_r$, а потому Λ'_r не содержит собственных значений при больших значениях u .

3. Все точки компакта Λ^+ являются регулярными и допустимыми. Поэтому можно найти контур, соединяющий точки ± 1 в z -плоскости, который будет принадлежать пересечению канонических областей $D(\lambda)$ графа Стокса $\Gamma(\lambda)$ при всех $\lambda \in \Lambda^+$. Точки ± 1 в областях $D(\lambda)$ разделяются линией Стокса, поэтому функции $\operatorname{Re} \Psi(1, \lambda)$ и $\operatorname{Re} \Psi(-1, \lambda)$ имеют разные знаки. Следовательно, равенство (4.5) не выполняется при больших значениях u . Теорема доказана.

Из теоремы 4.1 и леммы 4.4 легко получаем следующий результат, уточняющий предложение 2.2.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. *Спектр оператора $L(\varepsilon)$ равномерно при $\varepsilon > 0$ и $|\lambda| > r_0$ приближается к прямой $\operatorname{Re} \lambda = 1/3$. Более того, для точек λ , принадлежащих спектру $L(\varepsilon)$, выполнена оценка*

$$\left| \frac{1}{3} - \operatorname{Re} \lambda \right| \leq \frac{C\varepsilon}{|\lambda|^{1/2}}, \quad |\lambda| > r_0,$$

где постоянная C не зависит от λ и ε .

§ 5. Поведение спектра при $\varepsilon \rightarrow 0$

Далее нам потребуются утверждения о матрицах перехода, доказательства которых можно найти в монографии [5].

Пусть даны две пары (U_j, V_j) , (U_k, V_k) линейно независимых решений уравнения (4.1). Здесь индексы j и k фиксированы. Произвольное решение W этого уравнения можно представить линейной комбинацией этих пар решений:

$$W = \alpha_j U_j + \beta_j V_j = \alpha_k U_k + \beta_k V_k.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Матрица $\Omega_{jk} = \Omega_{jk}(u, \lambda)$ такая, что

$$\begin{pmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \end{pmatrix} = \Omega_{jk} \begin{pmatrix} \alpha_j \\ \beta_j \end{pmatrix}$$

для всех решений W уравнения (4.1), называется *матрицей перехода от пары (U_j, V_j) к паре (U_k, V_k)* . В частности, при всех $z \in \mathbb{C}$ справедливо равенство

$$\begin{pmatrix} U_j \\ V_j \end{pmatrix} = \Omega_{jk}^T \begin{pmatrix} U_k \\ V_k \end{pmatrix},$$

где Ω_{jk}^T – транспонированная матрица перехода.

Как и ранее, положим $q(z, \lambda) = i(z^2 - \lambda)$. Рассмотрим каноническую тройку (D, l, z_0) и каноническую ветвь S (в смысле определений 3.5, 3.6). Удалим из $S(D)$ левые (правые) ε -окрестности разрезов и ε -окрестности образов точек поворота. Прообраз обозначим через $D_\varepsilon^+ (D_\varepsilon^-)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.2. Бесконечный путь $\gamma^+(z) \subset D$ ($\gamma^-(z) \subset D$) называется *положительным* (*отрицательным*) *каноническим путем* для тройки (D, l, z_0) , если один из его концов совпадает с z и для канонической ветви S имеет место соотношение $\operatorname{Re} S(\zeta, z_0) \rightarrow +\infty$ ($-\infty$) при $\zeta \in \gamma^+(z)$ ($\zeta \in \gamma^-(z)$), $z \rightarrow \infty$.

ЛЕММА 5.1. Пусть (D, l, z_0) – каноническая тройка, S – каноническая ветвь. Тогда при $u \gg 1$ в области D существует пара независимых решений (U, V) , именуемая канонической парой, соответствующей данной канонической тройке, асимптотически представляемых в D разложениями при $u \rightarrow +\infty$:

$$U(z, u) \sim cq^{-1/4}(z)e^{+uS(z, z_0)} \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} (+u)^{-k} \int_{\gamma^+(z)} \alpha_k(t) dt\right),$$

$$V(z, u) \sim cq^{-1/4}(z)e^{-uS(z, z_0)} \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} (-u)^{-k} \int_{\gamma^-(z)} \alpha_k(t) dt\right),$$

где

$$\alpha_1 = \frac{1}{8} \frac{q''}{q^{3/2}} - \frac{5}{32} \frac{(q')^2}{q^{5/2}}, \quad \alpha_{k+1} = -\frac{1}{2\sqrt{q}} \left(\alpha'_k + \sum_{j=0}^k \alpha_j \alpha_{k-j} \right)$$

и для удобства записи используются обозначения

$$\alpha_{-1} = \sqrt{q}, \quad \alpha_0 = -\frac{q'}{4q}.$$

Здесь $\gamma^{\pm}(z)$ – произвольные положительный и отрицательный канонические пути в D , а c – нормировочный коэффициент такой, что

$$|c| = 1, \quad \lim_{z \rightarrow z_0, z \in l} \arg(cq^{-1/4}(z)) = 0.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.3. Пусть заданы две канонические тройки (D_j, l_j, z_j) и (D_k, l_k, z_k) . Рассмотрим канонические пары решений (U_j, V_j) , (U_k, V_k) . Матрицу перехода от (U_j, V_j) к (U_k, V_k) будем называть *матрицей перехода от канонической тройки (D_j, l_j, z_j) к (D_k, l_k, z_k)* .

Можно доказать существование четырех типов матриц перехода между каноническими тройками, из которых путем композиций получаются все другие возможные матрицы перехода. Сформулируем леммы, представляющие вид матриц в трех специальных ситуациях.

ЛЕММА 5.2. Пусть (D, l, z_1) – первая тройка, (D, l, z_2) – вторая. Меняется лишь направление конечной линии Стокса l . Тогда

$$\Omega = e^{i\varphi_0} \begin{pmatrix} 0 & e^{-iua} \\ e^{iua} & 0 \end{pmatrix}, \quad a = |S(z_1, z_2)|, \quad e^{i\varphi_0} = c_2/c_1.$$

ЛЕММА 5.3. Пусть (D, l_1, z_1) – первая тройка, (D, l_2, z_2) – вторая, причем лучи $S(l_1)$ и $S(l_2)$ направлены в одну сторону. Пусть l_2 находится слева от l_1 , $a = S(z_1, z_2)$, $\operatorname{Re} a > 0$. Тогда

$$\Omega = e^{i\varphi_0} \begin{pmatrix} e^{-ua} & 0 \\ 0 & e^{ua} \end{pmatrix}, \quad e^{i\varphi_0} = c_2/c_1.$$

ЛЕММА 5.4. Пусть z_0 – простая точка поворота (нуль первого порядка функции q), l_1, l_2, l_3 – линии Стокса с началом z_0 , l_{j+1} лежит слева от l_j . Пусть канонические тройки (D_j, l_j, z_0) выбраны так, что часть D_j , лежащая слева от l_j , совпадает с частью D_{j+1} , лежащей справа от l_{j+1} . Обозначим матрицу перехода от (D_j, l_j, z_0) к (D_{j+1}, l_{j+1}, z_0) через $\Omega_{j,j+1}$. Тогда

$$\Omega_{j,j+1} = e^{-\frac{\pi}{6}i} \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{j,j+1}^{-1} \\ 1 & i\alpha_{j+1,j+2} \end{pmatrix}, \quad \alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} = 1,$$

и справедливо асимптотическое разложение

$$\alpha_{j,j+1} \asymp \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} (-u)^{-k} \int_{\gamma_{j,j+1}} \alpha_k(t) dt \right). \quad (5.1)$$

Здесь бесконечный контур $\gamma_{j,j+1}$ лежит в $D_j \cup D_{j+1}$, начинается в D_{j+1} там, где $\operatorname{Re} S \rightarrow +\infty$, и заканчивается в D_j там, где $\operatorname{Re} S \rightarrow -\infty$. Ветвь $\sqrt{q}$ выбрана так же, как для фундаментальной системы (U_j, V_j) .

Рис. 7. Матрицы перехода и канонические области для решений в окрестности γ_0

Перейдем к изучению поведения спектра вблизи кривых γ_0 , γ_1 и γ_∞ . Наиболее подробно изучим локализацию спектра вблизи γ_0 ; доказательства для γ_1 , γ_∞ оказываются проще.

При движении вдоль пути, пересекающего отрезок γ_0 , граф претерпевает изменения, показанные на рис. 7 (для определенности считаем, что аргумент при движении строго убывает). Верхний ряд соответствует тем точкам кривой, для которых $\arg \lambda > -\pi/4$; средний ряд – для $\arg \lambda = -\pi/4$; нижний – для $\arg \lambda < -\pi/4$. Обратим внимание, что все канонические области, обозначенные на рис. 7, непрерывно зависят от λ , а потому выполняются условия леммы 4.2. Следовательно, равномерными по λ являются асимптотики для матриц перехода в любом компакте в Π , не содержащем 0.

Обозначим линии Стокса и канонические тройки так, как это сделано на рис. 7. Индексы канонических решений положим равными индексам канонических областей.

ЛЕММА 5.5. *Матрица перехода Ω_{16} от канонической тройки $(D_1, l_1, -\sqrt{\lambda})$ к тройке $(D_6, l_6, \sqrt{\lambda})$ выражается следующей формулой:*

$$\Omega_{16}^T = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{21} & \omega_{22} \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} -i\alpha_{45}\alpha_{64}e^{-iua} & \alpha_{64}e^{-iua} \\ \alpha_{23}\alpha_{45}\alpha_{64}e^{-iua} + \frac{1}{\alpha_{12}}e^{iua} & i\alpha_{23}\alpha_{64}e^{-iua} \end{pmatrix}, \quad (5.2)$$

$$a = |\lambda|\frac{\pi}{2}.$$

Элементы ω_{ij} продолжаются аналитически в окрестность отрезка γ_0 с выколотой окрестностью нуля, а их асимптотики равномерны в указанной области.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно схеме, изображенной на рис. 7, имеем

$$\Omega_{16}^T = \Omega_{12}^T \Omega_{24}^T \Omega_{46}^T = \Omega_{12}^T \Omega_{24}^T (\Omega_{64}^T)^{-1}.$$

Вид матриц в правой части указан в леммах 5.2 и 5.4. После последовательного умножения этих матриц получаем (5.2). Аналитичность элементов матриц следует из аналитичности канонических решений по параметру λ , а равномерность следует из лемм 4.1 и 4.2. Имеем также

$$a = \left| e^{\frac{\pi}{4}i} \lambda \int_{-1}^1 \sqrt{\zeta^2 - 1} d\zeta \right| = |\lambda| \frac{\pi}{2}.$$

Лемма доказана.

Обозначим через Υ малую окрестность отрезка γ_0 с выколотыми окрестностями нуля и точки-узла $\lambda_0 = r_0 e^{-i\pi/4}$. Характеристический определитель $\Delta(u, \lambda)$ в области Υ имеет представление

$$\begin{aligned} \Delta(u, \lambda) &= \begin{vmatrix} U_1(-1) & U_1(1) \\ V_1(-1) & V_1(1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} U_1(-1) & \omega_{11}U_6(1) + \omega_{12}V_6(1) \\ V_1(-1) & \omega_{21}U_6(1) + \omega_{22}V_6(1) \end{vmatrix} \\ &= \omega_{21}U_1(-1)U_6(1) + \omega_{22}U_1(-1)V_6(1) - \omega_{11}V_1(-1)U_6(1) - \omega_{12}V_1(-1)V_6(1). \end{aligned}$$

Рассмотрим канонические ветви $\Psi_6(1, -\lambda)$ и $\Psi_1(-1, \lambda)$.

ЛЕММА 5.6. Область Υ , содержащую γ_0 с выколотыми точками 0 и λ_0 , можно выбрать столь малой, что для всех $\lambda \in \Upsilon$ выполнены неравенства

$$\operatorname{Re} \Psi_1(-1, -\lambda) > 0, \quad \operatorname{Re} \Psi_6(1, \lambda) > 0. \quad (5.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно вспомнить расположение точек ± 1 относительно графа Стокса при $\lambda \in \Upsilon$ и воспользоваться тем, что рассматриваемые функции голоморфны при $\lambda \in \Upsilon$.

ЛЕММА 5.7. Пусть γ'_0 – замкнутая часть отрезка γ_0 , не содержащая его концов. Тогда найдутся малая окрестность Υ кривой γ'_0 и числа $u_0 > 0$, $C > 0$ такие, что при всех $u > u_0$ область Υ будет содержать точки спектра. Более того, если рассмотреть точки $\tilde{\lambda}_k = e^{-i\pi/4}(2k+1)/u$, $k \in \mathbb{N}$, то в каждой окрестности $\mathcal{U}_k$ этих точек радиуса C/u^2 , лежащей в Υ , найдется и притом единственная точка спектра. При всех $u > u_0$ других точек спектра $\lambda \in \Upsilon$, лежащих вне окрестности $\mathcal{U}_k$, нет.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим область Υ такую, что $\gamma'_0 \subset \Upsilon$, причем при $\lambda \in \Upsilon$ выполнены неравенства (5.3). Из леммы 5.6 следует, что при $u \rightarrow +\infty$ равномерно в Υ справедливо асимптотическое равенство

$$\Delta(u, \lambda) = \omega_{21} q^{-1/4}(1) q^{-1/4}(-1) e^{u(\Psi_6(1, \sqrt{\lambda}) + \Psi_1(-1, \sqrt{\lambda}))} (1 + o(e^{-u\delta})), \quad \delta > 0.$$

Поэтому равенство $\Delta(u, \lambda) = 0$ эквивалентно уравнению, справедливому в Υ равномерно при $u \gg 1$:

$$\omega_{21} = 0.$$

Согласно лемме 5.5 имеем

$$\omega_{21} = \frac{\alpha_{23}}{\alpha_{56}} e^{-iua} + \frac{1}{\alpha_{12}} e^{iua} = 0 \iff e^{2iua} = -\frac{\alpha_{31}}{\alpha_{56}}, \quad a = |\lambda| \frac{\pi}{2}.$$

Обратим внимание на то, что мы дважды воспользовались мультипликативным тождеством для α_{jk} (см. лемму 5.4). Отметим, что формулы, выписанные выше, справедливы лишь на γ_0 . При $\lambda \in \gamma_0$ можно записать $a = (\lambda \pi e^{i\pi/4})/2$, т.е. a есть линейная функция на γ_0 . Функция a_{31}/a_{56} аналитически продолжается в область Υ , причем из (5.1) следует, что $a_{31}/a_{56} = 1 + O(u^{-1})$. Поэтому, аналитически продолжая функцию ω_{21} в область Υ , получаем уравнение

$$e^{\pi i u e^{i\pi/4} \lambda} + 1 = O\left(\frac{1}{u}\right) \quad (5.4)$$

на собственные значения, которое решается стандартным методом. А именно, невозмущенное уравнение (без добавочного члена $O(u^{-1})$) имеет решения

$$\tilde{\lambda}_k = \frac{2k+1}{u} e^{-i\pi/4}.$$

Пусть $\mathcal{U}_k$ – окрестность точки $\tilde{\lambda}_k$ радиуса Cu^{-2} , где C – постоянная, которую мы определим позже. В окрестности $\mathcal{U}_k$ уравнение (5.4) перепишем в виде

$$F(\lambda, u) := e^{\pi i u e^{i\pi/4}(\lambda - \tilde{\lambda}_k)} - 1 = O\left(\frac{1}{u}\right). \quad (5.5)$$

Заметим, что при $|\mu - \mu_k| = Cu^{-2}$ в комплексной μ -плоскости справедлива оценка

$$|e^{i\pi(\mu - \mu_k)u} - 1| \geq \frac{\delta C}{u}, \quad u > u_0,$$

где постоянная δ зависит только от u_0 . Следовательно, на границе окрестности $\mathcal{U}_k$ радиуса Cu^{-2} выполняется оценка

$$|F(\lambda, u)| \geq \frac{\delta C}{u}.$$

Правая часть уравнения (5.5) оценивается величиной $C_1 u^{-1}$. Выберем постоянную C так, что $\delta C > C_1$. Воспользовавшись теоремой Руше, получим, что уравнение (5.5) имеет внутри окрестности $\mathcal{U}_k$ столько же нулей, сколько функция $F(\lambda, u)$, т. е. ровно один ноль. Из (5.5) также получаем, что других нулей в области Υ , кроме нулей λ_k , близких к $\tilde{\lambda}_k$, нет. Лемма доказана.

Для анализа спектра в окрестностях кривых γ_1 и γ_∞ понадобятся некоторые утверждения о конформности функций, определяющих эти множества. Обозначим

$$K(\lambda) = \int_{-1}^1 \sqrt{\zeta^2 - \lambda} d\zeta, \quad J(\lambda) = \int_{\sqrt{\lambda}}^1 \sqrt{\zeta^2 - \lambda} d\zeta. \quad (5.6)$$

Функцию K считаем определенной в той части Π , в которой $\arg \lambda < -\pi/4$, а функцию J рассматриваем в малой окрестности кривой γ_1 .

ЛЕММА 5.8. *Функция K является однолистной в области $D = \{\lambda \in \Pi \mid \arg \lambda < -\frac{\pi}{4}\}$.*

Рис. 8. Матрицы перехода и канонические области для решений в окрестности кривой γ_1

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное: найдутся точки $\lambda_1 \neq \lambda_2$ в D такие, что $K(\lambda_1) = K(\lambda_2)$. Тогда

$$\int_{-1}^1 (\sqrt{\zeta^2 - \lambda_1} - \sqrt{\zeta^2 - \lambda_2}) d\zeta = \int_{-1}^1 \left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\sqrt{\zeta^2 - \lambda_1} + \sqrt{\zeta^2 - \lambda_2}} \right) d\zeta = 0.$$

Последнее равенство можно сократить на $\lambda_2 - \lambda_1$. При всех $\zeta \in [-1, 1]$, $\lambda \in D$ имеем

$$\sqrt{\zeta^2 - \lambda} \in \Omega = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \arg z \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right) \right\}.$$

Если $\alpha, \beta \in \Omega$, то $\alpha + \beta \in \Omega$, поэтому при всех $\zeta \in [-1, 1]$ значения функции

$$h(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{\zeta^2 - \lambda_1} + \sqrt{\zeta^2 - \lambda_2}}$$

лежат в четвертом квадранте комплексной плоскости, т.е. $\arg h(\zeta) \in (-\pi/2, 0)$. Кроме того, $h(\zeta) \neq 0$, поэтому

$$\int_{-1}^1 h(\zeta) d\zeta \neq 0.$$

Полученное противоречие доказывает лемму.

ЛЕММА 5.9. *Функция J является однолистной в некоторой малой окрестности кривой $\gamma_1 \subset \Pi$, но вне малой окрестности точки 1.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что γ_1 – аналитическая кривая. Кроме того, непосредственной проверкой легко убедиться в том, что

$$\frac{\partial \operatorname{Re}(e^{\pi i/4} J(\lambda))}{\partial \operatorname{Re} \lambda} \neq 0.$$

Отсюда получаем утверждение леммы.

Переходим к изучению спектра в окрестности γ_1 . Используем те же рассуждения, что и в случае γ_0 . Обратимся к схеме, изображенной на рис. 8, где показаны канонические тройки и используемые матрицы перехода.

ЛЕММА 5.10. *Матрица перехода Ω_{15} от канонической тройки $(D_1, l_1, -\sqrt{\lambda})$ к тройке $(D_5, l_5, \sqrt{\lambda})$ выражается формулой*

$$\Omega_{15}^T = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{21} & \omega_{22} \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \frac{e^{ua}}{\alpha_{45}} & e^{ua} i \alpha_{56} \\ i \frac{\alpha_{23}}{\alpha_{45}} e^{ua} & \frac{e^{-ua}}{\alpha_{12}} - \alpha_{23} \alpha_{56} e^{ua} \end{pmatrix}, \quad a = \lambda \frac{\pi}{2} i. \quad (5.7)$$

Пусть Υ – область, получающаяся из малой окрестности кривой γ_1 удалением малых окрестностей точек 1 и $r_0 e^{-i\pi/4}$. Тогда элементы ω_{ij} продолжаются аналитически в область Υ , а их асимптотики равномерны в этой области.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $\Omega_{15}^T = \Omega_{12}^T \Omega_{24}^T \Omega_{45}^T$. Воспользовавшись леммами 5.3, 5.4 и перемножив матрицы, получим представление (5.7).

ЛЕММА 5.11. Пусть γ'_1 – замкнутая часть кривой γ_1 , не содержащая концов γ_1 (точек 1 и $r_0 e^{-i\pi/4}$). Тогда найдутся малая окрестность Υ кривой γ'_1 и числа $u_0 > 0$, $C > 0$ такие, что при всех $u > u_0$ область Υ будет содержать точки спектра. Более того, если рассмотреть точки $\tilde{\lambda}_k$, определяемые уравнениями

$$e^{\pi i/4} J(\tilde{\lambda}_k) = \frac{i(\pi k - \pi/4)}{u}, \quad (5.8)$$

то в каждой окрестности $\mathcal{U}_k \subset \Upsilon$ найдутся ровно две точки спектра. При этом в Υ нет других точек спектра, не лежащих в $\mathcal{U}_k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем окрестность Υ кривой γ'_1 так, чтобы функция $J(\lambda)$ была однолистной в Υ . Воспользовавшись матрицей перехода (5.7) и повторив рассуждения из леммы 5.7, найдем, что равенство нулю характеристического определителя при $\lambda \in \Upsilon$ эквивалентно равенству

$$(ie^{2ue^{i\pi/4}J(\lambda)} - 1)^2 = O\left(\frac{1}{u}\right).$$

Применение теоремы Руше завершает доказательство леммы.

Наконец, определим поведение собственных значений в окрестности кривой γ_∞ .

ЛЕММА 5.12. Пусть Υ – область в $D = \{\lambda \in \Pi \mid \arg \lambda < -\pi/4\}$, причем Υ содержит γ_∞ с выколотой точкой-узлом $r_0 e^{-i\pi/4}$ (замыкание Υ не содержит $r_0 e^{-i\pi/4}$). Тогда Υ содержит точки спектра при больших $u > u_0$. Более того, если рассмотреть точки $\tilde{\lambda}_k \in \Upsilon$, определяемые уравнением $e^{i\pi/4} K(\tilde{\lambda}_k) = i\pi k$, то существует число C такое, что в каждой окрестности $\mathcal{U}_k$ этих точек радиуса Cu^{-2} найдется ровно одна точка спектра. Вне окрестностей $\mathcal{U}_k$ область Υ точек спектра не содержит.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство нулю характеристического определителя в этом случае эквивалентно равенству

$$e^{2ue^{i\pi/4}K(\lambda)} = 1 + O\left(\frac{1}{u}\right).$$

Корни невозмущенного уравнения определяются из равенства $2ue^{i\pi/4}K(\tilde{\lambda}_k) = 2\pi ki$. Доказательство снова завершается применением теоремы Руше.

Следующий результат является усилением теоремы 4.1.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть $\gamma = \gamma_0 \cup \gamma_1 \cup \gamma_\infty$ – предельный спектральный граф оператора $L(\varepsilon)$. Для любого $\delta > 0$ существуют постоянные $C > 0$, $u_0 > 0$ такие, что все собственные значения оператора $L(\varepsilon)$ лежат при $u > u_0$ в объединении Cu^{-2} -окрестности предельного графа γ и δ -окрестностей точек 0, 1 и узла $r_e^{-i\pi/4}$. При этом все собственные значения, лежащие вне

δ -окрестностей указанных точек, лежат в Cu^{-2} -окрестностях точек $\tilde{\lambda}_k$, которые определяются соотношениями

$$\tilde{\lambda}_k = (2k+1)u^{-1}e^{-i\pi/4}, \quad \tilde{\lambda} \in \gamma_0,$$

$\tilde{\lambda}_k$ – нули уравнения $ue^{i\pi/4}J(\lambda) = i(\pi k - \pi/4)$, $\tilde{\lambda} \in \gamma_1$, $\tilde{\lambda}_k$ – нули уравнения $ue^{i\pi/4}K(\lambda) = \pi ki$, $\tilde{\lambda} \in \gamma_\infty$.

Для $\tilde{\lambda}_k \in \gamma_0 \cup \gamma_\infty$ окрестности $\mathcal{U}_k$ содержат по одному собственному значению, а для $\tilde{\lambda}_k \in \gamma_1$ – по два с учетом кратности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Этот результат есть следствие лемм 5.7, 5.10 и 5.11.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.4. Пусть $\gamma(t)$, $t \in [0, 1]$, – ориентированная гладкая кривая в плоскости $\mathbb{C}$ с начальной точкой z_0 и конечной z_1 (одна или обе точки могут принимать значения ∞). Запишем $\lambda_1 \prec \lambda_2$, если $\lambda_j = \gamma(t_j)$ и $t_1 < t_2$. Пусть $\Pi_\delta(\gamma, \lambda_1, \lambda_2)$ – криволинейная полоса шириной 2δ , для которой γ является средней линией, а боковыми сторонами служат отрезки, проходящие через λ_1 и λ_2 и перпендикулярные к γ . Пусть $F(z)$ голоморфна в $\Pi_\delta(\gamma, z_0, z_1)$. Фиксируем точку $\lambda_1 \in \gamma$ и обозначим через $n(\lambda_1, \lambda)$ число нулей функции $F(z)$ в $\Pi_\delta(\gamma, \lambda_1, \lambda)$, если $\lambda \succ \lambda_1$. При $\lambda \prec \lambda_1$ полагаем $n(\lambda_1, \lambda) = -n(\lambda, \lambda_1)$. Функцию $N(\lambda) = n(\lambda_1, \lambda) + C$, где C – произвольная постоянная, назовем *функцией распределения нулей $F(z)$ в δ -окрестности кривой γ (или вдоль кривой γ)*.

Так как собственные значения оператора $L(\varepsilon)$ являются нулями характеристического определителя $\Delta(u, \lambda)$, то аналогичное определение сохраняем для функций распределения собственных значений вдоль кривых.

Следующая теорема вместе с теоремой 5.1 представляют основной результат работы.

ТЕОРЕМА 5.2. *Функции распределения собственных значений оператора $L(\varepsilon)$ вдоль кривых γ_∞ , γ_0 и γ_1 имеют следующий вид:*

$$\begin{aligned} N(\lambda) &= \frac{u}{\pi} e^{-\frac{\pi}{4}i} \int_{-1}^1 \sqrt{\zeta^2 - \bar{\lambda}} d\zeta + O(1) && \text{при } \lambda \in \gamma_\infty, \\ N(\lambda) &= \frac{u}{2} e^{\frac{\pi}{4}i} \lambda + O(1) && \text{при } \lambda \in \gamma_0, \\ N(\lambda) &= \frac{2u}{\pi} e^{-\frac{\pi}{4}i} \int_{\sqrt{\lambda}}^1 \sqrt{\zeta^2 - \bar{\lambda}} d\zeta + O(1) && \text{при } \lambda \in \gamma_1. \end{aligned}$$

В этих формулах остаток $O(1)$ оценивается константой, не зависящей от u и λ , если λ находится вне фиксированных малых окрестностей концевых точек кривых.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим подробно лишь случай кривой γ_1 , для других кривых доказательство аналогично.

Пусть точки $\lambda_1, \lambda \in \gamma_1$ не совпадают с концами γ_1 . Рассмотрим полосу $\Pi_\delta(\gamma_1, \lambda_1, \lambda)$, о которой говорилось в определении 5.5. Отметим все точки $\tilde{\lambda}_k$, заданные соотношениями (5.8) и такие, что $\tilde{\lambda}_k \in \Pi_\delta(\gamma_1, \lambda_1, \lambda)$. Пусть $k_{\min}$ и $k_{\max}$ – минимальный и максимальный индексы отмеченных точек $\tilde{\lambda}_k$. Тогда число N_0 отмеченных точек равно $k_{\max} - k_{\min}$. Найдутся числа $u_0 > 0$, $C > 0$ такие, что при

$u > u_0$ окрестности $\mathcal{U}_k$ отмеченных точек $\tilde{\lambda}_k$ радиуса Cu^{-2} не пересекаются друг с другом, поэтому согласно теореме 5.1 при $u > u_0$ число собственных значений в $\Pi_\delta(\gamma_1, \lambda_1, \lambda)$ равно

$$N(\gamma_1, \lambda_1, \lambda) = 2N_0 + R, \quad (5.9)$$

где $0 \leq R \leq 4$. С другой стороны, из определения точек $\tilde{\lambda}_k$ легко получаем

$$2N_0 = 2\frac{u}{\pi}e^{-i\pi/4}(J(\tilde{\lambda}_{k_{\max}}) - J(\tilde{\lambda}_{k_{\min}})) + R', \quad 0 \leq R' \leq 4. \quad (5.10)$$

Так как расстояние между соседними точками $\tilde{\lambda}_k$ и $\tilde{\lambda}_{k+1}$ равно π/u , то

$$\begin{aligned} |J(\lambda_1) - J(\tilde{\lambda}_{k_{\min}})| &\leq |J(\tilde{\lambda}_{k_{\min}-1}) - J(\tilde{\lambda}_{k_{\min}})| = \frac{\pi}{u}, \\ |J(\lambda_2) - J(\tilde{\lambda}_{k_{\max}})| &\leq |J(\tilde{\lambda}_{k_{\max}+1}) - J(\tilde{\lambda}_{k_{\max}})| = \frac{\pi}{u}. \end{aligned}$$

Но тогда из (5.9) и (5.10) получаем

$$\mathcal{N}(\gamma_1, \lambda_1, \lambda) = 2\left(\frac{u}{\pi}e^{-\frac{\pi}{4}i}(J(\lambda) - J(\lambda_1)) + O(1)\right),$$

что доказывает утверждение теоремы для кривой γ_1 .

Авторы искренне благодарят М. И. Нейман-заде и А. М. Савчука за компьютерную реализацию рисунков, имеющихся в работе.

Результаты этой работы сообщались авторами на семинарах в МГУ в марте 2000 г., апреле 2001 г. и на конференции, посвященной 100-летию И. Г. Петровского, в мае 2001 г.

Список литературы

1. Шкаликов А. А. Асимптотическое поведение собственных значений одной модельной задачи // Матем. заметки. 1997. Т. 61. № 6. С. 950–954.
2. Reddy S. G., Schmidt P. J., Henningson D. S. Pseudospectra of the Orr-Sommerfeld operator // SIAM J. Appl. Math. 1993. V. 53. № 1. P. 15–47.
3. Марченко М. А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев: Наук. думка, 1977.
4. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
5. Федорюк М. В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983.
6. Олвер Ф. Асимптотика и специальные функции. М.: Наука, 1990.
7. Tumanov S. N. Model problem for Poiseile profile. Critical spectrum curve // International Conference “Diff. Equations and related topics” dedicated to the Centenary Anniversary of I.G. Petrovskii. Book of Abstracts. M.: Moscow University, 2001. P. 413–414.

Поступило в редакцию
04.VII.2001