Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. А. Тюрин, Пространство эрмитовых троек: локальная геометрия, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2002, том 66, выпуск 4, 205–224

DOI: <https://doi.org/10.4213/im400>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 17:45:28

УДК 512.6

Н. А. Тюрин

Пространство эрмитовых троек: локальная геометрия

Настоящая работа является продолжением работ [6], [7], [9]. Исследуется пространство эрмитовых троек. Предложено усиление необходимого условия на базисные канонические классы, сформулированного в [9] в терминах эрмитовых троек.

Библиография: 12 наименований.

Введение

В настоящей работе продолжают исследования пространств эрмитовых троек над компактными четырехмерными гладкими ориентируемыми римановыми многообразиями. Эта работа – техническая, в ней изучаются локальные свойства канонического отображения τ , точнее, дифференциала $d\tau$ этого отображения. Напомним, что в работе [9] было найдено необходимое условие существования неприводимого решения для системы уравнений Зайберга–Виттена, сформулированное в терминах канонического отображения τ . А именно, было показано, что по неприводимому решению строится эрмитова тройка (g, J, ω) с нетривиальным образом

$$\tau(g, J, \omega) \neq [0] \in H^2(X, \mathbb{R}).$$

В настоящей работе анализируется следующий “порядок малости”: вычисляется (см. § 2) дифференциал канонического отображения τ в произвольной точке пространства эрмитовых троек. Для компоненты $\mathcal{M}_X^K$ пространства всех эрмитовых троек над базой X касательное пространство $T_{(g, J, \omega)} \cdot \mathcal{M}_X^K$ отождествляется с пространством 2-форм Ω^2 . Дифференциал канонического отображения $d\tau$ в произвольной точке $(g, J, \omega) \in \mathcal{M}_X^K$ является линейным отображением

$$d\tau: \Omega^2 \rightarrow T_{(\tau(g, J, \omega))} H^2(X, \mathbb{R}) \cong H^2(X, \mathbb{R}).$$

Важной целочисленной характеристикой на пространстве эрмитовых троек является размерность образа дифференциала τ :

$$N(g, J, \omega) = \dim \operatorname{Im} d\tau(g, J, \omega).$$

В § 3 показано, что для любой эрмитовой тройки эта размерность удовлетворяет неравенствам

$$b_2^+ \leq N(g, J, \omega) \leq b_2 = b_2^+ + b_2^-.$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (гранты № 02-01-00786, 00-15-96085).

Далее покажем, что если ω_s – симплектическая форма над X , то

$$N(g_s, J_s, \omega_s) = b_2,$$

где g_s – произвольная риманова метрика, согласованная с ω_s . Таким образом, существование симплектической структуры над X влечет существование эрмитовой тройки над X с максимально возможной размерностью N . С другой стороны, это позволяет определить целочисленную функцию

$$\mathcal{N}: \mathcal{K}_X \rightarrow \mathbb{Z}$$

на множестве $\mathcal{K}_X$ всех возможных канонических классов над X . Для канонического класса $K \in \mathcal{K}_X$ рассмотрим максимальное значение $N(g, J, \omega)$ на соответствующей компоненте $\mathcal{M}_X^K$. Полученное целое число определяет значение функции $\mathcal{N}$ на каноническом классе K ; нетрудно видеть, что целочисленная функция $\mathcal{N}$ инвариантна относительно действия $\text{Diff } X$.

Используя основную идею работы [8], можно расширить область определения функции $\mathcal{N}$ на более широкий класс элементов $H^2(X, \mathbb{Z})$, совпадающий со множеством всевозможных $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$ -структур. Это позволяет сравнить функцию $\mathcal{N}$ с функцией N_{SW} , определяющейся через инварианты Зайберга–Виттена гладкого многообразия X .

Основным результатом настоящей работы является

ТЕОРЕМА. Пусть канонический класс $K \in \mathcal{K}_X$ является базисным для данной гладкой структуры на X , т.е. $N_{\text{SW}}(K) \neq 0$. Тогда $\mathcal{N}(K) = b_2$.

Основной результат статьи [8] позволяет продолжить это утверждение на все базисные классы в односвязном случае.

§ 1. Непрерывность канонического отображения

Пусть X – произвольное гладкое компактное ориентируемое риманово 4-мерное многообразие. Рассмотрим связную компоненту $\mathcal{M}_X^K$ пространства всех эрмитовых троек $\mathcal{M}_X$ над X , т.е. множество всех троек (g, J, ω) с каноническим классом $K_J = K \in H^2(X, \mathbb{Z})$ (точные определения см. в [9]). Введем каноническое отображение

$$\tau: \mathcal{M}_X^K \rightarrow H^2(X, \mathbb{R}),$$

определяемое гармонической компонентой ω_H в разложении Ходжа

$$\omega = \omega_H + d\rho_1 + d^*\rho_2$$

третьего элемента в эрмитовой тройке относительно оператора Ходжа, определяемого конформным классом первого элемента в тройке и ориентацией, индуцируемой вторым элементом. В работе [9], содержащей развернутое определение, были приведены основные свойства канонического отображения τ , следующие из локальной римановой геометрии. Список свойств дополняется следующим утверждением.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.1. *Отображение τ непрерывно относительно представленных ниже трех основных видов деформаций пространства $\mathcal{M}_X^K$.*

Непрерывность имеет место в топологиях, определяемых в процессе доказательства.

Напомним, что в [9] была установлена “кусочная линейность” компоненты $\mathcal{M}_X^K$, именно для любой пары точек

$$(g_1, J_1, \omega_1), (g_2, J_2, \omega_2) \in \mathcal{M}_X^K$$

найдется путь в пространстве эрмитовых троек, состоящий из частей, отвечающих трем основным видам деформаций:

- 1) деформации римановой метрики в рамках фиксированного конформного класса с фиксированной почти комплексной структурой;
- 2) деформации римановой метрики, сохраняющие форму объема, с фиксированной почти комплексной структурой;
- 3) деформации почти комплексной структуры с фиксированной римановой метрикой.

Такие деформации мы рассматривали как “линейные” пути, как прямые на пространстве $\mathcal{M}_X^K$. Утверждение-“путеводитель” [9] доставляет такой кусочно линейный путь, связывающий любые две точки в связной компоненте.

Таким образом, утверждение 1.1 уточняет, что для любого вида деформации из приведенного выше списка “переменной” на области определения $\mathcal{M}_X^K$ отображение τ является непрерывным.

Заметим, прежде всего, что доказательство утверждения 1.1 для деформаций типа 1) и 3) очевидно. В этих двух случаях мы имеем “твердые рамки” фиксированного конформного класса, что позволяет, прежде всего, без труда выбрать подходящие функции расстояния на областях определения и значений отображения τ , относительно которых непрерывность τ отчетливо видна. Действительно, так как при деформациях типов 1) и 3) конформный класс $*_g$ фиксирован, то имеем определяющее неравенство

$$\int_X (\omega_1 - \omega_2) \wedge (\omega_1 - \omega_2) \geq \int_X ((\omega_1)_H - (\omega_2)_H) \wedge ((\omega_1)_H - (\omega_2)_H) \quad (1.1)$$

для любой пары эрмитовых троек $(g_1, J_1, \omega_1), (g_2, J_2, \omega_2)$ с одинаковым конформным классом

$$*_g = *_g.$$

Действительно, поскольку гармонические компоненты определяются относительно одного и того же конформного класса, вследствие гармоничности разности $((\omega_1)_H - (\omega_2)_H)$ относительно того же конформного класса имеем

$$\int_X (\omega_1 - \omega_2)^{\wedge 2} = \int_X ((\omega_1)_H - (\omega_2)_H)^{\wedge 2} + \int_X (d^+(\rho_1 - \rho_2))^{\wedge 2}. \quad (1.2)$$

Здесь, как обычно (см. [9]), мы пользуемся свойствами определяющего разложения Ходжа

$$\omega_i = (\omega_i)_H + \frac{1}{2}(d\rho_i + d^*(\rho_i)) = (\omega_i)_H + d^+\rho_i.$$

Второе слагаемое в правой части равенства (1.2) неотрицательно, откуда следует неравенство (1.1). Остается заметить, что в правой и левой частях неравенства (1.2) стоят корректно определенные функции расстояния для областей определения и значений отображения τ . Действительно, так как при деформации конформный класс фиксирован, то все 2-формы, встречающиеся на области определения такой деформации, автодуальны относительно одного и того же конформного класса. И поэтому внешнее произведение совпадает со скалярным произведением по любой римановой метрике из этого фиксированного класса. Если представить $H^2(X, \mathbb{R})$ как пространство гармонических 2-форм относительно того же фиксированного класса, то функция расстояния переносится на $H^2(X, \mathbb{R})$, а неравенство (1.1) влечет непрерывность канонического отображения τ относительно деформаций типов 1) и 3).

Оставшийся случай деформации типа 2) гораздо более сложный, прежде всего, потому, что на этот раз у нас нет какой бы то ни было выделенной функции расстояния даже на области значений – пространстве вторых когомологий – канонического отображения τ . Это пространство само по себе снабжено только формой пересечения Q_X , которая не может индуцировать в этом случае функции расстояния, не будучи определенной формой. Однако следующее утверждение снабжает нас по меньшей мере функцией расстояния на области определения деформации типа 2).

ЛЕММА 1.1. Пусть $(g_1, J, \omega_1), (g_2, J, \omega_2)$ – пара точек на $\mathcal{M}_X^K$ с одинаковыми почти комплексными структурами и формами объема

$$\omega_1^{\wedge 2} \equiv \omega_2^{\wedge 2} = 2 d\mu.$$

Тогда выполнено поточечное тождество

$$|\omega_1 - \omega_2|_{g_1}^2 \equiv |\omega_1 - \omega_2|_{g_2}^2$$

и разность $\omega_1 - \omega_2$ тождественно равна нулю, если и только если $g_1 = g_2$, т.е. точки совпадают.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, в нашем случае, когда почти комплексная структура J фиксирована, обычное разложение

$$\Omega_J^{1,1} = \mathbb{R}\langle\omega_i\rangle \oplus \Omega_{g_i}^-$$

вместе с определением оператора Ходжа влекут поточечное равенство

$$|\alpha|_{g_i}^2 \cong 2 \left(\frac{\alpha \wedge \omega_i}{\sqrt{2} d\mu} \right)^2 - \frac{\alpha \wedge \alpha}{d\mu} \quad (1.3)$$

для любой $(1, 1)$ -формы $\alpha \in \Omega_J^{1,1}$. Подставляя в (1.3) в качестве α разность $\omega_1 - \omega_2$ и сравнивая выражения для метрик g_1 и g_2 , получаем утверждение леммы.

Эта лемма позволяет естественно определить δ -окрестность точки

$$(g_0, J, \omega_0) \in \mathcal{M}_X^K$$

в пространстве деформации типа 2) следующим условием:

$$O_\delta(g_0, J, \omega_0) = \{(g, J, \omega) \in \mathcal{M}_X^K : \max_{x \in X} |\omega - \omega_0|_{g_0}^2 < \delta\}.$$

Подходящая топология на области значений $H^+ \subset H^2(X, \mathbb{R})$ определяется той же римановой метрикой g_0 , для этого представим положительный конус H^+ как пространство гармонических относительно g_0 2-форм с положительными квадратами и воспользуемся скалярным произведением, определяемым конформным классом g_0 , на пространстве таких гармонических форм. Таким образом, риманова метрика g_0 определяет функцию расстояния

$$\text{dist}([\alpha], [\beta]) = \int_X |\alpha - \beta|_{g_0}^2 d\mu,$$

где $\alpha, \beta \in \mathcal{H}_{g_0}$ – гармонические относительно g_0 формы, представляющие классы $[\alpha], [\beta] \in H^2(X, \mathbb{R})$. Нам необходимо показать, что для любого положительного $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ найдется $\delta \in \mathbb{R}$ такое, что

$$\max_{x \in X} |\omega_0 - \omega_1|_{g_0}^2 < \delta \implies \int_X |(\omega_0)_{H_0} - (\omega'_1)_{H_0}|_{g_0}^2 d\mu < \varepsilon, \quad (1.4)$$

где $(\omega'_1)_{H_0}$ – гармоническая относительно конформного класса g_0 2-форма, представляющая класс когомологий $\tau(g_1, J, \omega_1)$. Напомним, что этот класс по определению представляется формой $(\omega_1)_{H_1}$, гармонической относительно конформного класса g_1 , т.е. имеем равенство

$$[(\omega_1)_{H_1}] = [(\omega'_1)_{H_0}] = \tau(g_1, J, \omega_1) \in H^2(X, \mathbb{R}). \quad (1.5)$$

Необходимо подчеркнуть, что сама по себе форма ω'_1 определена неоднозначно, однако в дальнейших выкладках нам понадобится только ее гармоническая составляющая, определенная равенством (1.5) вполне корректно.

Для краткости введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \max_{x \in X} |\omega_0 - \omega_1|_{g_0}^2 &= M, \\ \int_X |(\omega_0)_{H_0} - (\omega'_1)_{H_0}|_{g_0}^2 d\mu &= N. \end{aligned}$$

Наша задача – оценить N через M . Сначала заметим, что имеется следующее неравенство:

$$N \leq \int_X |(\omega_0)_{H_0} - (\omega_1)_{H_0}|_{g_0}^2 d\mu + \int_X |(\omega_1)_{H_0} - (\omega'_1)_{H_0}|_{g_0}^2 d\mu.$$

Первый интеграл ограничивается константой $M \cdot \text{Vol } X$, где объем $\text{Vol } X = \int_X d\mu$ фиксирован в силу определения деформации типа 2). Таким образом, основные вычисления требуются для ограничения второго интеграла.

Из равенства (1.5) имеем

$$(\omega_1)_{H_1} = (\omega'_1)_{H_0} + d\sigma,$$

где σ – некоторая 1-форма. Тогда обычное определяющее равенство

$$\omega_1 = (\omega_1)_{H_1} + \frac{1}{2}(d\rho_1 + *_1 d\rho_1)$$

преобразуется следующим образом:

$$\omega_1 = (\omega'_1)_{H_0} + d\sigma + \frac{1}{2}(d\rho_1 + *_1 d\rho_1). \quad (1.6)$$

С другой стороны, можно разложить ту же форму ω_1 по теореме Ходжа относительно конформного класса g_0 . Это дает

$$\omega_1 = (\omega_1)_{H_0} + d\rho_0 + d^{*0} \rho'_0. \quad (1.7)$$

Подчеркнем, что поскольку ω_1 не является автодуальной формой относительно g_0 , то формы ρ_0 и ρ'_0 а priori не связаны. Для того чтобы сравнить два разложения (1.6) и (1.7), необходимо выразить оператор Ходжа $*_1$, индуцируемый метрикой g_1 , через оператор Ходжа $*_0$, индуцируемый g_0 . Для этого воспользуемся следующим утверждением.

ЛЕММА 1.2. *Для пары эрмитовых троек (g_0, J, ω_0) , (g_1, J, ω_1) с одинаковыми почти комплексными структурами и формами объема выполнено поточечное равенство*

$$*_1 \alpha - \left(\frac{\alpha \wedge \omega_1}{d\mu} \right) \omega_1 \equiv *_0 \alpha - \left(\frac{\alpha \wedge \omega_0}{d\mu} \right) \omega_0$$

для любой вещественной 2-формы $\alpha \in \Omega^2$.

Действительно, для произвольной римановой метрики, согласованной с данной почти комплексной структурой J и с данной формой объема $d\mu$, действие оператора Ходжа может быть вычислено на форме α следующим образом. Разложим α по типам относительно почти комплексной структуры J :

$$\alpha = (\alpha)^{1,1} + (\alpha)^{2,0}_{\mathbb{R}} \quad (1.8)$$

(здесь обозначаем $(\alpha)^{2,0}_{\mathbb{R}}$ компоненту, принадлежащую $(\Omega^{2,0}_J \oplus \Omega^{0,2}_J)_{\mathbb{R}}$). Из свойств разложения Ходжа в присутствии согласованной почти комплексной структуры известно, что слагаемые в (1.8) поточечно ортогональны относительно *любой* римановой метрики, согласованной с J . При этом второе слагаемое всегда автодуально. Разделяя первое слагаемое в (1.8) на автодуальную и антиавтодуальную части соответственно относительно римановой метрики g_i , получаем

$$\begin{aligned} ((\alpha)^{1,1})^+ &= \frac{1}{2} \langle \alpha, \omega_i \rangle_{g_i} \omega_i, \\ ((\alpha)^{1,1})^- &= (\alpha)^{1,1} - \frac{1}{2} \langle \alpha, \omega_i \rangle_{g_i} \omega_i, \end{aligned}$$

так как форма ω_i имеет постоянную длину, равную $\sqrt{2}$, относительно метрики g_i . Таким образом, получаем тождество

$$\begin{aligned} *_i \alpha &= (\alpha)_{\mathbb{R}}^{2,0} + \frac{1}{2} \langle \alpha, \omega_i \rangle_{g_i} \omega_i - \left((\alpha)^{1,1} - \frac{1}{2} \langle \alpha, \omega_i \rangle_{g_i} \omega_i \right) \\ &= (\alpha)_{\mathbb{R}}^{2,0} - (\alpha)^{1,1} + \langle \alpha, \omega_i \rangle_{g_i} \omega_i. \end{aligned}$$

Правая часть последнего тождества может быть преобразована в силу автодуальности формы ω_i относительно метрики g_i , так что

$$*_i \alpha = (\alpha)_{\mathbb{R}}^{2,0} - (\alpha)^{1,1} + \frac{\alpha \wedge \omega_i}{d\mu} \cdot \omega_i. \quad (1.9)$$

Эта формула и дает утверждение леммы, поскольку первое и второе слагаемые в правой части (1.9) зависят только от фиксированной почти комплексной структуры J .

Лемма 1.2 дает возможность сравнивать операторы Ходжа с разными конформными классами. Применяя лемму 1.2 к тождеству (1.8), получим соотношение

$$\omega_1 = (\omega'_1)_{H_0} + d\sigma + \frac{1}{2}(d\rho_1 + *_0 d\rho_1) - \frac{1}{2} \left(\frac{d\rho_1 \wedge \omega_0}{d\mu} \right) \omega_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\rho_1 \wedge \omega_1}{d\mu} \right) \omega_1. \quad (1.10)$$

Однако для формы ω_1 и конформного класса g_0 имеется единственное разложение, поэтому, сравнивая (1.7) и (1.10), получаем равенство

$$(\omega_1)_{H_0} - (\omega'_1)_{H_0} = \left\{ \left(\frac{d\rho_1 \wedge \omega_1}{2d\mu} \right) \omega_1 - \left(\frac{d\rho_1 \wedge \omega_0}{2d\mu} \right) \omega_0 \right\}_{H_0}, \quad (1.11)$$

где все гармонические проекции определяются относительно конформного класса исходной метрики g_0 . Далее, переходя к соответствующим интегралам и используя неравенство (1.1), из (1.11) получаем

$$\begin{aligned} \int_X |(\omega_1)_{H_0} - (\omega'_1)_{H_0}|_{g_0}^2 d\mu &= \int_X \left| \left\{ \left(\frac{d\rho_1 \wedge \omega_1}{2d\mu} \right) \omega_1 - \left(\frac{d\rho_1 \wedge \omega_0}{2d\mu} \right) \omega_0 \right\}_{H_0} \right|_{g_0}^2 d\mu \\ &\leq \int_X \left| \left(\frac{d\rho_1 \wedge \omega_1}{2d\mu} \right) \omega_1 - \left(\frac{d\rho_1 \wedge \omega_0}{2d\mu} \right) \omega_0 \right|_{g_0}^2 d\mu. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Последний интеграл в (1.12) ограничивается выражением

$$\|\omega_1 - \omega_2\|_{g_0}^2 \cdot \|d\rho_1\|_{g_0}^2, \quad (1.13)$$

поскольку является нормой разности двух ортогональных проекций одной и той же формы $d\rho_1$ на пару направлений, задаваемых ω_i . В выражении (1.13) переход от $\|\cdot\|$ к L_0 -норме, используемой нами, очевиден:

$$\|\cdot\|_{g_0}^2 \leq \max_{x \in X} |\cdot|_{g_0}^2 \cdot \text{Vol } X,$$

и для завершения доказательства нам достаточно оценить норму $\|d\rho_1\|_{g_0}^2$. Для этого воспользуемся тем, что из-за L_0 -близости форм ω_0 и ω_1 , определяющих вместе с фиксированной почти комплексной структурой наши метрики, существуют вещественные положительные константы $C_1, C_2 \in \mathbb{R}_+$ такие, что для любой формы α имеются поточечные неравенства

$$C_1|\alpha|_{g_0}^2 \leq |\alpha|_{g_1}^2 \leq C_2|\alpha|_{g_0}^2.$$

Таким образом, оценка (1.12) уточняется в виде неравенства

$$\|(\omega_1)_{H_0} - (\omega'_1)_{H_0}\|_{g_0}^2 \leq \text{Vol } X \frac{1}{C_1} M \|d\rho_1\|_{g_1}^2. \quad (1.14)$$

Норма в правой части (1.14) оценивается согласно определяющему разложению Ходжа, а именно

$$\|d\rho_1\|_{g_1}^2 = 2 \text{Vol } X - \|(\omega_1)_{H_1}\|_{g_1}^2 \leq 2 \text{Vol } X.$$

Таким образом, весь интеграл оценивается числом $\frac{\text{Vol}^2 X}{C_1} M$, и в итоге мы получаем оценку

$$N \leq \text{Vol } X \cdot M + \frac{\text{Vol}^2 X}{C_1} \cdot M = CM,$$

где C – соответствующая положительная константа, т.е. для любого ε , действительно, существует подходящее $\delta = \varepsilon/C$ такое, что условие (1.4) выполнено. Следовательно, каноническое отображение τ непрерывно и относительно деформации типа 2). Доказательство утверждения 1.1 завершено.

§ 2. Дифференциал τ

Для вычисления дифференциала канонического отображения τ необходимо, прежде всего, найти удобное представление для касательного пространства к компоненте $\mathcal{M}_X^K$ пространства в произвольной точке $(g, J, \omega) \in \mathcal{M}_X^K$. Оказывается, что такое представление существует.

ЛЕММА 2.1. *Касательное пространство изоморфно пространству вещественных 2-форм:*

$$T_{(g, J, \omega)} \mathcal{M}_X^K \cong \Omega^2.$$

В предыдущем параграфе мы использовали три типа деформации “переменной” на области определения отображения τ . Используем третий элемент в исходной тройке (g, J, ω) для описания деформации любого типа. Опишем, как именно каждый тип деформации влияет на изменение ω .

Деформация типа 1). При этой деформации риманова метрика фиксирована, а также фиксирована форма объема. На вариацию $\delta\omega$ третьего элемента эрмитовой тройки это накладывает следующие условия:

$$\delta\omega \in \Omega_g^+, \quad \delta\omega \wedge \omega \equiv 0, \quad (2.1)$$

где первое условие соответствует тому, что метрика фиксирована, а второе – что фиксирована форма объема. Сравнивая (2.1) с известным соотношением

$$\Omega_g^+ = (\Omega^{2,0} \oplus \Omega^{0,2})_{\mathbb{R}} \oplus \mathbb{R}\langle\omega\rangle,$$

получаем, что первый тип деформации соответствует условию

$$\delta\omega \in (\Omega^{2,0} \oplus \Omega^{0,2})_{\mathbb{R}}. \quad (2.2)$$

Деформация типа 2). При этой деформации фиксированными остаются почти комплексная структура J и форма объема. Эти два условия переписываются так:

$$\delta\omega \in \Omega_J^{1,1}, \quad \delta\omega \wedge \omega \equiv 0. \quad (2.3)$$

Сравнивая (2.3) с известным соотношением $\Omega_J^{1,1} = \Omega_g^- \oplus \mathbb{R}\langle\omega\rangle$, получаем, что второй тип деформации соответствует условию

$$\delta\omega \in \Omega_g^-. \quad (2.4)$$

Деформация типа 3). Это самая простая деформация, при которой меняется только форма объема. Соответственно, и формула для $\delta\omega$ самая простая:

$$\delta\omega = f\omega, \quad (2.5)$$

где f – некоторая функция.

Составляя вместе подпространства (2.2), (2.4) и (2.5), соответствующие всем трем типам деформаций, получаем утверждение леммы.

Теперь можно перейти непосредственно к вычислениям дифференциала канонического отображения τ .

Зафиксируем произвольную точку $(g_0, J_0, \omega_0) \in \mathcal{M}_X^K$. Дифференциал $d\tau$ в этой точке представляется некоторым линейным отображением

$$d\tau: T_{(g_0, J_0, \omega_0)} \mathcal{M}_X^K \cong \Omega^2 \rightarrow T_{\tau(g_0, J_0, \omega_0)} H^2(X, \mathbb{R}) \cong \mathcal{H}_{g_0},$$

где мы снова представляем пространство вторых когомологий над X гармоническими относительно g_0 формами.

Для удобства вычислений сразу же воспользуемся “разделением переменных”: касательная 2-форма θ раскладывается на автодуальную и антиавтодуальную части относительно “базовой” в наших вычислениях римановой метрики g_0 . Такое разделение переменных соответствует разделению пространства деформаций теперь уже только на две части. Автодуальная компонента θ_+ соответствует объединению типов 1) и 3), в то время как антиавтодуальная компонента θ_- отвечает деформации типа 2). Таким образом, мы вычисляем $d\tau$ отдельно для θ_+ и для θ_- .

Для первой компоненты θ_+ вычисления легко произвести. В этом случае конформный класс, определяющий разложение Ходжа, фиксирован, поэтому для θ_+ имеем

$$d\tau(\theta_+) = (\theta_+)_{H_0} \in \mathcal{H}_{g_0}^+ \subset \mathcal{H}_{g_0}.$$

Второй случай гораздо более деликатный. В этом случае и определяющий конформный класс изменяется. Для вычислений воспользуемся трюком, который мы уже применяли в предыдущем параграфе. Именно, для возмущенной формы $\omega_1 = \omega_0 + \theta_-$ имеем

$$\begin{aligned}\omega_1 &= (\omega_1)_{H_1} + \frac{1}{2}(d\rho_1 + *_1 d\rho_1), \\ \tau(g_1, J_1, \omega_1) &= [(\omega_1)_{H_1}] \in H^2(X, \mathbb{R}).\end{aligned}$$

Необходимо линеаризовать разность

$$[(\omega_1)_{H_1}] - [(\omega_0)_{H_0}], \quad (2.6)$$

которую преобразуем следующим образом:

$$[(\omega_1)_{H_1}] - [(\omega_1)_{H_0}] + [(\omega_1)_{H_0}] - [(\omega_0)_{H_0}]. \quad (2.7)$$

Вторая часть (2.7), а именно

$$[(\omega_1)_{H_0}] - [(\omega_0)_{H_0}] = [(\theta_-)_{H_0}], \quad (2.8)$$

снова дает очень простой вклад в дифференциал. Для линеаризации первой разности в (2.7) возьмем такую замкнутую 2-форму (ω'_1) , что

$$[(\omega_1)_{H_1}] = [(\omega'_1)_{H_0}].$$

Тогда (см. (1.11)) имеем тождество

$$(\omega'_1)_{H_0} - (\omega_1)_{H_0} = \left(\frac{d\rho_1 \wedge \omega_0}{2d\mu} \omega_0 - \frac{d\rho_1 \wedge \omega_1}{2d\mu} \omega_1 \right)_{H_0}. \quad (2.9)$$

Далее, линеаризуем (2.9), подставляя $d\rho_1 = d\rho_0 + \delta d\rho_0$ и $\omega_1 = \omega_0 + \theta_-$. Слагаемые, в которые входит $\delta d\rho_0$, взаимно уничтожаются, и, добавляя (1.8), получаем

$$d\tau(\theta_-) = (\theta_-)_{H_0} - \left(\frac{d\rho_0 \wedge \theta_-}{2d\mu} \omega_0 + \frac{d\rho_0 \wedge \omega_0}{2d\mu} \theta_- \right)_{H_0}. \quad (2.10)$$

Таким образом, доказано следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1. *Дифференциал τ в произвольной точке $(g, J, \omega) \in \mathcal{M}_X^K$ имеет вид*

$$d\tau(v) = \left[\left(v - \frac{1}{2} \langle d\rho; \omega \rangle_g v_- + \frac{1}{2} \langle d\rho, v_- \rangle_g \omega \right)_H \right], \quad (2.11)$$

где $v_- \in \Omega_g^-$ — антиавтодуальная часть касательного вектора v , а ρ — 1-форма, входящая в базовое разложение $\omega = \omega_H + d^+ \rho$.

Действительно, в силу автодуальности ω и антиавтодуальности θ_- относительно g_0 можно перейти в формуле (2.10) к поточечному скалярному произведению $\langle \cdot; \cdot \rangle_g$, используемому в утверждении 2.1.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Для любой эрмитовой тройки $(g, J, \omega) \in \mathcal{M}_X^K$ дифференциал $d\tau$ в этой точке удовлетворяет следующему неравенству:

$$b_2^+(X) \leq \dim \operatorname{Im} d\tau \leq b_2(X) = b_2^+ + b_2^-,$$

где $b_2(X)$ – второе число Бетти подлежащего многообразия X , а (b_2^+, b_2^-) – сигнатура формы пересечения над X .

Верхняя оценка $\dim \operatorname{Im} d\tau$ не нуждается в доказательстве, так как она совпадает с размерностью $H^2(X, \mathbb{R})$. Для доказательства нижней оценки разложим (1.11) на автодуальную и антиавтодуальную части (в [9] показано, что выделение гармонической составляющей коммутирует с разложением на $\pm$ -компоненты), представляя, как и выше, пространство вторых когомологий гармоническими формами:

$$\begin{aligned} (d\tau(v))^+ &= \left(v_+ + \frac{1}{2} \langle d\rho, v_- \rangle_g \omega \right)_H, \\ (d\tau(v))^- &= \left(\left(1 - \frac{1}{2} \langle d\rho, \omega \rangle_g \right) v_- \right)_H. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Отсюда видно, что любая автодуальная гармоническая форма $\alpha \in \mathcal{H}_g^+$ принадлежит образу $d\tau$. Чтобы в этом убедиться, достаточно взять в качестве касательного вектора v эту самую форму:

$$v = \alpha.$$

Вопрос о реализуемости антиавтодуальных форм в образе $d\tau$ приводит к одному интересному наблюдению.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Симплектическая структура над 4-многообразием X , задаваемая симплектической формой ω_s , обладает тем свойством, что для любой согласованной римановой метрики g_s дифференциал отображения τ в точке (g_s, J_s, ω_s) имеет в качестве образа все пространство $H^2(X, \mathbb{R})$, иными словами, $\dim \operatorname{Im} d\tau = b_2(X)$ максимальна.

Действительно, для преобразования формулы (2.12) воспользуемся тождеством

$$1 - \frac{1}{2} \langle d\rho, \omega \rangle_g = \frac{1}{2} \langle \omega_H, \omega \rangle_g,$$

поскольку

$$1 - \frac{1}{2} \langle d\rho, \omega \rangle_g = \frac{1}{2} \langle \omega, \omega \rangle_g - \frac{1}{2} \langle d^+ \rho, \omega \rangle_g = \frac{1}{2} \langle \omega_H, \omega \rangle_H.$$

Удобно воспользоваться отображением $\mathcal{M}_X^K \rightarrow C^\infty(X, \mathbb{R})$, определяемым соотношением

$$(g, J, \omega) \mapsto F_{(g, J, \omega)} = \frac{1}{2} \langle \omega_H, \omega \rangle_g. \quad (2.13)$$

Тогда для симплектической формы ω_s имеем

$$F_{(g_s, J_s, \omega_s)} \equiv 1$$

при любой согласованной с ω_s римановой метрики g_s . Поэтому дифференциал $d\tau$ в точке (g_s, J_s, ω_s) имеет простой вид:

$$d\tau(v) = (v)_H,$$

и, следовательно, является эпиморфизмом.

Таким образом, симплектическое многообразие должно обладать эрмитовой тройкой с максимально возможной размерностью образа дифференциала τ . Функция $F_{(g, J, \omega)}$, определяемая (2.13), может рассматриваться как показатель симплектичности или отклонения от симплектичности. Функция F может и не быть константой: если $\langle \omega_H, \omega \rangle_g$ не имеет нулей, то из этого следует, что ω_H тоже не имеет нулей. Значит, эта автодуальная гармоническая форма является симплектической формой. С другой стороны, если $F_{(g, J, \omega)}$ не имеет нулей, то $d\tau$ в точке (g, J, ω) имеет максимально возможный образ. Действительно, после введения функции F выражение для дифференциала (2.12) становится особенно простым:

$$\begin{aligned} (d\tau(v))^- &= (Fv_-)_H, \\ (d\tau(v))^+ &= \left(v_+ + \frac{1}{2} \langle d\rho, v_- \rangle_g \omega \right)_H. \end{aligned}$$

Для любой гармонической антиавтодуальной формы $\beta \in \mathcal{H}_g^-$ можно найти такую форму $v_- \in \Omega_g^-$, что $(Fv_-)_H = \beta$. Для этого достаточно взять $v_- = F^{-1}\beta$. Возможность того, что образ дифференциала максимальный, не исключается при переходе к более общему случаю, когда функция F имеет нули. Близость к симплектичности эрмитовой тройки на численном уровне отражается не наличием или отсутствием нулей у функции F , а “качеством” ее нулей: если нули F таковы и сама F такова, что линейное отображение

$$\tilde{F}: \Omega_g^- \rightarrow \mathcal{H}_g^-, \quad \theta \mapsto (F\theta)_H$$

является эпиморфизмом, то в некотором смысле рассматриваемая эрмитова тройка похожа на симплектическую.

§3. Инвариант гладкой структуры

Приведенные выше локальные вычисления естественно дополняются конструкцией, приведенной в настоящем параграфе. Эквивариантность канонического отображения τ относительно действия группы диффеоморфизмов $\text{Diff } X$ подлежащего многообразия X , установленная в работе [9] и в некотором смысле мотивировавшая интерес к этому отображению, позволяет ввести функцию

$$\mathcal{N}: \mathcal{K}_X \rightarrow \mathbb{Z}$$

на множестве всех канонических классов над X , причем эта функция вследствие этой эквивариантности будет инвариантна относительно $\text{Diff } X$ -действия.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Для канонического класса $K \in \mathcal{K}_X \subset H^2(X, \mathbb{Z})$ значение функции $\mathcal{N}$ равно

$$\mathcal{N}(K) = \max_{(g, J, \omega) \in \mathcal{M}_X^K} \dim \text{Im } d\tau_{(g, J, \omega)} \in \mathbb{Z}.$$

Из эквивариантности отображения τ немедленно следует

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.1. *Функция $\mathcal{N}$ инвариантна относительно действия группы $\text{Diff } X$.*

Исходя из основной идеи работы [8], можно продолжить область определения функции $\mathcal{N}$ на множество $\text{Spin} \subset H^2(X, \mathbb{Z})$ всех возможных $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$ -структур над X . Напомним, что $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$ -структурой называется целочисленный подъем второго класса Штиффеля–Уитни подлежащего многообразия X :

$$c \equiv w_2(X) \pmod{2}$$

(т.е. по модулю кручения множество $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$ -структур параметризуется четными классами в решетке целочисленных когомологий). Для произвольной $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$ -структуры $c \in H^2(X, \mathbb{Z})$ имеем следующие три возможности для численной характеристики

$$d = \frac{1}{4}(c^2 - 2\chi - 3\sigma),$$

известной в теории инвариантов Зайберга–Виттена как виртуальная размерность многообразия модулей абелевых монополей:

- 1) d нечетно;
- 2) d четно и отрицательно;
- 3) d четно и неотрицательно.

В случаях 1) и 2) значение функции $\mathcal{N}$ геометрически не определено, поэтому можно в этих случаях присвоить $\mathcal{N}$ значение $b_2^+(X) - 1$. В случае 3) $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$ -структура $c \in H^2(X, \mathbb{Z})$ может быть продолжена до канонического класса $K_c \in H^2(Y, \mathbb{Z})$ над связной суммой

$$Y = X \sharp \overline{\mathbb{CP}}_i^1, \quad i = 1, \dots, \frac{1}{2}d.$$

Тогда над Y можно рассмотреть компоненту $\mathcal{M}_Y^{K_c}$ пространства эрмитовых троек и взять максимум размерности образа дифференциала τ уже по эрмитовым тройкам из этой компоненты:

$$\mathcal{N}(c) = \max_{(g, J, \omega) \in \mathcal{M}_Y^{K_c}} \dim \text{Im } d\tau_{(g, J, \omega)}.$$

Очевидно, что и продолженная таким образом функция $\mathcal{N}$ с областью определения уже на подмножестве $\text{Spin} \in H^2(X, \mathbb{Z})$ остается инвариантной относительно действия $\text{Diff } X$.

Проиллюстрируем приведенную выше конструкцию-определение двумя примерами. Первый из этих примеров тривиален (после произведенных выше вычислений) и займет не более двух строк, второй более содержателен и представляет собой утверждение теоремы, сформулированное во введении. От внимательного читателя, конечно, не ускользнет то, что оба эти примера иллюстрируют не столько конструкцию-определение, сколько желание найти конструктивное условие на базисные классы над четырехмерным многообразием (в нашем случае – на базисные канонические классы).

ПРИМЕР 3.1. Пусть X допускает существование симплектической структуры с ассоциированным каноническим классом K_s . Тогда из следствия 2.2 получаем, что $\mathcal{N}(K_s) = b_2$.

ПРИМЕР 3.2. Пусть для данной гладкой структуры над X канонический класс $K \in \mathcal{K}_X \subset H^2(X, \mathbb{Z})$ является базисным. Это означает, что инвариант Зайберга–Виттена этого класса нетривиален:

$$N_{\text{SW}}(K) \neq 0$$

(определение и основные свойства инвариантов Зайберга–Виттена см., например, в [1], [4], [11]). В работе [9] связь между решениями уравнения Зайберга–Виттена и эрмитовыми тройками с нетривиальными образами относительно τ уже была представлена и исследована. Нетривиальность инварианта Зайберга–Виттена влечет не только тот факт, что для любой римановой метрики решение существует, но и то, что при деформациях исходной римановой метрики g_0 решение системы, соответствующей этой метрике, является устойчивым, т.е. гладко варьируется вместе с изменением метрики. Если теперь восстановим для этой метрики g_0 эрмитову тройку $(g, J, \omega) \in \mathcal{M}_X^K$ с нетривиальным образом $\tau(g, J, \omega) \neq [0]$, то из устойчивости существования решения вытекает максимальность образа дифференциала $d\tau$ в этой точке.

В доказательстве этого факта используется локальная сюръективность *вещественного отображения периодов*. Напомним основную конструкцию. Для гладкого компактного ориентированного риманова многообразия X задано отображение

$$\rho: \mathcal{H} \rightarrow \text{Gr}^+$$

из пространства всех римановых метрик, допускаемых данной гладкой структурой, во множество всех максимальных положительных подпространств $V^+ \subset H^2(X, \mathbb{R})$, где под положительностью понимается то, что форма пересечения Q_X при ограничении на V^+ является положительно определенной. Очевидно, что все такие подпространства имеют одну и ту же размерность b_2^+ и, более того, составляют гладкое вещественное многообразие Gr^+ , изоморфное пространству Лобачевского соответствующей размерности. Отображение ρ определяется *вещественной поляризацией*, задаваемой каждой римановой метрикой

$$g \mapsto [\mathcal{H}_g^+] \subset H^2(X, \mathbb{R}).$$

Здесь, как всегда, пространство $\mathcal{H}_g^+$ состоит из всех автодуальных гармонических относительно g 2-форм. Таким образом, вещественная поляризация индуцирует отображение ρ , которое и называется *вещественным отображением периодов*. Отображение ρ является эквивариантным относительно действия группы $\text{Diff } X$ и представляется важным ингредиентом в гладкой геометрии. Например, можно измерить все пространство метрик, вычислить его “объем” относительно вещественного отображения периодов, используя каноническую риманову метрику на пространстве Лобачевского Gr^+ , и этот “объем” тоже будет инвариантом гладкой структуры. С другой стороны, до сих пор открытой остается проблема глобальной сюръективности вещественного отображения периодов. Однако нам для настоящей работы потребуется только гладкость и *локальная* субмерсивность вещественного отображения моментов, доказанная С. Дональдсоном (см. [3]), т.е. в каждой точке $g \in \mathcal{H}$ дифференциал $d\rho$ имеет тривиальное коядро.

Вернемся к эрмитовым тройкам. Пусть для общей метрики g_0 построена (с использованием конструкции из [9]) эрмитова тройка (g, J, ω) с нетривиальным образом относительно τ . Тогда если мы будем гладко деформировать исходную риманову метрику вблизи g_0 , то:

1) вместе с метрикой будет гладко варьироваться неприводимое решение уравнений Зайберга–Виттена (вследствие нетривиальности инварианта и того, что общая метрика обладает окрестностью в пространстве всех метрик, не пересекающих “стенки”, состоящие из римановых метрик, допускающих существование абелевых инстантов);

2) вместе с вариацией метрики будет гладко варьироваться и эрмитова тройка, согласованная с конформным классом деформации и с нетривиальным образом.

Нам необходимо отследить деформацию образа эрмитовых троек при этом процессе, поскольку эта деформация и будет покрывать образ дифференциала $d\tau$. Для доказательства максимальности этого образа достаточно показать, что такого рода деформациями можно покрыть максимальное отрицательное подпространство $[\mathcal{H}_g^-] \in H^2(X, \mathbb{R})$. Заметим, что наборы отрицательных векторов соответствуют деформациям максимальных положительных подпространств (это замечание и лежит в основе конструкции отождествления Gr^+ с пространством Лобачевского). И каждый такой набор реализуется вследствие локальной субмерсивности вещественного отображения периодов. Таким образом, устойчивость существования решения системы Зайберга–Виттена влечет устойчивость существования эрмитовых троек с нетривиальными τ -образами, которые заматают все близкие к $[\mathcal{H}_g^+]$ в пространстве Лобачевского Gr^+ положительные подпространства, и деформации исходного положительного подпространства $[\mathcal{H}_g^+]$ “во все стороны” порождают все достаточно малые отрицательные векторы в $H^2(X, \mathbb{R})$, на которые остается натянуть дополнительное к $[\mathcal{H}_g^+]$ подпространство $[\mathcal{H}_g^-]$, и этим показать, что образ дифференциала $d\tau$ в точке (g, J, ω) совпадает со всем $H^2(X, \mathbb{R})$.

Тогда по определению функция $\mathcal{N}$ на классе $K \in \mathcal{K}_X$ равна максимально возможному значению

$$\mathcal{N}(K) = b_2(X),$$

и теорема из введения настоящей работы доказана.

§ 4. Дополнительные структуры

Вычисления дифференциала канонического отображения τ и полученные в результате их формулы § 2 естественным образом проецируются на известную проблему, находящуюся на стыке кэлеровой и симплектической геометрий. А именно, пусть X – кэлерово многообразие с интегрируемой комплексной структурой I и кэлеровой формой ω . Кэлерова структура на X может быть представлена эрмитовой тройкой (g, I, ω) , где I интегрируема, а ω замкнута. Этими данными автоматически фиксирован и кэлеров класс $[\omega] \in H^2(X, \mathbb{R})$. По этим данным строятся два многообразия модулей:

1) многообразие модулей $\mathcal{M}^{\text{hol}}$ кэлеровых метрик с фиксированным кэлеровым классом $[\omega] = h_0$;

2) многообразие модулей $\mathcal{M}^{\text{sym}}$ римановых метрик, согласованных с фиксированной симплектической структурой ω .

Первое многообразие по своей природе относится к комплексной геометрии, в то время как второе – к вещественной. Изучение и сравнение этих двух многообразий кажется полезным в различных областях современной геометрии – начиная от проблемы Калаби (см. [2], [12]) и заканчивая зеркальной симметрией, в рамках которой эти два многообразия модулей должны некоторым образом соотноситься для зеркально симметричных многообразий. С. Дональдсон предложил ввести в рассмотрение аппарат симплектической геометрии, им было замечено, что оба эти многообразия модулей обладают симплектическими структурами, и, например, для первого многообразия модулей соответствие “метрика – ее скалярная кривизна” может быть истолковано как отображение моментов для некоторого естественного действия на $\mathcal{M}^{\text{hol}}$, сохраняющего симплектическую структуру (см. [2]).

Наше замечание позволяет представить проблему следующим образом. Заметим, что многообразия модулей $\mathcal{M}^{\text{hol}}$ и $\mathcal{M}^{\text{sym}}$ являются подмногообразиями пространства $\mathcal{M}^{h_0}$, состоящего из всех эрмитовых троек $(g, J, \omega) \in \mathcal{M}_X^{K_I}$ таких, что:

- 1) ω замкнута (т.е. является симплектической формой);
- 2) класс ω фиксирован (равен h_0).

Представим это объемлющее многообразие модулей $\mathcal{M}^{h_0}$ как подмножество слоя канонического отображения τ , удовлетворяющее условию *тривиальности* формы ρ , участвующей в определяющем разложении Ходжа:

$$\mathcal{M}^{h_0} = \{(g, J, \omega) \in \tau^{-1}(h_0) \mid \omega = \omega_H\}.$$

Наметим путь построения симплектической структуры на пространстве $\mathcal{M}^{h_0}$. Для этого, прежде всего, заметим, что справедливо

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.1. *На компоненте $\mathcal{M}_X^K$ имеется универсальная риманова метрика G , инвариантная относительно действия группы $\text{Diff } X$.*

Эта метрика может быть предъявлена двумя эквивалентными способами. Напомним, что задание римановой метрики на произвольном многообразии эквивалентно заданию изоморфизма касательного расслоения с кокасательным. В нашем случае слоем касательного расслоения над точкой $(g_0, J_0, \omega_0) \in \mathcal{M}_X^K$ будет пространство Ω^2 (см. лемму 2.1); при этом двойственное пространство (являющееся слоем кокасательного расслоения) естественно идентифицируется с тем же пространством Ω^2 . Действительно, кокасательный вектор представим в виде $*_{g_0}\beta$, где $\beta \in \Omega^2$. Однако оператор Ходжа $*_{g_0}$ является изоморфизмом (в данном случае даже более того – инволюцией) и потому определяет изоморфизм касательного расслоения на кокасательное.

Конечно, та же метрика может быть записана и в явном виде: в точке $(g_0, J_0, \omega_0) \in \mathcal{M}_X^K$ для пары касательных векторов $v_i \in T_{(g_0, J_0, \omega_0)}\mathcal{M}_X^K$, представляемых 2-формами $v_i = \alpha_i \in \Omega^2$, имеем

$$G(v_1, v_2) = \int_X \langle \alpha_1; \alpha_2 \rangle_{g_0} d\mu(g_0).$$

Видно, что два приведенных определения универсальны и эквивалентны друг другу. Под универсальностью понимаем то, что в определении метрики G не использовались никакие дополнительные структуры, кроме самого определения компоненты $\mathcal{M}_X^K$. Построенная метрика G является римановой метрикой будучи положительно определенной (несуществование изотропных векторов немедленно следует

из несуществования их для любой метрики из $\mathcal{M}_X^K$). Эта же универсальность гарантирует нам *инвариантность* римановой метрики G относительно группы диффеоморфизмов X .

Пользуясь простотой представления касательного расслоения к компоненте $\mathcal{M}_X^K$ и определением универсальной римановой метрики, можно получать интересные дополнительные структуры на вспомогательных пространствах. Ниже приводятся два примера таких структур. Особо подчеркнем, что второй пример пока только гипотетический, в то время как первый содержит вполне обоснованное утверждение.

ПРИМЕР 4.1. Зафиксируем произвольный конформный класс $*_g$ над X , представляемый римановой метрикой g . Обозначим $\mathcal{M}^g$ пространство всех почти комплексных структур, согласованных с данной римановой метрикой g и с фиксированным каноническим классом K . Это то же самое, что и пространство всех почти комплексных структур, согласованных с конформным классом $*_g$. Пространство $\mathcal{M}^g$ является подпространством в $\mathcal{M}_X^K$ и является слоем одной из естественных проекций (см. [9]). Из доказательства леммы 2.1 видно, что касательное пространство $T_{(g, J, \omega)} \mathcal{M}^g$ изоморфно $(\Omega_J^{2,0} \oplus \Omega_J^{0,2})_{\mathbb{R}}$ (это в точности деформация типа 1)). Тогда на касательном расслоении $T\mathcal{M}^g$ имеем естественную почти комплексную структуру $\mathcal{J}$, действующую следующим образом. В произвольной точке $(g, J_0, \omega_0) \in \mathcal{M}^g$ на слое касательного расслоения

$$T_{(g, J_0, \omega_0)} \mathcal{M}^g \cong (\Omega_{J_0}^{2,0} \oplus \Omega_{J_0}^{0,2})_{\mathbb{R}}$$

имеется оператор умножения на мнимую единицу:

$$i \cdot a = ia^{2,0} - ia^{0,2}$$

для любой вещественной формы $a \in (\Omega_{J_0}^{1,1})^{\perp} \in \Omega^2$. Здесь мы воспользовались естественным переходом к комплексному касательному пространству, представляемому просто $\Omega_{J_0}^{2,0}$, и наличием выделенной стандартной вещественной структуры, индуцирующей сопряжение

$$\Theta: \Omega_{J_0}^{2,0} \cong \Omega_{J_0}^{0,2}.$$

Варьируя тройку, получим универсальную почти комплексную структуру $\mathcal{J}$ на $\mathcal{M}^g$. Нетрудно видеть, что $\mathcal{J}$ согласована с римановой метрикой G , что дает нам невырожденную форму Ω_g над пространством $\mathcal{M}^g$. Локальные вычисления приводят к выводу о том, что эта форма индуцирует симплектическую структуру на $\mathcal{M}^g$.

Приведенный выше пример, к сожалению, не имеет прямого продолжения на все пространство $\mathcal{M}_X^K$. Несмотря на существование универсальной метрики G на всем касательном расслоении, $T\mathcal{M}_X^K$ не имеет никакой естественной почти комплексной структуры в общем случае. Однако имеется следующая конструкция.

ПРИМЕР 4.2. Пространство $\mathcal{M}_X^K$ является почти пуассоновым многообразием (о пуассоновых структурах см., например, [10]). Его касательное расслоение имеет

естественное подрасслоение $T^{\text{un}} \subset T\mathcal{M}_X^K$, обладающее вещественным умножением на i . Его определение следующее. Локальные и глобальные свойства римановых метрик над X индуцируют пару разложений касательного расслоения:

$$T\mathcal{M}_X^K = T^+ \oplus T^-, \quad T\mathcal{M}_X^K = T^{\text{har}} \oplus T^{\text{un}}. \quad (4.1)$$

Первое разложение очевидно: в каждой точке $(g, J, \omega) \in \mathcal{M}_X^K$ слой касательного расслоения $T_{(g, J, \omega)}\mathcal{M}_X^K \cong \Omega^2$ раскладывается на подпространства автодуальных и антиавтодуальных форм:

$$T_{(g, J, \omega)}^{\pm} = \Omega_g^{\pm}. \quad (4.2)$$

Это разложение отражает локальные свойства метрик. Глобальные свойства римановой метрики g над всем многообразием X определяют второе разложение, а именно

$$T_{(g, J, \omega)}^{\text{har}} = \mathcal{H}_g \subset \Omega^2, \quad T_{(g, J, \omega)}^{\text{un}} = d\Omega^1 \oplus d^{*g}\Omega^3 \subset \Omega^2. \quad (4.3)$$

Заметим, что оба разложения в (4.1) являются ортогональными относительно универсальной римановой метрики G . Для подрасслоения T^{un} из (4.3) разложение (4.2) влечет разложение $T^{\text{un}} = T^{+\text{un}} \oplus T^{-\text{un}}$, которое тоже ортогонально. В слое над (g, J, ω) расслоение $T^{+\text{un}}$ представляется 2-формами вида

$$d\rho + d^{*g}(*_g\rho) = 2d^+\rho,$$

в то время как $T^{-\text{un}}$ представляется формами

$$d\rho - d^{*g}(*_g\rho) = 2d^-\rho,$$

где $\rho \in \Omega^1$ (это следует из разложения Ходжа [9]). Такое описание слагаемых $T^{\pm\text{un}}$ немедленно влечет существование естественных изоморфизмов

$$\Psi^{\pm}: T^{\pm\text{un}} \rightarrow \Omega^1 \pmod{\ker d \subset \Omega^1}.$$

Отсюда имеем изоморфизм $\tilde{\Psi}: T^{+\text{un}} \cong T^{-\text{un}}$, по которому строится оператор умножения на мнимую единицу:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}: T^{\text{un}} &\rightarrow T^{\text{un}}, \quad \mathcal{J}^2 = -\text{id}, \\ \mathcal{J}(v^+ \oplus v^-) &= \tilde{\Psi}^{-1}(v^-) - \tilde{\Psi}(v^+). \end{aligned}$$

Из определения изоморфизма $\tilde{\Psi}$ нетрудно видеть, что он является *ортогональным* оператором относительно универсальной римановой метрики G . Это дает нам определение вырожденной 2-формы Ω на пространстве эрмитовых троек $\mathcal{M}_X^K$, которая имеет носителем подрасслоение T^{un} в касательном расслоении $T\mathcal{M}_X^K$. Для построения почти пуассоновой структуры остается построить двойственный относительно метрики G объект $\Pi \in \Lambda^2(T\mathcal{M}_X^K)$ для формы Ω . Этот объект определяет кососимметрическое умножение

$$\{F, G\}_{\Pi} = \Pi(dF, dG) \in C^{\infty}(\mathcal{M}_X^K, \mathbb{R})$$

гладких функций $F, G \in C^\infty(\mathcal{M}_X^K, \mathbb{R})$, удовлетворяющих правилу Лейбница. Естественно высказать гипотезу о том, что почти пуассонова структура $\{\cdot, \cdot\}_\Pi$ является *пуассоновой*, т.е. удовлетворяет и тождеству Якоби. Постановка вопроса о симплектических листах немедленно приводит к рассмотрению подмногообразий типа $\mathcal{M}^{h_0}$. Прежде всего, рассмотрим слой канонического отображения τ в точке $h_0 \in H^2(X, \mathbb{R})$. Касательное пространство к слою $\tau^{-1}(h_0)$ в точке (g, J, ω) выделено в тотальном касательном пространстве Ω^2 условиями

$$(F\theta_-)_H = 0, \quad (\theta_+)_H = -(\langle d\rho; \theta_- \rangle_g \omega)_H, \quad (4.4)$$

где $v = \theta^+ + \theta^-$ – касательный вектор (это следует непосредственно из формулы (2.12)). Система (4.4) имеет треугольный вид, что существенно облегчает анализ решений. Главный вывод в контексте настоящих конструкций заключается в том, что если в точке $(g, J, \omega) \in \tau^{-1}(h_0)$ функция F тождественно равна единице (т.е. $\omega \equiv \omega_H$), то касательное пространство в точке к слою *совпадает* со слоем комплексного расслоения T^{un} . Действительно, в этом случае $d\rho \equiv 0$, поэтому в “симплектической” точке система (4.4) имеет вид

$$(\theta^+ + \theta^-)_H = (v)_H = 0,$$

что равносильно условию $v \in T^{\text{un}}_{(g, J, \omega)}$.

Таким образом, гипотеза о пуассоновости $\mathcal{M}_X^K$ естественно дополняется предположением о том, что эта пуассонова структура ограничивается до симплектической на $\mathcal{M}^{h_0}$, а последняя является *универсальной* для подмногообразий $\mathcal{M}^{\text{hol}}$ и $\mathcal{M}^{\text{sym}}$, принадлежащих $\mathcal{M}^{h_0}$.

Заключение

Хотелось бы, чтобы техническая работа, проделанная на протяжении этой статьи, не заслонила полностью общей идеи, движущей нашими исследованиями и состоящей в том, что пространство эрмитовых троек является аналогом пространства эрмитовых связностей. Параллелизм, прослеживающийся в поведении пространства связностей и уравнений на них со стандартной калибровочной группой и пространства эрмитовых троек с уравнениями, инвариантными относительно действия группы диффеоморфизмов подлежащего многообразия, наталкивает на мысль о том, что эти два пространства не только схожи, но и связаны друг с другом. Данные пространства в некотором смысле “двойственны” друг другу, эта “двойственность” проявляется, например, в рамках обобщения квантования Аштекера–Айшема. Поскольку эта тема требует отдельной статьи, мы ограничиваемся здесь лишь кратким упоминанием возможности такого обобщения, естественного, с нашей точки зрения, поскольку сам предмет пространства эрмитовых троек лежит на пересечении дифференциальной геометрии и математической физики.

Основная часть настоящей работы была проделана в Институте Макса Планка (Бонн, Германия), всему дружному коллективу которого автор считает приятным долгом высказать свою глубокую и искреннюю признательность.

Список литературы

1. Donaldson S. K. The Seiberg–Witten equation and 4-manifold topology // BAMS. 1996. V. 33. № 1. P. 45–70.

2. *Donaldson S. K.* Remarks on gauge theory, complex geometry and 4-manifold topology // Fields medalists lectures / Ed. M. Atiyah. Singapore: Un. Press, 1997. P. 384–403.
3. *Donaldson S. K., Kronheimer P. B.* The geometry of 4-manifolds. Oxford: Oxford University Press, 1990.
4. *Kronheimer P., Mrowka T.* The genus of embedded surfaces in the projective plane // Math. Res. Letters. 1994. V. 1. P. 797–808.
5. *Тюрин Н. А.* Инстантоны и монополи // УМН. 2002. Т. 57. № 2. С. 85–138.
6. *Тюрин Н. А.* Абелевы монополи и комплексная геометрия // Матем. заметки. 1998. Т. 65. № 3. С. 420–428.
7. *Tyurin N.* Hermitian triple space as an analogy of hermitian connection spaces. Preprint / MPI. Bonn, 2000. № 134.
8. *Тюрин Н. А.* Абелевы монополи: случай положительной размерности многообразия модулей // Изв. РАН. Сер. матем. 2000. Т. 64. № 1. С. 197–210.
9. *Тюрин Н. А.* Пространства эрмитовых троек и уравнения Зайберга–Виттена // Изв. РАН. Сер. матем. 2001. Т. 65. № 1. С. 198–224.
10. *Weinstein A.* The local structure of Poisson manifolds // J. Diff. Geom. 1983. V. 18. P. 523–557.
11. *Witten E.* Monopoles and four-manifolds // Math. Res. Letters. 1994. V. 1. P. 769–789.
12. *Xiuxiong Chen.* The space of Kaehler metrics. ArXiv: DG / 0007057.

ЛТФ ОИЯИ (Дубна)

E-mail: tyurin@tyurin.mccme.ru,

ntyurin@thsun1.jinr.ru

Поступило в редакцию

20.III.2001