Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Вит. В. Волчков, О функциях с нулевыми шаровыми средними на кватернионном гиперболическом пространстве, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2002, том 66, выпуск 5, 3–32

DOI: <https://doi.org/10.4213/im401>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 13:15:18

УДК 517.5

Вит. В. Волчков

О функциях с нулевыми шаровыми средними на кватернионном гиперболическом пространстве

Решена проблема описания класса функций, имеющих нулевые интегралы по всем шарам одного фиксированного радиуса на кватернионном гиперболическом пространстве.

Библиография: 35 наименований.

Введение

Пусть $\mathbb{R}^n$ – вещественное евклидово пространство размерности $n \geq 2$, $M(n)$ – группа движений $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{F} = \{\mu_i\}_{i=1}^k$ – конечное семейство распределений с компактным носителем в $\mathbb{R}^n$. При фиксированном $g \in M(n)$ рассмотрим распределение $g\mu_i$, действующее на $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ по правилу

$$\langle g\mu_i, f \rangle = \langle \mu_i, f \circ g^{-1} \rangle, \quad f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n).$$

Здесь и далее $\mathcal{E}(\mathcal{M})$ – пространство бесконечно дифференцируемых функций на гладком многообразии $\mathcal{M}$ со стандартной топологией (см., например, [1, гл. 2, § 2, п. 2]). Преобразование Помпейю $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}$ отображает $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ в $(\mathcal{E}(M(n)))^k$ и определяется равенством

$$\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(f)(g) = (\langle g\mu_1, f \rangle, \dots, \langle g\mu_k, f \rangle), \quad f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n), \quad g \in M(n)$$

(см. [2, § 3]). Для заданного семейства $\mathcal{F}$ возникает следующая

ПРОБЛЕМА [2]. 1) *Выяснить, является ли преобразование Помпейю $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}$ инъективным, и если не является, то описать его ядро.*

2) *Если $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}$ инъективно, то найти обратное отображение.*

Для различных $\mathcal{F}$ инъективность преобразования Помпейю и близкие вопросы изучались во многих работах (см. обзоры [2]–[4] с обширной библиографией, а также [5]–[19]). Особый интерес представляет решение сформулированной проблемы для семейства $\mathcal{F} = \{\chi_{\Omega}\}$, где χ_{Ω} – характеристическая функция (индикатор) открытого ограниченного множества $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. В этом классическом случае

$$\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(f)(g^{-1}) = \int_{g(\Omega)} f(x) dx$$

Работа выполнена при финансовой поддержке ФФИ Украины (проект № 01.07/0241).

и множества Ω , для которых $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}$ инъективно, называются *множествами Помпейю*. Нетрудно видеть, что любой шар $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$ не является множеством Помпейю, но до сих пор неизвестно, существуют ли другие области с границей, гомеоморфной сфере, обладающие этим свойством. Для $\mathcal{F} = \chi_{\mathcal{B}}$ проблема 1) сводится к описанию класса функций, имеющих нулевые интегралы по всем шарам из $\mathbb{R}^n$ одного фиксированного радиуса. Из общих фактов теории периодических в среднем функций следует, что ядро $\mathcal{P}_{\chi_{\mathcal{B}}}$ порождается экспоненциальными полиномами из указанного класса, но при этом нет какой-либо информации о самих полиномах (см. [2, § 2, теорема 2.19]). В работе [6] найдено явное представление функций из $\ker(\mathcal{P}_{\chi_{\mathcal{B}}})$ в виде рядов специального вида по сферическим гармоникам. В [7], [10] получены подобные результаты для других семейств $\mathcal{F}$.

Описание ядра $\mathcal{P}_{\chi_{\mathcal{B}}}$ [6] явилось ключевым моментом для полного решения многих задач, связанных с шаровыми и сферическими средними. Перечислим наиболее яркие результаты, полученные этим методом: окончательный вариант локальной теоремы о двух радиусах [6], [16], решение проблемы носителя для некоторых классов функций [7], описание множеств Помпейю в терминах аппроксимации в $L^1(\mathbb{R}^n)$ линейными комбинациями индикаторов шаров [5], новые теоремы о двух радиусах в теории гармонических функций [10], [13], описание сферически симметричных множеств инъективности преобразования Радона на сферах [11] и др. (см. [8], [9], [14]–[19]). Эти результаты явились завершающим этапом в серии исследований, начатых более полувека назад в работах Ф. Джона, Ж. Дельсарта и продолженных Л. Зальцманом, К. А. Беренстейном, Р. Гэем, А. Ижером, М. Л. Аграновским и др. (см. обзоры [2]–[4]).

В связи с многочисленными приложениями важное значение имеет развитие методики, предложенной в работах [5]–[19] для различных классов однородных пространств с инвариантной мерой. Наибольший прогресс в указанном направлении достигнут для некомпактных двухточечных однородных пространств. В соответствии с их классификацией (см., например, [1, гл. 1, § 3, п. 3]) – это в точности евклидовы пространства и симметрические пространства ранга 1 некомпактного типа (т.е. гиперболические пространства $H^n(\mathbb{R})$, $H^n(\mathbb{C})$, $H^n(\mathbb{Q})$ и гиперболическая плоскость Кэли $H^2(\text{Ca})$). В работах [15], [19], [20] найдено описание класса функций, имеющих нулевые интегралы по всем шарам одного фиксированного радиуса на $H^n(\mathbb{R})$ и $H^n(\mathbb{C})$. Этот результат для $H^2(\mathbb{R})$ позволил получить, в частности, решение проблемы Зальцмана о существовании неголоморфной в единичном круге функции, имеющей нулевые интегралы по данному конформно-инвариантному семейству окружностей [12]. За исключением рассмотренных случаев, до настоящего времени не было известно подобного описания указанного класса ни для одного симметрического пространства. В настоящей работе получено решение этой задачи для кватернионного гиперболического пространства $H^n(\mathbb{Q})$. Отметим, что, в отличие от $H^n(\mathbb{R})$ и $H^n(\mathbb{C})$, здесь возникают серьезные дополнительные трудности, связанные с подходящей реализацией неприводимых компонент квазирегулярного представления компактной симплектической группы $\text{Sp}(n)$ и наличием эквивалентных представлений среди этих компонент (см. § 4–7).

Точная формулировка основного результата приводится в § 1. В § 2 содержатся основные обозначения и необходимые в дальнейшем сведения. В § 3–9 разви-

вается техника для доказательства основного результата работы. В §3 рассмотрен аналог модели Пуанкаре для кватернионного гиперболического пространства $H^n(\mathbb{Q})$. В §4 получено разложение $L^2(S^{4n-1})$ в ортогональную прямую сумму пространств $\mathcal{H}_{2n}(p, q, m)$ однородных гармонических многочленов специального вида. В §5 доказывается неприводимость $\mathcal{H}_{2n}(p, q, m)$ относительно $\mathrm{Sp}(n)$. В §6 изучаются свойства пространства $Z_{2n}(p, q, m)$, состоящего из многочленов $f \in \mathcal{H}_{2n}(p, q, m)$, инвариантных относительно $\mathrm{Sp}(n-1)$. В §7 найдено описание линейных операторов из $\mathcal{H}_{2n}(p_1, q_1, m_1)$ в $\mathcal{H}_{2n}(p_2, q_2, m_2)$, коммутирующих с группой $\mathrm{Sp}(n)$. В §8 исследуются свойства рассматриваемого класса функций на пространстве $H^n(\mathbb{Q})$. В §9 приводятся вспомогательные утверждения, связанные с собственными функциями оператора Лапласа–Бельтрами на $H^n(\mathbb{Q})$. Доказательство основного результата содержится в §10.

О других аспектах проблемы Помпейю на симметрических пространствах см. [2], [3], [21]–[23] и библиографию к этим работам.

§1. Формулировка основного результата

Пусть $n \geq 2$, $\mathbb{Q}^n$ – n -мерное левое кватернионное евклидово пространство со скалярным произведением

$$\langle a, b \rangle = \sum_{k=1}^n a_k \bar{b}_k,$$

где $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Q}^n$ и $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{Q}^n$ (см., например, [24, гл. 1, §2]). Положим $a_k = \alpha_k + \alpha_{n+k}j$, $b_k = \beta_k + \beta_{n+k}j$, где $\alpha_k, \alpha_{n+k}, \beta_k, \beta_{n+k} \in \mathbb{C}$, $1 \leq k \leq n$, и отождествим $\mathbb{Q}^n$ с $2n$ -мерным комплексным евклидовым пространством при помощи соответствия

$$(a_1, \dots, a_n) \rightarrow (\alpha_1, \dots, \alpha_{2n}).$$

При этом

$$\langle a, b \rangle = \langle a, b \rangle_{\mathbb{C}} - (a, b)_{\mathbb{C}}j,$$

где

$$\langle a, b \rangle_{\mathbb{C}} = \sum_{k=1}^{2n} \alpha_k \bar{\beta}_k, \quad (a, b)_{\mathbb{C}} = \sum_{k=1}^n (\alpha_k \beta_{n+k} - \alpha_{n+k} \beta_k).$$

Пусть $B^{4n} = \{a \in \mathbb{Q}^n : |a| < 1\} = \{z \in \mathbb{C}^{2n} : |z| < 1\}$, где $|a|^2 = \langle a, a \rangle$. Матрица

$$q_{ik}(a) = \frac{(1 - |a|^2)\delta_{ik} + \bar{a}_i a_k}{(1 - |a|^2)^2}, \quad 1 \leq i, k \leq n, \quad (1)$$

где δ_{ik} – символ Кронекера, является кватернионно-симметрической и индуцирует на B^{4n} структуру риманова многообразия. Пространство $H^n(\mathbb{Q})$ изометрично шару B^{4n} с метрикой (1) (см. §3).

Пусть $d(z, w)$ – расстояние между точками $z, w \in B^{4n}$ в метрике (1), $B_R = \{z \in B^{4n} : d(0, z) < R\}$ – открытый геодезический шар радиуса R , $L_{\mathrm{loc}}(B_R)$ – множество локально суммируемых функций на B_R . Обозначим $V_r(B_R)$ класс функций

$f \in L_{\text{loc}}(B_R)$, имеющих нулевые интегралы (по римановой мере μ на $H^n(\mathbb{Q})$) по всем замкнутым геодезическим шарам радиуса R , лежащим в B_R . Для целого неотрицательного l (или $l = \infty$) положим

$$V_r^l(B_R) = V_r(B_R) \cap C^l(B_R).$$

Пусть L – оператор Лапласа–Бельтрами на $H^n(\mathbb{Q})$, и пусть

$$(\mathcal{L}f)(z) = (Lf)(z)/4(1 - |z|^2).$$

Для целых $p, q \geq 0$, $0 \leq m \leq \min(p, q)$ определим пространство $\mathcal{H}_{2n}(p, q, m)$ равенством

$$\mathcal{H}_{2n}(p, q, m) = \{f \in \mathcal{H}_{2n}(p, q) : \mathcal{L}f = (m-1)(m-s)f\},$$

где $s = p + q$ и $\mathcal{H}_{2n}(p, q)$ – пространство однородных гармонических многочленов бистепени (p, q) в $\mathbb{C}^{2n}$ (см. [25, гл. 12]). Далее будем отождествлять $\mathcal{H}_{2n}(p, q)$ с его сужением на единичную сферу S^{4n-1} . Пространство $L^2(S^{4n-1})$ является ортогональной прямой суммой пространств $\mathcal{H}_{2n}(p, q, m)$, $p, q \geq 0$, $0 \leq m \leq \min(p, q)$ (см. §4, теорема 3).

Пусть ρ, σ – полярные координаты в $\mathbb{C}^{2n}$ ($\rho = |z|$ для любого $z \in \mathbb{C}^{2n}$ и $\sigma = z/|z|$ при $z \neq 0$), $\{S_{p,q,m}^k\}$, $1 \leq k \leq N(n, p, q, m)$, – фиксированный ортонормированный базис в пространстве $\mathcal{H}_{2n}(p, q, m)$. Всякой функции $f \in L_{\text{loc}}(B_R)$ соответствует ряд Фурье

$$f(\rho\sigma) \sim \sum_{p,q=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\kappa} \sum_{k=1}^{N(n,p,q,m)} f_{p,q,m}^k(\rho) S_{p,q,m}^k(\sigma), \quad \rho \in (0, \text{th } R),$$

где $\kappa = \min(p, q)$, $f_{p,q,m}^k(\rho) = \int_{S^{4n-1}} f(\rho\sigma) \overline{S_{p,q,m}^k(\sigma)} d\sigma$.

Пусть $\alpha, \beta \geq 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\nu = \nu(\lambda) = (2n + 1 - i\lambda)/2$. Обозначим

$$\begin{aligned} \varphi_{\lambda}^{(\alpha, \beta)}(t) &= F\left(\frac{\alpha + \beta + 1 - i\lambda}{2}, \frac{\alpha + \beta + 1 + i\lambda}{2}; \alpha + 1; -(\text{sh } t)^2\right), \\ \Phi_{\lambda}^{s, m}(\rho) &= \frac{\Gamma(\nu + s - m)\Gamma(2n)}{\Gamma(2n + s)\Gamma(\nu - m)} \rho^s (1 - \rho^2)^{\nu} \\ &\quad \times F(\nu + s - m, \nu - 1 + m; 2n + s; \rho^2), \end{aligned} \quad (2)$$

где, как обычно, F – гипергеометрическая функция, Γ – гамма-функция. Отметим, что при любом $t \in (0, 1)$

$$\max_{\rho \in [0, t]} |\Phi_{\lambda}^{s, m}(\rho)| = O(\lambda), \quad \lambda \rightarrow +\infty, \quad (3)$$

где постоянная в знаке O не зависит от λ (см. §9, лемма 24). Сферические функции на $H^n(\mathbb{Q})$ имеют вид

$$\varphi_{\lambda}(z) = \varphi_{\lambda}^{(2n-1, 1)}(d(0, z)) = \Phi_{\lambda}^{0, 0}(|z|) = \int_{S^{4n-1}} e_{\nu, \omega}(z) d\sigma(\omega), \quad (4)$$

где $e_{\nu,\omega}(z) = \left(\frac{1-|z|^2}{|1-\langle z,\omega\rangle|^2}\right)^\nu$, $\omega \in S^{4n-1}$ (см. [23], а также § 9 настоящей работы). Из [26, гл. 2, § 2.1, п. 2.1.4, формула (22)] следует, что

$$\Phi_\lambda^{1,0}(\operatorname{th} r) = \frac{\nu}{4n} \operatorname{sh} 2r \varphi_\lambda^{(2n,2)}(r). \quad (5)$$

Повторяя рассуждения, приведенные в доказательстве леммы 6 из [15] (см. также [27, гл. 2, § 23]), получаем, что все нули λ функции $\varphi_\lambda^{(2n,2)}(r)$ являются вещественными, простыми и расположены симметрично относительно точки $\lambda = 0$.

Пусть $\mathcal{N}(r) = \{\lambda > 0: \varphi_\lambda^{(2n,2)}(r) = 0\}$. Из общих фактов теории целых функций следует (см. [28, гл. 1, § 5, теорема 6]), что $\sum_{\lambda \in \mathcal{N}(r)} \frac{1}{\lambda^{1+\varepsilon}} < \infty$ для любого $\varepsilon > 0$.

Основным результатом настоящей работы является

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $f \in C^\infty(B_R)$. Тогда для того, чтобы $f \in V_r(B_R)$, необходимо и достаточно, чтобы при всех целых $p, q \geq 0$, $0 \leq m \leq \varkappa$ и $1 \leq k \leq N(n, p, q, m)$ имело место равенство*

$$f_{p,q,m}^k(\rho) S_{p,q,m}^k(\sigma) = \sum_{\lambda \in \mathcal{N}(r)} c_{\lambda,p,q,m,k} \Phi_\lambda^{s,m}(\rho) S_{p,q,m}^k(\sigma), \quad (6)$$

где $c_{\lambda,p,q,m,k} = O(\lambda^{-c})$ при $\lambda \rightarrow +\infty$ и любом фиксированном $c > 0$.

Подобный результат для K -инвариантных функций класса $V_r(B_R)$ на симметрических пространствах $X = G/K$ ранга 1 некомпактного типа получен в работе [19]. Неравенство (3) обеспечивает абсолютную и равномерную сходимость ряда (6) на компактных подмножествах B_R . Отметим, что метод сглаживания, предложенный в работе [6], позволяет получить подобное описание для $f \in L_{\text{loc}}(B_R)$. В этом случае коэффициенты $c_{\lambda,p,q,m,k}$ растут не быстрее фиксированной положительной степени λ , а ряд (6) сходится в пространстве распределений $\mathcal{D}'(B_R)$.

Автор благодарит профессора В.В. Волчкова за многочисленные полезные обсуждения.

§ 2. Обозначения и вспомогательные конструкции

Пусть $a \in B^{4n}$. Положим

$$\begin{aligned} s_a &= (1 - |a|^2)^{1/2}, \quad P(z, a) = \frac{\langle z, a \rangle}{|a|^2} a \quad (a \neq 0), \\ P(z, 0) &\equiv 0, \quad Q(z, a) = z - P(z, a), \\ \varphi_a(z) &= (1 - \langle z, a \rangle)^{-1} (a - P(z, a) - s_a Q(z, a)), \quad z \in B^{4n}. \end{aligned}$$

Отображение φ_a обладает следующими свойствами:

$$\varphi_a(0) = a, \quad \varphi_a(a) = 0; \quad (7)$$

$$1 - \langle \varphi_a(z), \varphi_a(w) \rangle = (1 - \langle z, a \rangle)^{-1} (1 - \langle z, w \rangle) (1 - \langle a, w \rangle)^{-1} (1 - |a|^2); \quad (8)$$

$$\varphi_a \text{ является инволюцией, т.е. } \varphi_a(\varphi_a(z)) = z. \quad (9)$$

Доказательство свойств (7)–(9) аналогично доказательству теоремы 2.2.2 из [25].

Пусть $z = (z_1, \dots, z_{2n}) \in \mathbb{C}^{2n}$, $z_k = x_k + iy_k$, $x_k, y_k \in \mathbb{R}^1$, $1 \leq k \leq 2n$. В дальнейших построениях важную роль играют дифференциальные операторы

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1 &= \sum_{i=1}^{2n} \left(z_i \frac{\partial}{\partial z_i} + \bar{z}_i \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} \right) + \sum_{i,k=1}^{2n} (\delta_{ik} - z_i \bar{z}_k) \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_k}, \\ \mathcal{L}_2 &= \sum_{i,k=1}^n \left(-\bar{z}_{n+i} z_{n+k} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_k} + \bar{z}_i z_{n+k} \frac{\partial^2}{\partial z_{n+i} \partial \bar{z}_k} \right. \\ &\quad \left. + \bar{z}_{n+i} z_k \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_{n+k}} - \bar{z}_i z_k \frac{\partial^2}{\partial z_{n+i} \partial \bar{z}_{n+k}} \right), \\ \mathcal{L} &= \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2,\end{aligned}$$

где $\frac{\partial}{\partial z_k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} - i \frac{\partial}{\partial y_k} \right)$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} + i \frac{\partial}{\partial y_k} \right)$.

Из определения оператора $\mathcal{L}_2$ получаем

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_2(z_1^{s_1} z_{n+1}^{s_2} \bar{z}_1^{m_1} \bar{z}_{n+1}^{m_2} P_l(z)) &= ((m_1 s_2 + m_2 s_1 - l) z_1^{s_1} z_{n+1}^{s_2} \bar{z}_1^{m_1} \bar{z}_{n+1}^{m_2} \\ &\quad - m_1 s_1 z_1^{s_1-1} z_{n+1}^{s_2+1} \bar{z}_1^{m_1-1} \bar{z}_{n+1}^{m_2+1} - m_2 s_2 z_1^{s_1+1} z_{n+1}^{s_2-1} \bar{z}_1^{m_1+1} \bar{z}_{n+1}^{m_2-1}) P_l(z),\end{aligned}\tag{10}$$

где $P_l(z) = (\sum_{k=2}^n |z_k|^2 + |z_{n+k}|^2)^l$. Далее, поскольку $\mathcal{H}_{2n}(p, q)$ является линейной оболочкой функций вида

$$(\alpha_1 z_1 + \dots + \alpha_{2n} z_{2n})^p (\beta_1 \bar{z}_1 + \dots + \beta_{2n} \bar{z}_{2n})^q,$$

где $\alpha_1 \beta_1 + \dots + \alpha_{2n} \beta_{2n} = 0$ (см. [29], а также [25, гл. 12, § 12.5]), то для любой функции $f \in \mathcal{H}_{2n}(p, q)$ имеем

$$\mathcal{L}f = (s - pq)f + \mathcal{L}_2 f.\tag{11}$$

Пусть $f \in \mathcal{H}_{2n}(p, q)$ и $f \circ \tau = f$ для любого $\tau \in \text{Sp}(n-1)$ ($\text{Sp}(n-1)$ – подгруппа изотропии точки $e = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^{2n}$ группы $\text{Sp}(n)$). Тогда многочлен f имеет вид (см. [30, гл. 4, § 2, лемма 2.11])

$$f(z) = \sum_{l=0}^{\varkappa} f_l(z) P_l(z),\tag{12}$$

где

$$f_l(z) = \sum_{j=0}^{p-l} \sum_{k=0}^{q-l} c_{jk}^{(l)} z_1^j z_{n+1}^{p-l-j} \bar{z}_1^k \bar{z}_{n+1}^{q-l-k}.\tag{13}$$

При этом из гармоничности f находим

$$\Delta(f_{\varkappa}) = 0,\tag{14}$$

$$\Delta(f_l) = -4(l+1)(2n+l-2)f_{l+1}, \quad 0 \leq l \leq \varkappa-1,\tag{15}$$

где Δ – оператор Лапласа в $\mathbb{C}^{2n}$. В частности, если $f_0 \equiv 0$, то $f \equiv 0$. Нам потребуется также следующее равенство:

$$c_{j,j+i}^{(\varkappa)} = \begin{cases} (-1)^j \frac{(p-\varkappa)!}{(p-\varkappa-j)!} \frac{(q-\varkappa-i)!}{(q-\varkappa-i-j)!} \frac{i!}{j!(i+j)!} c_{0,i}^{(\varkappa)}, & i > 0, \\ (-1)^{i+j} \frac{(p-\varkappa+i)!}{(p-\varkappa-j)!} \frac{(q-\varkappa)!}{(q-\varkappa-i-j)!} \frac{(-i)!}{j!(i+j)!} c_{-i,0}^{(\varkappa)}, & i \leq 0. \end{cases} \quad (16)$$

Для доказательства (16) достаточно воспользоваться условием (14).

§ 3. Аналог модели Пуанкаре для пространства $H^n(\mathbb{Q})$

Пусть $\text{Sp}(n, 1)$ – группа всех невырожденных кватернионных матриц $(n+1)$ -го порядка, сохраняющих эрмитову форму $a_1 \bar{b}_1 + \dots + a_n \bar{b}_n - a_{n+1} \bar{b}_{n+1}$. Максимальная компактная подгруппа группы $\text{Sp}(n, 1)$ изоморфна произведению $\text{Sp}(n) \times \text{Sp}(1)$ и образована блочно-диагональными матрицами вида $\begin{pmatrix} \tau & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, где $\tau \in \text{Sp}(n)$, $a \in \mathbb{Q}^1$, $|a| = 1$ (см. [31, гл. 9, § 4]).

Кватернионное гиперболическое пространство $H^n(\mathbb{Q})$ вещественной размерности $4n$ определяется равенством

$$H^n(\mathbb{Q}) = \text{Sp}(n, 1) / \text{Sp}(n) \times \text{Sp}(1)$$

и является римановым глобально симметрическим пространством ранга 1 некомпактного типа (см. [32, гл. 8]).

Представление полной линейной группы $\text{GL}(n, \mathbb{Q})$ в $\text{GL}(2n, \mathbb{C})$ задается отображением

$$U + Vj \rightarrow \begin{pmatrix} U & V \\ -\bar{V} & \bar{U} \end{pmatrix}, \quad (17)$$

где U и V – комплексные матрицы порядка n (см. [33, гл. 2, § 4]). При гомоморфизме (17) матрица $\|g_{ik}\|_{i,k=1}^n$ переходит в матрицу $\|g_{jl}\|_{j,l=1}^{2n}$, где

$$\begin{aligned} g_{ik}(z) &= \frac{\delta_{ik}(1 - |z|^2) + \bar{z}_i z_k + z_{n+i} \bar{z}_{n+k}}{(1 - |z|^2)^2}, \\ g_{i,n+k}(z) &= \frac{\bar{z}_i z_{n+k} - z_{n+i} \bar{z}_k}{(1 - |z|^2)^2}, \\ g_{n+i,k}(z) &= \frac{\bar{z}_{n+i} z_k - z_i \bar{z}_{n+k}}{(1 - |z|^2)^2}, \\ g_{n+i,n+k}(z) &= \frac{\delta_{ik}(1 - |z|^2) + \bar{z}_k z_i + \bar{z}_{n+i} z_{n+k}}{(1 - |z|^2)^2}, \quad 1 \leq i, k \leq n. \end{aligned} \quad (18)$$

Для любого $w = (w_1, \dots, w_{2n}) \in \mathbb{C}^{2n}$ имеет место равенство

$$\sum_{j,l=1}^{2n} g_{jl} w_j \bar{w}_l = \frac{|w|^2}{1 - |z|^2} + \frac{|\langle z, w \rangle|^2}{(1 - |z|^2)^2}, \quad (19)$$

т.е. матрица $\|g_{jl}\|_{j,l=1}^{2n}$ индуцирует на B^{4n} структуру риманова многообразия.

Пусть $I(B^{4n})$ – группа изометрий B^{4n} .

ЛЕММА 1. *Группа $\text{Sp}(n)$ является подгруппой группы $I(B^{4n})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\gamma(t) = (z_1(t), \dots, z_{2n}(t))$, $0 \leq t \leq 1$, – произвольная кусочно гладкая кривая в B^{4n} , $\gamma'(t) = (z'_1(t), \dots, z'_{2n}(t))$. Из (19) следует, что длина $\|\gamma\|$ кривой γ вычисляется по формуле

$$\|\gamma\| = \int_0^1 \left(\frac{|\gamma'(t)|^2}{1 - |\gamma(t)|^2} + \frac{|\langle \gamma(t), \gamma'(t) \rangle|^2}{(1 - |\gamma(t)|^2)^2} \right)^{1/2} dt. \quad (20)$$

Для любого $\tau \in \text{Sp}(n)$ положим $\gamma_\tau(t) = \tau(\gamma(t))$, $0 \leq t \leq 1$. Поскольку $\gamma'_\tau(t) = \tau(\gamma'(t))$, из (20) имеем $\|\gamma_\tau\| = \|\gamma\|$. Поэтому для любых $z, w \in B^{4n}$ имеем $d(\tau z, \tau w) = d(z, w)$, откуда следует утверждение леммы.

ЛЕММА 2. Риманова мера на B^{4n} имеет вид

$$d\mu(z) = dm(z)/(1 - |z|^2)^{2n+2},$$

где dm – мера Лебега в $\mathbb{C}^{2n}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При отождествлении $\mathbb{C}^{2n}$ с $\mathbb{R}^{4n}$ при помощи соответствия $(z_1, \dots, z_{2n}) \rightarrow (x_1, \dots, x_{2n}, y_1, \dots, y_{2n})$ представление группы $\text{GL}(2n, \mathbb{C})$ в $\text{GL}(4n, \mathbb{R})$ задается отображением $U + iV \rightarrow W$, где $W = \begin{pmatrix} U & V \\ -V & U \end{pmatrix}$, U и V – вещественные матрицы порядка $2n$. Поскольку $\det W = |\det(U + iV)|^2$ (см. [25, гл. 1, п. 1.3.5]), риманова мера на B^{4n} имеет вид $d\mu(z) = \tilde{g}(z) dm(z)$, где $\tilde{g}(z)$ – определитель матрицы $\|g_{jl}\|_{j,l=1}^{2n}$ (см. [1, гл. 1, § 4]). Из инвариантности μ относительно $I(B^{4n})$ и леммы 1 следует, что $\tilde{g}$ – радиальная (т.е. зависящая только от $|z|$) функция в шаре B^{4n} . Отсюда

$$\tilde{g}(z) = \tilde{g}(|z|, 0, \dots, 0) = 1/(1 - |z|^2)^{2n+2}. \quad (21)$$

Лемма доказана.

Пусть L – оператор Лапласа–Бельтрами на B^{4n} (см. [1, гл. 2, § 2]).

ЛЕММА 3. Для любой функции $f \in C^2(B^{4n})$ имеет место равенство

$$(Lf)(z) = 4(1 - |z|^2)(\mathcal{L}f)(z). \quad (22)$$

В частности, если f имеет вид $f(z) = h(|z|)$, то

$$(Lf)(z) = (1 - |z|^2)^2 h''(|z|) + \frac{1 - |z|^2}{|z|} (4n - 1 + |z|^2) h'(|z|). \quad (23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\|g^{jl}\|_{j,l=1}^{2n}$ – матрица, обратная к $\|g_{jl}\|_{j,l=1}^{2n}$. Тогда

$$\begin{aligned} g^{ik}(z) &= (\delta_{ik} - \bar{z}_i z_k - z_{n+i} \bar{z}_{n+k})(1 - |z|^2), \\ g^{i,n+k}(z) &= (z_{n+i} \bar{z}_k - \bar{z}_i z_{n+k})(1 - |z|^2), \\ g^{n+i,k}(z) &= (z_i \bar{z}_{n+k} - \bar{z}_{n+i} z_k)(1 - |z|^2), \\ g^{n+i,n+k}(z) &= (\delta_{ik} - z_i \bar{z}_k - \bar{z}_{n+i} z_{n+k})(1 - |z|^2), \quad 1 \leq i, k \leq n. \end{aligned} \quad (24)$$

Представляя оператор L в виде

$$L = \frac{2}{\bar{g}} \sum_{l=1}^{2n} \left(\frac{\partial}{\partial z_l} \left(\sum_{j=1}^{2n} g^{jl} \bar{g} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}_l} \left(\sum_{j=1}^{2n} g^{jl} \bar{g} \frac{\partial}{\partial z_j} \right) \right),$$

из (21) и (24) получаем утверждение леммы.

ЛЕММА 4. Пусть $a, b \in B^{4n}$, $c = \varphi_a(b)$. Тогда отображение $\psi = \varphi_c \circ \varphi_a \circ \varphi_b$ является сужением на $\overline{B^{4n}}$ элемента ортогональной группы $O(4n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства (8) находим

$$\langle \psi(z), \psi(w) \rangle = (1 - \langle b, a \rangle)^{-1} \langle z, w \rangle (1 - \langle b, a \rangle), \quad z, w \in \overline{B^{4n}}.$$

Отсюда для достаточно малых по модулю $z, w \in B^{4n}$ имеем $\psi(z + w) = \psi(z) + \psi(w)$. Аналогично, при $z \in \overline{B^{4n}}$ и $\lambda \in [-1, 1]$ получаем $\psi(\lambda z) = \lambda \psi(z)$. Кроме того, $|\psi(z)| = |z|$, $z \in \overline{B^{4n}}$. Положим

$$\psi_1(0) = 0, \quad \psi_1(z) = |z| \psi\left(\frac{z}{|z|}\right), \quad z \in \mathbb{C}^{2n} \setminus \{0\}.$$

Тогда $\psi_1 \in O(4n)$ и совпадает с отображением ψ в шаре $\overline{B^{4n}}$. Лемма доказана.

ЛЕММА 5. При любом $a \in B^{4n}$ инволюция φ_a принадлежит $I(B^{4n})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z \in B^{4n}$, $f \in C^2(B^{4n})$. Прямым подсчетом, используя лемму 3, покажем, что

$$(Lf)(z) = \Delta(f \circ \varphi_z)(0). \quad (25)$$

Поскольку Δ коммутирует с группой $O(4n)$, из (25) и леммы 4 следует, что L инвариантен относительно φ_a . Отсюда и из [1, гл. 2, § 2, предложение 2.4] получаем утверждение леммы.

ЛЕММА 6. Расстояние между двумя точками $z, w \in B^{4n}$ в метрике (1) вычисляется по формуле

$$d(z, w) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{|1 - \langle z, w \rangle| + \sqrt{|w - z|^2 + |\langle w, z \rangle|^2 - |z|^2 |w|^2}}{|1 - \langle z, w \rangle| - \sqrt{|w - z|^2 + |\langle w, z \rangle|^2 - |z|^2 |w|^2}} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z = (\rho, 0, \dots, 0)$, где $0 < \rho < 1$, и $\gamma(t)$, $0 \leq t \leq 1$, – произвольная кусочно гладкая кривая, соединяющая точки 0 и z в B^{4n} . Из формулы (20) имеем

$$\|\gamma\| \geq \int_0^1 \left(\frac{|\gamma'(t)|^2}{1 - |\gamma(t)|^2} + \frac{|\langle \gamma(t), \gamma'(t) \rangle_{\mathbb{C}}|^2}{(1 - |\gamma(t)|^2)^2} \right)^{1/2} dt \geq d_1(0, z),$$

где $d_1(0, z)$ – расстояние между 0 и z в метрике Бергмана на комплексном гиперболическом пространстве $H^{2n}(\mathbb{C})$ (см. [29], а также [34, гл. 5, § 19]). Отсюда $\|\gamma\| \geq \frac{1}{2} \ln \frac{1+|z|}{1-|z|}$, причем для отрезка, соединяющего 0 и z , достигается равенство. Таким образом,

$$d(0, z) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + |z|}{1 - |z|}. \quad (26)$$

Далее, из леммы 1 следует, что равенство (26) выполнено для любого $z \in B^{4n}$. Теперь из леммы 5 находим

$$d(z, w) = d(0, \varphi_z(w)) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + |\varphi_z(w)|}{1 - |\varphi_z(w)|}. \quad (27)$$

Учитывая равенство (8), получаем требуемое утверждение.

ТЕОРЕМА 2. *Кватернионное гиперболическое пространство $H^n(\mathbb{Q})$ изометрично шару B^{4n} с метрикой (1).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем, что шар B^{4n} с метрикой (1) является некомпактным двухточечным однородным пространством. Пусть $x, y, z, w \in B^{4n}$ и $d(x, y) = d(z, w)$. Тогда по лемме 5

$$d(0, \varphi_x(y)) = d(0, \varphi_z(w)).$$

Отсюда и из равенства (27) имеем $|\varphi_x(y)| = |\varphi_z(w)|$. Поэтому $\varphi_x(y) = \tau \varphi_z(w)$ для некоторого $\tau \in \text{Sp}(n)$. Положим $\Phi = \varphi_x \circ \tau \circ \varphi_z$. Из лемм 1, 5 и равенств (7), (9) получаем $\Phi \in I(B^{4n})$, $\Phi(z) = x$, $\Phi(w) = y$. Отсюда и из (27) следует, что B^{4n} – некомпактное двухточечное однородное пространство. Это означает, что B^{4n} изометричен одному из пространств: $\mathbb{R}^k$, $H^k(\mathbb{R})$, $H^k(\mathbb{C})$, $H^k(\mathbb{Q})$, $H^2(\text{Cay})$. Из (23) и (26) находим, что радиальная часть L_0 оператора Лапласа–Бельтрами L (см. [1, гл. 2, § 3, 5]) имеет вид

$$L_0 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + ((4n - 1) \text{cth } t + 3 \text{th } t) \frac{\partial}{\partial t}.$$

Отсюда и из [23, с. 609] получаем, что шар B^{4n} с метрикой (1) является кватернионным гиперболическим пространством вещественной размерности $4n$. Таким образом, теорема доказана.

§ 4. Пространства $\mathcal{H}_{2n}(p, q, m)$

В этом параграфе получим разложение $L^2(S^{4n-1})$ в ортогональную прямую сумму пространств $\mathcal{H}_{2n}(p, q, m)$, $p, q \geq 0$, $0 \leq m \leq \infty$. Для краткости положим $\lambda_{p,q,m} = (m-1)(m-s)$, где $s = p+q$. Отметим, что пространство $\mathcal{H}_{2n}(p, q, m)$ содержит многочлен

$$Q(p, q, m)(z) = \sum_{k=0}^m (-1)^k C_m^k z_{n+1}^{p-m+k} z_{n+2}^{m-k} \bar{z}_1^{q-k} \bar{z}_2^k,$$

где $C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!}$. Далее из лемм 1, 3 следует, что $\mathcal{H}_{2n}(p, q, m)$ является $\text{Sp}(n)$ -инвариантным подпространством в $L^2(S^{4n-1})$.

ЛЕММА 7. *Пусть $(p, q, m) \neq (p_1, q_1, m_1)$. Тогда пространства $\mathcal{H}_{2n}(p, q, m)$ и $\mathcal{H}_{2n}(p_1, q_1, m_1)$ ортогональны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку при $(p, q) \neq (p_1, q_1)$ пространства $\mathcal{H}_{2n}(p, q)$ и $\mathcal{H}_{2n}(p_1, q_1)$ ортогональны (см. [25, гл. 12, п. 12.2.2]), можно считать, что $p = p_1$, $q = q_1$, $m \neq m_1$. Тогда $\lambda_{p,q,m} \neq \lambda_{p_1,q_1,m_1}$ и утверждение леммы следует из симметричности оператора L (см. [1, гл. 2, § 2, предл. 2.3]).

Пусть E – тождественный оператор, $\Lambda_{p,q,m} = \mathcal{L} - \lambda_{p,q,m}E$. Положим

$$\begin{aligned} l_1(z) &= \sum_{i=1}^{2n} \alpha_i z_i, & l_2(z) &= \sum_{i=1}^{2n} \beta_i \bar{z}_i, \\ l_3(z) &= \sum_{i=1}^n (\alpha_i \bar{z}_{n+i} - \alpha_{n+i} \bar{z}_i), & l_4(z) &= \sum_{i=1}^n (\beta_{n+i} z_i - \beta_i z_{n+i}), \end{aligned}$$

где $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{C}$, $\alpha_1 \beta_1 + \dots + \alpha_{2n} \beta_{2n} = 0$. Обозначим

$$Q_k(z) = l_1^{p-k}(z) l_2^{q-k}(z) l_3^k(z) l_4^k(z).$$

Нетрудно видеть, что при любом $0 \leq k \leq \varkappa$ многочлен Q_k принадлежит $\mathcal{H}_{2n}(p, q)$.

ЛЕММА 8. *Имеет место равенство*

$$\Lambda_{p,q,m} \dots \Lambda_{p,q,0}(Q_0) = (-1)^m p q \dots (p-m)(q-m) \sum_{k=0}^{m+1} (-1)^{k+1} C_{m+1}^k Q_k. \quad (28)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из соотношения (11) находим

$$\mathcal{L}(Q_k) = (s - pq + k(s - 2k))Q_k + (p - k)(q - k)Q_{k+1} + k^2 Q_{k-1}.$$

Используя теперь индукцию по m , получаем требуемое утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Пусть $f \in \mathcal{H}_{2n}(p, q)$. Тогда*

$$\Lambda_{p,q,\varkappa} \dots \Lambda_{p,q,0}(f) = 0. \quad (29)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение следует из описания пространства $\mathcal{H}_{2n}(p, q)$ (см. § 2) и леммы 8.

ЛЕММА 9. *Пространство $\mathcal{H}_{2n}(p, q)$ является прямой суммой пространств $\mathcal{H}_{2n}(p, q, m)$, $m = 0, \dots, \varkappa$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in \mathcal{H}_{2n}(p, q)$. Докажем, что при $1 \leq l \leq \varkappa + 1$

$$\Lambda_{p,q,\varkappa-l} \dots \Lambda_{p,q,0}(f) \in \sum_{k=0}^{l-1} \oplus \mathcal{H}_{2n}(p, q, \varkappa - k), \quad (30)$$

где при $l = \varkappa + 1$ левая часть совпадает с f . Если $l = 1$, то включение (30) следует из равенства (29). Предположим, что утверждение выполнено при некотором $1 \leq l \leq \varkappa$, и докажем его для $l + 1$. Имеем

$$\Lambda_{p,q,\varkappa-l} \dots \Lambda_{p,q,0}(f) = \sum_{k=0}^{l-1} f_{\varkappa-k}, \quad (31)$$

где $f_{\varkappa-k} \in \mathcal{H}_{2n}(p, q, \varkappa-k)$. Поскольку

$$f_{\varkappa-k} = \frac{\Lambda_{p,q,\varkappa-l}(f_{\varkappa-k})}{\lambda_{p,q,\varkappa-k} - \lambda_{p,q,\varkappa-l}}, \quad 0 \leq k \leq l-1,$$

из (31) находим

$$\Lambda_{p,q,\varkappa-l} \left(\Lambda_{p,q,\varkappa-l-1} \dots \Lambda_{p,q,0}(f) - \sum_{k=0}^{l-1} \frac{f_{\varkappa-k}}{\lambda_{p,q,\varkappa-k} - \lambda_{p,q,\varkappa-l}} \right) = 0.$$

Следовательно,

$$\Lambda_{p,q,\varkappa-l-1} \dots \Lambda_{p,q,0}(f) \in \sum_{k=0}^l \bigoplus \mathcal{H}_{2n}(p, q, \varkappa-k),$$

откуда получаем утверждение леммы.

ТЕОРЕМА 3. *Пространство $L^2(S^{4n-1})$ является ортогональной прямой суммой пространств $\mathcal{H}_{2n}(p, q, m)$, $p, q \geq 0$, $0 \leq m \leq \varkappa$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из [25, гл. 12, п.12.2.2] имеем

$$L^2(S^{4n-1}) = \sum_{p,q=0}^{\infty} \bigoplus \mathcal{H}_{2n}(p, q).$$

Применяя лемму 9, получаем требуемое утверждение.

§ 5. Квазирегулярное представление группы $\mathrm{Sp}(n)$

Пусть $T(\tau)$ – квазирегулярное представление группы $\mathrm{Sp}(n)$ на S^{4n-1} (см. [35, гл. 9, § 2, п. 1]). Обозначим через $T_{p,q,m}(\tau)$ сужение $T(\tau)$ на $\mathcal{H}_{2n}(p, q, m)$. Тогда по теореме 3

$$T(\tau) = \sum_{p,q=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\varkappa} \bigoplus T_{p,q,m}(\tau). \quad (32)$$

Целью настоящего параграфа является доказательство неприводимости представлений $T_{p,q,m}(\tau)$.

Пусть $\tau(t)$ – однопараметрическая подгруппа $\mathrm{Sp}(n)$. Инфинитезимальный оператор A представления $T_{p,q,m}(\tau)$, соответствующий подгруппе $\tau(t)$, имеет вид (см. [35, гл. 1, § 1, п. 11])

$$(Af)(z) = \frac{d}{dt}(f(\tau^{-1}(t)z))|_{t=0}. \quad (33)$$

Положим

$$\tau_{k1}(t) = \begin{pmatrix} \omega_1(t) & \omega_2(t) \\ \omega_2(t) & \omega_1(t) \end{pmatrix}, \quad \tau_{k2}(t) = \begin{pmatrix} \omega_1(t) & i\omega_2(t) \\ i\omega_2(t) & \omega_1(t) \end{pmatrix}, \quad \tau_{k3}(t) = \begin{pmatrix} \omega_3(t) & 0 \\ 0 & \omega_3(t) \end{pmatrix},$$

где $\omega_1(t)$ и $\omega_3(t)$ – матрицы порядка n , полученные из единичной матрицы заменой k -го элемента главной диагонали на $\cos \frac{t}{2}$ и $e^{i\frac{t}{2}}$ соответственно, а $\omega_2(t) = \omega_1(t) - \omega_3(t)$, $1 \leq k \leq n$. Далее нам потребуются инфинитезимальные операторы A_{kl} представления $T_{p,q,m}(\tau)$, соответствующие однопараметрическим подгруппам $\tau_{kl}(t)$, $l = 1, 2, 3$. Из соотношения (33) находим

$$\begin{aligned} A_{k1} &= \frac{i}{2} \left(z_{n+k} \frac{\partial}{\partial z_k} + z_k \frac{\partial}{\partial z_{n+k}} - \bar{z}_{n+k} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} - \bar{z}_k \frac{\partial}{\partial \bar{z}_{n+k}} \right), \\ A_{k2} &= \frac{1}{2} \left(-z_{n+k} \frac{\partial}{\partial z_k} + z_k \frac{\partial}{\partial z_{n+k}} - \bar{z}_{n+k} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} + \bar{z}_k \frac{\partial}{\partial \bar{z}_{n+k}} \right), \\ A_{k3} &= \frac{i}{2} \left(z_k \frac{\partial}{\partial z_k} - z_{n+k} \frac{\partial}{\partial z_{n+k}} - \bar{z}_k \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} + \bar{z}_{n+k} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_{n+k}} \right), \quad 1 \leq k \leq n. \end{aligned}$$

Обозначим

$$B = -2iA_{13} = z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} - z_{n+1} \frac{\partial}{\partial z_{n+1}} - \bar{z}_1 \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} + \bar{z}_{n+1} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_{n+1}}, \quad (34)$$

$$C = iA_{11} - A_{12} = \bar{z}_{n+1} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} - z_1 \frac{\partial}{\partial z_{n+1}}, \quad (35)$$

$$D = -iA_{11} - A_{12} = z_{n+1} \frac{\partial}{\partial z_1} - \bar{z}_1 \frac{\partial}{\partial \bar{z}_{n+1}}. \quad (36)$$

Всякое подпространство, инвариантное относительно представления $T_{p,q,m}(\tau)$, инвариантно и относительно операторов (34)–(36). Нетрудно видеть, что

$$\overline{D^l(f)} = C^l(\bar{f}), \quad l = 0, 1, \dots \quad (37)$$

ЛЕММА 10. Пусть $f, h \in \mathcal{H}_{2n}(p, q, m)$, $l = 0, 1, \dots$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{S^{4n-1}} f(\xi) (D^l h)(\xi) d\xi &= (-1)^l \int_{S^{4n-1}} (D^l f)(\xi) h(\xi) d\xi, \\ \int_{S^{4n-1}} f(\xi) (C^l h)(\xi) d\xi &= (-1)^l \int_{S^{4n-1}} (C^l f)(\xi) h(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (38)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $k = 1, 2$ имеем

$$\int_{S^{4n-1}} f(\xi) h(\tau_{1k}^{-1}(t)\xi) d\xi = \int_{S^{4n-1}} f(\tau_{1k}(t)\xi) h(\xi) d\xi.$$

Следовательно,

$$\int_{S^{4n-1}} f(\xi) (A_{1k} h)(\xi) d\xi = - \int_{S^{4n-1}} (A_{1k} f)(\xi) h(\xi) d\xi.$$

Отсюда и из (35), (36) получаем утверждение леммы.

Отметим также равенства

$$\begin{aligned}
D^l(z_1^\alpha z_{n+1}^\beta \bar{z}_1^\gamma \bar{z}_{n+1}^\delta) &= \\
&= \sum_{k=\max(0, l-\delta)}^{\min(l, \alpha)} C_l^k (-1)^{l-k} \frac{\alpha!}{(\alpha-k)!} \frac{\delta!}{(\delta-l+k)!} z_1^{\alpha-k} z_{n+1}^{k+\beta} \bar{z}_1^{\gamma+l-k} \bar{z}_{n+1}^{\delta-l+k}, \\
C^l(z_1^\alpha z_{n+1}^\beta \bar{z}_1^\gamma \bar{z}_{n+1}^\delta) &= \\
&= \sum_{k=\max(0, l-\beta)}^{\min(l, \gamma)} C_l^k (-1)^{l-k} \frac{\gamma!}{(\gamma-k)!} \frac{\beta!}{(\beta-l+k)!} z_1^{\alpha+l-k} z_{n+1}^{\beta-l+k} \bar{z}_1^{\gamma-k} \bar{z}_{n+1}^{k+\delta}.
\end{aligned} \tag{39}$$

$$\tag{40}$$

В частности,

$$D^{\alpha+\delta}(z_1^\alpha z_{n+1}^\beta \bar{z}_1^\gamma \bar{z}_{n+1}^\delta) = (-1)^\delta (\alpha + \delta)! z_{n+1}^{\alpha+\beta} \bar{z}_1^{\gamma+\delta}, \tag{41}$$

$$C^{\beta+\gamma}(z_1^\alpha z_{n+1}^\beta \bar{z}_1^\gamma \bar{z}_{n+1}^\delta) = (-1)^\beta (\beta + \gamma)! z_1^{\alpha+\beta} \bar{z}_{n+1}^{\gamma+\delta}. \tag{42}$$

Пусть

$$\Phi_{p,q,m}(z) = \sum_{l=0}^m F_l^{p,q,m}(z) P_l(z),$$

где

$$F_l^{p,q,m}(z) = \sum_{k=p-m}^{p-l} a_{lk} z_1^k z_{n+1}^{p-l-k} \bar{z}_1^{k+m-p} \bar{z}_{n+1}^{q-l-k-m+p},$$

а константы a_{lk} определяются рекуррентными соотношениями:

$$\begin{aligned}
a_{m,p-m} &= 1, \\
(m-l)a_{l,p-m} &= a_{l,p-m+1}, \quad 0 \leq l \leq m-1, \\
a_{l,k+1}(k+1)(k+1+m-p) + a_{lk}(p-l-k)(q-l-k-m+p) \\
&= -(l+1)(2n+l-2)a_{l+1,k}, \quad 0 \leq l \leq m-1, \quad p-m \leq k \leq p-l-1.
\end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что $\Phi_{p,q,m}$ принадлежит пространству $\mathcal{H}_{2n}(p, q)$.

ЛЕММА 11. *Всякое ненулевое инвариантное подпространство H представления $T_{p,q,m}(\tau)$ содержит многочлен $\Phi_{p,q,m}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $h \in H$, $h \neq 0$. Не ограничивая общности, можно считать, что $h(e) \neq 0$, где $e = (1, 0, \dots, 0) \in S^{4n-1}$. Усредняя h на группе $\text{Sp}(n-1) = \{\tau \in \text{Sp}(n) : \tau e = e\}$, получаем, что H содержит многочлен f , для которого

$$f(e) \neq 0, \tag{43}$$

$$f \circ \tau = f, \quad \tau \in \text{Sp}(n-1). \tag{44}$$

Условие (44) означает (см. § 2), что f имеет вид (12). Из соотношений (43) и (15) заключаем, что $f_0(z) \not\equiv 0$, т.е. при некоторых $0 \leq i_0 \leq p$, $0 \leq k_0 \leq q$ константа $c_{i_0, k_0}^{(0)}$ не равна нулю. Положим

$$\zeta = k_0 - i_0, \quad \mathfrak{M} = \{(i, k) : 0 \leq i \leq p, \quad 0 \leq k \leq q, \quad k - i \neq \zeta\}.$$

Пусть $(i_1, k_1) \in \mathfrak{M}$. Многочлен

$$\begin{aligned} & ((Bf)(z) - (2(i_1 - k_1) - p + q)f(z))/2 = \\ & = \sum_{l=0}^{\varkappa} \left(\sum_{i=0}^{p-l} \sum_{k=0}^{q-l} c_{ik}^{(l)} (i - k - i_1 + k_1) z_1^i z_{n+1}^{p-l-i} \bar{z}_1^k \bar{z}_{n+1}^{q-l-k} \right) P_l(z) \end{aligned}$$

принадлежит подпространству H . Аналогично получаем, что H содержит многочлен

$$u(z) = \sum_{l=0}^{\varkappa} \left(\sum_{i=0}^{p-l} \sum_{k=0}^{q-l} b_{ik}^{(l)} z_1^i z_{n+1}^{p-l-i} \bar{z}_1^k \bar{z}_{n+1}^{q-l-k} \right) P_l(z),$$

где $b_{ik}^{(l)} = c_{ik}^{(l)} \prod_{(i_1, k_1) \in \mathfrak{M}} (i - k - i_1 + k_1)$. При этом $b_{i_0, k_0}^{(0)} \neq 0$ и $b_{ik}^{(l)} = 0$, если $0 \leq i \leq p-l$, $0 \leq k \leq q-l$, $k - i \neq \zeta$, $0 \leq l \leq \varkappa$. Поэтому

$$u(z) = \sum_{l=0}^{\varkappa} \left(\sum_{i=0}^{p-l} \sum_{\substack{k=0 \\ k-i=\zeta}}^{q-l} b_{ik}^{(l)} z_1^i z_{n+1}^{p-l-i} \bar{z}_1^k \bar{z}_{n+1}^{q-l-k} \right) P_l(z) \quad (45)$$

и $u(z) \not\equiv 0$. Пусть θ – наибольшее из чисел l , для которых коэффициент при P_l в соотношении (45) не равен нулю тождественно. Учитывая (35), (42), имеем

$$\begin{aligned} (C^{p-\theta+\zeta}u)(z) &= cz_1^{p-\theta} \bar{z}_{n+1}^{q-\theta} P_\theta(z) \\ &+ \sum_{l=0}^{\theta-1} \left(\sum_{i=0}^{p-l} \sum_{k=0}^{q-l} d_{ik}^{(l)} z_1^i z_{n+1}^{p-l-i} \bar{z}_1^k \bar{z}_{n+1}^{q-l-k} \right) P_l(z), \end{aligned}$$

где

$$c = \sum_{\substack{i=0 \\ k-i=\zeta}}^{p-\theta} \sum_{k=0}^{q-\theta} b_{ik}^{(\theta)} (-1)^{i+p-\theta} (p - \theta + \zeta)!.$$

Из (16) и выбора θ следует, что $c \neq 0$. Как и выше, получаем, что H содержит многочлен

$$v(z) = \sum_{l=0}^{\theta} \left(\sum_{i=p-\theta}^{p-l} a_{i, i+\theta+p}^{(l)} z_1^i z_{n+1}^{p-l-i} \bar{z}_1^{i+\theta-p} \bar{z}_{n+1}^{q-l-i-\theta+p} \right) P_l(z),$$

где $a_{p-\theta,0}^{(\theta)} = 1$. Поскольку $\Delta v \equiv 0$, константы $a_{i,i+\theta-p}^{(l)}$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} a_{i+1,i+1+\theta-p}^{(l)}(i+1)(i+1+\theta-p) + a_{i,i+\theta-p}^{(l)}(p-l-i)(q-l-i-\theta+p) \\ = -(l+1)(2n+l-2)a_{i,i+\theta-p}^{(l+1)}, \end{aligned} \quad (46)$$

где $0 \leq l \leq \theta-1$, $p-\theta \leq i \leq p-l-1$. Далее, учитывая равенство (10), из условия $\mathcal{L}v = \lambda_{p,q,m}v$ находим

$$\theta = m, \quad (47)$$

$$(m-l)a_{p-m,0}^{(l)} = a_{p-m+1,1}^{(l)}, \quad 0 \leq l \leq m-1, \quad (48)$$

$$(m-l)a_{p-l,m-l}^{(l)} = a_{p-l-1,m-l-1}^{(l)}, \quad 0 \leq l \leq m-1, \quad (49)$$

$$\begin{aligned} (s-pq - \lambda_{p,q,m} + (i+m-p)(p-2i-l) + i(q-l-l))a_{i,i+m-p}^{(l)} \\ = (i+1)(i+1+m-p)a_{i+1,i+1+m-p}^{(l)} \\ + (q-l-i-m+p+1)(p-l-i+1)a_{i-1,i-1+m-p}^{(l)}, \end{aligned} \quad (50)$$

$$0 \leq l \leq m-2, \quad p-m+1 \leq i \leq p-l-1.$$

Из соотношений (46)–(50) заключаем, что константы $a_{i,i+\theta-p}^{(l)}$ определяются однозначно и $v = \Phi_{p,q,m}$. Таким образом, $\Phi_{p,q,m} \in H$ и лемма доказана.

ТЕОРЕМА 4. *Квазирегулярное представление $T(\tau)$ является ортогональной прямой суммой неприводимых унитарных представлений $T_{p,q,m}(\tau)$, $p, q \geq 0$, $0 \leq m \leq \kappa$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение следует из унитарности представлений $T_{p,q,m}(\tau)$, леммы 11 и разложения (32).

§6. Пространства $Z_{2n}(p, q, m)$

Пусть $p, q \geq 0$, $0 \leq m \leq \kappa$,

$$Z_{2n}(p, q, m) = \{f \in \mathcal{H}_{2n}(p, q, m) : f \circ \tau = f \quad \forall \tau \in \text{Sp}(n-1)\}.$$

В этом параграфе мы изучим некоторые свойства пространств $Z_{2n}(p, q, m)$.

ЛЕММА 12. *Пусть $f \in Z_{2n}(p, q, m)$, $f \neq 0$. Тогда*

$$f(z) = \sum_{l=0}^m f_l(z)P_l(z), \quad (51)$$

где f_l имеют вид (13), причем $f_m \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим f в виде (см. §2) $f(z) = \sum_{l=0}^{\theta} f_l(z)P_l(z)$, где $f_{\theta} \neq 0$. Используя равенства (10), (16) и условие $\mathcal{L}f = \lambda_{p,q,m}f$, получаем $\theta = m$, откуда следует утверждение леммы.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $f, h \in Z_{2n}(p, q, m)$,

$$f(z) = \sum_{l=0}^m f_l(z)P_l(z), \quad h(z) = \sum_{l=0}^m h_l(z)P_l(z).$$

Тогда если $f_m \equiv h_m$, то $f \equiv h$.

ЛЕММА 13. Пусть $f \in Z_{2n}(p, q, m)$. Тогда для коэффициента f_m в равенстве (51) имеет место разложение

$$f_m(z) = \sum_{k=0}^{s-2m} \alpha_k D^k(z_1^{p-m} \bar{z}_{n+1}^{q-m}),$$

где $s = p + q$, $\alpha_k \in \mathbb{C}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $p \geq q$. Запишем f_m в виде

$$\begin{aligned} f_m(z) = & \left(\sum_{i=m-p}^{q-p} \sum_{j=-i}^{p-m} + \sum_{i=q-p+1}^0 \sum_{j=-i}^{q-m-i} + \sum_{i=1}^{q-m} \sum_{j=0}^{q-m-i} \right) \\ & \times (c_{j,j+i}^{(m)} z_1^j z_{n+1}^{p-m-j} \bar{z}_1^{j+i} \bar{z}_{n+1}^{q-m-j-i}). \end{aligned} \quad (52)$$

Учитывая равенства (39), (16), находим

$$\begin{aligned} & \frac{(-i)!c_{-i,0}^{(m)}}{(p-m)!} D^{i+p-m}(z_1^{p-m} \bar{z}_{n+1}^{q-m}) \\ &= \sum_{j=-i}^{p-m} c_{j,j+i}^{(m)} z_1^j z_{n+1}^{p-m-j} \bar{z}_1^{j+i} \bar{z}_{n+1}^{q-m-j-i}, \quad m-p \leq i \leq q-p, \\ & \frac{(-i)!c_{-i,0}^{(m)}}{(p-m)!} D^{i+p-m}(z_1^{p-m} \bar{z}_{n+1}^{q-m}) \\ &= \sum_{j=-i}^{q-m-i} c_{j,j+i}^{(m)} z_1^j z_{n+1}^{p-m-j} \bar{z}_1^{j+i} \bar{z}_{n+1}^{q-m-j-i}, \quad q-p+1 \leq i \leq 0, \\ & \frac{(q-m-i)!(-1)^i i!}{(q-m)!(p-m+i)!} c_{0,i}^{(m)} D^{i+p-m}(z_1^{p-m} \bar{z}_{n+1}^{q-m}) \\ &= \sum_{j=0}^{q-m-i} c_{j,j+i}^{(m)} z_1^j z_{n+1}^{p-m-j} \bar{z}_1^{j+i} \bar{z}_{n+1}^{q-m-j-i}, \quad 1 \leq i \leq q-m. \end{aligned}$$

Отсюда и из соотношения (52) получаем утверждение леммы.

ЛЕММА 14. Система функций

$$\{D^j(\Phi_{p,q,m})\}_{j=0}^{s-2m} \quad (53)$$

образует ортогональный базис пространства $Z_{2n}(p, q, m)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства (41) и следствия 2 вытекает, что функции $D^j(\Phi_{p,q,m})$, $0 \leq j \leq s-2m$, ненулевые, а $D^{s-2m+1}(\Phi_{p,q,m}) \equiv 0$. Для доказательства ортогональности системы (53) воспользуемся равенством (см. [25, гл. 1, п. 1.4.7])

$$\int_{S^{4n-1}} f(\xi) d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{S^{4n-1}} d\xi \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}\xi_1, \xi') dt, \quad (54)$$

где $\xi' = (\xi_2, \dots, \xi_{2n})$. Из равенства (39) имеем

$$\begin{aligned} D^j(F_l^{p,q,m})(e^{it}\xi_1, \xi') &= e^{it(p-m-j)} D^j(F_l^{p,q,m})(\xi), \\ P_l(e^{it}\xi_1, \xi') &= P_l(\xi). \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\int_{S^{4n-1}} D^j(F_l^{p,q,m})(\xi) \overline{D^\eta(F_k^{p,q,m})(\xi)} P_l(\xi) P_k(\xi) d\xi = 0, \quad (55)$$

где $\eta \neq j$, $0 \leq l, k \leq m$. Поскольку $D^j(\Phi_{p,q,m}) = \sum_{l=0}^m D^j(F_l^{p,q,m}) P_l$, из (55) получаем

$$\int_{S^{4n-1}} D^j(\Phi_{p,q,m})(\xi) \overline{D^\eta(\Phi_{p,q,m})(\xi)} d\xi = 0, \quad \eta \neq j, \quad (56)$$

т.е. система (53) ортогональна. Докажем теперь, что произвольный многочлен $f \in Z_{2n}(p, q, m)$ является линейной комбинацией функций из системы (53). В силу лемм 12, 13 функция f имеет вид (51), причем

$$f_m(z) = \sum_{k=0}^{s-2m} \alpha_k D^k(z_1^{p-m} \bar{z}_{n+1}^{q-m}).$$

Рассмотрим функцию

$$h(z) = \sum_{k=0}^{s-2m} \alpha_k D^k(\Phi_{p,q,m})(z).$$

Перепишем ее в виде

$$h(z) = \sum_{l=0}^m h_l(z) P_l(z),$$

где

$$h_l(z) = \sum_{k=0}^{s-2m} \alpha_k D^k(F_l^{p,q,m})(z).$$

Так как $f_m \equiv h_m$, то по следствию 2 $f \equiv h$. Таким образом, лемма доказана.

Зафиксируем точку $z \in S^{4n-1}$ и рассмотрим линейный функционал на $\mathcal{H}_{2n}(p, q, m)$, который каждой функции $f \in \mathcal{H}_{2n}(p, q, m)$ ставит в соответствие число $f(z)$. По теореме Рисса существует единственная функция $K_z \in \mathcal{H}_{2n}(p, q, m)$ такая, что

$$f(z) = \int_{S^{4n-1}} f(\xi) \overline{K_z(\xi)} d\xi, \quad f \in \mathcal{H}_{2n}(p, q, m). \quad (57)$$

ЛЕММА 15. *Функции K_z обладают следующими свойствами:*

1) *для любой функции $f \in L^2(S^{4n-1})$ имеем*

$$(\pi_{p,q,m}f)(z) = \int_{S^{4n-1}} f(\xi) \overline{K_z(\xi)} d\xi,$$

где $\pi_{p,q,m}$ – ортогональная проекция $L^2(S^{4n-1})$ на $\mathcal{H}_{2n}(p,q,m)$;

2) $K_z(w) = \overline{K_w(z)}$, $z, w \in S^{4n-1}$;

3) $K_{\tau z} = K_z \circ \tau^{-1}$, $\tau \in \text{Sp}(n)$;

4) $K_z = K_z \circ \tau$ для любого $\tau \in \text{Sp}(n)$ такого, что $\tau z = z$, в частности, $K_e \in Z_{2n}(p,q,m)$;

5) $K_z(z) = K_w(w)$, $z, w \in S^{4n-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству теоремы 12.2.5 из [25].

ЛЕММА 16. *Имеет место равенство*

$$K_e(z) = k_{p,q,m} D^{q-m}(\Phi_{p,q,m})(z), \quad (58)$$

где $k_{p,q,m} = \overline{D^{q-m}(\Phi_{p,q,m})(e)} / \int_{S^{4n-1}} |D^{q-m}(\Phi_{p,q,m}(\xi))|^2 d\xi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим K_e в виде

$$K_e = \sum_{k=0}^{s-2m} \alpha_k D^k(\Phi_{p,q,m}) = \sum_{l=0}^m k_l P_l, \quad (59)$$

где $k_l = \sum_{k=0}^{s-2m} \alpha_k D^k(F_l^{p,q,m})$. Из (57), (59) и (55) имеем

$$\begin{aligned} D^j(\Phi_{p,q,m})(e) &= \int_{S^{4n-1}} D^j(\Phi_{p,q,m})(\xi) \overline{K_e(\xi)} d\xi \\ &= \sum_{l,i=0}^m \sum_{k=0}^{s-2m} \bar{\alpha}_k \int_{S^{4n-1}} D^j(F_l^{p,q,m})(\xi) \overline{D^k(F_i^{p,q,m})(\xi)} P_l(\xi) P_i(\xi) d\xi \\ &= \bar{\alpha}_j \int_{S^{4n-1}} |D^j(\Phi_{p,q,m})(\xi)|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\alpha_j = \overline{D^j(\Phi_{p,q,m})(e)} / \int_{S^{4n-1}} |D^j(\Phi_{p,q,m})(\xi)|^2 d\xi.$$

Используя равенство (39), находим

$$D^j(\Phi_{p,q,m})(e) = D^j(F_0^{p,q,m})(e) = \begin{cases} 0, & j \neq q-m, \\ (-1)^{q-m}(q-m)! a_{0,p}, & j = q-m. \end{cases} \quad (60)$$

Следовательно, $k_l = \alpha_{q-m} D^{q-m}(F_l^{p,q,m})$, откуда получаем утверждение леммы.

§ 7. Условия эквивалентности представлений $T_{p_i, q_i, m_i}(\tau)$ ($i = 1, 2$)

Пусть представления $T_{p_i, q_i, m_i}(\tau)$, $i = 1, 2$, эквивалентны и $\mathfrak{T}$ – линейный обратимый оператор, коммутирующий с группой $\mathrm{Sp}(n)$ и действующий из пространства $\mathcal{H}_{2n}(p_1, q_1, m_1)$ в $\mathcal{H}_{2n}(p_2, q_2, m_2)$. Не ограничивая общности, будем считать, что $\alpha = q_2 - m_2 - q_1 + m_1 \geq 0$. Изучим свойства оператора $\mathfrak{T}$.

ЛЕММА 17. *Имеет место равенство*

$$\mathfrak{T}(\Phi_{p_1, q_1, m_1}) = c(\mathfrak{T})\Phi_{p_2, q_2, m_2}, \quad (61)$$

где $c(\mathfrak{T})$ – ненулевая константа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку оператор $\mathfrak{T}$ переводит $Z_{2n}(p_1, q_1, m_1)$ в $Z_{2n}(p_2, q_2, m_2)$, по лемме 12 имеем

$$\mathfrak{T}(\Phi_{p_1, q_1, m_1}) = \sum_{l=0}^{m_2} f_l P_l,$$

где

$$f_l(z) = \sum_{i=0}^{p_2-l} \sum_{k=0}^{q_2-l} c_{ik}^{(l)} z_1^i z_{n+1}^{p_2-l-i} \bar{z}_1^k \bar{z}_{n+1}^{q_2-l-k}, \quad f_{m_2} \neq 0. \quad (62)$$

Из равенств

$$\begin{aligned} C\mathfrak{T}(\Phi_{p_1, q_1, m_1}) &= \mathfrak{T}C(\Phi_{p_1, q_1, m_1}), \\ C(\Phi_{p_1, q_1, m_1}) &= \sum_{l=0}^{m_1-1} C(F_l^{p_1, q_1, m_1})P_l \end{aligned}$$

и леммы 12 получаем $C\mathfrak{T}(\Phi_{p_1, q_1, m_1}) \equiv 0$. В частности,

$$C(f_{m_2}) \equiv 0. \quad (63)$$

Используя условие $\Delta(f_{m_2}) \equiv 0$ и соотношения (62), (63), после простых преобразований находим

$$f_{m_2}(z) = c_{p_2-m_2, 0}^{(m_2)} z_1^{p_2-m_2} \bar{z}_{n+1}^{q_2-m_2}.$$

По следствию 2

$$\mathfrak{T}(\Phi_{p_1, q_1, m_1}) = c_{p_2-m_2, 0}^{(m_2)} \Phi_{p_2, q_2, m_2}.$$

Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Пусть $f \in \mathcal{H}_{2n}(p_1, q_1, m_1)$. Тогда*

$$(\mathfrak{T}f)(z) = k_{p_1, q_1, m_1} c(\mathfrak{T}) \int_{S^{4n-1}} f(\xi) D^{q_1-m_1}(\Phi_{p_2, q_2, m_2})(\tau_\xi^{-1}z) d\xi, \quad (64)$$

где τ_ξ – произвольный элемент группы $\mathrm{Sp}(n)$, для которого $\tau_\xi e = \xi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 15 имеем

$$(\mathfrak{T}f)(z) = \int_{S^{4n-1}} f(\xi)(\mathfrak{T}K_\xi)(z) d\xi = \int_{S^{4n-1}} f(\xi)(\mathfrak{T}K_e)(\tau_\xi^{-1}z) d\xi.$$

Поскольку $\mathfrak{T}D^{q_1-m_1} = D^{q_1-m_1}\mathfrak{T}$, из равенства (58) находим

$$\mathfrak{T}K_e = k_{p_1, q_1, m_1} D^{q_1-m_1} \mathfrak{T}(\Phi_{p_1, q_1, m_1}).$$

Отсюда и из (61) получаем равенство (64).

СЛЕДСТВИЕ 4. Если $j \neq q_2 - m_2$, то

$$\int_{S^{4n-1}} D^j(\Phi_{p_1, q_1, m_1})(\xi) D^{q_1-m_1}(\Phi_{p_2, q_2, m_2})(\tau_\xi^{-1}e) d\xi = 0. \quad (65)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим в равенстве (64) $f = D^j(\Phi_{p_1, q_1, m_1})$, $z = e$. Учтывая, что

$$\mathfrak{T}D^j(\Phi_{p_1, q_1, m_1}) = D^j\mathfrak{T}(\Phi_{p_1, q_1, m_1}) = c(\mathfrak{T})D^j(\Phi_{p_2, q_2, m_2}), \quad (66)$$

имеем

$$\begin{aligned} & \int_{S^{4n-1}} D^j(\Phi_{p_1, q_1, m_1}) D^{q_1-m_1}(\Phi_{p_2, q_2, m_2})(\tau_\xi^{-1}e) d\xi \\ &= D^j(\Phi_{p_2, q_2, m_2})(e) / k_{p_1, q_1, m_1}. \end{aligned}$$

Из (60) получаем $D^j(\Phi_{p_2, q_2, m_2})(e) = 0$, $j \neq q_2 - m_2$, откуда следует требуемое утверждение.

ЛЕММА 18. Пусть $f \in \mathcal{H}_{2n}(p_1, q_1, m_1)$. Тогда

$$(\mathfrak{T}f)(z) = c|z|^{p_2+q_2} \int_{S^{4n-1}} f(\tau_{\frac{z}{|z|}}\xi) \overline{D^{q_2-m_2}(\Phi_{p_1, q_1, m_1})(\xi)} d\xi, \quad (67)$$

где постоянная c не зависит от f , z и $\tau_{\frac{z}{|z|}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим сначала, что $f \in Z_{2n}(p_1, q_1, m_1)$. По лемме 14 имеем

$$f = \sum_{j=0}^{p_1+q_1-2m_1} \alpha_j D^j(\Phi_{p_1, q_1, m_1}),$$

где

$$\alpha_j = \int_{S^{4n-1}} f(\xi) \overline{D^j(\Phi_{p_1, q_1, m_1})(\xi)} d\xi \Bigg/ \int_{S^{4n-1}} |D^j(\Phi_{p_1, q_1, m_1})(\xi)|^2 d\xi.$$

Из соотношений (64) и (65) находим

$$(\mathfrak{T}f)(e) = k_{p_1, q_1, m_1} c(\mathfrak{T}) \alpha_{q_2 - m_2} \\ \times \int_{S^{4n-1}} D^{q_2 - m_2}(\Phi_{p_1, q_1, m_1})(\xi) D^{q_1 - m_1}(\Phi_{p_2, q_2, m_2})(\tau_\xi^{-1} e) d\xi,$$

т.е.

$$(\mathfrak{T}f)(e) = c \int_{S^{4n-1}} f(\xi) \overline{D^{q_2 - m_2}(\Phi_{p_1, q_1, m_1})(\xi)} d\xi. \quad (68)$$

Усреднением на группе $\mathrm{Sp}(n-1)$ получаем, что равенство (68) сохраняется для $f \in \mathcal{H}_{2n}(p_1, q_1, m_1)$. Поэтому для любого $\sigma \in S^{4n-1}$

$$(\mathfrak{T}f)(\sigma) = c \int_{S^{4n-1}} f(\tau_\sigma \xi) \overline{D^{q_2 - m_2}(\Phi_{p_1, q_1, m_1})(\xi)} d\xi,$$

откуда следует утверждение леммы.

СЛЕДСТВИЕ 5. *Оператор $\mathfrak{T}$ имеет вид*

$$(\mathfrak{T}f)(z) = c |z|^{p_2 + q_2} C^\alpha \left(f \circ \tau_{\frac{z}{|z|}} \right)(e), \quad (69)$$

где постоянная c не зависит от f , z и $\tau_{\frac{z}{|z|}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\sigma \in S^{4n-1}$. Из соотношений (37) и (38) имеем

$$\begin{aligned} & \int_{S^{4n-1}} f(\tau_\sigma \xi) \overline{D^{q_2 - m_2}(\Phi_{p_1, q_1, m_1})(\xi)} d\xi \\ &= (-1)^\alpha \int_{S^{4n-1}} C^\alpha(f \circ \tau_\sigma)(\xi) C^{q_1 - m_1}(\overline{\Phi_{p_1, q_1, m_1}})(\xi) d\xi \\ &= (-1)^\alpha \int_{S^{4n-1}} C^\alpha(f \circ \tau_\sigma)(\xi) \overline{D^{q_1 - m_1}(\Phi_{p_1, q_1, m_1})(\xi)} d\xi. \end{aligned}$$

По лемме 16 получаем

$$\overline{D^{q_1 - m_1}(\Phi_{p_1, q_1, m_1})} = \overline{K_e / k_{p_1, q_1, m_1}},$$

т.е.

$$\begin{aligned} & \int_{S^{4n-1}} f(\tau_\sigma \xi) \overline{D^{q_2 - m_2}(\Phi_{p_1, q_1, m_1})(\xi)} d\xi \\ &= \frac{(-1)^\alpha}{\overline{k_{p_1, q_1, m_1}}} \int_{S^{4n-1}} C^\alpha(f \circ \tau_\sigma)(\xi) \overline{K_e(\xi)} d\xi. \end{aligned}$$

Отсюда и из определения K_e получаем равенство (69).

ЛЕММА 19. Пусть $f \in \mathcal{H}_{2n}(p_1, q_1, m_1)$. Тогда

$$(\mathfrak{T}f)(z) = c|z|^{p_2+q_2-p_1-q_1}(\mathfrak{F}^\alpha f)(z), \quad (70)$$

где $\mathfrak{F} = \sum_{k=1}^n (\bar{z}_{n+k} \frac{\partial}{\partial z_k} - \bar{z}_k \frac{\partial}{\partial z_{n+k}})$, а постоянная c не зависит от f и z .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем (см. (35))

$$(C^\alpha h)(e) = (-1)^\alpha \frac{\partial^\alpha h}{\partial z_{n+1}^\alpha}(e). \quad (71)$$

Положим $w_k(z) = -\bar{z}_{n+k}$, $w_{n+k}(z) = \bar{z}_k$, $1 \leq k \leq n$. Учитывая, что $\tau_{\frac{z}{|z|}} e = z/|z|$, из (69) и (71) находим

$$(\mathfrak{T}f)(z) = c|z|^{p_2+q_2} \sum_{k_1, \dots, k_\alpha=1}^{2n} \frac{\partial^\alpha f}{\partial z_{k_1} \dots \partial z_{k_\alpha}} \left(\frac{z}{|z|} \right) w_{k_1} \left(\frac{z}{|z|} \right) \dots w_{k_\alpha} \left(\frac{z}{|z|} \right),$$

откуда следует утверждение леммы.

Отметим, что при $p \geq 1$, $q \geq 0$, $0 \leq m \leq \min(p-1, q)$

$$\mathfrak{F}(\mathcal{H}_{2n}(p, q, m)) \subset \mathcal{H}_{2n}(p-1, q+1, m). \quad (72)$$

ТЕОРЕМА 5. Представления $T_{p_i, q_i, m_i}(\tau)$, $i = 1, 2$, эквивалентны тогда и только тогда, когда

$$p_1 + q_1 = p_2 + q_2, \quad m_1 = m_2. \quad (73)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что представления $T_{p_i, q_i, m_i}(\tau)$, $i = 1, 2$, эквивалентны. Из равенства (66) и лемм 14, 17 имеем

$$p_1 + q_1 - 2m_1 = p_2 + q_2 - 2m_2. \quad (74)$$

Поскольку ненулевой гармонический многочлен не может делиться на $|z|^2$, из (74) и (70) получаем (73). Обратно, при условии (73) оператор

$$(\mathfrak{T}f)(z) = |z|^{p_1+q_1} C^{p_1-p_2} (f \circ \tau_{\frac{z}{|z|}})(e) = (\mathfrak{F}^{p_1-p_2} f)(z)$$

коммутирует с группой $\text{Sp}(n)$ и переводит $\mathcal{H}_{2n}(p_1, q_1, m_1)$ в $\mathcal{H}_{2n}(p_2, q_2, m_2)$ (см. (72)). Таким образом, теорема доказана.

§ 8. Свойства класса $V_r(B_R)$

Далее все функции, определенные и непрерывные в проколотой окрестности нуля в $\mathbb{C}^{2n}$ и допускающие непрерывное продолжение в точку 0, считаются доопределенными в нуле по непрерывности.

Пусть $t_{ik}^{p,q,m}(\tau)$, $1 \leq i, k \leq N(n, p, q, m)$, – матрица представления $T_{p,q,m}(\tau)$, т.е.

$$T_{p,q,m}(\tau) S_{p,q,m}^k = \sum_{i=1}^{N(n,p,q,m)} t_{ik}^{p,q,m}(\tau) S_{p,q,m}^i. \quad (75)$$

ЛЕММА 20. Пусть $f \in L_{\text{loc}}(B_R)$, $p, q \geq 0$, $0 \leq m \leq \kappa$, $s = p + q$. Тогда для почти всех $\rho \in (0, \text{th } R)$ и $\sigma \in S^{4n-1}$ имеет место формула

$$N(n, p, q, m) \int_{\text{Sp}(n)} f(\tau^{-1}z) \overline{t_{ik}^{p,q,m}(\tau)} d\tau = \sum_{\substack{p_1+q_1=s \\ p_1, q_1 \geq m}} f_{p_1, q_1, m}^k(\rho) S_{p_1, q_1, m}^i(\sigma), \quad (76)$$

где $d\tau$ – нормированная мера Хаара на группе $\text{Sp}(n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из непрерывности оператора представления и (75) имеем

$$\begin{aligned} f(\tau^{-1}z) &= \sum_{p_1, q_1=0}^{\infty} \sum_{m_1=0}^{\min(p_1, q_1)} \sum_{k_1=1}^{N(n, p_1, q_1, m_1)} f_{p_1, q_1, m_1}^{k_1}(\rho) \\ &\quad \times \sum_{i_1=1}^{N(n, p_1, q_1, m_1)} t_{i_1 k_1}^{p_1, q_1, m_1}(\tau) S_{p_1, q_1, m_1}^{i_1}(\sigma). \end{aligned} \quad (77)$$

Используя соотношения ортогональности для $t_{i_1 k_1}^{p_1, q_1, m_1}(\tau)$ (см. [35, гл. 1, § 4, п. 3]), из (77) и теорем 4, 5 получаем утверждение леммы.

СЛЕДСТВИЕ 6. Пусть $f \in V_r^l(B_R)$. Тогда

$$\sum_{\substack{p_1+q_1=s \\ p_1, q_1 \geq m}} f_{p_1, q_1, m}^k(\rho) S_{p_1, q_1, m}^i(\sigma) \in V_r^l(B_R) \quad (78)$$

при всех $p, q \geq 0$, $0 \leq m \leq \kappa$, $1 \leq i, k \leq N(n, p, q, m)$. Аналогичное утверждение справедливо и для $f \in V_r(B_R)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из (78) следует, что теорему 1 достаточно доказать для любого специально выбранного базиса в $\mathcal{H}_{2n}(p, q, m)$. Всюду в дальнейшем будем считать, что $S_{p,q,m}^1 = \alpha_{p,q,m} Q(p, q, m)$, где $\alpha_{p,q,m} = \|Q(p, q, m)\|_2^{-1}$. Пусть также $N(n, s, m)$ – размерность пространств $\mathcal{H}_{2n}(p, q, m)$ при $p + q = s$.

ЛЕММА 21. Пусть $l \geq 1$ и $f \in V_r^l(B_R)$. Тогда при всех $1 \leq k \leq n$ функции

$$\frac{\partial f}{\partial z_k} - \sum_{i=1}^{2n} \bar{z}_k z_i \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} + \sum_{i=1}^n z_{n+k} \left(\bar{z}_{n+i} \frac{\partial f}{\partial z_i} - \bar{z}_i \frac{\partial f}{\partial z_{n+i}} \right), \quad (79)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z_{n+k}} - \sum_{i=1}^{2n} \bar{z}_{n+k} z_i \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} + \sum_{i=1}^n z_k \left(\bar{z}_i \frac{\partial f}{\partial z_{n+i}} - \bar{z}_{n+i} \frac{\partial f}{\partial z_i} \right), \quad (80)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} - \sum_{i=1}^{2n} z_k z_i \frac{\partial f}{\partial z_i} + \sum_{i=1}^n \bar{z}_{n+k} \left(z_{n+i} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} - z_i \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_{n+i}} \right), \quad (81)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_{n+k}} - \sum_{i=1}^{2n} z_{n+k} z_i \frac{\partial f}{\partial z_i} + \sum_{i=1}^n \bar{z}_k \left(z_i \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_{n+i}} - z_{n+i} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} \right) \quad (82)$$

принадлежат $V_r^{l-1}(B_R)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g \in I(B^{4n})$, $g\bar{B}_r \subset B_R$. Положим $a = (a_1, \dots, a_{2n})$, где $a_k = t \in \mathbb{R}^1$, $a_j = 0$, $j \neq k$. Поскольку при малых $|a|$ имеет место вложение $(-\varphi_a)g\bar{B}_r \subset B_R$, то из условия $f \in V_r^l(B_R)$ следует

$$\int_{gB_r} f(-\varphi_a(z)) d\mu(z) = 0.$$

Дифференцируя это равенство по t и полагая $t = 0$, имеем

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f}{\partial z_k} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial z_j} (z_{n+k} \bar{z}_{n+j} - z_k z_j) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} (\bar{z}_{n+k} z_{n+j} - \bar{z}_k \bar{z}_j) \right. \\ & \left. - \frac{\partial f}{\partial z_{n+j}} (z_{n+k} \bar{z}_j + z_k z_{n+j}) - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_{n+j}} (\bar{z}_{n+k} z_j + \bar{z}_k \bar{z}_{n+j}) \right) \in V_r^{l-1}(B_R). \end{aligned}$$

Аналогично, при $a_k = it$, $t \in \mathbb{R}^1$, $a_j = 0$, $j \neq k$, получаем

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f}{\partial z_k} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial z_j} (z_k z_j + z_{n+k} \bar{z}_{n+j}) - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} (\bar{z}_k \bar{z}_j + \bar{z}_{n+k} z_{n+j}) \right. \\ & \left. + \frac{\partial f}{\partial z_{n+j}} (z_k z_{n+j} - z_{n+k} \bar{z}_j) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_{n+j}} (\bar{z}_{n+k} z_j - \bar{z}_k \bar{z}_{n+j}) \right) \in V_r^{l-1}(B_R), \end{aligned}$$

откуда следует утверждение леммы для функций (79), (81). Утверждения для функций (80), (82) доказываются аналогично.

Пусть $D_1(s, m)$, $D_2(s, m)$ – дифференциальные операторы, действующие на функцию $\varphi \in C^1(0, \text{th } R)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} (D_1(s, m)\varphi)(\rho) &= \frac{(1 - \rho^2)^{2n+s+1-m}}{\rho^{4n+s-2}} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{\rho^{4n+s-2}}{(1 - \rho^2)^{2n+s-m}} \varphi(\rho) \right), \\ (D_2(s, m)\varphi)(\rho) &= \frac{\rho^{s-1}}{(1 - \rho^2)^{s-m-2}} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{(1 - \rho^2)^{s-1-m}}{\rho^{s-1}} \varphi(\rho) \right). \end{aligned}$$

ЛЕММА 22. Пусть $l \geq 1$ и при некоторых $\alpha \geq 1$, $1 \leq m \leq [\frac{\alpha+1}{2}]$, $1 \leq k \leq N(n, \alpha + 1, m)$

$$\sum_{\substack{p+q=\alpha+1 \\ p,q \geq m}} \varphi_{p,q}(\rho) S_{p,q,m}^k(\sigma) \in V_r^l(B_R).$$

Тогда при любом $1 \leq i \leq N(n, \alpha, m-1)$ функция

$$\sum_{\substack{p+q=\alpha+1 \\ p,q \geq m}} \frac{\alpha_{p,q,m}}{\alpha_{p-1,q,m-1}} (D_1(\alpha+1, \alpha-m+2) \varphi_{p,q})(\rho) S_{p-1,q,m-1}^i(\sigma)$$

принадлежит $V_r^{l-1}(B_R)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим

$$\begin{aligned} \psi_{p,q}(\rho) &= \varphi_{p,q}(\rho) / \rho^{\alpha+1}, \\ R_{p,q}^1(z) &= \bar{z}_{n+2} Q(p, q, m)(z) - \frac{\rho^2}{2n+p+q-1} \frac{\partial Q(p, q, m)}{\partial z_{n+2}}, \\ R_{p,q}^2(z) &= z_2 Q(p-1, q+1, m)(z) - \frac{\rho^2}{2n+p+q-1} \frac{\partial Q(p-1, q+1, m)}{\partial \bar{z}_2}. \end{aligned}$$

В силу следствия 6

$$f(z) = \sum_{\substack{p+q=\alpha+1 \\ p,q \geq m}} \alpha_{p,q,m} \psi_{p,q}(\rho) Q(p, q, m)(z) \in V_r^l(B_R).$$

По лемме 21 функция

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f}{\partial z_{n+2}} - \sum_{i=1}^n \bar{z}_i z_{n+2} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} + \sum_{i=1}^n z_2 \left(\bar{z}_i \frac{\partial f}{\partial z_{n+i}} - \bar{z}_{n+i} \frac{\partial f}{\partial z_i} \right) \\ &= \frac{m}{2(2n+\alpha)} \sum_{\substack{p+q=\alpha+1 \\ p,q \geq m}} \frac{\alpha_{p,q,m}}{\alpha_{p-1,q,m-1}} (D_1(\alpha+1, \alpha-m+2) \varphi_{p,q})(\rho) S_{p-1,q,m-1}^1(\sigma) \\ &+ \sum_{\substack{p+q=\alpha+1 \\ p,q \geq m}} \alpha_{p,q,m} \left(\left(\frac{1-\rho^2}{2\rho} \psi'_{p,q}(\rho) - q \psi_{p,q}(\rho) \right) R_{p,q}^1(z) \right. \\ &\quad \left. + (p-m) \psi_{p,q}(\rho) R_{p,q}^2(z) \right) \end{aligned} \tag{83}$$

принадлежит $V_r^{l-1}(B_R)$. Поскольку $R_{p,q}^i(z) \in \sum_{m_1+m_2=p+q+1} \oplus \mathcal{H}_{2n}(m_1, m_2)$, $i = 1, 2$ (см. [35, гл. 9, § 2, п. 3, формула (5)]) и [25, гл. 12, § 12.2, предл. 12.2.2]), из (78) и (83) получаем утверждение леммы 22.

Аналогично доказывается

ЛЕММА 23. Пусть $l \geq 1$ и при некоторых $\alpha \geq 0$, $1 \leq k \leq N(n, \alpha + 1, 0)$

$$\sum_{p+q=\alpha+1} \varphi_{p,q}(\rho) S_{p,q,0}^k(\sigma) \in V_r^l(B_R).$$

Тогда при любом $1 \leq i \leq N(n, \alpha, 0)$ функции

$$\begin{aligned} & \sum_{p+q=\alpha+1} \frac{p\alpha_{p,q,0}}{\alpha_{p-1,q,0}} (D_1(\alpha+1, 0)\varphi_{p,q})(\rho) S_{p-1,q,0}^i(\sigma), \\ & \sum_{p+q=\alpha+1} \frac{q\alpha_{p,q,0}}{\alpha_{p,q-1,0}} (D_1(\alpha+1, 0)\varphi_{p,q})(\rho) S_{p,q-1,0}^i(\sigma) \end{aligned}$$

принадлежат $V_r^{l-1}(B_R)$.

§ 9. Вспомогательные утверждения о функциях $\Phi_\lambda^{s,m}$

ЛЕММА 24. При любом $t \in (0, 1)$ имеет место оценка

$$\max_{\rho \in [0, t]} |\Phi_\lambda^{s,m}(\rho)| = O(\lambda), \quad \lambda \rightarrow +\infty,$$

где постоянная в знаке O не зависит от λ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$\begin{aligned} G_{\lambda,p,q}(\rho) &= \frac{\Gamma(\nu+q)\Gamma(\nu+p)}{\Gamma^2(\nu)} \frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(2n+1+p+q)} \rho^{p+q}(1-\rho^2)^\nu \\ &\quad \times F(\nu+q, \nu+p; 2n+1+p+q; \rho^2). \end{aligned}$$

Тогда

$$\Phi_\lambda^{s,m}(\rho) = \frac{\Gamma^2(\nu)\rho}{2n\Gamma(\nu+m-1)\Gamma(\nu-m)} G_{\lambda,s-m,m-1}(\rho), \quad m \geq 1,$$

и (см. [26, гл. 2, § 2.1, п. 2.1.2, формула (6)])

$$\Phi_\lambda^{s,0}(\rho) = -\frac{s\rho^2}{2n} G_{\lambda,s,0}(\rho) + \frac{\nu+s-1}{2n} \rho G_{\lambda,s-1,0}(\rho).$$

Отсюда и из [20, неравенство (4)] получаем утверждение леммы.

ЛЕММА 25. Имеют место равенства

$$D_1(s+1, m)\Phi_\lambda^{s+1,m} = (2(n+s-m)+1-i\lambda)\Phi_\lambda^{s,m}, \quad (84)$$

$$D_1(s+1, s-m+2)\Phi_\lambda^{s+1,m} = (2n-2m+1-i\lambda)\Phi_\lambda^{s,m-1}, \quad (85)$$

$$D_2(s+1, m)\Phi_\lambda^{s,m} = -(2(n+s-m)+1+i\lambda)\Phi_\lambda^{s+1,m}. \quad (86)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение следует из соотношения (2) и [26, гл. 2, § 2.8, формулы (25), (26)].

ЛЕММА 26. Пусть $p + q = s$, $\omega \in S^{4n-1}$. Тогда

$$L(\Phi_\lambda^{s,m}(\rho)S_{p,q,m}^k(\sigma)) = -(\lambda^2 + (2n+1)^2)\Phi_\lambda^{s,m}(\rho)S_{p,q,m}^k(\sigma), \quad (87)$$

$$L(e_{\nu,\omega}) = -(\lambda^2 + (2n+1)^2)e_{\nu,\omega}. \quad (88)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Простые вычисления показывают, что если $f \in C^2(B_R)$ имеет вид $f(z) = \varphi(\rho)S_{p,q,m}^k(\sigma)$, то

$$((L + 4(2n + s - m)(m - s + 1)E)f)(z) = (D_2(s, m)D_1(s, m)\varphi)(\rho)S_{p,q,m}^k(\sigma).$$

Отсюда и из равенств (84), (86) следует (87). Для доказательства (88) достаточно воспользоваться равенствами (8) и (25).

ЛЕММА 27. Пусть $f \in C^2(B^{4n})$ и $Lf = -(\lambda^2 + (2n+1)^2)f$. Тогда для любой радиальной функции $\varphi \in L^1(B^{4n})$ с компактным носителем

$$\int_{B^{4n}} f(z)\varphi(g^{-1}z) d\mu(z) = f(g0) \int_{B^{4n}} \varphi(z)\Phi_\lambda^{0,0}(|z|) d\mu(z)$$

при всех $g \in I(B^{4n})$. В частности, для любого $r > 0$

$$\int_{gB_r} f(z) d\mu(z) = f(g0) \frac{\omega_{4n-1}}{2n+1-i\lambda} (\operatorname{sh} r)^{4n-1} (\operatorname{ch} r)^3 \Phi_\lambda^{1,0}(\operatorname{th} r), \quad (89)$$

где ω_{4n-1} — площадь сферы S^{4n-1} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое равенство является следствием теоремы о среднем для собственных функций оператора L (см. [1, гл. 4, предл. 2.4]). Второе равенство следует из первого (см. (84)).

СЛЕДСТВИЕ 7. Пусть $\lambda \in \mathcal{N}(r)$. Тогда

$$\Phi_\lambda^{s,m}(\rho)S_{p,q,m}^k(\sigma) \in V_r^\infty(B^{4n}). \quad (90)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из соотношений (89), (5) и (87).

§ 10. Доказательство основного результата

Для доказательства основного результата нам потребуются еще две леммы.

ЛЕММА 28. Пусть $s \geq 0$ и при некоторых $0 \leq m \leq [s/2]$, $1 \leq k \leq N(n, s, m)$

$$\sum_{\substack{p+q=s \\ p,q \geq m}} \varphi_{p,q}(\rho)S_{p,q,m}^k(\sigma) \in V_r^\infty(B_R).$$

Тогда

$$\varphi_{p,q}(\rho) = \sum_{\lambda \in \mathcal{N}(r)} c_{\lambda,p,q,m,k} \Phi_\lambda^{s,m}(\rho), \quad (91)$$

причем $c_{\lambda,p,q,m,k} = O(\lambda^{-c})$ при $\lambda \rightarrow +\infty$ и любом фиксированном $c > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $s = 0$. Тогда $\varphi_{0,0}(\rho) \in V_r^\infty(B_R)$ и из работы [19, теорема 5] имеем

$$\varphi_{0,0}(|z|) = \sum_{\lambda \in \mathcal{N}(r)} c_\lambda \varphi_\lambda(z), \quad z \in B_R,$$

где $c_\lambda = O(\lambda^{-c})$ при $\lambda \rightarrow +\infty$ и любом $c > 0$. Отсюда и из равенств (4) следует разложение (91). При $s \geq 1$ утверждение получается индукцией по s с использованием (85), (3) и лемм 22, 23.

ЛЕММА 29. Пусть $f \in L_{\text{loc}}(B_R)$ и каждый коэффициент ряда Фурье f имеет вид

$$f_{p,q,m}^k(\rho) = \sum_{\lambda \in \mathcal{N}(r)} c_{\lambda,p,q,m,k} \Phi_\lambda^{s,m}(\rho),$$

где $\sum_{\lambda \in \mathcal{N}(r)} |c_{\lambda,p,q,m,k}| \lambda < \infty$. Тогда $f \in V_r(B_R)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из соотношений (76), (90) и (3) получаем

$$\int_{gB_r} \int_{\text{Sp}(n)} f(\tau^{-1}z) \overline{t_{ik}^{p,q,m}(\tau)} d\tau d\mu(z) = 0, \quad (92)$$

где $g \in I(B^{4n})$, $\overline{gB_r} \subset B_R$, $p, q \geq 0$, $0 \leq m \leq \varkappa$, $1 \leq i, k \leq N(n, p, q, m)$.

Обозначим

$$\Psi(w) = \int_{d(z,w) \leq r} f(z) d\mu(z), \quad w \in B_{R-r}.$$

Из соотношения (92) находим

$$\int_{\text{Sp}(n)} \Psi(\tau^{-1}g0) \overline{t_{ik}^{p,q,m}(\tau)} d\tau = 0.$$

В силу леммы 20 отсюда имеем $\Psi_{p,q,m}^k(\rho) = 0$, $\rho \in (0, \text{th}(R-r))$. Из полноты сферических гармоник следует, что $\Psi = 0$ и $f \in V_r(B_R)$. Лемма доказана.

Отсюда и из лемм 20, 28 получаем утверждение теоремы 1.

Список литературы

1. Хелгасон С. Группы и геометрический анализ. М.: Мир, 1987.
2. Беренштейн К. А., Струнна Д. Комплексный анализ и уравнения в свертках // Итоги науки и техн. Совр. пробл. матем. Фундам. направления. Т. 54. М.: ВИНТИ, 1989. С. 5–111.
3. Zalcman L. A bibliographic survey of the Pompeiu problem // Approximation by solutions of partial differential equations / Eds. B. Fuglede et al. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1992. P. 185–194.
4. Netuka I., Vesely J. Mean value property and harmonic functions // Classical and Modern potential Theory and Applications. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1994. P. 359–398.
5. Волчков В. В. Новые теоремы о среднем для решений уравнения Гельмгольца // Матем. сб. 1993. Т. 184. № 7. С. 71–78.
6. Волчков В. В. Окончательный вариант локальной теоремы о двух радиусах // Матем. сб. 1995. Т. 186. № 6. С. 15–34.

7. Волчков В. В. Решение проблемы носителя для некоторых классов функций // Матем. сб. 1997. Т. 188. № 9. С. 13–30.
8. Волчков В. В. О множествах инъективности преобразования Помпейю // Матем. сб. 1999. Т. 190. № 11. С. 51–66.
9. Волчков В. В. Экстремальные задачи о множествах Помпейю. II // Матем. сб. 2000. Т. 191. № 5. С. 3–16.
10. Волчков В. В. Новые теоремы о двух радиусах в теории гармонических функций // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. № 1. С. 182–194.
11. Волчков В. В. О множествах инъективности преобразования Радона на сферах // Изв. РАН. Сер. матем. 1999. Т. 63. № 3. С. 63–76.
12. Волчков В. В. Об одной проблеме Зальцмана и ее обобщениях // Матем. заметки. 1993. Т. 53. № 2. С. 30–36.
13. Волчков В. В. Окончательный вариант теоремы о среднем в теории гармонических функций // Матем. заметки. 1996. Т. 59. № 3. С. 351–358.
14. Волчков В. В. Теоремы единственности для некоторых классов функций с нулевыми сферическими средними // Матем. заметки. 1997. Т. 62. № 1. С. 59–65.
15. Волчков В. В. Окончательный вариант локальной теоремы о двух радиусах на гиперболических пространствах // Изв. РАН. Сер. матем. 2001. Т. 65. № 2. С. 3–26.
16. Волчков В. В. Теоремы о двух радиусах на пространствах постоянной кривизны // Докл. РАН. 1996. Т. 347. № 3. С. 300–302.
17. Volchkov V. V. Morera type theorems on the unit disk // Anal. Math. 1994. V. 20. P. 49–63.
18. Волчков В. В. Теоремы о среднем для одного класса полиномов // Сиб. матем. журн. 1994. Т. 35. № 4. С. 737–745.
19. Волчков В. В. Проблемы типа Помпейю на многообразиях // Докл. АН Украины. 1993. № 11. С. 9–12.
20. Волчков Вит. В. О функциях с нулевыми шаровыми средними на комплексных гиперболических пространствах // Матем. заметки. 2000. Т. 68. № 4. С. 504–512.
21. Berenstein C. A., Shahshahani M. Harmonic analysis and Pompeiu problem // Amer. J. Math. 1983. V. 105. P. 1217–1229.
22. Shahshahani M., Sitaram A. The Pompeiu problem in exterior domains in Symmetric spaces // Contemp. Math. 1987. V. 63. P. 267–278.
23. Berenstein C. A., Zalcman L. Pompeiu's problem on symmetric spaces // Comment. Math. Helvetici. 1980. V. 55. P. 593–621.
24. Фоменко А. Т. Симплектическая геометрия. Методы и приложения. М.: Изд-во МГУ, 1988.
25. Рудин У. Теория функций в единичном шаре из C^n . М.: Мир, 1984.
26. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука, 1965.
27. Корнев Б. Г. Введение в теорию бесселевых функций. М.: Наука, 1971.
28. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М.: Гостехиздат, 1956.
29. Harchaoui M. Inversion de la transformation de Pompeiu locale dans les espaces hyperboliques reel et complete (Cas de deux boules) // J. Anal. Math. 1995. V. 67. P. 1–37.
30. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.
31. Желобенко Д. П., Штерн А. И. Представления групп Ли. М.: Наука, 1983.
32. Вольф Дж. Пространства постоянной кривизны. М.: Наука, 1982.
33. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. М.: Наука, 1979.
34. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. Ч. 2. М.: Наука, 1985.
35. Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представлений групп. 2-е изд. М.: Наука, 1991.

Поступило в редакцию
27.V.2001