Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. О. Иванов, А. А. Тужилин, Разветвленные геодезические в нормированных пространствах, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2002, том 66, выпуск 5, 33–82

DOI: <https://doi.org/10.4213/im402>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 15:18:34

УДК 514.77+519.176

А. О. Иванов, А. А. Тужилин

Разветвленные геодезические в нормированных пространствах

Изучаются разветвленные экстремали функционалов длины на нормированных пространствах. Эта задача представляет собой естественное обобщение проблемы Штейнера в нормированных пространствах. Получены критерии экстремальности сетей как в случае деформаций, сохраняющих топологию сетей, так и в случае деформаций с расщеплениями. Обсуждается связь между локально кратчайшими сетями и экстремальными сетями. В важном частном случае манхеттенской плоскости получен критерий экстремальности локально кратчайшей сети.

Библиография: 23 наименования.

§ 1. Введение и постановка задачи

Настоящая работа посвящена изучению свойств разветвленных экстремалей функционалов длины на нормированных пространствах. Важным частным случаем функционалов данного типа является функционал так называемой манхеттенской длины. Напомним, что *манхеттенской длиной* $\|v\|_1$ вектора $v \in \mathbb{R}^n$ (более правильно было бы говорить “манхеттенской нормой”) называется сумма длин проекций этого вектора на координатные оси (предполагается, что в $\mathbb{R}^n$ фиксирован стандартный ортонормированный базис). *Манхеттенская длина кусочно гладкой кривой* γ определяется как интеграл от манхеттенской нормы $\|\gamma'\|_1$ вектора скорости этой кривой по параметризующему отрезку. Разветвленные экстремали полученного функционала естественно возникают как решения так называемой *прямоугольной проблемы Штейнера*. Это название, отметим, объясняется тем, что среди кратчайших в смысле манхеттенской длины кривых, соединяющих пару точек, всегда найдется ломаная, звенья которой параллельны координатным осям (и поэтому перпендикулярны друг другу).

Первые работы, посвященные изучению прямоугольной проблемы Штейнера, появились в 60-е годы прошлого века [2] в связи с бурным развитием электроники и робототехники. Интерес к манхеттенской длине возник в связи с тем, что проводники на печатных платах имеют, как правило, вид ломаных линий, составленных из горизонтальных и вертикальных отрезков, поэтому их манхеттенская и евклидова длины одинаковы. Аналогичная ситуация имеет место и в робототехнике. По-видимому, первое систематическое исследование кратчайших сетей

Статья написана при частичной поддержке РФФИ (проекты № 01-01-00583, 01-15-99268 и 00-15-96059), INTAS (проект 97-0808) и Университеты России (проект 015.04.02.17). Авторы благодарны этим организациям.

в смысле манхеттенской длины (так называемых *кратчайших прямоугольных деревьев*) было предпринято в 1966 г. Хананом [4], который описал несколько важных общих геометрических свойств таких сетей. В частности, Ханан показал, что всегда существует кратчайшее прямоугольное дерево, которое является подмножеством множества всех вертикальных и горизонтальных прямых, проходящих через граничные точки. Такое множество прямых называется *решеткой Ханана*. Отметим, что ребра кратчайшего прямоугольного дерева можно, вообще говоря, выбирать многими способами, не меняя, конечно, длину дерева. Однако, начиная с работы [4], традиционно ребра таких деревьев выбирают в виде ломаных, звенья которых параллельны координатным осям.

Спустя 10 лет Хванг [5] описал возможную структуру кратчайших прямоугольных деревьев в предположении, что данное множество затягивается хотя бы одним кратчайшим бинарным деревом Γ_0 . Последнее означает, что степень всех граничных вершин в дереве Γ_0 равна 1, а не граничных – равна 3. В частности, дерево Γ_0 не имеет вершин степени 2. Хванг показал, что в этом случае кратчайшее дерево имеет одну из двух возможных структур, показанных на рис. 1.

Рис. 1. Два типа полных кратчайших сетей

Однако эффективный алгоритм, строящий кратчайшее прямоугольное дерево, найти не удавалось. Объяснение этому было дано в 1977 г. Гэри и Джонсоном [3], которые показали, что задача поиска кратчайшего прямоугольного дерева является *NP*-полной, т.е., скорее всего, не существует полиномиального алгоритма решения этой задачи. Поэтому изучение ограничений на структуру кратчайших сетей становится более актуальным.

Идея рассмотрения *локально кратчайших* сетей впервые, по-видимому, появилась при изучении кратчайших сетей в случае евклидовой длины. А именно, описав локальное устройство кратчайших сетей (для этого достаточно решить задачу с не более чем одной дополнительной вершиной), мы естественным образом приходим к задаче описания всех сетей, удовлетворяющих полученным ограничениям. Такие сети образуют более широкий класс, и их обычно называют *локально минимальными* сетями. Отметим, что первые реальные алгоритмы построения кратчайшего евклидова дерева, основанные на алгоритме Мелзака [19], перебирали все возможные локально минимальные деревья и искали среди них кратчайшее.

Иногда найти кратчайшую сеть оказывается существенно проще, чем перечислить все локально минимальные сети. Напомним, что если множество граничных точек представляет собой множество вершин правильного n -угольника, $n \geq 6$, то, как показали Ярник и Кесслер [18] для $n \geq 13$ и Ду, Хванг и Венг [1] для $6 \leq n \leq 12$, кратчайшая сеть представляет собой n -угольник без любой его стороны. Множество локально минимальных сетей в этом случае существенно богаче

(см., например, [13], [23]). В случае кратчайших манхеттенских сетей с так называемой прямоугольно-выпуклой границей известны полиномиальные алгоритмы построения таких сетей (см., например, [22]).

Отметим, что в перечисленных выше работах изучаются, в основном, алгоритмические аспекты проблемы. В частности, не было замечено отличие локально минимальных сетей (т.е., в данном контексте, сетей, имеющих ту же локальную структуру, что и кратчайшая сеть) от экстремальных сетей. Также не изучалась геометрия и топология локально минимальных и экстремальных сетей.

В предыдущих работах (см. [17] или [16]) авторы изучали геометрические свойства разветвленных экстремалей так называемых *квазирегулярных функционалов лагранжеского типа* – функционалов, порожденных лагранжианами $L(x, \dot{x})$, гладкими всюду, кроме нулевого сечения касательного расслоения (и обладающих рядом дополнительных свойств [17]). Важным примером квазирегулярного функционала является длина на римановом многообразии (разветвленные экстремали этого функционала – так называемые разветвленные геодезические – довольно хорошо изучены авторами; см. [12] или [15]). Однако случай манхеттенской длины уже не укладывается в эту схему, поскольку соответствующий лагранжиан $L(x, \dot{x}) = \|\dot{x}\|_1$ имеет особенности не только на нулевом сечении касательного расслоения к $\mathbb{R}^n$, но и на координатных плоскостях касательных пространств. Это обстоятельство приводит к появлению новых интересных эффектов. А именно, оказывается, что условие экстремальности разветвленных решений перестает носить локальный характер, как это было для случая квазирегулярных лагранжианов [17]. В частности, локальная минимальность сети не эквивалентна ее экстремальности, как это было, например, в случае функционала римановой длины [15]. Ниже, чтобы более детально продемонстрировать этот феномен, приведем критерий экстремальности плоской сети по отношению к функционалу манхеттенской длины, полученный нами совместно с Хонг Ван Ле (см. теорему 8.3).

Перечислим основные результаты настоящей статьи. Нами получены критерии экстремальности сетей для функционала нормированной длины по отношению к деформациям, как сохраняющим, так и меняющим структуру сети (см. теоремы 4.1, 4.2, 5.1 и 7.1). Для широкого класса норм доказана устойчивость экстремальных сетей по отношению к деформациям граничного множества (см. теорему 6.1). Для плоских норм со строго выпуклой окружностью доказан ряд свойств экстремальных сетей, аналогичных свойствам локально минимальных сетей на стандартной евклидовой плоскости (см. § 7). Наконец, как уже отмечалось выше, подробно изучен случай манхеттенской нормы и приведен геометрический критерий экстремальности плоской сети по отношению к этой норме (см. теорему 8.3).

Авторы, пользуясь случаем, выражают свою глубокую и искреннюю признательность академику А. Т. Фоменко за постоянное внимание к их работе.

§ 2. Необходимые определения и предварительные результаты

В этом параграфе приведем необходимые для дальнейшего сведения о сетях и выпуклых функциях.

2.1. Графы и сети. Говоря неформально, если кривая – это непрерывное отображение отрезка в объемлющее пространство, то сеть – это непрерывное отображение графа, т.е. “разветвленного отрезка”, в объемлющее пространство. Приведем здесь лишь необходимые для понимания определения из теории сетей. Более подробную информацию о теории сетей можно найти в работах авторов [7]–[17].

Топологический граф – это топологическое пространство, склеенное из набора отрезков по некоторой эквивалентности, заданной на концевых точках этих отрезков. В дальнейшем все рассматриваемые топологические графы предполагаются склеенными из конечного числа отрезков. Для краткости будем называть топологические графы просто графами. Точки графа, соответствующие концевым точкам порождающих его отрезков, называются *вершинами*, а связанные компоненты дополнения до множества вершин – *ребрами* графа. Ясно, что каждое ребро – это внутренность некоторого отрезка. *Границей графа G* называется произвольное фиксированное подмножество ∂G его вершин. Если такое подмножество фиксировано, то граф называют *графом с границей*. Отметим, что наши определения объединяют комбинаторные и топологические свойства графов, поэтому в дальнейшем, там, где это не вызовет недоразумений, будем применять как топологическую, так и комбинаторную терминологию.

Пусть X – конечномерное линейное пространство с некоторой нормой ρ . Непрерывное отображение Γ связного графа G в пространство X называется *сетью*. Граф G в этом случае называется *параметризующим графом* рассматриваемой сети, или ее *типом*, или ее *топологией*. Ограничения отображения Γ на ребра (вершины, границу) параметризующего графа называются *ребрами* (соответственно, *вершинами* и *границей*) сети Γ . Если $M \subset X$ – образ границы $\partial \Gamma$ сети Γ , то говорят, что сеть Γ *затягивает множество M по отображению $\partial \Gamma$* . Вершины графа (сети), входящие в границу, называются *граничными*, а все остальные – *подвижными*. Также *граничными* называются ребра, инцидентные граничным вершинам.

Каждое ребро сети продолжается по непрерывности до отображения замкнутого отрезка в пространство X . Полученное отображение называется *замкнутым ребром* сети. Ребро сети называется *вырожденным*, если оно представляет собой отображение в точку. Сеть без вырожденных ребер называют *невыврожденной*. Далее, сеть $\Gamma: G \rightarrow X$ называется *гладкой* (*кусочно гладкой*, *регулярной*, *кусочно регулярной*), если каждое ее замкнутое ребро является кривой соответствующей гладкости в нормированном пространстве X . Сеть назовем *квазирегулярной*, если каждое ее ребро или регулярно, или вырождено.

Если H – связный подграф в параметризующем графе G сети Γ , то ограничение отображения Γ на H называется *подсетью*. Каждая связная компонента прообраза вершины сети Γ , а также соответствующая ей подсеть, называются *приведенными компонентами*. Приведенная компонента, состоящая более чем из одной вершины, называется *вырожденной компонентой*. Отметим, что каждая приведенная компонента или совпадает с вершиной, или представляет собой компоненту связности объединения вырожденных ребер сети. Подграф графа G , порожденный его подвижными вершинами, назовем *подвижным подграфом*, а каждую соответствующую подсеть – *подвижной подсетью*.

Пусть H – некоторый подграф в G . Как обычно, через G/H обозначается *факторграф*, а через $\pi: G \rightarrow G/H$ – *стандартная проекция* на факторпространство. Если подграф H не связан и $H = \sqcup H_k$ – разложение H на связные компоненты, то назовем *слабым факторграфом* $G|H$ результат последовательной факторизации по компонентам H_i :

$$G|H = (\cdots ((G/H_1)/H_2)/\cdots)/H_k.$$

Соответствующую композицию $\pi = \pi_k \circ \cdots \circ \pi_2 \circ \pi_1$ канонических проекций будем называть *слабой проекцией* $\pi: G \rightarrow G|H$. Ясно, что если H связан, то слабый факторграф $G|H$ совпадает с обычным факторграфом G/H , а слабая проекция является обычной проекцией. Далее, говорят, что сеть $\Gamma': G' \rightarrow X$ *слабо проектируется* на сеть $\Gamma: G \rightarrow X$, если существует слабая проекция $\pi: G' \rightarrow G = G'|H'$ для некоторого $H' \subset G'$ такая, что $\Gamma \circ \pi = \Gamma'$. Сеть Γ' в этом случае будем также называть *расщеплением* сети Γ или ее *представителем*.

Пусть $\Gamma: G \rightarrow X$ – некоторая сеть. *Локальным графом* точки $\Gamma: P \rightarrow X$ называется наделенное естественной структурой графа замыкание G_P некоторой окрестности U_P точки $P \in G$ такое, что G_P не содержит вершин графа G , за исключением вершин, входящих в содержащую P приведенную компоненту (если такие вершины имеются). *Каноническая граница* локального графа G_P определяется так: $\partial G_P = (\partial U_P \cap G) \cup (U_P \cap \partial G)$. *Локальной сетью* называется ограничение отображения Γ на некоторый локальный граф.

Рис. 2. Деформация с расщеплением

Далее, непрерывное однопараметрическое семейство Γ_t , $t \in [0, 1]$, сетей $\Gamma_t: G \rightarrow X$ такое, что $\Gamma_0 = \Gamma$, называется *деформацией сети* Γ . Каждая деформация Γ_t – это непрерывное отображение $\Gamma_t: G \times [0, 1] \rightarrow X$. Если исходная сеть Γ является гладкой, то дополнительно предполагается, что для каждого ребра e параметризующего графа отображение $\Gamma_t: e \times [0, 1] \rightarrow X$ является гладким (аналогично для кусочно гладкой, регулярной, кусочно регулярной сети $\Gamma = \Gamma_0$). Определенные деформации называются *сохраняющими тип сети* или *деформациями без расщеплений*. Далее, пусть Γ – некоторая гладкая сеть и сеть Γ' слабо проектируется на Γ . Тогда деформация Γ'_t сети Γ' такая, что все сети Γ'_t , $t > 0$, невырождены, называется *расщепляющей деформацией* сети Γ или *деформацией с расщеплением*. Пример такой деформации приведен на рис. 2. Таким образом, деформация с расщеплением – это деформация произвольного представителя данной сети, регулярная всюду, кроме начальной точки. Если приведенная компонента вершины v'

сети Γ' , соответствующей вершине v сети Γ , не тривиальна, т.е. отлична от точки, то будем говорить, что *деформация Γ'_t расщепляет вершину v сети Γ* .

2.2. Локально минимальные и критические сети в нормированном пространстве. Напомним определение функционала длины в нормированном пространстве. Как и выше, пусть X – конечномерное линейное пространство с некоторой нормой ρ , и пусть $\gamma: [a, b] \rightarrow X$ – некоторая непрерывная кривая. Кривая γ называется *измеримой*, если существует предел $\ell(\gamma)$ длин ломаных, вписанных в эту кривую. Число $\ell(\gamma)$ называется в этом случае *длиной кривой γ* . Если кривая γ кусочно гладкая, то, как легко проверить, она измерима и

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \rho(\dot{\gamma}(t)) dt.$$

Таким образом, длина кривой в нормированном пространстве – это функционал лагранжева типа с лагранжианом, равным норме вектора скорости кривой.

Пусть Γ – произвольная кусочно гладкая сеть на X . Тогда, как и выше, *длиной $\ell(\Gamma)$ сети Γ* назовем сумму длин ее ребер. Сеть Γ , стягивающая множество $M \subset X$, называется *кратчайшей*, если ее длина не превосходит длины любой сети, стягивающей M .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Сеть Γ называется *локально минимальной*, если каждая ее точка содержится в некоторой кратчайшей локальной сети (по отношению к канонической границе этой локальной сети).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Сеть Γ называется *критической* или *экстремальной*, если для любой деформации Γ_t , $t \in [0, 1]$, где $\Gamma_{t=0} = \Gamma$ (из заданного класса деформаций D), выполнено соотношение

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0+} \ell(\Gamma_t) \geq 0.$$

Примем следующее соглашение: *если противное не оговорено, всегда будем иметь в виду класс деформаций с расщеплением*.

Можно показать, что для случая стандартной евклидовой нормы в n -мерном векторном пространстве множества локально минимальных и экстремальных сетей совпадают. Однако, оказывается, бывают нормы, в которых это не так. Примером такой нормы является ℓ_1 -норма, или, как ее еще называют, *манхеттенская норма*. Напомним соответствующее определение.

Пусть в $\mathbb{R}^n$ фиксированы декартовы координаты $(x^1, \dots, x^n)$. Напомним, что *манхеттенской нормой* вектора $y = (y^1, \dots, y^n)$ называется следующее число:

$$\|y\|_1 = \sum_{i=1}^n |y^i|.$$

Соответствующее нормированное пространство будем называть *n -мерным манхеттенским пространством*. Ниже покажем, что класс локально минимальных сетей в манхеттенском пространстве существенно шире класса экстремальных сетей.

2.3. Выпуклые множества и функции. Напомним, что подмножество X линейного пространства $\mathbb{R}^n$ называется *выпуклым*, если вместе с любыми двумя своими точками $x_0, x_1 \in X$ оно содержит соединяющий их отрезок $[x_0, x_1] = \{(1 - \lambda)x_0 + \lambda x_1 \mid \lambda \in [0, 1]\}$. Функция $F: X \rightarrow \mathbb{R}$, заданная на выпуклом множестве $X \subset \mathbb{R}^n$, называется *выпуклой* (вниз), если для любых $x_0, x_1 \in X$ и любого $\lambda \in [0, 1]$ имеет место следующее соотношение:

$$F((1 - \lambda)x_0 + \lambda x_1) \leq (1 - \lambda)F(x_0) + \lambda F(x_1).$$

Хорошо известно (см., например, [20]), что если X – выпуклая область в $\mathbb{R}^n$ и $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ – выпуклая функция, то F непрерывна на X и дифференцируема по любому направлению (здесь производная по направлению понимается как односторонний предел).

Субградиентом выпуклой вниз функции $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ в точке $x \in \mathbb{R}^n$ называется такой ковектор $\xi \in T_x^* \mathbb{R}^n$, что

$$\xi(y - x) \leq F(y) - F(x) \quad \text{для всех } y \in \mathbb{R}^n.$$

Далее, если $S \subset \mathbb{R}^n$ – выпуклая поверхность, т.е. граница некоторого выпуклого подмножества $X \subset \mathbb{R}^n$, и $x \in S$ – произвольная ее точка, то проходящая через x гиперплоскость Π называется *опорной плоскостью* поверхности S (а также множества X) в точке x , если S лежит в одном из замкнутых полупространств, ограниченных Π . Нормаль к опорной гиперплоскости, направленную в то из ограниченных этой гиперплоскостью полупространств, внутренность которого не пересекается с S , назовем *внешней нормалью* к поверхности S в точке x . Множество $N_x S$ всех внешних нормалей к поверхности S в точке x называется *нормальным конусом*.

Пусть теперь в $\mathbb{R}^n$ фиксирована некоторая норма ρ . Отметим, прежде всего, что функция $\rho: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ является выпуклой, чем и объясняется наш интерес к выпуклым функциям. Обозначим через Σ единичную сферу в $(\mathbb{R}^n, \rho)$, т.е. $\Sigma = \{x \mid \rho(x) = 1\}$. Напомним, что *конормой* ρ^* , соответствующей норме ρ , называется следующая функция на ковекторах:

$$\rho^*(\xi) = \max\{\xi(\nu) \mid \nu \in \Sigma\}.$$

При стандартном отождествлении пространств $T_x^* \mathbb{R}^n$ и $T_x \mathbb{R}^n$ *субградиентное множество* $S_F(x)$ функции F в точке x , т.е. множество всех субградиентов функции F в точке x , является непустым выпуклым ограниченным подмножеством нормального конуса в точке x к поверхности уровня этой функции, проходящей через x . При этом функция F дифференцируема в x , если и только если множество $S_F(x)$ состоит из одного элемента, совпадающего в этом случае с градиентом функции F . Если $F = \rho$ – норма, то легко доказывается следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Субградиентное множество $S_\rho(x)$ в точке $x \neq 0$ совпадает с множеством всех внешних нормалей единичной конормы к поверхности уровня нормы ρ , проходящей через x .*

С помощью субградиентного множества легко вычисляется производная по направлению выпуклой функции F . А именно, имеет место следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Пусть F – выпуклая вниз функция и η – произвольный вектор, касательный к $\mathbb{R}^n$ в точке $x \in \mathbb{R}^n$. Тогда

$$F_\eta = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{F(x + \varepsilon\eta) - F(x)}{\varepsilon} = \max_{\xi \in S_F(x)} \langle \xi, \eta \rangle.$$

Это предложение будет интересовать нас в случае, когда $F = \rho$ – некоторая норма. Ниже приведем непосредственный вывод формулы из предложения 2.2 для нормы $F = \rho$ и дадим геометрическую интерпретацию полученного результата.

Роль субградиентных множеств в теории выпуклых функций объясняется следующими хорошо известными результатами [20].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Сумма выпуклых вниз функций также является выпуклой вниз функцией. Субградиентное множество суммы выпуклых вниз функций в любой внутренней точке области определения равно сумме субградиентных множеств этих функций.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. Внутренняя точка x области определения выпуклой вниз функции F является точкой минимума для F , если и только если субградиентное множество $S_F(x)$ функции F в точке x содержит нуль. Множество всех минимумов выпуклой вниз функции F связно, выпукло, и на нем функция F принимает одно и то же значение.

§ 3. Экстремальные кривые

В этом параграфе выведем формулу первой вариации длины отрезка в нормированном пространстве и опишем экстремальные кривые.

3.1. Формула первой вариации длины отрезка в нормированном пространстве. Пусть ρ – некоторая норма на векторах пространства $\mathbb{R}^n$ и, как и выше, $\Sigma = \Sigma^{n-1}$ – единичная сфера по отношению к этой норме. Обозначим через $\|\cdot\|$ стандартную евклидову норму в $\mathbb{R}^n$, а через $S = S^{n-1}$ – стандартную евклидову сферу.

Как уже отмечалось, функция ρ выпукла на всем $\mathbb{R}^n$, поэтому имеет место следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть ρ – произвольная норма на $\mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ – некоторая точка и $\eta \in T_x \mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}^n$ – произвольный вектор. Тогда норма ρ дифференцируема по направлению η , т.е. существует предел

$$\rho_\eta = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\rho(x + t\eta) - \rho(x)}{t}.$$

Пусть $x \neq 0$ – произвольная точка из $\mathbb{R}^n$ и η – некоторый вектор из $T_x \mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}^n$. Предположим, что векторы x и η линейно независимы, и обозначим через Π двумерное подпространство, натянутое на эти векторы. Прямая, проходящая через начало координат и точку x , разбивает плоскость Π на две полуплоскости, одна из которых содержит вектор η . Эту последнюю полуплоскость обозначим через $\Pi_+(\eta)$, а оставшуюся полуплоскость – через $\Pi_-(\eta)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *Ограничение функции $g(\eta) = \rho_\eta$ на каждую из полуплоскостей $\Pi_\pm(\eta)$ – линейная функция.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $S^1(\eta)$ – пересечение плоскости Π со сферой S^{n-1} . Ясно, что $S^1(\eta)$ – большая окружность этой сферы, проходящая через точку $n = x/\|x\|$. Более того, общая граничная прямая полуплоскостей $\Pi_\pm(\eta)$ содержит точку n . Обозначим через $S_\pm^1(\eta)$ дугу $S^1(\eta) \cap \Pi_\pm(\eta)$. Параметризуем дугу $S_+^1(\eta)$ натуральным параметром φ так, чтобы n соответствовала $\varphi = 0$, и пусть $\tau(\eta)$ – единичный вектор скорости этой дуги в начальный момент $\varphi = 0$. Таким образом, дуга $S_+^1(\eta)$ задается радиус-вектором $n(\varphi)$ своих точек, причем $n(0) = n$ и $n_\varphi(0) = \tau(\eta)$. Более того, каждая точка P из полуплоскости $\Pi_+(\eta)$ задается своими полярными координатами (r, φ) : $P = rn(\varphi)$.

Ясно, что пара $(n, \tau(\eta))$ образует ортонормированный базис в плоскости Π . Разложим вектор η по этому базису: $\eta = \alpha n + \beta \tau(\eta)$. Отметим, что $\beta > 0$ по построению. Положим $f(\varphi) = \rho(n(\varphi))$. Если $P = rn(\varphi)$ – произвольная точка из полуплоскости $\Pi_+(\eta)$, то из однородности нормы заключаем, что $\rho(P) = rf(\varphi)$.

Пусть $x(t) = r(t)n(t)$ – параметрическое задание луча, идущего из x в направлении η , такое, что $x(0) = x$ и $x_t(0) = \eta$. Имеем $\rho(x(t)) = r(t)f(t)$. Из предложения 3.1 и гладкости кривых $n(t)$ и $x(t)$ вытекает, что функция $f(t)$, а значит, и функция $r(t)$ дифференцируемы в начальный момент $t = 0$ (на множестве $t \in [0, +\infty)$).

Имеем

$$\eta = x_t(0) = r_t(0)n + r(0)n_\varphi(0)\varphi_t(0) = r_t(0)n + \|x\|\tau(\eta)\varphi_t(0).$$

Поэтому $\alpha = r_t(0)$, а $\beta = \|x\|\varphi_t(0)$. С другой стороны,

$$\rho_\eta = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0+} (r(t)f(t)) = r_t(0)f(0) + r(0)f_\varphi(0)\varphi_t(0) = \alpha f(0) + \beta f_\varphi(0).$$

Так как $f(0)$ и $f_\varphi(0)$ не зависят от выбора η из полуплоскости $\Pi_+(\eta)$, заключаем, что r_η линейно зависит от η . Доказательство предложения закончено.

Напомним, что ранее через $f(\varphi)$ была обозначена функция $f(\varphi) = \rho(n(\varphi))$. Определим теперь ковектор $\xi \in T_x^*\mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}^n$, положив $\xi = f(0)n + \dot{f}(0)\tau(\eta)$. Отметим, что ковектор ξ , вообще говоря, зависит от η . Более точно, ξ однозначно определяется полуплоскостью $\Pi_+(\eta)$, т.е. если η_1 и η_2 из $T_x\mathbb{R}^n$ порождают одну и ту же полуплоскость $\Pi_+(\eta_1) = \Pi_+(\eta_2)$, то соответствующие ковекторы ξ_1 и ξ_2 из $T_x^*\mathbb{R}^n$ совпадают. Заметим, что по определению $\rho_\eta = \xi(\eta) = \langle \xi, \eta \rangle$.

Опишем некоторые свойства ковектора ξ . Для этого центрально спроектируем кривую $n(\varphi)$ на сферу Σ и обозначим полученную кривую через $e(\varphi)$. Таким образом, $e(\varphi) = n(\varphi)/\rho(n(\varphi))$. Легко видеть, что у кривой $e(\varphi)$ в начальный момент $\varphi = 0$ определен вектор скорости, который, учитывая, что $\rho(n(\varphi)) = f(\varphi)$, можно записать так:

$$\dot{e}(0) = \frac{f(0)\tau(\eta) - \dot{f}(0)n}{f^2(0)}.$$

Поэтому имеет место следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Векторы ξ и $\dot{e}(0)$ ортогональны. Поэтому вектор ξ – это внешняя нормаль в точке $e(0)$ к выпуклой кривой $\Sigma \cap \Pi$.

Рассмотрим в точке $e(0)$ произвольную опорную плоскость к сфере Σ , содержащую вектор $\dot{e}(0)$, и пусть N – внешняя нормаль к Σ в точке $e(0)$, перпендикулярная этой опорной плоскости. Легко видеть, что $\langle N, n \rangle > 0$. Поэтому корректно определен следующий вектор:

$$m = \frac{f(0)}{\langle N, n \rangle} N - \xi.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. Вектор m перпендикулярен плоскости Π . Поэтому значения ковекторов $\xi + m$ и ξ на векторах из плоскости Π совпадают.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, плоскость Π натянута на векторы $\dot{e}(0)$ и n . Векторы ξ и N перпендикулярны вектору $\dot{e}(0)$, поэтому m тоже перпендикулярен $\dot{e}(0)$. Наконец,

$$\langle m, n \rangle = \left\langle \frac{f(0)}{\langle N, n \rangle} N - \xi, n \right\rangle = f(0) - f(0) = 0,$$

что и требовалось доказать.

Имеет место следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5. Существует вектор m , перпендикулярный плоскости Π , такой, что ковектор $\xi + m$ является субградиентом функции ρ в точке x . Другими словами, вектор $\xi + m$ принадлежит нормальному конусу к сфере $\|x\|\Sigma$ в точке x , и его конорма равна 1. Более того, каждый такой вектор m однозначно строится по содержащей вектор $\dot{e}(0)$ опорной плоскости к сфере Σ в точке $e(0)$. В частности, вектор m единствен тогда и только тогда, когда такая плоскость единственна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование искомого вектора m вытекает из предложения 3.4. Вычислим конорму ковектора $\xi + m$. Так как вектор $\xi + m$ принадлежит нормальному конусу $N_{e(0)}\Sigma$, то

$$\max\{\langle \xi + m, \nu \rangle \mid \nu \in \Sigma\} = \langle \xi + m, e(0) \rangle = \left\langle \frac{f(0)}{\langle N, n \rangle} N, \frac{n}{f(0)} \right\rangle = 1.$$

Однозначная определенность вектора m по соответствующей опорной плоскости непосредственно следует из построения. Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Если размерность объемлющего пространства равна 2, то, как легко видеть, вектор m равен нулю, т.е. ковектор ξ сам является субградиентом функции ρ в точке x .

Напомним, что мы предполагали линейную независимость векторов x и η . Пусть теперь векторы x и η линейно зависимы. Тогда, очевидно, $\rho_\eta = \pm \rho(\eta)$, где знак совпадает со знаком скалярного произведения $\langle x, \eta \rangle$. С другой стороны, для любого субградиента ψ функции ρ в точке x выполнено:

$$\langle \psi, \eta \rangle = \left\langle \psi, \pm \|\eta\| \frac{x}{\|x\|} \right\rangle.$$

Положим $n = x/\|x\|$ и $e = n/\rho(n)$. Тогда

$$\langle \psi, \eta \rangle = \langle \psi, \pm \|\eta\| \rho(n) e \rangle = \pm \|\eta\| \rho(n) = \pm \rho(\eta) = \rho_\eta.$$

Наконец, пусть $x = 0$. Тогда, очевидно, $\rho_\eta = \rho(\eta)$. Таким образом, доказан следующий результат.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть ρ – некоторая норма, заданная на векторах пространства $\mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ – произвольная точка и $\eta \in T_x \mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}^n$ – любой вектор. Тогда существует производная ρ_η функции ρ в точке x по направлению η и ее значение равно

$$\rho_\eta = \begin{cases} \rho(\eta), & \text{если } x = 0, \\ \langle p(\eta), \eta \rangle & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $p(\eta)$ – субградиент функции ρ в точке x , причем если η и отличный от нуля x коллинеарны, то $p(\eta)$ – любой такой ковектор, а если η и ненулевой x линейно независимы, то $p(\eta)$ удовлетворяет следующему дополнительному условию: вектор $p(\eta)$ ортогонален радиальной проекции луча $x + t\eta$, $t \geq 0$, на сферу $\Sigma = \{z \in \mathbb{R}^n \mid \rho(z) = 1\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Функция $h(\xi) = \langle \xi, \eta \rangle$, определенная на множестве $S_\rho(x)$, принимает в точке $p(\eta)$ свое максимальное значение, что согласуется с предложением 2.2. В дальнейшем субградиент $p(\eta)$ будем называть *соответствующим* вектору η .

Введем следующие обозначения. Рассмотрим отрезок $[x_1, x_2]$. Пусть $n_i = (-1)^i(x_2 - x_1)/\|x_2 - x_1\|$ – внешняя нормаль к отрезку $[x_1, x_2]$ в точке x_i . Обозначим через $p_i(\eta)$ субградиент $p(\eta)$, вычисленный в точке $x = n_i$, как в теореме 3.1. Отметим, что для любого вектора η имеет место следующее равенство:

$$p_1(\eta) = -p_2(-\eta).$$

СЛЕДСТВИЕ 3.1 (первая вариация длины отрезка). Пусть ρ – некоторая норма, заданная на векторах пространства $\mathbb{R}^n$, x_1 и x_2 – произвольные точки в $\mathbb{R}^n$, а η_i – произвольный вектор из $T_{x_i} \mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$. Рассмотрим деформацию $[x_1, x_2]_t = [x_1 + t\eta_1, x_2 + t\eta_2]$, $t \geq 0$, отрезка $[x_1, x_2]$. Пусть $\ell(t)$ – длина отрезка $[x_1, x_2]_t$ в нормированном пространстве. Тогда функция $\ell(t)$ дифференцируема в начальный момент $t = 0$. Если при этом $x_1 = x_2$, то

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0+} \ell(t) = \rho(\eta_1 - \eta_2),$$

а если $x_1 \neq x_2$, то

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0+} \ell(t) = \langle p_1(\eta_1 - \eta_2), \eta_1 - \eta_2 \rangle = \langle p_2(\eta_2 - \eta_1), \eta_2 - \eta_1 \rangle.$$

Более того, если ковектор $p_1(\eta_1 - \eta_2)$, а значит, и ковектор $p_2(\eta_2 - \eta_1)$ определены однозначно, то $p_1(\eta_1 - \eta_2) = -p_2(\eta_2 - \eta_1)$ и

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0+} \ell(t) = \langle p_1(\eta_1 - \eta_2), \eta_1 \rangle + \langle p_2(\eta_2 - \eta_1), \eta_2 \rangle.$$

Если же ковекторы $p_1(\eta_1 - \eta_2)$ и $p_2(\eta_2 - \eta_1)$ определены не однозначно, то последнее равенство имеет место для произвольного выбора этих ковекторов, при котором $p_1(\eta_1 - \eta_2) = -p_2(\eta_2 - \eta_1)$.

Введем следующие обозначения:

$$p_{x_1 x_2}(\eta_1, \eta_2) = p_1(\eta_1 - \eta_2), \quad p_{x_2 x_1}(\eta_2, \eta_1) = p_2(\eta_2 - \eta_1).$$

При этом если ковекторы $p_1(\eta_1 - \eta_2)$ и $p_2(\eta_2 - \eta_1)$ определены не однозначно, то всегда будем предполагать их выбранными таким образом, что $p_{x_1 x_2}(\eta_1, \eta_2) = -p_{x_2 x_1}(\eta_2, \eta_1)$. Отметим, что если ковекторы $p_1(\eta_1 - \eta_2)$ и $p_2(\eta_2 - \eta_1)$ определены однозначно, то равенство $p_{x_1 x_2}(\eta_1, \eta_2) = -p_{x_2 x_1}(\eta_2, \eta_1)$ имеет место автоматически. Кроме того, $p_{x_1 x_2}(\eta_1, 0) = p_1(\eta_1)$.

Ковектор $p_{x_1 x_2}(\eta_1, \eta_2)$ назовем ρ -импульсом отрезка $[x_1, x_2]$ в конечной точке x_1 по отношению к векторам $\eta_i \in T_{x_i} \mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}^n$. Отметим, что если направление отрезка $[x_1, x_2]$ соответствует точке гладкости сферы Σ , т.е. в соответствующей точке сферы нормальный конус состоит из одного луча, то ρ -импульс отрезка $[x_1, x_2]$ не зависит от выбора векторов η_i и однозначно определен в каждой из конечных точек x_i . В этом случае, очевидно, $p_{x_1 x_2}(\eta_1, \eta_2)$ совпадает с градиентом функции ρ в точке $x_1 - x_2$.

Отметим, что в новых обозначениях формула из следствия 3.1 записывается в виде

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0+} \ell(t) = \langle p_{x_1 x_2}(\eta_1, \eta_2), \eta_1 \rangle + \langle p_{x_2 x_1}(\eta_2, \eta_1), \eta_2 \rangle.$$

3.2. Устройство экстремальных кривых. Пусть Σ – единичная сфера в нормированном пространстве $(\mathbb{R}^n, \rho)$. Участком уплощения назовем пересечение сферы Σ с некоторой ее опорной гиперплоскостью. Максимальные по включению участки уплощения назовем *компонентами уплощения*. Ясно, что множество всех компонент уплощения образует замкнутое покрытие сферы Σ , инвариантное относительно центральной симметрии. Центральные симметричные компоненты уплощения назовем *противоположными*. Будем говорить, что вектор $x \neq 0$ лежит в участке уплощения, если в этом участке лежит вектор $x/\rho(x)$.

ТЕОРЕМА 3.2. Кривая γ , соединяющая точки A и B в нормированном пространстве $(\mathbb{R}^n, \rho)$, является кратчайшей тогда и только тогда, когда все векторы скорости кривой γ лежат в одной и той же компоненте уплощения. В частности, любой прямолинейный отрезок является кратчайшей кривой.

Кривая является экстремалью функционала нормированной длины тогда и только тогда, когда она – кратчайшая. Кривая является локально кратчайшей тогда и только тогда, когда ее можно покрыть конечным числом

открытых интервалов, замыкание каждого из которых является кратчайшей кривой.

Эта теорема объясняет важность следующего определения. Сеть $\Gamma: G \rightarrow X$ в нормированном пространстве X называется *линейной*, если все ее ребра – прямые линейные отрезки.

§ 4. Линейные сети, экстремальные по отношению к деформациям, сохраняющим топологию

Пусть, как и выше, ρ – некоторая норма на пространстве $\mathbb{R}^n$. В этом параграфе приведем необходимое и достаточное условие экстремальности линейной сети в нормированном пространстве $(\mathbb{R}^n, \rho)$ по отношению к деформациям, сохраняющим топологию сети.

Пусть $\Gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ – произвольная квазирегулярная сеть. Введем следующие обозначения.

Для каждой приведенной компоненты $H \subset \Gamma$ обозначим через E_H и V_H множества ребер и вершин сети H . Через ∂H обозначим множество вершин из H , являющихся граничными в сети Γ . Через $\bar{\partial} H$ обозначим множество вершин из H , инцидентных регулярным ребрам сети Γ . Далее, для каждой вершины $x \in \bar{\partial} H$ обозначим $N_H(x)$ множество регулярных ребер сети Γ , инцидентных x .

Если γ – произвольное ребро, то обозначим через $\partial\gamma$ пару его концевых вершин. Положим $\rho(\{A, B\}) = \rho(B - A)$.

Наконец, для произвольного регулярного ребра $\gamma = [x, y]$ и произвольных векторов $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}^n$ обозначим ρ -импульс $p_{xy}(\eta_1, \eta_2)$ через $p_x(\gamma, \eta_1, \eta_2)$. Напомним, что если ρ -импульс $p_{xy}(\eta_1, \eta_2)$ однозначно не определен, то дополнительно предполагается выполнение условия $p_x(\gamma, \eta_1, \eta_2) = -p_y(\gamma, \eta_2, \eta_1)$. Если ρ -импульс не зависит от векторов η_i (что имеет место, если $\dot{\gamma}$ в вершине x соответствует точке гладкости сферы Σ), то будем обозначать его через $p_x(\gamma)$.

Из следствия 3.1 легко получается следующий результат.

ТЕОРЕМА 4.1 (о локальной структуре). *Пусть $(\mathbb{R}^n, \rho)$ – нормированное пространство. Квазирегулярная линейная сеть $\Gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ с границей β является экстремалью функционала нормированной длины по отношению к деформациям, сохраняющим топологию, если и только если для каждого отображения $\eta: V_G \rightarrow \mathbb{R}^n$, где $\eta(\partial G) = 0$, следующая сумма по всем приведенным компонентам H сети Γ неотрицательна:*

$$\sum_H \left\{ \sum_{x \in \partial H} \left\langle \sum_{\substack{\gamma \in N_H(x) \\ \gamma = [x, y]}} p_x(\gamma, \eta(x), \eta(y)), \eta(x) \right\rangle + \sum_{\gamma \in E_H} \rho(\eta|_{\partial\gamma}) \right\} \geq 0.$$

СЛЕДСТВИЕ 4.1. *В предположениях теоремы 4.1 регулярная линейная сеть $\Gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ с границей β является экстремалью функционала нормированной длины по отношению к деформациям, сохраняющим топологию, если и только если для каждого отображения $\eta: V_G \rightarrow \mathbb{R}^n$, где $\eta(\partial G) = 0$, следующее*

выражение неотрицательно:

$$\sum_x \left\langle \sum_{\gamma=[x,y]} p_x(\gamma, \eta(x), \eta(y)), \eta(x) \right\rangle \geq 0,$$

где сумма берется по всем подвижным вершинам x .

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Если регулярная линейная сеть $\Gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ с границей β является экстремалью функционала нормированной длины по отношению к деформациям, сохраняющим топологию, то для каждой подвижной вершины x сети Γ и каждого вектора η имеет место неравенство

$$\left\langle \sum_{\gamma=[x,y]} p_x(\gamma, \eta, 0), \eta \right\rangle = \left\langle \sum_{\gamma=[x,y]} \xi_y(\eta), \eta \right\rangle \geq 0,$$

где $\xi_y(\eta)$ – субградиент нормы ρ в точке $x-y$, соответствующий вектору η .

Рассмотрим теперь частный случай: пусть функция ρ является гладкой всюду, кроме $0 \in \mathbb{R}^n$. Это равносильно гладкости единичной сферы Σ . Тогда для каждого вектора $x \neq 0$ субградиентное множество $S_\rho(x)$ состоит из одного элемента – градиента функции ρ в точке x , который совпадает с внешней нормалью p к сфере $\rho(x)\Sigma$ в точке x такой, что $\rho^*(p) = 1$. В частности, ρ -импульс произвольного невырожденного ребра не зависит от поля вариации.

СЛЕДСТВИЕ 4.3. Пусть в предположениях теоремы 4.1 сфера Σ является гладкой. Квазирегулярная линейная сеть $\Gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ с границей β экстремальна для функционала нормированной длины по отношению к деформациям, сохраняющим топологию, если и только если для каждой приведенной компоненты H и каждого отображения $\eta: V_H \rightarrow \mathbb{R}^n$, где $\eta(\partial H) = 0$, следующее выражение неотрицательно:

$$\sum_{x \in \partial H} \langle P(x), \eta(x) \rangle + \sum_{\gamma \in E_H} \rho(\eta|_{\partial \gamma}) \geq 0,$$

где $P(x) = \sum_{\gamma \in N_H(x)} p_x(\gamma)$ – суммарный ρ -импульс в x невырожденных ребер, инцидентных x .

Если дополнительно потребовать, чтобы все ребра сети Γ были невырожденными, то критерий еще более упростится.

СЛЕДСТВИЕ 4.4. Пусть в предположениях теоремы 4.1 сфера Σ является гладкой. Тогда регулярная линейная сеть $\Gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ с границей β является экстремалью функционала нормированной длины по отношению к деформациям, сохраняющим топологию, если и только если для каждой подвижной вершины x сети Γ имеет место равенство

$$\sum_{\gamma} p_x(\gamma) = 0,$$

где сумма берется по всем ребрам γ , инцидентным вершине x .

ПРИМЕР. Пусть M – конечное подмножество единичной сферы Σ такое, что любой участок уплощения $D \subset \Sigma$ содержит столько же точек из M , сколько и центрально симметричный ему участок $-D$. Тогда сеть с границей M , все ребра которой – отрезки, соединяющие начало координат с точками из M , является экстремальной сетью по отношению к деформациям, сохраняющим топологию.

Действительно, для доказательства достаточно проверить, что для любого вектора η имеет место неравенство

$$\left\langle \sum_{\gamma=[0,y]} \xi_y(\eta), \eta \right\rangle \geq 0,$$

где y пробегает все точки из M , а $\xi_y(\eta)$ – субградиент нормы ρ в точке $-y$, соответствующий вектору η (см. следствие 4.1). Легко видеть, что во всех точках y из M можно так выбрать субградиенты s_y функции ρ , что их сумма будет равна нулю. С другой стороны, из предложения 2.2 вытекает, что

$$\left\langle \sum_{\gamma=[0,y]} \xi_y(\eta), \eta \right\rangle \geq \left\langle \sum_{\gamma=[0,y]} s_y, \eta \right\rangle = 0,$$

что и завершает доказательство.

Приведем еще один полезный критерий экстремальности линейной квазирегулярной сети Γ по отношению к деформациям, сохраняющим топологию, который обобщает теорему о локальной структуре локально минимальных сетей (см. [12] или [15]). Для этого припишем каждой паре (e, v) , где v – подвижная вершина сети Γ , а e – инцидентное ей ребро, вещественную n -мерную переменную $x_{e,v}$ и рассмотрим линейную систему, состоящую из всех уравнений следующих двух типов:

$$\begin{cases} \sum_{e \ni v} x_{e,v} = 0, & \text{где } v \text{ – подвижная вершина сети } \Gamma, \\ x_{e,v} + x_{e,w} = 0, & \text{где } e = [v, w] \text{ – ребро сети } \Gamma, \\ & v \text{ и } w \text{ – подвижные вершины.} \end{cases}$$

Эту систему назовем *характеристической системой* сети Γ (аналогичная система рассматривалась нами для локально минимальных сетей; см., например, [12] или [15]). Отметим, что эта характеристическая система полностью определяется параметризующим графом G сети Γ .

Далее, по каждому ребру e сети Γ и инцидентной e вершине v построим вектор $n(e, v)$, равный для регулярного ребра e направлению отрезка e , ориентированного в сторону вершины v , и равный нулю для точечного ребра e . Пусть $S_\rho(e, v)$ – субградиентное множество функции ρ в точке $n(e, v)$.

ТЕОРЕМА 4.2. *Квазирегулярная линейная сеть Γ является экстремальной сетью для функционала ρ -нормированной длины по отношению к деформациям, сохраняющим топологию, если и только если существует решение $\{x_{e,v}^0\}$ характеристической системы этой сети такое, что для каждого ребра e из Γ и инцидентной ему вершины v выполняется $x_{e,v}^0 \in S_\rho(e, v)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ – квазирегулярная линейная сеть и $x_v \in \mathbb{R}^n$ – координата ее подвижной вершины v . Обозначим через $V_M(G)$ множество подвижных вершин из G , и пусть m – количество элементов множества $V_M(G)$. Тогда конфигурационное пространство $[G, \partial\Gamma] = \prod_{v \in V_M(G)} \mathbb{R}^n$ всех линейных сетей топологии G с тем же граничным отображением, что и у Γ , изоморфно $\mathbb{R}^{mn}$. Для удобства будем обозначать через $x = (x_v)$ точки из $[G, \partial\Gamma]$, понимая под x_v проекцию вектора $x \in \mathbb{R}^{mn}$ на то $\mathbb{R}^n$, которое соответствует подвижной вершине v . Кроме того, для каждой точки $x \in [G, \partial\Gamma]$ обозначим через $\Gamma_x: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ соответствующую линейную сеть.

Нормированная длина сети Γ задает функцию $\rho^c: [G, \partial\Gamma] \rightarrow \mathbb{R}$, сопоставляющую каждому вектору $x \in [G, \partial\Gamma]$ нормированную длину соответствующей линейной сети Γ_x :

$$\rho^c(x) = \sum_{e=[v,w] \in E(G)} \rho(\Gamma_x(v), \Gamma_x(w)).$$

Так как каждая функция $\rho_{vw}^c(x) = \rho(\Gamma_x(v), \Gamma_x(w))$ выпукла на $[G, \partial\Gamma]$, то функция ρ^c также выпукла. Кроме того, легко видеть, что сеть Γ является экстремалью функционала нормированной длины по отношению к сохраняющим топологию деформациям, если и только если вектор x координат подвижных вершин сети Γ представляет собой точку минимума для функции ρ^c . С другой стороны, по предложению 2.4 сеть Γ_x экстремальна (по отношению к сохраняющим топологию деформациям), если и только если субградиентное множество $S_{\rho^c}(x)$ содержит нуль. В свою очередь, множество $S_{\rho^c}(x)$ является суммой множеств $S_{\rho_{vw}^c}(x)$.

Выясним, как выглядит множество $S_{\rho_{vw}^c}(x)$. По определению, если v и w – подвижные вершины, функция $\rho_{vw}^c(x)$ зависит лишь от x_v и x_w и не зависит от остальных x_u , $u \neq v, w$; если одна из этих вершин, скажем v , подвижна, а другая, w , граничная, то $\rho_{vw}^c(x)$ зависит только от x_v ; наконец, если обе вершины v и w граничные, то функция $\rho_{vw}^c(x)$ постоянна. Отсюда вытекает, что при подвижных вершинах v и w каждый субградиент из $S_{\rho_{vw}^c}(x)$ лежит в линейном подпространстве $V = \mathbb{R}^{2n}(vw) \subset \mathbb{R}^{mn}$, являющемся конфигурационным пространством вершин v и w ; при подвижной v и неподвижной w каждый субградиент из $S_{\rho_{vw}^c}(x)$ лежит в линейном подпространстве $V = \mathbb{R}^n(v) \subset \mathbb{R}^{mn}$, являющемся конфигурационным пространством вершины v ; если же обе вершины v и w неподвижны, то $S_{\rho_{vw}^c}(x) = \{0\}$. В связи с вышесказанным для описания субградиентного множества функции ρ_{vw}^c достаточно изучить ее ограничение на соответствующее пространство V . Это ограничение будем обозначать тем же символом.

Если вершина v подвижна, а w – неподвижна, то, как было выяснено выше, субградиентное множество $S_{\rho_{vw}^c}(x) \subset V = \mathbb{R}^n(v) \approx \mathbb{R}^n$ представляет собой множество всех единичных по конорме внешних нормалей к сфере $\{y \in V \mid \rho(y) = \rho(x_v)\}$ в точке $x_w - x_v$, если $x_v \neq x_w$ (здесь после соответствующих отождествлений мы рассматриваем обе точки x_v и x_w как точки пространства V), и множество всех векторов в точке 0, конорма которых не превосходит 1, если $x_v = x_w$.

Таким образом, осталось выяснить, как выглядит множество $S_{\rho_{vw}^c}(x) \subset V = \mathbb{R}^{2n}(vw) \approx \mathbb{R}^{2n}$, когда обе точки v и w подвижны. В этом случае функция $\rho_{vw}^c(a, b)$ на V равна $\rho(a - b)$. Ясно, что множество $\rho_{vw}^c = 0$ представляет собой диагональ

$\Delta = \{(a, b) \in \mathbb{R}^{2n} \mid a = b\}$, и для любого $(a, b) \in V$ ограничение функции ρ_{vw}^c на аффинное пространство $(a, b) + \Delta$ постоянно.

Пусть $\Delta^\perp$ обозначает ортогональное дополнение к Δ (относительно стандартного евклидова скалярного произведения); тогда, очевидно,

$$\Delta^\perp = \{(a, -a) \mid a \in \mathbb{R}^n\}.$$

Так как для каждой точки (a, b) множество $(a, b) + \Delta$ лежит во множестве уровня $r_{vw}^c = r_{vw}^c(a, b)$, то нормальный конус к этому множеству уровня, а значит, и субградиентное множество $S_{\rho_{vw}^c}(a, b)$ лежат в $\Delta^\perp$. Более того, множество $S_{\rho_{vw}^c}(a, b)$ совпадает с субградиентным множеством S' ограничения функции ρ_{vw}^c на $(a, b) + \Delta^\perp = \{(a+c, b-c) \mid c \in \mathbb{R}^n\}$. По определению это ограничение равно $\rho(a-b+2c)$, поэтому S' равно субградиентному множеству $S_\rho(a-b)$. Отсюда заключаем, что субградиентное множество $S_{\rho_{vw}^c}(a, b)$ имеет вид

$$S_{\rho_{vw}^c}(a, b) = \{(\xi, -\xi) \mid \xi \in S_\rho(a-b)\}.$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.1. *Пусть v и w – подвижные вершины графа G . Субградиентное множество функции $\rho_{vw}^c: \mathbb{R}^{mn} \rightarrow \mathbb{R}$ в точке x имеет вид*

$$\{(\xi_u) \mid \xi_u = 0 \text{ при } u \neq v, w; \xi_v = -\xi_w; \xi_v \in S_\rho(x_v - x_w)\}.$$

Теперь теорема 4.2 вытекает из предложения 2.3, которое дает возможность вычислить субградиентное множество функции ρ^c , и предложения 2.4.

В качестве первого приложения выясним, когда экстремальное дерево, затягивающее три произвольные точки нормированного пространства, является бинарным деревом, т.е. имеет внутреннюю вершину (аналог точки Торричелли–Штейнера).

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.2. *Пусть $A_0A_1A_2$ – произвольный треугольник в пространстве $(\mathbb{R}^n, \rho)$. Тогда множество $\mathcal{T}$ всех точек T , для которых выражение $\sum_i \rho(T - A_i)$ принимает наименьшее значение, является выпуклым компактом, лежащим в треугольнике $A_0A_1A_2$. Множество $\mathcal{T}$ содержит вершину A_i , если и только если в субградиентных множествах $S_\rho(A_i - A_j)$, $j \neq i$, найдутся такие ко векторы, что конорма их суммы не превосходит 1.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $f(T)$ функцию $\sum_i \rho(T - A_i)$. Так как f – выпуклая функция, неограниченно возрастающая при стремлении T к бесконечности по любому направлению, множество ее минимумов не пусто, ограничено, замкнуто и выпукло, что доказывает первую часть утверждения.

Далее, предположим что A_0 принадлежит $\mathcal{T}$, т.е. сеть Γ , состоящая из трех ребер $e_i = A_iT$, соединяющих подвижную вершину T с граничными вершинами A_i , является экстремальной для $T = A_0$ по отношению к деформациям, сохраняющим топологию этой сети. По теореме 4.2 это равносильно тому, что характеристическая система сети Γ , состоящая в данном случае из одного уравнения $X_{e_1, T} +$

$X_{e_2, T} + X_{e_3, T} = 0$, имеет решение $X_{e_j, T} = p_j$ такое, что $p_j \in S_\rho(e_i, T) = S_\rho(T - A_j)$. Осталось заметить, что

$$S_\rho(e_0, T) = S_\rho(0) = \{p \in T_{A_0}^*(\mathbb{R}^n) \mid \rho^*(p) \leq 1\}.$$

Доказательство закончено.

СЛЕДСТВИЕ 4.5. Пусть норма ρ строго выпукла. Тогда для произвольного равностороннего треугольника $A_0 A_1 A_2$ в пространстве $(\mathbb{R}^n, \rho)$ множество $\mathcal{T}$ всех точек T , для которых выражение $\sum_i \rho(T - A_i)$ принимает наименьшее значение, не содержит вершин A_i треугольника.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, точки A_i не лежат на одной прямой. Рассмотрим двумерную плоскость Π , проходящую через A_i . Хотя множество $\mathcal{T}$ и не обязательно лежит в Π , для доказательства следствия нам достаточно рассмотреть множество $\mathcal{T} \cap \Pi$, поэтому можно сразу предполагать, что $n = 2$. Кроме того, без ограничения общности можно предполагать, что $\rho(A_i, A_j) = 1$ при $i \neq j$, а $A_0 = 0$ — начало координат.

Предположим, что точка $A_0 = 0$ попала во множество $\mathcal{T}$. По утверждению 4.2 это равносильно тому, что для некоторых субградиентов из $S_\rho(-A_j)$, $j \neq 0$, норма их суммы не превосходит 1. Последнее, в силу центральной симметричности единичной окружности, равносильно тому, что для некоторых субградиентов p_j из $S_\rho(A_j)$, $j \neq 0$, конорма их суммы не превосходит 1.

Легко видеть, что точки A_1, A_2 , а также $-A_1, -A_2$ и $\pm(A_1 - A_2)$ лежат на единичной окружности Σ и образуют равносторонний в смысле нормы ρ шестиугольник, противоположные стороны которого параллельны и, значит, равны также и относительно евклидовой нормы.

Оценим снизу величину $\rho^*(p_1 + p_2)$. По определению

$$\rho^*(p_1 + p_2) \geq (p_1 + p_2)(A_1) = \rho_{A_1}(A_1) + \rho_{A_1}(A_2) = 1 + \rho_{A_1}(A_2),$$

где $\rho_\eta(A)$ — производная нормы ρ по направлению η , вычисленная в точке A . Покажем, что $\rho_{A_1}(A_2) > 0$, получив тем самым противоречие и закончив доказательство следствия.

Ясно, что условие $\rho_{A_1}(A_2) > 0$ равносильно тому, что вектор A_1 составляет с каждым субградиентом из $S_\rho(A_2)$ острый в евклидовом смысле угол. Последнее равносильно тому, что вектор A_1 направлен внутрь полуплоскости, ограниченной каждой опорной прямой к окружности Σ в точке A_2 , а это, в свою очередь, равносильно тому, что прямая ℓ , проходящая через точку A_2 в направлении вектора A_1 , не является опорной для окружности Σ . Заметим, что $\ell = (A_2 - A_1, A_2)$. В силу строгой выпуклости нормы ρ интервал $(A_2 - A_1, A_2)$ лежит внутри единичного круга, ограниченного окружностью Σ . Поэтому прямая ℓ не является опорной. Следствие доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Если отказаться от условия строгой выпуклости нормы, то следствие 4.5 перестает быть верным. В качестве примера рассмотрим плоскость с манхеттенской нормой, а на ней – правильный треугольник $A_0A_1A_2$, одна сторона которого, скажем A_0A_1 , параллельна оси абсцисс, а другая, скажем A_0A_2 , – оси ординат. Тогда, очевидно, множество $\mathcal{T}$ всех точек T , для которых выражение $\sum_i \rho(T - A_i)$ принимает наименьшее значение, состоит из единственной точки $T = A_0$.

Если функция ρ , задающая норму, является гладкой всюду, кроме точки 0, т.е. единичная сфера Σ не имеет особых точек, то характеристическая система выглядит более просто. Действительно, для каждого регулярного ребра $e = [v, w]$ сети Γ субградиентные множества $S_\rho(e, v)$ и $S_\rho(e, w)$ определены однозначно, поэтому однозначно определены значения переменных $x_{e,v}$. Подставляя их в характеристическую систему, получим следующий набор условий: для каждой невырожденной вершины x сети Γ сумма субградиентов $S_\rho(e, x)$ равна нулю, а для каждой вырожденной вершины возникает своя линейная система уравнений – аналог характеристической системы, определенной в [12] для локально минимальных сетей. Отметим, что эти системы независимы для разных вырожденных вершин.

§ 5. Линейные сети, экстремальные по отношению к деформациям с расщеплением

По определению сеть Γ экстремальна (по отношению к деформациям с расщеплением), если и только если любой ее представитель, т.е. любая проектирующаяся на Γ сеть Γ' , экстремален по отношению к деформациям сети Γ' , сохраняющим топологию и регулярным всюду, кроме, быть может, начальной точки. Поэтому проверка экстремальности Γ может быть сведена к проверке экстремальности с сохранением топологии бесконечного числа сетей (например, с помощью теоремы 4.2). Тем не менее, оказывается, эту проверку достаточно провести лишь для конечного числа представителей исходной сети. Напомним, что в случае стандартной евклидовой нормы (см., например, [12] или [15]) достаточно рассматривать лишь тех представителей, каждый из которых задает расщепление ровно одной вершины на две, причем одна из полученных вершин имеет степень 3. В случае нормы общего вида, последнее не имеет места, более того, недостаточной оказывается даже проверка всевозможных расщеплений каждой вершины на две.

ПРИМЕР 5.1. Рассмотрим на плоскости $\mathbb{R}^2$ норму ρ , единичная окружность Σ которой совпадает с правильным шестиугольником

$$\left\{ P_k = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{i\frac{\pi}{3}(k-1)} \right\}_{k=1}^6,$$

описанным вокруг евклидовой единичной окружности S^1 так, что пара его вершин лежит на оси абсцисс. Легко видеть, что единичная окружность относительно нормы ρ^* представляет собой правильный шестиугольник с вершинами в серединах сторон шестиугольника Σ .

Рассмотрим сеть Υ , состоящую из пяти ребер $\gamma_k = OP_k$, $k = 1, \dots, 5$. Сеть Υ не является экстремальной сетью для ρ -нормированной длины (по отношению к

деформациям с расщеплением). Действительно, рассмотрим представителя Γ' сети Υ , единственная вырожденная компонента которого представляет собой путь x_1x_2, x_2x_3 , причем вершина x_1 инцидентна ребрам γ_4 и γ_5 , вершина x_2 инцидентна ребру γ_3 , а вершина x_3 – ребрам γ_1 и γ_2 (см. рис. 3). Рассмотрим линейную деформацию сети Γ' , при которой вершина x_1 движется со скоростью $\eta_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}(-1, 0)$, вершина x_2 – со скоростью $\eta_2 = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, 1)$ и вершина x_3 – со скоростью $\eta_3 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, 1)$. Отметим, что векторы η_i имеют единичную норму. В соответствии с теоремой 4.1, так как следующее выражение отрицательно:

$$\begin{aligned} & \langle p_{x_1}(\gamma_5, \eta_1, 0) + p_{x_1}(\gamma_4, \eta_1, 0), \eta_1 \rangle + \langle p_{x_2}(\gamma_3, \eta_2, 0), \eta_2 \rangle \\ & + \langle p_{x_3}(\gamma_2, \eta_3, 0) + p_{x_3}(\gamma_1, \eta_3, 0), \eta_3 \rangle + \rho(\eta_1 - \eta_2) + \rho(\eta_2 - \eta_3) \\ & = 0 - 1 - 1 - 1 + 0 + 1 + 1 = -1, \end{aligned}$$

сеть Υ не является экстремальной.

Рис. 3. Расщепление вершины степени 5

Рассмотрим теперь всевозможные расщепления вершины степени 5 сети Υ на две вершины x_1 и x_2 так, чтобы каждая из x_i имела бы в полученной сети Γ' степень не меньше 3. Единственное точечное ребро сети Γ' обозначим через γ . Нетрудно понять, что, с точностью до симметрии, имеется шесть таких различных расщеплений. С помощью теоремы 4.2 можно показать, что каждый из этих шести представителей является экстремальной сетью. Соответствующие выкладки можно найти в [16]. Здесь мы разберем только один случай.

Пусть, например, вершина x_1 инцидентна ребрам γ_5 и γ_4 , а вершина x_2 – ребрам γ_1 , γ_2 и γ_3 . Запишем характеристическую систему для сети Γ' . Для $i = 1, \dots, 5$ положим $y_i = x_{\gamma_i, x_j}$, где x_j – подвижная вершина, инцидентная ребру γ_i (отметим, что x_j однозначно определяется ребром γ_i в силу топологии сети Γ'); также положим $y = x_{\gamma, x_1}$, а $y' = x_{\gamma, x_2}$. Характеристическая система имеет вид

$$\begin{cases} y_5 + y_4 + y = 0 \\ y_3 + y_2 + y_1 + y' = 0 \\ y + y' = 0. \end{cases}$$

Предъявим решение этой системы, удовлетворяющее условиям теоремы 4.2:

$$y_1 = e^{i\frac{5\pi}{6}}, \quad y_2 = e^{-i\frac{5\pi}{6}}, \quad y_3 = e^{-i\frac{\pi}{6}}, \quad y_4 = e^{-i\frac{\pi}{6}}, \quad y_5 = e^{i\frac{\pi}{2}}, \quad y = -y' = e^{-i\frac{5\pi}{6}}.$$

Таким образом, сеть Γ' экстремальна. Остальные возможности разбираются аналогично (см. [16]).

Итак, хотя сеть Υ не является экстремалью нормированной длины, тем не менее, это “чувствует” лишь деформация, расщепляющая вершину степени 5 на три вершины; деформации, расщепляющие эту вершину на две вершины, неэкстремальность не обнаруживают.

Следующий пример показывает, что при изучении экстремальности сети недостаточно проверять “устойчивость” всех вершин по отдельности, т.е. экстремальность всех представителей, каждый из которых имеет лишь одну вырожденную компоненту.

ПРИМЕР 5.2. Рассмотрим норму ρ из предыдущего примера. Пусть Υ – линейная сеть, имеющая шесть граничных вершин: $P_1 = 1 + e^{-i\pi/3}$, $P_2 = 2$, $P_3 = 1 + e^{i\pi/3}$, $P_4 = -1 + e^{i2\pi/3}$, $P_5 = -2$, $P_6 = -1 + e^{-i2\pi/3}$, две подвижных вершины: $Q_1 = 1$ и $Q_2 = -1$, и следующие ребра: $\gamma_i = Q_1 P_i$, $i = 1, 2, 3$; $\gamma_i = Q_2 P_i$, $i = 4, 5, 6$; $\gamma = Q_1 Q_2$.

Сеть Υ не является экстремальной сетью для ρ -нормированной длины. Действительно, рассмотрим представителя Γ' сети Υ , имеющего две вырожденные компоненты: первая совпадает с ребром $x_1 x_2$, которое отображается в точку Q_1 , причем вершина x_1 инцидентна ребрам γ_1 и γ_2 , а вершина x_2 – ребрам γ_3 и γ ; вторая компонента совпадает с ребром $x_3 x_4$, которое отображается в точку Q_2 , причем вершина x_3 инцидентна ребрам γ и γ_4 , вершина x_4 – ребрам γ_5 и γ_6 (см. рис. 4). Рассмотрим линейную деформацию сети Γ' , при которой вершина x_1 движется со скоростью $\eta_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}(1, 0)$, вершина x_2 – со скоростью $\eta_2 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, 1)$, вершина x_3 – со скоростью $\eta_3 = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, 1)$, а вершина x_4 – со скоростью $\eta_4 = \frac{2}{\sqrt{3}}(-1, 0)$. Отметим, что векторы η_i имеют единичную норму. В соответствии с теоремой 4.1, если сеть Γ' экстремальна, следующее выражение неотрицательно:

$$\begin{aligned} & \langle p_{x_1}(\gamma_1, \eta_1, 0) + p_{x_1}(\gamma_2, \eta_1, 0), \eta_1 \rangle + \langle p_{x_2}(\gamma_3, \eta_2, 0) + p_{x_2}(\gamma, \eta_2, \eta_3), \eta_2 \rangle \\ & + \langle p_{x_3}(\gamma_4, \eta_3, 0) + p_{x_3}(\gamma, \eta_3, \eta_2), \eta_3 \rangle + \langle p_{x_4}(\gamma_5, \eta_4, 0) + p_{x_4}(\gamma_6, \eta_4, 0), \eta_4 \rangle \\ & + \rho(\eta_1 - \eta_2) + \rho(\eta_4 - \eta_3) \\ & = 0 - 1 - 1 + \langle p_{x_2}(\gamma, \eta_2, \eta_3), \eta_2 \rangle - 1 + \langle p_{x_3}(\gamma, \eta_3, \eta_2), \eta_3 \rangle - 1 + 0 + 1 + 1 \\ & = -2 + \langle p_{x_2}(\gamma, \eta_2, \eta_3), \eta_2 - \eta_3 \rangle = -2 + 1 = -1. \end{aligned}$$

Таким образом, сеть Υ не является экстремальной.

Проверка того факта, что каждое расщепление сети Υ , содержащее ровно одну компоненту вырождения, является экстремальным, может быть проведена с помощью техники, продемонстрированной нами в предыдущем примере.

Построим набор представителей, из экстремальности которых вытекает экстремальность сети. Другими словами, опишем те расщепления, для которых достаточно проверить экстремальность.

Рис. 4. Сеть, длина которой уменьшается лишь при расщеплении сразу двух ее вершин

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Представитель Γ сети Υ назовем *базовым*, если локальная сеть T каждой его вырожденной компоненты H является бинарным деревом. При этом если H соответствует внутренней вершине сети Υ , то все вершины степени 1 дерева T не принадлежат H . Если же H соответствует граничной вершине сети Υ , то H содержит ровно одну вершину v дерева T степени 1, причем в этом случае $\partial H = \{v\}$.

Заметим, что каждая сеть Υ имеет конечное число базовых представителей.

ТЕОРЕМА 5.1. *Линейная сеть Υ представляет собой экстремаль функционала нормированной длины в пространстве $(\mathbb{R}^n, \rho)$ (по отношению к деформациям с расщеплением), если и только если каждый базовый представитель $\Gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ сети Υ является экстремальной сетью.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость экстремальности базовых представителей очевидна из определения экстремальности сети. Перейдем к доказательству достаточности.

Пусть Γ – произвольный представитель сети Υ . Так как вклад любого вырожденного ребра в формулу первой вариации нормированной длины сети неотрицателен, то из экстремальности всех представителей, вырожденные компоненты которых являются деревьями, вытекает экстремальность вообще всех представителей, т.е. экстремальность сети Υ . Таким образом, можно предполагать, что все приведенные компоненты представителя Γ – деревья.

Далее, из тех же соображений можно предполагать без ограничения общности, что все вершины степени 1 представителя Γ являются граничными.

Нам понадобится следующая лемма.

ЛЕММА 5.1. *Пусть f и g – непрерывные функции на прямой, причем $f(0) = g(0)$, $f(t) \geq g(t)$ при $t \geq 0$, и обе функции имеют производные $D_+f(0)$ и $D_+g(0)$ по множеству $[0, +\infty)$ при $t = 0$. Тогда $D_+f(0) \geq D_-g(0)$.*

Из этой леммы вытекает следующий результат.

ЛЕММА 5.2. *Если любой представитель Γ сети Υ такой, что каждая вершина любой его вырожденной компоненты имеет в Γ степень, отличную от 2, экстремален, то сеть Υ экстремальна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если пару ребер сети, стыкующуюся в вершине степени 2, заменить на прямолинейный отрезок, то длина сети не увеличится в силу неравенства треугольника. Остается воспользоваться леммой 5.1. Доказательство закончено.

Нам также понадобятся следующие леммы.

ЛЕММА 5.3. *Предположим, что сеть Γ' можно слабо спроектировать на сеть Γ'' . Тогда экстремальность сети Γ' влечет экстремальность сети Γ'' .*

ЛЕММА 5.4. *Пусть Γ – представитель сети Υ такой, что:*

- 1) *каждая вырожденная компонента сети Γ представляет собой дерево;*
- 2) *каждая вершина степени 1 сети Γ является граничной;*
- 3) *каждая вершина любой вырожденной компоненты сети Γ имеет в Γ отличную от 2 степень.*

Тогда существует базовый представитель Γ' , проектирующийся на Γ .

Теперь утверждение теоремы 5.1 вытекает из лемм 5.3 и 5.4. Доказательство закончено.

В качестве простейшего приложения выясним, когда экстремальное дерево, затягивающее произвольные три точки в нормированном пространстве $(\mathbb{R}^n, \rho)$, имеет внутреннюю вершину. Из теоремы 5.1 и утверждения 4.2 вытекает следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 5.1. *Экстремальное дерево, затягивающее произвольные три точки A_i в нормированном пространстве $(\mathbb{R}^n, \rho)$, имеет внутреннюю вершину, если и только если в каждой точке A_i конорма суммы любого субградиента из $S_\rho(A_i - A_j)$ с любым субградиентом из $S_\rho(A_i - A_k)$, $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, строго больше 1.*

Для случая строго выпуклых норм с помощью следствия 4.5 получаем

СЛЕДСТВИЕ 5.2. *Пусть норма ρ строго выпукла. Тогда экстремальное дерево, затягивающее вершины произвольного равностороннего треугольника в нормированном пространстве $(\mathbb{R}^n, \rho)$, имеет внутреннюю вершину, т.е. является бинарным деревом.*

Как видно из замечания 4.1, отказаться от требования строгой выпуклости нормы в следствии 5.2 нельзя.

Если норма ρ гладкая всюду, кроме $0 \in \mathbb{R}^n$, то из следствия 4.3 вытекает следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 5.3. Пусть $(\mathbb{R}^n, \rho)$ – нормированное пространство и норма ρ гладкая всюду, кроме $0 \in \mathbb{R}^n$. Линейная сеть Υ представляет собой экстремаль функционала нормированной длины (по отношению к деформациям с расщеплением), если и только если каждый базовый представитель $\Gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ сети Υ , имеющий не более одной вырожденной компоненты, является экстремальной сетью (по отношению к деформациям, сохраняющим его топологию).

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. На самом деле, случай нормы ρ , гладкой всюду, кроме нуля, обслуживается результатами из работы авторов [17]. А именно, имеет место следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 5.4. Сеть Υ является экстремалью функционала ρ -нормированной длины для нормы ρ , гладкой всюду вне нуля, если и только если выполняются следующие условия:

- 1) каждое ребро γ сети Υ является кратчайшей кривой (устройство таких кривых описано в теореме 3.2);
- 2) в каждой вершине x сети Υ для любых инцидентных x ребер $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ конорма суммы ρ -импульсов $p_x(\gamma_i)$ не превосходит 1;
- 3) в каждой подвижной вершине сети Υ сумма ρ -импульсов инцидентных этой вершине ребер равна нулю.

Как видно из следствия 5.4, для нормы, гладкой всюду, кроме нуля, условия экстремальности носят локальный характер. Последнее означает, что для проверки экстремальности сети, составленной из кратчайших кривых, достаточно проверить, что эти кривые стыкуются в вершинах по определенному правилу.

§ 6. Устойчивость экстремального бинарного дерева при деформациях граничного множества

В этом параграфе будем предполагать, что норма ρ дифференцируема всюду вне $0 \in \mathbb{R}^n$ и что сфера Σ является строго выпуклой.

Пусть $Y = \{y_i\}_{i=1}^p$ – конечное подмножество пространства $(\mathbb{R}^n, \rho)$. Будем говорить, что множество $Y' = \{y'_i\}_{i=1}^p$ точек пространства получено из Y ε -деформацией, если $\rho(y_i, y'_i) < \varepsilon$ для всех $i = 1, \dots, p$.

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть ρ – гладкая вне нуля норма в $\mathbb{R}^n$ со строго выпуклой сферой и Υ_0 – бинарное дерево, экстремальное относительно функционала ρ -нормированной длины (по отношению к деформациям, сохраняющим топологию), и пусть граничное множество $\partial\Upsilon_0$ совпадает с множеством вершин дерева Υ_0 степени 1. Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что каждое множество, полученное из $\partial\Upsilon_0$ произвольной ε -деформацией, может быть затянута единственной экстремальной сетью того же типа, что и Υ_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Υ – произвольное линейное дерево типа Υ_0 . Обозначим через $y_1, \dots, y_p$ граничные вершины дерева Υ , а через $x_1, \dots, x_k$ – его подвижные вершины. Рассмотрим отображение Φ из конфигурационного пространства $\mathbb{R}^{n(p+k)}$ всех вершин линейных сетей типа Υ_0 в пространство $\mathbb{R}^{nk}$, ставящее

в соответствие каждой точке $(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_p)$ из $\mathbb{R}^{n(p+k)}$ набор $(p_1, \dots, p_k)$ ковекторов $p_i \in \mathbb{R}^n$, где p_i равен сумме ρ -импульсов в вершине x_i ребер γ_{ji} , инцидентных x_i :

$$\Phi: (x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_p) \mapsto \left(\sum_j p_{x_1}(\gamma_{j1}), \dots, \sum_j p_{x_k}(\gamma_{jk}) \right).$$

В силу следствия 4.4 регулярные линейные сети топологии Υ_0 , экстремальные по отношению к функционалу ρ -нормированной длины, соответствуют нулям отображения Φ . Если обозначить через $(X_0, Y_0) = (x_1^0, \dots, x_k^0, y_1^0, \dots, y_p^0)$ вектор, соответствующий вершинам дерева Υ_0 , то по условию $\Phi(X_0, Y_0) = 0$. Для доказательства теоремы достаточно показать, что уравнение $\Phi(X, Y) = 0$ разрешимо для $Y \in \mathbb{R}^{np}$, достаточно близких к Y_0 , и для каждого такого Y решение единственно. Для этого мы воспользуемся теоремой о неявной функции.

Норма ρ предполагается гладкой вне нуля, поэтому если положить $\gamma_{ji} = x_i z_j$, z_j – соответствующая вершина линейной сети, то ρ -импульс $p_{x_i}(\gamma_{ji})$ – это обычный дифференциал функции ρ в соответствующей точке: $p_{x_i}(\gamma_{ji}) = d\rho(x_i - z_j)$. Обозначим через $N(x_i)$ множество вершин сети Υ , смежных с x_i . Тогда отображение Φ можно переписать в виде

$$\Phi: (X, Y) \mapsto \left(\sum_{z_j \in N(x_1)} d\rho(x_1 - z_j), \dots, \sum_{z_j \in N(x_k)} d\rho(x_k - z_j) \right).$$

Для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что квадратная матрица $\partial\Phi/\partial X$ невырождена в точке (X_0, Y_0) . Пусть $\ell(X)$ обозначает ρ -длину сети Υ такой, что $Y = Y_0$, т.е. линейной сети типа Υ_0 , положения подвижных вершин которой задаются вектором X , а граница совпадает с границей сети Υ_0 . Тогда $\Phi(X, Y) = d\ell(X)$. Поэтому $\partial\Phi/\partial X = d^2\ell(X)$. Таким образом, для завершения доказательства достаточно проверить положительную определенность второго дифференциала $d^2\ell(X)$, т.е. что квадратичная форма $d^2\ell(X)(\eta, \eta)$ неотрицательна и равна нулю тогда и только тогда, когда $\eta = 0$.

Так как ρ -длина сети равна сумме ρ -длин ее ребер, квадратичная форма $d^2\ell(X)(\eta, \eta)$ распадается в сумму квадратичных форм, каждая из которых отвечает длине соответствующего ребра:

$$d^2\ell(X)(\eta, \eta) = \sum d^2\rho(x_i - x_j)(\eta_i - \eta_j, \eta_i - \eta_j) + \sum d^2\rho(x_i - y_j)(\eta_i, \eta_i),$$

где η_i – значение поля деформации η в вершине x_i , а суммирование в первой сумме ведется по всем ребрам вида $x_i x_j$, а во второй – по всем ребрам вида $x_i y_j$.

ЛЕММА 6.1. *В предположениях теоремы пусть $[a, b]$ – произвольный невырожденный отрезок в $(\mathbb{R}^n, \rho)$, а ξ и η – произвольные векторы. Рассмотрим деформацию отрезка $[a, b]$ следующего вида: $[a_t, b_t] = [a + t\xi, b + t\eta]$. Тогда*

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} \rho(b_t - a_t) \geq 0,$$

причем равенство достигается, если и только если вектор $\xi - \eta$ коллинеарен $b - a$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из выпуклости нормы ρ вытекает, что второй дифференциал $d^2\rho$ в точке $b - a \neq 0$ неотрицательно определен. Из строгой выпуклости единичной сферы Σ вытекает, что ядро этого второго дифференциала одномерно, поэтому оно совпадает с подпространством, натянутым на вектор $b - a$. Наконец,

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} \rho(b_t - a_t) = d^2\rho(\eta - \xi, \eta - \xi),$$

где билинейная форма $d^2\rho$ вычисляется в точке $b - a$, поэтому равенство нулю достигается тогда и только тогда, когда $\eta - \xi$ лежит в ядре для $d^2\rho$, т.е. в подпространстве, натянутом на $b - a$. Доказательство закончено.

Из леммы 6.1 вытекает, что форма $d^2\ell(X)(\eta, \eta)$ неотрицательно определена, и равенство нулю достигается тогда и только тогда, когда для каждого ребра вида $x_i x_j$ выполняется

$$d^2\rho(x_i - x_j)(\eta_i - \eta_j, \eta_i - \eta_j) = 0$$

и для каждого ребра вида $x_i y_j$ выполняется

$$d^2\rho(x_i - y_j)(\eta_i, \eta_i) = 0.$$

Последнее в силу леммы 6.1 равносильно тому, что для каждого ребра $x_i x_j$ вектор $\eta_i - \eta_j$ коллинеарен вектору $x_i - x_j$, а для каждого ребра $x_i y_j$ вектор η_i коллинеарен вектору $x_i - y_j$. Так как в каждой подвижной вершине сети Υ_0 сумма ρ -импульсов инцидентных этой вершине ребер равна нулю, а степень каждой такой вершины равна 3, то среди этих ребер нет параллельных. Отсюда легко получить, что вектор η , для которого все выражения

$$d^2\rho(x_i - x_j)(\eta_i - \eta_j, \eta_i - \eta_j) \quad \text{и} \quad d^2\rho(x_i - y_j)(\eta_i, \eta_i)$$

равны нулю, сам равен нулю (подробности см. в [14]). Теорема доказана.

§ 7. Плоские нормы со строго выпуклыми гладкими окружностями

Пусть $(\mathbb{R}^n, \rho)$ – нормированное пространство, для которого функция ρ является гладкой всюду, кроме $0 \in \mathbb{R}^n$. Как известно, в этом случае критерии экстремальности, полученные ранее для произвольных норм, сильно упрощаются (см. следствие 5.4). Однако, оказывается, этот критерий можно сформулировать на более геометрическом языке, явно описав правила стыковки ребер в вершинах экстремальной сети. Для простоты будем предполагать, что $n = 2$, а норма ρ строго выпукла, хотя аналогичные результаты могут быть получены как для произвольной размерности, так и без предположения строгой выпуклости.

7.1. Критерий экстремальности сетей по отношению к деформациям с расщеплением. Основным результатом этого пункта является следующий геометрический критерий экстремальности.

ТЕОРЕМА 7.1. Пусть $(\mathbb{R}^2, \rho)$ – нормированная плоскость такая, что норма ρ – гладкая всюду вне нуля, и окружность Σ строго выпукла. Сеть Υ является экстремалью функционала нормированной длины (по отношению к деформациям с расщеплениями), если и только если для Υ одновременно выполнены следующие условия:

- 1) сеть Υ – линейна;
- 2) степень каждой вершины не превосходит трех;
- 3) в каждой вершине степени 3 сумма ρ -импульсов инцидентных ей ребер равна нулю;
- 4) в каждой подвижной вершине степени 2 угол между инцидентными ей ребрами равен 180° ;
- 5) в каждой граничной вершине степени 2 сумма ρ -импульсов инцидентных ей ребер имеет конорму, не превосходящую 1;
- 6) каждая вершина степени 1 является граничной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Υ – экстремальная сеть. Так как норма ρ строго выпукла, все экстремальные кривые для этой нормы – отрезки прямых, поэтому Υ – линейная сеть.

Далее, рассмотрим представителя Γ сети Υ , содержащего ровно одну вырожденную компоненту H , соответствующую вершине x степени не меньше 2. Будем предполагать, что H состоит из одного ребра, соединяющего в Γ две вершины v и v' такие, что вершина v подвижна и ее степень в Γ равна 3. Пусть γ_1 и γ_2 – невырожденные ребра сети Γ , инцидентные v . Воспользуемся следствием 4.3. Выберем поле деформации η равным нулю в v' и η_0 в v . Тогда

$$\langle p_x(\gamma_1) + p_x(\gamma_2), \eta_0 \rangle + \rho(\eta_0) \geq 0,$$

поэтому в силу произвольности выбора η_0 имеем

$$\rho^*(p_x(\gamma_1) + p_x(\gamma_2)) \leq 1.$$

Итак, доказана следующая лемма.

ЛЕММА 7.1. В силу сделанных предположений для любой вершины x сети Υ , имеющей в Υ степень не меньше 2, и любых двух инцидентных x ребер γ_1 и γ_2 сумма импульсов $p_x(\gamma_1) + p_x(\gamma_2)$ лежит в единичном относительно конормы ρ^* круге $\{\xi \mid \rho^*(\xi) \leq 1\}$.

Напомним, что ρ -импульсы имеют единичную конорму, т.е. лежат на окружности $\Sigma^* = \{\xi \mid \rho^*(\xi) = 1\}$. Поэтому из леммы 7.1 вытекает, что если α – угол между коекторами $p_1 = p_x(\gamma_1)$ и $p_2 = p_x(\gamma_2)$, а $n_x(\gamma_i)$ – внешняя нормаль к Σ^* в точке $p_x(\gamma_i)$, то угол β между $n_x(\gamma_1)$ и $n_x(\gamma_2)$ строго больше $\pi - \alpha$. Действительно, так как сумма $p = p_1 + p_2$ лежит в круге, ограниченном окружностью Σ^* , и окружность Σ^* строго выпукла, то угол β строго больше угла между внешними нормалью к сторонам p_1p и p_2p параллелограмма Op_1pp_2 , где O – центр окружности Σ^* .

Итак, доказана следующая лемма.

ЛЕММА 7.2. В силу сделанных предположений для любой вершины x сети Υ , имеющей в Υ степень не меньше 2, и любых двух инцидентных x ребер γ_1 и γ_2 угол β между внешними нормальными к окружности Σ^* в точках $p_x(\gamma_1)$ и $p_x(\gamma_2)$ строго больше $\pi - \alpha$, где α – угол между ковекторами $p_x(\gamma_1)$ и $p_x(\gamma_2)$.

Пусть $\gamma_0, \dots, \gamma_{k-1}$ – ребра сети Υ , инцидентные x , занумерованные в соответствии с обходом вокруг вершины x . Обозначим через α_i угол между $p_x(\gamma_i)$ и $p_x(\gamma_{i+1})$, где сложение в индексах понимается по модулю k . Тогда $\sum_i \alpha_i = 2\pi$. Далее, пусть β_i обозначает угол между внешними нормальными $n_x(\gamma_i)$ и $n_x(\gamma_{i+1})$ к окружности S^* в точках $p_x(\gamma_i)$ и $p_x(\gamma_{i+1})$. Тогда $\sum_i \beta_i = 2\pi$. С другой стороны, в силу леммы 7.2

$$2\pi = \sum_{i=0}^{k-1} \beta_i > \sum_{i=0}^{k-1} (\pi - \alpha_i) = k\pi - 2\pi,$$

поэтому $k < 4$. Таким образом, мы доказали, что степень любой вершины сети Υ не превосходит 3.

Далее, из экстремальности представителя сети Υ , не содержащего вырожденные ребра, и следствия 4.4 вытекает, что в каждой подвижной вершине сети сумма ρ -импульсов всех инцидентных ей ребер равна нулю. В частности, в каждой подвижной вершине степени два ρ -импульсы инцидентных такой вершине ребер – противонаправлены. Поэтому, поскольку окружность Σ – гладкая строго выпуклая центрально симметричная кривая, угол между этими ребрами равен 180° .

Покажем теперь, что в каждой неподвижной вершине степени 3 сумма ρ -импульсов всех инцидентных ей ребер равна нулю. Из леммы 7.1 вытекает, что конор-ма суммы любых двух из этих ρ -импульсов не превосходит 1. Обозначим эти ρ -импульсы через p_1, p_2 и p_3 . Напомним, что как p_i , так и $-p_i$ лежат на единичной окружности Σ^* .

Предположим сначала, что ковекторы p_i попарно линейно независимы и не лежат ни в одной полуплоскости, ограниченной прямой, проходящей через начало координат. Тогда $-p_1 = \alpha p_2 + \beta p_3$ для некоторых $\alpha > 0$ и $\beta > 0$. По условию $p = p_2 + p_3$ лежит в круге, ограниченном Σ^* . Поэтому, в силу строгой выпуклости окружности Σ^* , если $-p_1$ лежит в параллелограмме Op_2pp_3 , то $-p_1 = p$, что и требовалось показать. Таким образом, достаточно рассмотреть случай, когда $-p_1$ лежит вне указанного параллелограмма, т.е. когда, по крайней мере, одно из чисел α и β строго больше 1. Проводя такие же рассуждения для $-p_2$ и $-p_3$, получаем, что достаточно рассмотреть случай, когда в каждом из приведенных ниже трех равенств хотя бы один из коэффициентов в правой части строго больше 1:

$$\begin{aligned} -p_1 &= \alpha p_2 + \beta p_3, \\ -p_2 &= \frac{1}{\alpha} p_1 + \frac{\beta}{\alpha} p_3, \\ -p_3 &= \frac{1}{\beta} p_1 + \frac{\alpha}{\beta} p_2. \end{aligned}$$

Однако если $\alpha > 1$ и $\beta < 1$, то $1/\alpha < 1$ и $\beta/\alpha < 1$, т.е. коэффициенты во втором равенстве меньше 1. Противоречие. Аналогично разбирается случай $\alpha < 1$ и $\beta > 1$.

Если $\alpha > 1$, $\beta > 1$ и $\alpha \neq \beta$, скажем $\alpha > \beta$, то снова коэффициенты во втором равенстве меньше 1. Противоречие. Наконец, если $\alpha = \beta > 1$, то во втором и в третьем равенствах коэффициенты не превосходят 1. Противоречие. Таким образом, в рассматриваемом случае сумма ρ -импульсов p_i должна равняться нулю.

Пусть теперь ковекторы p_i попарно линейно независимы, но лежат в полуплоскости, ограниченной некоторой прямой ℓ , проходящей через начало координат. Предположим для определенности, что ковектор p_2 лежит в углу, образованном ковекторами p_1 и p_3 . Тогда точка p_2 лежит внутри треугольника, натянутого на точки $p_1 + p_2$, $p_2 + p_3$ и 0, поэтому p_2 – внутренняя точка круга, ограниченного окружностью Σ^* .

Наконец, если пара ковекторов, скажем p_1 и p_2 , коллинеарны, то или конорма их суммы равна 2, или $p_1 = -p_2$. В последнем случае точка p_3 является внутренней точкой отрезка, соединяющего точки $p_3 + p_1$ и $p_3 + p_2$, поэтому p_3 не может лежать на строго выпуклой окружности Σ^* . Противоречие. Таким образом, и в неподвижной вершине степени 3 сумма ρ -импульсов инцидентных ей ребер равна нулю.

Для завершения доказательства необходимости осталось заметить, что суммарный ρ -импульс в подвижной вершине степени 1 отличен от нуля, что противоречит экстремальности невырожденного представителя.

Перейдем к доказательству достаточности. Пусть Υ – сеть, удовлетворяющая всем условиям теоремы. В силу следствия 5.3 для доказательства экстремальности сети Υ достаточно проверить экстремальность каждого ее базового представителя, имеющего не более одной компоненты вырождения. Легко видеть, что в силу следствия 4.4 представитель сети Υ , не содержащий вырожденных ребер, экстремален. Далее, пусть Γ – базовый представитель сети Υ , имеющий одну компоненту вырождения H . Из определения базового представителя вытекает, что H не может соответствовать ни подвижной вершине, ни граничной вершине степени 1 сети Υ . Кроме того, компонента H , соответствующая граничной вершине степени 2, necessarily состоит из одного ребра, одна из вершин которого является граничной вершиной степени 1 сети Γ , а вторая – подвижной вершиной степени 3 в Γ (отметим, что, с точностью до эквивалентности, существует ровно один такой представитель). Если же компонента H соответствует граничной вершине степени 3, то H состоит из двух смежных ребер, причем ровно одна вершина из H является граничной в Γ и имеет в Γ степень 1, а две другие вершины из H являются в Γ подвижными вершинами степени 3 (с точностью до эквивалентности, существует ровно два таких представителя).

Так как по условию в каждой граничной вершине степени 2 сети Υ сумма ρ -импульсов инцидентных ей ребер имеет конорму, не превосходящую 1, в случае, когда H соответствует граничной вершине степени 2, сеть Γ экстремальна по следствию 4.3. Пусть теперь H соответствует граничной вершине x степени 3. Обозначим ρ -импульс единственного невырожденного ребра сети Γ , инцидентного вершине из H , имеющей в H степень 2, через p_1 (импульс берется в этой вершине), а ρ -импульсы оставшихся невырожденных ребер из Γ , инцидентных вершинам из H , – через p_2 и p_3 . В силу следствия 4.3 для проверки экстремальности сети Γ

достаточно убедиться в неотрицательности следующего выражения:

$$\langle p_1, \eta_1 \rangle + \langle p_2 + p_3, \eta_2 \rangle + \rho(\eta_1) + \rho(\eta_2 - \eta_1),$$

где η_1 и η_2 – произвольные векторы. По предположению $p_1 + p_2 + p_3 = 0$, поэтому, так как $\rho^*(p_i) = 1$, имеем

$$\begin{aligned} & \langle p_1, \eta_1 \rangle + \langle p_2 + p_3, \eta_2 \rangle + \rho(\eta_2 - \eta_1) + \rho(\eta_1) \\ &= (\langle p_1, \eta_1 - \eta_2 \rangle + \rho(\eta_2 - \eta_1)) + \rho(\eta_1) \geq 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Доказательство закончено.

На самом деле, теорема 7.1 непосредственно обобщается и на случай гладких норм, без требования строгой выпуклости. А именно, имеет место следующий более общий результат.

ТЕОРЕМА 7.2. Пусть $(\mathbb{R}^2, \rho)$ – нормированная плоскость такая, что норма ρ – гладкая всюду вне нуля. Линейная сеть Υ является экстремалью функционала нормированной длины, если и только если для Υ одновременно выполнены следующие условия:

- 1) степень каждой вершины не превосходит трех;
- 2) в каждой вершине степени 3 сумма ρ -импульсов инцидентных ей ребер равна нулю;
- 3) в каждой подвижной вершине степени 2 направления выходящих из нее ребер, ориентированных от этой вершины, лежат в противоположных компонентах уплощения;
- 4) в каждой граничной вершине степени 2 сумма ρ -импульсов инцидентных ей ребер имеет конорму, не превосходящую 1;
- 5) каждая вершина степени 1 является граничной.

7.2. Геометрия экстремальных сетей. Оказывается, подавляющее число результатов, касающихся геометрии локально минимальных сетей на стандартной евклидовой плоскости (см., например, [12] или [15]), почти дословно переносятся на случай нормированной плоскости со строго выпуклой нормой, гладкой вне нуля. Всюду ниже в этом параграфе через ρ будем обозначать именно такую норму.

7.2.1. Связь со случаем евклидовой нормы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.1. Пусть Υ – экстремальная сеть для функционала ρ -нормированной длины, не имеющая граничных вершин степени 2. Тогда существует линейное преобразование плоскости, переводящее сеть Υ в сеть, экстремальную по отношению к функционалу евклидовой длины. В частности, ребра сети Υ разбиваются на три класса параллельности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности будем предполагать, что сеть Υ не содержит подвижных вершин степени 2. По теореме 7.1 в каждой вершине x степени 3 сети Υ сумма ρ -импульсов p_i инцидентных ей ребер равна нулю. Рассмотрим на единичной окружности Σ^* шесть точек, соответствующих коекторам p_i и $-p_i$. Легко видеть, что эти шесть точек образуют равносторонний в смысле нормы ρ^* шестиугольник, у которого противоположные стороны параллельны и равны как по норме ρ^* , так и по евклидовой норме.

Из строгой выпуклости конормы ρ^* вытекает следующая лемма.

ЛЕММА 7.3. Пусть p_1 – произвольная точка на единичной окружности Σ^* . Тогда существует и единственна неупорядоченная пара точек p_2 и p_3 окружности Σ^* такая, что $p_1 + p_2 + p_3 = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ℓ – одна из двух прямых, параллельных p_1 и касательных к окружности Σ^* . Будем двигать прямую ℓ в сторону начала координат до тех пор, пока ρ^* -длина отрезка, совпадающего с пересечением прямой ℓ с ограниченным Σ^* кругом, не станет равна 1. Полученный отрезок обозначим через AB . Отметим, что в силу строгой выпуклости конормы ρ^* существует ровно два таких отрезка AB , причем они центрально симметричны. Ясно, что отрезки AB и Op_1 параллельны и их евклидовы длины равны. Более того, треугольник OAB является равносторонним в смысле конормы ρ^* .

Рассмотрим следующие шесть точек на окружности Σ^* : $\pm p_1, \pm A, \pm B$. Легко видеть, что они образуют равносторонний в смысле ρ^* шестиугольник, у которого противоположные стороны параллельны и имеют одинаковую евклидову длину. Выберем в качестве p_2 и p_3 те вершины полученного шестиугольника, которые не являются соседними ни с p_1 , ни между собой. Очевидно, сумма полученных p_i равна нулю. Тем самым доказано существование.

Для доказательства единственности заметим, что если p_2 и p_3 выбраны некоторым другим образом, то, построив шестиугольник с вершинами $\pm p_i$, получим шестиугольник с теми же свойствами, в частности $\pm p_2 \mp p_3$ параллельны отрезку Op_1 , и евклидовы длины этих трех отрезков равны. Доказательство леммы закончено.

Из леммы 7.3 и строгой выпуклости нормы ρ вытекает, что если ξ_1, ξ_2 и ξ_3 – направления ребер γ_1, γ_2 и γ_3 , выходящих из произвольной вершины x сети Υ , то любое другое ребро этой сети параллельно одному из ξ_i . Без ограничения общности будем считать, что ребра γ_i были ориентированы от вершины x . Тогда, как легко видеть, никакие два из ξ_i не коллинеарны, и для некоторых положительных чисел a и b имеет место равенство

$$-\xi_3 = a\xi_1 + b\xi_2.$$

Рассмотрим линейное преобразование A_λ , переводящее вектор ξ_1 в вектор $(1, 0)$, а вектор ξ_2 – в вектор $\lambda(\cos(\frac{2\pi}{3}), \sin(\frac{2\pi}{3}))$. Очевидно, существует такое $\lambda > 0$, что $A_\lambda(\xi_3)$ сонаправлен с вектором $(\cos(-\frac{2\pi}{3}), \sin(-\frac{2\pi}{3}))$. Построенное линейное преобразование и есть искомое. Предложение доказано.

7.2.2. Геометрия граничного множества и число вращения. Итак, мы показали, что каждая сеть без граничных вершин степени 2, экстремальная для функционала ρ -нормированной длины в случае, когда норма ρ строго выпукла и гладка вне нуля, получается из некоторой локально минимальной сети (в евклидовом смысле) некоторым линейным преобразованием. Этот факт позволяет перенести на случай таких нормированных плоскостей многие результаты, полученные нами ранее для локально минимальных сетей на стандартной плоскости. В качестве примера рассмотрим теорему из [7] о связи геометрии граничного множества и топологии сети.

Напомним коротко необходимые определения. Пусть Γ – плоское бинарное дерево, (a, b) – упорядоченная пара его ребер и γ – единственный ориентированный путь в Γ , начинающийся на a и заканчивающийся на b . Будем двигаться по γ от a к b . Проходя каждую внутреннюю вершину пути, будем каждый раз сворачивать или “направо”, или “налево” (ориентация плоскости предполагается фиксированной). Разность количеств левых и правых поворотов обозначим через $\text{tw}(a, b)$. Положим $\text{tw } \Gamma = \max \text{tw}(a, b)$, где максимум берется по всем упорядоченным парам ребер (a, b) из Γ . Неотрицательное число $\text{tw } \Gamma$ называется *числом вращения* плоского бинарного дерева Γ и является его планарным инвариантом.

Далее, пусть M – конечное подмножество плоскости. Рассмотрим выпуклую оболочку множества $M_0 = M$ и обозначим через M^1 множество всех точек из M , лежащих на границе этой выпуклой оболочки. Если $M_1 = M \setminus M^1$ не пусто, то снова возьмем выпуклую оболочку множества M_1 и обозначим через M^2 множество всех точек из M_1 , попавших на границу этой выпуклой оболочки. Продолжая эту процедуру, получим разбиение исходного множества M на подмножества M^i , $i = 1, \dots, k$, называемые *уровнями выпуклости*. Количество уровней выпуклости множества M обозначим через $k(M)$. Отметим, что $k(M) = 1$, если и только если M лежит на границе своей выпуклой оболочки.

Из результатов работы [7] и предложения 7.1 вытекает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 7.3. *Пусть ρ – строго выпуклая норма на плоскости, гладкая всюду вне нуля, и Υ – вложенное бинарное дерево, экстремальное по отношению к функционалу ρ -нормированной длины, затягивающее фиксированное конечное множество M точек плоскости. Тогда $\text{tw } \Upsilon \leq 12(\kappa(M) - 1) + 5$.*

В случае, когда граничное множество M лежит на границе своей выпуклой оболочки, т.е. имеет один уровень выпуклости, то теорема 7.3 может быть обобщена (ср. с [9]). Чтобы сформулировать это обобщение, понадобится следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.1. Если для плоской вложенной сети Υ существует планарно эквивалентная ей сеть Υ_m , экстремальная относительно функционала ρ -нормированной длины, то будем говорить, что Υ имеет ρ -экстремальную реализацию. Если же сеть Υ_m можно подобрать такой, чтобы ее граница была выпуклой, то будем говорить, что Γ имеет *выпуклую ρ -экстремальную реализацию*.

ТЕОРЕМА 7.4. *Пусть ρ – строго выпуклая норма на плоскости, гладкая всюду вне нуля. Плоское бинарное дерево имеет выпуклую ρ -экстремальную реализацию, если и только если его число вращения не превосходит 5.*

Таким образом, все плоские бинарные деревья, имеющие выпуклую ρ -экстремальную реализацию, полностью описываются на языке триангуляций специального вида – так называемых треугольных паркетов, т.е. каждая такая сеть планарно эквивалентна двойственному графу некоторого паркета из определенного в [10] класса $\mathcal{W} \mathcal{P}_5$ (см. [11], [12] или [15]).

Рассмотрим теперь случай вложенных сетей без вершин степени 2, экстремальных относительно функционала нормированной ρ -длины. Из теоремы 7.1 вытекает, что степени вершин такой сети равны 1 или 3.

Напомним, что плоская вложенная сеть, степени вершин которой равны 1 или 3, называется *тривиальной*, если каждый ее фундаментальный цикл – шестиугольник, внутренность которого не содержит точек сети.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.2. Пусть Υ – плоская сеть без вершин степени 2, имеющая выпуклую ρ -экстремальную реализацию. Тогда Υ – тривиальная сеть.

Из предложения 7.2 и результатов [10] вытекает, что у плоской сети без вершин степени 2, имеющей выпуклую ρ -экстремальную реализацию, корректно определено число вращения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.3. Плоская сеть без вершин степени 2, имеющая выпуклую ρ -экстремальную реализацию, тривиальна. Ее число вращения корректно определено и не превосходит пяти.

Таким образом, все плоские вложенные сети без вершин степени 2, имеющие выпуклую ρ -экстремальную реализацию, полностью описываются на языке треугольных паркетов, т.е. каждая такая сеть планарно эквивалентна двойственному графу некоторого паркета из определенного в [10] класса $\mathcal{P}_5$.

7.2.3. Множество экстремальных сетей фиксированного типа. Опишем структуру всех сетей, экстремальных относительно функционала ρ -нормированной длины, при условии, что у этих сетей фиксированы тип и граница, т.е. получим аналог теоремы из [14]. Напомним, что для случая локально минимальных сетей этот результат основан на следующих двух фактах (см. [14]).

1) Положительная определенность второй вариации длины отрезка при линейной деформации, где равенство нулю достигается, если и только если рассматриваемая деформация сохраняет направление отрезка.

Этот результат имеет место и для ρ -нормированной длины, где ρ – строго выпуклая норма, гладкая вне нуля. Как и в случае длины, отсюда вытекает параллельность экстремальных сетей одной топологии с общей границей, а значит, и применимость основной теоремы из работы [14] о структуре множества параллельных линейных сетей с фиксированной границей. Таким образом, множество всех сетей, экстремальных относительно функционала ρ -нормированной длины, при условии, что у этих сетей фиксированы тип и граница, представляет собой многогранник в конфигурационном пространстве подвижных вершин, а размерность этого многогранника вычисляется в терминах ранга соответствующей характеристической системы.

2) Устойчивость локально минимальных бинарных деревьев по отношению к малым деформациям граничного множества (см. теорему 6.1).

ТЕОРЕМА 7.5. Пусть Υ – погруженная сеть типа G с границей φ , экстремальная относительно функционала ρ -нормированной длины. Обозначим через k сумму цикломатических чисел подвижных подсетей сети Υ , через f – количество подвижных вершин степени 2 сети Υ , через m – количество ребер сети Υ , а через X – конфигурационное пространство подвижных вершин сети Υ .

Тогда множество погруженных сетей типа G с границей φ представляет собой внутренность выпуклого $(k + f)$ -мерного многогранника $X_{\min}$, являющегося множеством всех минимумов функции ρ -нормированной длины $\ell_\rho: X \rightarrow \mathbb{R}$. Все экстремальные сети данной топологии и с данной границей параллельны между собой и имеют одинаковую ρ -нормированную длину.

Более того, многогранник $X_{\min}$ имеет не более чем t граней максимальной размерности.

7.2.4. Поверхности. Пусть W – гладкое многообразие и TW – касательное расслоение. Будем говорить, что на многообразии W задана норма ρ , если $\rho: TW \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывный лагранжиан такой, что ограничение его на каждое касательное пространство $T_x W$ является нормой на $\mathbb{R}^n = T_x W$ в обычном смысле. Норма ρ естественным образом порождает функционал ρ -нормированной длины, значение которого на кусочно гладкой кривой $\gamma: [a, b] \rightarrow W$ определяется так:

$$\gamma \mapsto \int_a^b \rho(\dot{\gamma}) dt.$$

Экстремали этого функционала называются ρ -экстремальными кривыми. Аналогично определяется функционал ρ -нормированной длины на сетях и ρ -экстремальные сети.

Отметим, что если $f: W_1 \rightarrow W_2$ – погружение многообразия W_1 в многообразие W_2 и ρ – норма на W_2 , то на W_1 индуцируется норма $f^* \rho$ так: $f^* \rho(\xi) = \rho(df(\xi))$.

Простейший пример нормы на многообразии $\mathbb{R}^n$ порождается произвольной нормой ρ на $\mathbb{R}^n$ как на векторном пространстве: ρ порождает норму на каждом касательном пространстве $T_x \mathbb{R}^n$ с помощью изоморфизма между $\mathbb{R}^n$ и $T_x \mathbb{R}^n$. Отметим, что норма ρ на многообразии $\mathbb{R}^n$ порождена нормой на $\mathbb{R}^n$ как на линейном пространстве, если и только если ρ инвариантна относительно всех сдвигов ν , т.е. $\nu^*(\rho) = \rho$.

Другим важным частным случаем многообразий с нормой являются группы Ли, на которых задана, скажем, левоинвариантная норма, получающаяся из произвольной нормы на соответствующей алгебре Ли левыми сдвигами. В качестве примера рассмотрим двумерный тор T^2 , на котором задана левоинвариантная норма ρ . Отметим, что если $\pi: \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2$ – стандартное универсальное накрытие, т.е. $T^2 = \mathbb{R}^2/G$, где G – соответствующая дискретная подгруппа группы $\mathbb{R}^2$, то отображение π индуцирует норму на многообразии $\mathbb{R}^2$, инвариантную относительно сдвигов, т.е. эта последняя норма порождена некоторой нормой на $\mathbb{R}^2$ как на линейном пространстве. Обратно, каждая норма ρ на $\mathbb{R}^2$ как на линейном пространстве порождает норму на T^2 (отображение π является локальным диффеоморфизмом, и ρ инвариантна относительно группы накрытия π).

Если ρ – норма на $\mathbb{R}^2$ как на линейном пространстве, гладкая всюду, кроме нуля, то из локальности условий экстремальности сети вытекает, что локальная изометрия сохраняет свойство сети быть экстремальной. В частности, накрытие $\pi: \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2$ обладает этим свойством: сеть Γ на торе экстремальна, если и только если любая сеть, составленная из кривых, входящих в $\pi^{-1}(\Gamma)$, является экстремальной.

Пусть теперь ρ – гладкая вне нуля строго выпуклая норма на плоскости, $T^2 = \mathbb{R}^2/G$ – некоторый тор и Γ – ρ -экстремальная сеть на нем. Из предложения 7.1 вытекает, что существует линейное преобразование $\mathcal{A}$ плоскости $\mathbb{R}^2$, переводящее $\pi^{-1}(\Gamma)$ в прообраз некоторой локально минимальной сети на евклидовом торе $\mathbb{R}^2/\mathcal{A}(G)$. Поэтому многие результаты, полученные в [8] для случая локально минимальных сетей на плоских торах, переносятся на случай ρ -экстремальных сетей на торах с такими нормами.

Из теоремы 7.1 вытекает, что наличие подвижных вершин степени 2 не влияет на геометрию экстремальной сети. Поэтому, отбросив тривиальный случай замкнутых геодезических (они такие же, как и в случае евклидовых торов), не ограничивая общности, будем предполагать, что подвижных вершин степени 2 сети не имеют. Таким образом, по теореме 7.1 у замкнутой экстремальной сети имеются лишь вершины степени 3.

В приводимых ниже следствиях мы используем ряд понятий, определенных нами в [8] для случая локально минимальных сетей, применительно к ρ -экстремальным сетям. Соответствующие определения дословно повторяют определения из [8].

СЛЕДСТВИЕ 7.1. *Для каждой замкнутой экстремальной сети Γ на данном нормированном двумерном торе $T^2(f)$ существует единственная (с точностью до сдвига) эквивалентная ей правильная (т.е. состоящая из конгруэнтных ячеек) экстремальная сеть Γ_r . Нормированные длины сетей Γ и Γ_r равны, поэтому эквивалентные экстремальные сети имеют одинаковые нормированные длины.*

Более того, каждая экстремальная сеть на $T^2(f)$ может быть продеформирована в произвольную эквивалентную ей экстремальную сеть в классе экстремальных сетей.

СЛЕДСТВИЕ 7.2. *Эквивалентным замкнутым экстремальным сетям соответствуют одинаковые типы из $M_2^+(\mathbb{Z})/\langle J \rangle$. Для каждого элемента $[g] \in M_2^+(\mathbb{Z})/\langle J \rangle$ существует такая дискретная подгруппа $G \subset \mathbb{R}^2$, что $\mathbb{R}^2/G$ – некоторый тор, причем на этом торе существует замкнутая ρ -экстремальная сеть Γ типа $[g]$. Таким образом, имеется естественное взаимно однозначное соответствие между элементами однородного пространства $M_2^+(\mathbb{Z})/\langle J \rangle$ и классами эквивалентности замкнутых ρ -экстремальных сетей на двумерных торах.*

СЛЕДСТВИЕ 7.3. *На фиксированном торе $T^2(f)$ существует замкнутая ρ -экстремальная сеть данного типа $[g]$ в том и только том случае, когда вершины характеристического треугольника типа g для тора $T^2(f)$ можно натянуть ρ -экстремальным бинарным деревом (см. следствие 5.1).*

СЛЕДСТВИЕ 7.4. *На каждом торе $T^2(f)$ существует некоторая замкнутая ρ -экстремальная сеть, отличная от замкнутой геодезической.*

Экстремальное бинарное дерево, затягивающее вершины характеристического треугольника, называется, напомним, *характеристической сетью*.

СЛЕДСТВИЕ 7.5. Пусть Γ – замкнутая ρ -экстремальная сеть на торе $T^2(f)$. Пусть Γ_χ – характеристическая сеть, соответствующая Γ . Тогда ρ -длины сетей Γ и Γ_χ равны между собой.

Приведенные выше простые геометрические критерии существования замкнутой ρ -экстремальной сети данного типа дают возможность получить ряд нетривиальных следствий.

СЛЕДСТВИЕ 7.6. Если на данном торе $T^2(f)$ существует замкнутая ρ -экстремальная сеть Γ типа $(\mathcal{M}, t, n)$, то на этом торе существуют замкнутые ρ -экстремальные сети типов $(\mathcal{M}, kt, kn)$, где k – любое положительное целое число.

В терминах типов из $M_2^+(\mathbb{Z})$ предыдущее следствие может быть сформулировано так.

СЛЕДСТВИЕ 7.7. Если на данном торе $T^2(f)$ существует замкнутая ρ -экстремальная сеть Γ типа $g = \begin{pmatrix} P & R \\ Q & S \end{pmatrix}$, то на этом торе существуют замкнутые ρ -экстремальные сети типов

$$\begin{pmatrix} kP & kR \\ kQ & kS \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} P/l & R/l \\ Q/l & S/l \end{pmatrix},$$

где k – любое положительное целое число и l – любой общий положительный делитель чисел P, Q, R и S . Иными словами, для всех матриц из $M_2^+(\mathbb{Z})$, входящих в данный класс проективного пространства $MP_2^+(\mathbb{Z})$, ρ -экстремальные сети этих типов либо одновременно существуют, либо одновременно не существуют.

СЛЕДСТВИЕ 7.8. На каждом торе существует бесконечно много неэквивалентных замкнутых ρ -экстремальных сетей.

Будем говорить, что гладкие вне нуля нормы ρ и ρ' близки в смысле C^k , если ограничения функций ρ и ρ' на единичную евклидову окружность близки в смысле C^k -нормы. Если C^k -расстояние между полученными функциями на окружности не превосходит ε , то скажем, что ρ и ρ' являются ε -близкими в смысле C^k .

СЛЕДСТВИЕ 7.9. Изменения нормы ρ на торе T^2 , малые в смысле C^2 , не разрушают замкнутую ρ -экстремальную сеть Γ на T^2 : для каждой замкнутой ρ -экстремальной сети Γ на торе T^2 с гладкой вне нуля строго выпуклой нормой ρ существует такое $\varepsilon > 0$, что для каждой ε -близкой в смысле C^2 нормы ρ' существует замкнутая ρ' -экстремальная сеть на торе T^2 , имеющая тот же тип, что и Γ .

По этой же схеме можно перенести результаты из работы [21] на случай бутылки Клейна с некоторой гладкой вне нуля строго выпуклой нормой. Единственное отличие состоит в том, что соответствующая норма на накрывающей плоскости должна быть инвариантна относительно осевой симметрии из группы накрытия.

7.2.5. *Нормы с эллипсоидальной окружностью.* Если предположить дополнительно, что единичная окружность нормы ρ является эллипсом, то, как легко понять, линейное преобразование, переводящее этот эллипс в евклидову окружность S^1 , устанавливает изометрию между плоскостью $(\mathbb{R}^2, \rho)$ и евклидовой плоскостью. Эта изометрия, в частности, переводит сети, экстремальные относительно функционала ρ -нормированной длины, в локально минимальные сети на евклидовой плоскости. Таким образом, на случай таких экстремальных сетей почти дословно переносятся все результаты о плоских локально минимальных сетях, полученные авторами ранее (см., например, [12] или [11]).

Алгоритмы Мелзака и Хванга построения локально минимального бинарного дерева данной топологии с данной границей (см. [19] и [6]) легко переносятся на случай нормы ρ с эллипсоидальной окружностью. При этом описанная выше линейная изометрия позволяет легко понять, в чем будут состоять отличия:

- 1) вместо правильных треугольников в евклидовом смысле рассматриваются равнобедренные треугольники в смысле нормы ρ ;
- 2) вместо евклидовых окружностей рассматриваются эллипсы, являющиеся окружностями в норме ρ ;
- 3) величина угла определяется как ρ -нормированная длина соответствующей дуги единичной окружности Σ .

В случае произвольной строго выпуклой нормы на плоскости, гладкой всюду вне нуля, аналоги алгоритмов Мелзака и Хванга авторам неизвестны. Отметим, что, как было показано выше (см. предложение 7.1), линейное преобразование, переводящее экстремальную сеть в локально минимальную, существует и в общем случае. Применив это преобразование, можно выполнить построения Мелзака на евклидовой плоскости, а затем применить обратное преобразование. Однако это преобразование в общем случае зависит от сети и уже не является изометрией. В частности, не ясно, в какие именно треугольники и эллипсы перейдут правильные треугольники и окружности, построенные на евклидовой плоскости при реализации алгоритма Мелзака. Авторам также неизвестно, как в общем случае найти требуемое линейное преобразование, исходя из заданного граничного множества, или, что все равно, как по граничному множеству найти направление хотя бы одного ребра экстремальной сети заданной топологии.

В качестве другого примера переноса результатов на случай норм с эллипсоидальными окружностями возьмем теорему авторов о локально минимальных бинарных деревьях типа скелет с правильной границей (см. [13] и [23]).

§ 8. Манхеттенские локально минимальные и экстремальные сети

В этом параграфе более подробно изучим случай так называемого манхеттенского нормированного пространства $(\mathbb{R}^n, \rho)$, т.е. пространства, в котором норма ρ равна сумме длин проекций вектора на координатные оси стандартной декартовой системы координат. Воспользовавшись полученными ранее общими теоремами, мы явно опишем локальную структуру локально минимальных и экстремальных сетей в манхеттенском пространстве. Кроме того, для случая плоскости приведем наглядный геометрический критерий экстремальности локально минимальной се-

ти. Напомним, что условия экстремальности в данном случае имеют не локальный характер.

Результаты, приведенные в этом параграфе, были получены авторами совместно с Хонг Ван Ле во время их пребывания в Институте прикладной математики Макса Планка г. Лейпцига в апреле–июне 1999 г.

8.1. Общие свойства. Кривую γ в манхеттенском линейном пространстве $\mathbb{R}^n$ назовем *монотонной*, если каждая ее координатная функция (в стандартных декартовых координатах) является монотонной функцией.

Из теоремы 3.2 вытекает следующий результат.

УТВЕРЖДЕНИЕ 8.1. *Кривая γ , соединяющая фиксированную пару точек, является экстремальной, если и только если она монотонна. Более того, каждая экстремальная кривая является кратчайшей.*

Кривая γ , соединяющая фиксированную пару точек, является локально минимальной, если и только если существует конечное открытое покрытие ее параметризующего отрезка такое, что ограничение кривой γ на замыкание каждого элемента этого покрытия является монотонной кривой.

Перейдем к описанию локально минимальных сетей.

Пусть Υ – сеть в манхеттенском пространстве, все ребра которой – локально минимальные кривые, а v – произвольная ее вершина. Локальную сеть, составленную из максимальных содержащих v монотонных отрезков инцидентных v ребер, назовем *монотонной окрестностью вершины v* .

ТЕОРЕМА 8.1. *Сеть Υ с некоторой границей в манхеттенском пространстве является локально минимальной, если и только если одновременно выполнены следующие условия:*

- 1) *каждое ребро сети Υ является локально минимальной кривой (см. утверждение 8.1);*
- 2) *пусть v – произвольная вершина сети Υ ; тогда каждое открытое полупространство, ограниченное гиперплоскостью, проходящей через v и параллельной некоторой координатной гиперплоскости, целиком содержит не более одного ребра из монотонной окрестности вершины v ;*
- 3) *каждая вершина сети Υ степени 1 является граничной.*

СЛЕДСТВИЕ 8.1. *Степень вершины локально минимальной сети в n -мерном манхеттенском пространстве не превосходит $2n$, причем любое целое число $1 \leq k \leq 2n$ реализуется как степень вершины некоторой локально минимальной сети.*

Имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 8.2. *Каждая экстремальная сеть в манхеттенском пространстве является локально минимальной. В частности, локальное устройство экстремальных сетей описывается теоремой 8.1.*

ЗАМЕЧАНИЕ 8.1. Не каждая локально минимальная манхеттенская сеть является экстремальной. Простейший пример получается, если рассмотреть не монотонную ломаную, звенья которой параллельны координатным осям.

Более тонкие эффекты можно увидеть на следующем примере. Ребра сети Υ , приведенной на рис. 5, являются кратчайшими кривыми, однако сеть в целом не является экстремальной. На рис. 5 показана деформация, линейно уменьшающая манхеттенскую длину этой сети.

Рис. 5. Локально минимальная не экстремальная сеть на плоскости

Нам понадобится следующее свойство экстремальных сетей в манхеттенском пространстве $\mathbb{R}^n$, непосредственно вытекающее из утверждения 8.1. Пусть Υ – произвольная сеть. Максимальный путь в Υ , циклический или не циклический, все внутренние вершины которого (если они есть) имеют в Υ степень 2 и не являются граничными вершинами для Υ , назовем *нитью*. Отметим, что ребра сети также являются нитями по определению.

СЛЕДСТВИЕ 8.2. *Каждая нить экстремальной сети в манхеттенском пространстве является монотонной кривой.*

8.2. Экстремальные сети и линейные сети. Пусть Υ – произвольная вложенная сеть в $\mathbb{R}^n$. Построим по ней линейную сеть $\bar{\Upsilon}$, заменив каждую нить сети Υ на прямолинейный отрезок, соединяющий соответствующие вершины. Сеть $\bar{\Upsilon}$ назовем *линеаризацией сети Υ* .

Имеет место следующий не сложный, но важный результат.

УТВЕРЖДЕНИЕ 8.2. *Сеть Υ является экстремальной сетью в манхеттенском пространстве $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда все ее нити монотонны и ее линеаризация – экстремальная сеть.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Υ – экстремальная сеть. Если у нее есть не монотонная нить, то длина сети может быть с ненулевой скоростью уменьшена деформацией этой нити. Поэтому все нити сети Υ монотонны. В частности, сеть Υ и ее линеаризация имеют одинаковые длины. Далее, если существует деформация линеаризованной сети, уменьшающая ее длину с ненулевой скоростью, то при замене всех сетей деформации на их линеаризации мы получаем деформацию с тем же свойством. Эта последняя деформация однозначно задается смещением вершин линеаризации сети Υ и поэтому порождает некоторую деформацию Υ_t сети Υ в классе сетей с монотонными нитями. Очевидно, деформация Υ_t также уменьшает длину с ненулевой скоростью.

Обратно, предположим, что у сети Υ все нити монотонны и ее линеаризация – экстремальная сеть. Если существует деформация Υ_t сети Υ , уменьшающая длину с ненулевой скоростью, то, очевидно, заменяя каждую сеть Υ_t ее линеаризацией, мы построим деформацию линеаризации сети Υ , уменьшающую длину с не меньшей, а значит, и с не нулевой скоростью. Доказательство закончено.

СЛЕДСТВИЕ 8.3. *Любая (погруженная) экстремальная сеть в манхеттенском пространстве $\mathbb{R}^n$ получается из некоторой экстремальной линейной сети без подвижных вершин степени 2 произвольной заменой ее ребер монотонными нитями, соединяющими те же точки.*

Таким образом, достаточно описать лишь линейные экстремальные сети в манхеттенском пространстве, не содержащие подвижных вершин степени 2.

8.3. Экстремальные манхеттенские сети на плоскости. Опишем теперь экстремальные сети на манхеттенской плоскости. Пусть Υ – сеть с монотонными ребрами. Ребро сети Υ назовем *вертикальным (горизонтальным)*, если оно представляет собой прямолинейный отрезок, параллельный оси абсцисс (оси ординат). Все остальные ребра назовем *свободными*. Связные компоненты, составленные из горизонтальных (вертикальных) ребер, назовем *горизонтальными (вертикальными) фрагментами*, а максимальные фрагменты – *сечениями*. Отметим, что каждый фрагмент представляет собой путь, соединяющий пару вершин сети Υ . Эти вершины будем называть *концевыми вершинами* этого *фрагмента*. Сеть, полученную из фрагмента γ добавлением всех ребер из Υ , инцидентных вершинам из γ , обозначим через $T(\gamma)$ и назовем *расширением фрагмента γ* .

Пусть γ – некоторый горизонтальный фрагмент. Негоризонтальное ребро e , инцидентное вершине v из γ , назовем *односторонним*, если оно – единственное негоризонтальное ребро, инцидентное v . Одностороннее ребро, инцидентное внутренней вершине v фрагмента γ , назовем *статичным*, если v – граничная вершина дерева Υ . Одностороннее ребро, инцидентное концевой вершине фрагмента γ , также отнесем к *статичным ребрам*. Таким образом, одностороннее ребро статично, если оно инцидентно или вершине из $\partial\Upsilon$, или концевой вершине фрагмента. Остальные односторонние ребра назовем *плавающими*.

Далее, вершину v фрагмента γ , не инцидентную одностороннему ребру, назовем *статичной*, если в дереве Υ она является граничной вершиной дерева Υ степени 1 или 2. Отметим, что статичными являются те и только те вершины фрагмента γ , которые не инцидентны ни одному негоризонтальному ребру сети Υ и являются граничными в Υ .

Разобьем множество негоризонтальных ребер, инцидентных фрагменту γ , на два класса C_1 и C_2 в зависимости от того, в какой из двух полуплоскостей, ограниченных проходящей через γ прямой, лежат эти ребра. Обозначим через t_i^s и t_i^n количества статичных и плавающих ребер в классе C_i , $i = 1, 2$. Величину $\text{ind}_i = 2t_i^n + t_i^s$ назовем *индексом класса C_i* , а число $\text{ind}(\gamma) = |\text{ind}_1 - \text{ind}_2|$ – *индексом фрагмента γ* . Будем считать, что класс C_1 состоит из ребер, расположенных в верхней полуплоскости по отношению к γ .

Далее, обозначим через e^s полное количество односторонних статичных ребер, т.е. $e^s = t_1^s + t_2^s$, а через v^s – полное количество статичных вершин фрагмента γ .

Число $\text{stat}(\gamma) = 2v^s + e^s$ назовем *степенью статичности фрагмента* γ .

Аналогично определяются соответствующие понятия для вертикального фрагмента.

ТЕОРЕМА 8.3. *Сеть Υ на манхеттенской плоскости $\mathbb{R}^2$ является экстремальной сетью тогда и только тогда, когда все ее нити – монотонные кривые, ее линейаризация Υ_l локально минимальна и индекс каждого фрагмента γ линейаризации Υ_l не превосходит степени статичности этого фрагмента:*

$$\text{ind}(\gamma) \leq \text{stat}(\gamma).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу утверждения 8.2 можно сразу предполагать, что сеть Υ является линейной локально минимальной сетью без подвижных вершин степени 2. В частности, сеть Υ совпадает со своей линейаризацией Υ_l . Кроме того, ясно, что достаточно рассматривать деформации сети Υ в классе сетей с монотонными ребрами. Отсюда вытекает, что достаточно рассматривать деформации в классе линейных сетей.

При вычислении первой вариации длины отрезка в манхеттенской норме нам понадобится следующая функция:

$$f(x, y) = \begin{cases} y & \text{при } x > 0, \\ -y & \text{при } x < 0, \\ |y| & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Определим также три векторнозначных функции на $\mathbb{R}^n$, положив

$$\begin{aligned} \text{sign}(X) &= (\text{sign}(X_1), \dots, \text{sign}(X_n)), \\ \text{null}(X) &= (1 - \text{sign}^2(X_1), \dots, 1 - \text{sign}^2(X_n)), \\ \text{mod}(X) &= (|X_1|, \dots, |X_n|), \end{aligned}$$

где $X = (X_1, \dots, X_n)$. Отметим, что компонента вектора $\text{null}(X)$ равна нулю, если и только если соответствующая компонента вектора X отлична от нуля. В противном случае эта компонента вектора $\text{null}(X)$ равна единице. Отметим также, что функции $\text{null}(X)$ и $\text{mod}(X)$ четные, а функция $\text{sign}(X)$ нечетная.

В дальнейшем нам будет удобнее рассматривать функции null и mod как функции на неупорядоченных парах векторов, а именно

$$\text{null}(\{A, B\}) = \text{null}(A - B), \quad \text{mod}(\{A, B\}) = \text{mod}(A - B).$$

Из теоремы 3.1 вытекает следующий результат.

ЛЕММА 8.1 (первая вариация длины отрезка). Пусть $[A, B]$ – произвольный, возможно вырожденный, отрезок в манхеттенском пространстве $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим его линейную деформацию, при которой точка $A = (A_1, \dots, A_n)$ движется по кривой $A(t) = A + t\xi + o(t)$, а точка $B = (B_1, \dots, B_n)$ – по кривой $B(t) = B + t\eta + o(t)$, где $t \in [0, 1]$. Тогда функция $\ell(t)$ его манхеттенской длины дифференцируема при $t = 0$, причем

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0+} \ell(t) = \sum_i f(B_i - A_i, \eta_i - \xi_i),$$

где $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ и $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$.

Другими словами,

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0+} \ell(t) = \langle \text{sign}(A - B), \xi \rangle + \langle \text{sign}(B - A), \eta \rangle + \langle \text{null}(\{A, B\}), \text{mod}(\{\xi, \eta\}) \rangle.$$

Лемма 8.1 позволяет записать формулу первой вариации линейной сети в следующем виде.

ЛЕММА 8.2 (первая вариация длины сети). Пусть Υ – линейная сеть в $\mathbb{R}^n$ и Υ_t , $t \in [0, 1]$, – некоторая ее деформация (возможно, с расщеплениями) в классе линейных сетей, где $\Upsilon = \Upsilon_0$. Обозначим через ξ поле деформации Υ_t . Пусть V – произвольная подвижная вершина сети Υ_0 . Обозначим через S_V сумму векторов $\text{sign}(V - V')$, где сумма берется по всем невырожденным ребрам VV' сети Υ_0 . Тогда

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0+} \ell(\Upsilon_t) = \sum_{V \text{ подвижна}} \langle S_V, \xi_V \rangle + \sum_{e \text{ – ребро}} \langle \text{null}(\partial e), \text{mod}(\xi|_{\partial e}) \rangle.$$

Первое слагаемое из формулы леммы 8.2 назовем *линейной частью формулы первой вариации*, а второе – *нелинейной*.

Вернемся к доказательству теоремы 8.3. Пусть сначала Υ – экстремальная сеть и γ – ее произвольный фрагмент. Рассмотрим линейную деформацию Υ_t сети Υ , которая смещает фрагмент γ параллельно самому себе в направлении, перпендикулярном γ , причем каждая вершина, подвижная при деформации Υ_t , движется с единичной скоростью. Для определенности будем считать, что γ – горизонтальный фрагмент, который смещается вверх. В окрестности вершин определим деформацию Υ_t так, как показано на рис. 6 и 7.

Как и выше, разобьем негоризонтальные ребра на два класса C_i , отнеся к классу C_1 ребра из верхней полуплоскости. Напомним, что мы обозначили через t_i^s и t_i^n количества статичных и, соответственно, не статичных односторонних ребер из i -го класса, через v^s – общее количество статичных вершин на γ , а через e^s – сумму $t_1^s + t_2^s$. Из формулы первой вариации (см. лемму 8.2) и условия экстремальности сети Υ вытекает, что

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0+} \ell(\Upsilon_t) = t_2^n - t_1^n + v^s + t_2^s \geq 0.$$

 Рис. 6. Расщепления вершин при деформации Υ_t

 Рис. 7. Расщепления вершин при деформации Υ_t

Точно так же, рассмотрев деформацию, смещающую γ вниз, получим неравенство

$$t_1^n - t_2^n + v^s + t_1^s \geq 0.$$

Таким образом,

$$-v^s - t_1^s \leq t_1^n - t_2^n \leq v^s + t_2^s.$$

Добавив ко всем частям неравенства величину $(t_1^s - t_2^s)/2$, получим

$$-v^s - \frac{e^s}{2} \leq \frac{2t_1^n + t_1^s - 2t_2^n - t_2^s}{2} \leq v^s + \frac{e^s}{2}.$$

Остается заметить, что $2t_i^n + t_i^s = \text{ind}_i$ по определению, откуда, так как $\text{stat}(\gamma) = 2v^s + e^s$, получаем требуемое неравенство.

Отметим, что из наших вычислений вытекает следующий полезный в дальнейшем результат.

ЛЕММА 8.3. *Неравенство $\text{ind}(\gamma) \leq \text{stat}(\gamma)$ равносильно следующей системе неравенств:*

$$\begin{cases} t_1^n \leq t_2^n + v^s + t_2^s \\ t_2^n \leq t_1^n + v^s + t_1^s. \end{cases}$$

Докажем теперь обратное утверждение. Пусть Υ – линейная локально минимальная сеть без подвижных вершин степени 2 такая, что для каждого ее фрагмента γ' выполнено неравенство $\text{ind}(\gamma') \leq \text{stat}(\gamma')$. Рассмотрим произвольную деформацию Υ_t сети Υ в классе линейных сетей (возможно, с расщеплениями), неподвижную на границе этой сети. Это означает, напомним, что мы фиксируем некоторую сеть Υ_0 , слабо проектирующуюся на Υ , и, фактически, рассматриваем деформацию Υ_t сети Υ_0 . Нам нужно проверить, что первая вариация этой деформации неотрицательна.

Без ограничения общности можно предполагать, что деформация Υ_t обладает следующими свойствами (см. теорему 5.1):

- 1) каждая вершина расщепляется не более чем на дерево, причем каждое такое дерево содержит не более одной вершины, неподвижной при деформации Υ_t ;
- 2) сеть Υ_0 (а значит, и все сети Υ_t) не имеет подвижных вершин степени 1 и 2 (отметим, что деформация, изображенная на рис. 6 и 7, не обладает указанным свойством, однако ее легко можно подправить, не меняя длины сетей, заменив все возникшие при деформации нити прямолинейными отрезками);
- 3) каждая вершина сети движется равномерно и прямолинейно.

На сеть Υ_0 естественным образом переносятся введенные выше понятия. А именно, пусть $\pi: \Upsilon_0 \rightarrow \Upsilon$ – слабая проекция. Ребро из Υ_0 , образ которого при слабой проекции π является горизонтальным (вертикальным, свободным) ребром сети Υ , назовем *горизонтальным* (соответственно, *вертикальным*, *свободным*). Отметим, что горизонтальные, вертикальные и свободные ребра сети Υ_0 – это все ее невырожденные ребра.

Пусть γ' – произвольный фрагмент сети Υ . *Фрагментом γ сети Υ_0* , соответствующим фрагменту γ' , назовем прообраз пути γ' при слабой проекции π . *Сечением сети Υ_0* называется ее фрагмент, соответствующий сечению.

Пусть γ – соответствующий γ' фрагмент сети Υ_0 . *Расширением $T(\gamma)$ фрагмента γ* назовем подсеть в Υ_0 , полученную из γ добавлением всех инцидентных ему ребер сети Υ_0 . Отметим, что все добавленные ребра невырождены. Соответствующие им негоризонтальные ребра сети Υ , напомним, разбиты на классы C_1 и C_2 . Это разбиение индуцирует разбиение соответствующих ребер сети Υ_0 на два класса, которые мы будем обозначать также через C_1 и C_2 .

Запишем формулу первой вариации для деформации Υ_t . Из леммы 8.2 вытекает, что полученное выражение представимо в виде суммы двух выражений $\sum^v$ и $\sum^h$, первое из которых зависит только от вертикальных составляющих векторов поля

деформации, а второе – только от горизонтальных. Покажем, что каждое из них неотрицательно.

Рассмотрим выражение $\sum_l^v$. Оно, как видно из леммы 8.2, состоит из двух частей: линейной $\sum_l^v$ и нелинейной $\sum_n^v$. При этом $\sum_n^v$ представляет собой сумму модулей, поэтому неотрицательно. Покажем, что линейная часть $\sum_l^v$ может быть всегда компенсирована нелинейной частью $\sum_n^v$.

ЛЕММА 8.4. *Ненулевой вклад в слагаемое $\sum_l^v$ дают лишь векторы деформации тех вершин сети Υ_0 , которые лежат на горизонтальных сечениях.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего отметим, что ненулевой вклад в линейную часть $\sum_l^v$ дают векторы деформации лишь в тех вершинах сети Υ_0 , которые подвижны и которым инцидентно хотя бы одно вертикальное или свободное ребро. Более того, если такой вершине инцидентны два таких ребра, то вклад также равен нулю. Таким образом, вектор деформации в вершине сети Υ_0 дает ненулевой вклад в $\sum_l^v$, только если эта вершина подвижна и среди инцидентных ей ребер имеется ровно одно невырожденное негоризонтальное ребро.

Пусть V – такая вершина и $V' = \pi(V)$ – ее проекция в Υ . Если V' инцидентно горизонтальному ребру (это заведомо так, если степень вершины V' больше 2), то вершина V , очевидно, принадлежит некоторому горизонтальному сечению. Предположим теперь, что степень вершины V' не превосходит 2. Если степень равна 1, то в силу наших предположений о деформации Υ_t сети Υ_0 вершина V так же, как и V' , является граничной, что противоречит ее выбору. Если же степень равна 2, то вершина V' граничная, а вершина V имеет степень 3 и ей инцидентны два невырожденных ребра. В силу выбора вершины V одно из них является горизонтальным, что и требовалось доказать.

Таким образом, $\sum_l^v$ раскладывается в сумму слагаемых $\sum_l^v(\gamma)$, каждое из которых соответствует вершинам некоторого горизонтального сечения γ сети Υ_0 . Покажем, что каждое такое слагаемое компенсировано независимо от других.

Пусть γ – горизонтальное сечение сети Υ_0 и $T(\gamma)$ – его расширение. По определению сечения все горизонтальные ребра дерева $T(\gamma)$ содержатся в γ . Кроме того, все вырожденные ребра из $T(\gamma)$ лежат, очевидно, в прообразе множества вершин из соответствующего сечения γ' сети Υ . Поэтому расширения двух различных горизонтальных сечений сети Υ_0 не пересекаются ни по горизонтальным, ни по вырожденным ребрам. С другой стороны, в силу леммы 8.2 величина $\sum_n^v$ равна сумме (по всем горизонтальным и вырожденным ребрам) выражений, каждое из которых зависит только от векторов поля направлений на границе соответствующего ребра. Таким образом, $\sum_n^v$ не меньше, чем сумма по всем горизонтальным сечениям величин $\sum_n^v(\gamma)$, где через $\sum_n^v(\gamma)$ обозначен вклад в нелинейную часть ребер из $T(\gamma)$. Наша цель – показать, что

$$\sum_l^v(\gamma) + \sum_n^v(\gamma) \geq 0. \quad (*)$$

Обозначим левую часть последнего неравенства через $\sum^v(\gamma)$.

Прежде всего отметим, что выражение $\sum^v(\gamma)$ по определению зависит только от вертикальных составляющих векторов поля деформации. Поэтому при доказательстве неравенства (*) можно предполагать, что поле деформации вертикально.

В дальнейшем нам понадобится подправить сеть Υ и деформацию Υ_t , сохраняя справедливость неравенств из условия теоремы и не меняя ни линейной части $\sum_l^v$, ни нелинейной части $\sum_n^v$ (то же и для горизонтальных компонент).

ЛЕММА 8.5. *Пусть, в сделанных выше предположениях о деформации Υ_t , имеет место одна из следующих двух возможностей:*

1) *вектор поля деформации равен нулю в некоторой подвижной вершине V сети Υ_0 (отметим, что по условию V является единственной неподвижной при деформации Υ_t вершиной из $\pi^{-1}(\pi(V))$);*

2) *вектор поля деформации равен нулю в некоторой внутренней точке V ребра e сети Υ_0 .*

Перестроим сеть Υ_0 и сеть Υ , добавив точку V и, соответственно, точку $\pi(V)$ к множествам граничных вершин этих сетей. Полученные сети обозначим через $\bar{\Upsilon}_0$ и $\bar{\Upsilon}$. Тогда сеть $\bar{\Upsilon}_0$ слабо проецируется на $\bar{\Upsilon}$ и для $\bar{\Upsilon}$ по-прежнему выполняются все условия теоремы. Деформация Υ_t порождает деформацию $\bar{\Upsilon}_t$ сети $\bar{\Upsilon}_0$ и задает тем самым деформацию сети $\bar{\Upsilon}$. Линейные и нелинейные части вертикальной и горизонтальной составляющих формулы первой вариации деформаций Υ_t и $\bar{\Upsilon}_t$ совпадают.

Лемма 8.5 дает возможность предполагать без ограничения общности, что деформация Υ_t оставляет на месте лишь граничные вершины сети Υ_0 , и все ненулевые векторы деформации сонаправлены с осью ординат, т.е. направлены вверх.

Пусть, как и выше, γ' – сечение сети Υ . Разрежем γ' по всем не конечным вершинам, инцидентным всем ребрам из C_1 , не являющимся плавающими. Замыкания полученных компонент обозначим через γ'_i .

Рассмотрим произвольную компоненту γ'_i . Разобьем вершины из γ'_i на два класса U_1 и U_2 , отнеся к первому из них все вершины, инцидентные ребрам из C_1 . Ориентируем γ'_i одним из двух возможных способов и, тем самым, упорядочим вершины из γ'_i .

ЛЕММА 8.6. *Класс U_1 не может содержать более двух последовательных вершин.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Рассмотрим минимальный фрагмент δ , содержащий три последовательные вершины из U_1 . Для этого фрагмента имеем

$$t_1^n = 1, \quad t_1^s \leq 2, \quad t_2^n = t_2^s = v^s = 0, \quad e^s \leq 2,$$

поэтому

$$\text{ind}(\delta) = 2(t_1^n - t_2^n) + t_1^s - t_2^s = 2 + t_1^s,$$

а

$$\text{stat}(\delta) = 2v^s + e^s = t_1^s,$$

что противоречит предположениям теоремы. Лемма доказана.

ЛЕММА 8.7. *Между любыми двумя парами H_1 и H_2 соседних вершин из U_1 всегда находится пара соседних вершин из U_2 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности предположим, что между H_1 и H_2 нет других пар соседних вершин из U_1 . Предположим противное, т.е. между H_1 и H_2 нет пары последовательных вершин из U_2 . Рассмотрим наименьший фрагмент δ , содержащий H_1 и H_2 . Обозначим через u_i количество вершин в $U_i \cap \delta$. Из леммы 8.6 вытекает, что $u_2 = u_1 - 3$. С другой стороны,

$$u_2 = v^s + t_2^n + t_2^s - t_1^s + 2, \quad u_1 = t_1^n + 2,$$

откуда $t_1^n = v^s + t_2^n + t_2^s - t_1^s + 3$. Однако в силу леммы 8.3 имеет место неравенство $t_1^n \leq t_2^n + v^s + t_2^s$, откуда $t_1^s \geq 3$. Но $t_1^s \leq 2$, так как к не конечным вершинам из γ'_i не крепятся статичные ребра из C_1 . Противоречие. Лемма доказана.

Из лемм 8.6 и 8.7 вытекает следующий результат.

ЛЕММА 8.8. *Каждую не конечную вершину из класса U_1 можно объединить в пару с соседней с ней вершиной из U_2 так, чтобы полученные пары не пересекались.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим сначала, что существует хотя бы одна пара $H = \{h_1, h_2\}$ соседних вершин из класса U_1 . Если обе эти вершины конечные, то класс U_1 состоит из двух конечных вершин, и утверждение леммы тривиально. Пусть одна из рассматриваемых вершин, скажем h_2 , не является конечной. Обозначим через b_1 отличную от h_1 , соседнюю с h_2 вершину из γ'_i . В силу леммы 8.6 $b_1 \in U_2$. В качестве первой пары выберем $\{h_2, b_1\}$.

Будем теперь двигаться от пары H в сторону b_1 , продолжая строить разбиение на пары, до тех пор, пока не дойдем до конечной вершины из γ'_i . Если обе вершины из H не конечные, то будем двигаться одновременно в обе стороны от H . Для каждой следующей не конечной вершины h из U_1 поступим так. Если предшествующая h вершина x принадлежит U_2 и еще не входит ни в одну пару, то в качестве следующей пары возьмем $\{x, h\}$ и продолжим движение. Иначе, в силу лемм 8.6 и 8.7, следующая за h вершина y принадлежит U_2 , и в качестве следующей пары мы возьмем $\{h, y\}$ и продолжим движение.

Покажем, что описанная процедура корректна, и в результате мы всегда дойдем до конечной вершины из γ'_i . Фрагмент γ'_i разбивается парами соседних вершин из U_1 на несколько более мелких фрагментов γ'_{ij} . Каждый из таких фрагментов или ограничен с двух сторон парами соседних вершин из U_1 , или такая пара расположена на одном конце фрагмента γ'_{ij} , а второй его конец совпадает с конечной вершиной из γ'_i .

Предположим сначала, что γ'_{ij} ограничен двумя парами H_1 и H_2 смежных вершин из U_1 . В силу леммы 8.7 фрагмент γ'_{ij} содержит пару соседних вершин из U_2 , и все вершины из U_1 , лежащие внутри γ'_{ij} , перемежаются вершинами из U_2 . Поэтому, применяя эту процедуру, начав с первой пары H_i , построим требуемые пары для всех вершин из U_1 , лежащих внутри γ'_{ij} , и перейдем к последней вершине из γ'_{ij} . Если же фрагмент γ'_{ij} ограничен ровно одной парой H_1 соседних вершин из

U_1 , то по определению при движении по γ'_{ij} от этой пары за каждой внутренней вершиной из U_1 следует вершина из U_2 . Поэтому с помощью этой процедуры, начав с H_1 , снова построим требуемые пары для всех вершин из U_1 , лежащих внутри γ'_{ij} , и перейдем к концевой вершине из γ'_{ij} .

Рассмотрим теперь оставшуюся возможность: предположим, что на фрагменте γ'_i нет соседних вершин из U_1 . Тогда все вершины из U_1 , лежащие внутри γ'_i , с двух сторон соседствуют с вершинами из U_2 . Требуемые пары теперь строятся очевидным образом. Лемма доказана.

Обозначим через $U_2(\gamma')$ объединение множеств U_2 по всем фрагментам γ'_i . Из леммы 8.8 вытекает следующий результат.

ЛЕММА 8.9. *Каждую плавающую вершину из сечения γ' можно объединить в пару с некоторой соседней с ней вершиной из U_2 так, чтобы полученные пары не пересекались.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Искомое множество пар получается как объединение всех пар, построенных для фрагментов γ'_i с помощью леммы 8.8. Так как пары, соответствующие одному фрагменту γ'_i , не пересекаются по построению, остается проверить, что не пересекаются также и пары, соответствующие смежным фрагментам. Действительно, каждые два смежных фрагмента γ'_i и γ'_j пересекаются по вершине, которая в каждом из фрагментов относится к классу U_1 и, являясь концевой, не входит ни в одну пару. Лемма доказана.

Отметим, что вершинам из $U_2(\gamma')$ не инцидентны ребра из класса C_1 .

Вернемся к изучению деформации Υ_t . Напомним, что в линейную вертикальную часть $\sum_l^v(\gamma)$ ее первой вариации дают неположительный вклад как плавающие вершины, так и другие не граничные вершины, инцидентные ребрам из C_1 . Для получения требуемой оценки на $\sum^v(\gamma)$ включим каждую такую вершину в некоторый путь Ψ в сети Υ_0 .

Рассмотрим сначала произвольную пару $\{h, x\}$ из леммы 8.9, где h – плавающая вершина, а x – вершина из U_2 . Обозначим через e_h единственное ребро из C_1 , инцидентное h .

Построим по паре $\{h, x\}$ путь Ψ в сети Υ_0 так. Имеется две возможности: вершина x – или граничная вершина сети Υ , или подвижная вершина степени 3 этой сети. В первом случае Ψ – это единственный путь в расширении $T(\gamma)$ сечения γ сети Υ_0 , соединяющий единственную проектирующуюся в x граничную вершину X сети Υ_0 и единственное невырожденное ребро E_h сети Υ_0 , проектирующееся в e_h . Во втором случае обозначим через e_x единственное ребро из C_2 , инцидентное x , и определим Ψ как единственный путь в расширении $T(\gamma)$ сечения γ сети Υ_0 , соединяющий ребро E_h и единственное невырожденное ребро E_x сети Υ_0 , проектирующиеся в e_x .

Пусть E – не плавающее ребро из C_1 , инцидентное сечению γ . Построим по ребру E путь Ψ в сети Υ_0 так. Обозначим через e проекцию ребра E в Υ , и пусть x – вершина сечения γ' сети Υ , инцидентная e . Имеется две возможности: вершина x – или граничная вершина сети Υ , или подвижная вершина этой сети. В первом случае Ψ – это единственный путь в расширении $T(\gamma)$ сечения γ сети Υ_0 , соединяющий единственную проектирующуюся в x граничную вершину X сети Υ_0 и

ребро E . Во втором случае обозначим через e_x единственное ребро из C_2 , инцидентное x , и определим Ψ как единственный путь в расширении $T(\gamma)$ сечения γ сети Υ_0 , соединяющий ребро E и единственное невырожденное ребро E_x сети Υ_0 , проектирующиеся в e_x .

По построению имеет место следующий результат.

ЛЕММА 8.10. *Пусть γ – произвольное сечение сети Υ_0 . Построенные выше для сечения γ пути $\{\Psi\}$ попарно не пересекаются и содержат все вершины, дающие отрицательный вклад в $\sum_l^v(\gamma)$.*

Пусть $V_1, \dots, V_k$ – последовательные внутренние вершины пути Ψ , занумерованные, начиная от единственного ребра E_1 из Ψ , входящего в C_1 . Отметим, что ни одна вершина V_j не является граничной вершиной сети Υ_0 , а ребра, соединяющие последовательные вершины V_j , вырождены. Обозначим через ξ_j проекцию вектора поля деформации в вершине V_j на вертикальную ось. Имеется две возможности: или концевое ребро E_2 пути Ψ , отличное от E_1 , вырождено, или не вырождено. В последнем случае $E_2 \in C_2$ по построению.

В первом случае суммарный вклад векторов ξ_j в $\sum^v(\gamma)$ имеет вид

$$-\xi_1 + |\xi_1 - \xi_2| + \dots + |\xi_{k-1} - \xi_k| + |\xi_k| \geq -\xi_1 + |\xi_1| \geq 0.$$

Во втором случае суммарный вклад векторов ξ_j в $\sum^v(\gamma)$ имеет вид

$$-\xi_1 + |\xi_1 - \xi_2| + \dots + |\xi_{k-1} - \xi_k| + \xi_k \geq -\xi_1 + \xi_k + |\xi_1 - \xi_k| \geq 0.$$

Таким образом, суммарный вклад векторов ξ_j в $\sum^v(\gamma)$ всегда неотрицателен. Теперь из леммы 8.10 вытекает, что $\sum^v(\gamma)$ неотрицательна. Доказательство теоремы 8.3 закончено.

СЛЕДСТВИЕ 8.4. *Пусть Υ – вложенная невырожденная локально минимальная манхеттенская сеть, т.е. Υ совпадает со своей невырожденной компонентой. Тогда для каждого фрагмента γ имеют место следующие соотношения:*

- 1) числа t_i^s и v^s не превосходят 2 и целиком определяются видом концевых вершин фрагмента;
- 2) более того, $v^s + t_i^s \leq 2$ для $i = 1, 2$.

Список литературы

1. Du D. Z., Hwang F. K., Weng J. F. Steiner minimal trees for Regular Polygons // Disc. and Comp. Geometry. 1987. V. 2. P. 65–84.
2. Francis R. L. A note on the optimum location of new machines in existing plant layouts // J. Indust. Engrg. 1963. V. 14. P. 57–59.
3. Garey M. R., Johnson D. S. The Rectilinear Steiner Problem is NP-Complete // SIAM J. Appl. Math. 1977. V. 32. P. 826–834.
4. Hanan M. On Steiner's Problem with Rectilinear Distance // SIAM J. Appl. Math. 1966. V. 14. P. 255–265.
5. Hwang F. K. On Steiner minimal trees with rectilinear distance // SIAM J. of Appl. Math. 1976. V. 30. P. 104–114.

6. *Hwang F. K.* A linear time algorithm for full Steiner trees // *Oper. Res. Letter.* 1986. V. 5. P. 235–237.
7. *Иванов А. О.* Геометрия плоских локально минимальных бинарных деревьев // *Матем. сб.* 1995. Т. 186. № 9. С. 45–76.
8. *Иванов А. О., Птицына И. В., Тужилин А. А.* Классификация замкнутых минимальных сетей на плоских торах // *Матем. сб.* 1992. Т. 183. № 12. С. 3–44.
9. *Иванов А. О., Тужилин А. А.* Решение проблемы Штейнера для выпуклых границ // *УМН.* 1990. Т. 45. № 2. С. 207–208.
10. *Иванов А. О., Тужилин А. А.* Проблема Штейнера для выпуклых границ или плоские минимальные сети // *Матем. сб.* 1991. Т. 182. № 12. С. 1813–1844.
11. *Иванов А. О., Тужилин А. А.* Геометрия минимальных сетей и одномерная проблема Плато // *УМН.* 1992. Т. 47. № 2. С. 53–115.
12. *Ivanov A. O., Tuzhilin A. A.* Minimal Networks. The Steiner Problem and Its Generalizations. Boca Raton: CRC Press, 1994.
13. *Иванов А. О., Тужилин А. А.* Классификация минимальных скелетов с правильной границей // *УМН.* 1996. Т. 51. № 4. С. 157–158.
14. *Иванов А. О., Тужилин А. А.* Геометрия множества минимальных сетей с заданной топологией и фиксированной границей // *Изв. РАН. Сер. матем.* 1997. Т. 61. № 6. С. 119–152.
15. *Иванов А. О., Тужилин А. А.* Разветвленные геодезические. Геометрическая теория локально минимальных сетей. Lewiston–Queenston: The Edwin Mellen Press, 1999.
16. *Ivanov A. O., Tuzhilin A. A.* Branching solutions to one-dimensional variational problems. Singapore: World Scientific Pub. Press., 2001.
17. *Иванов А. О., Хонг Ван Ле, Тужилин А. А.* Особенности лагранжианов и критерий критичности // *Матем. заметки.* 2001. Т. 69. № 4. С. 566–580.
18. *Jarník V., Kössler M.* О minimalnich grafeth obeahujicich n danijch bodu // *Cas. Pest. Mat. a Fys.* 1934. V. 63. P. 223–235.
19. *Melzak Z. A.* On the problem of Steiner // *Canad. Math. Bull.* 1960. V. 4. P. 143–148.
20. *Мухомелевич В. С., Трубин В. А., Шор Н. З.* Оптимизационные задачи в индустриальном планировании: модели, методы, алгоритмы. М.: Наука, 1986.
21. *Птицына И. В.* Классификация замкнутых локально минимальных сетей на плоских бутылках Клейна // *Вестн. МГУ. Сер. матем.* 1995. № 2. С. 15–22.
22. *Richards D. S., Salowe J. S.* A Linear–Time Algorithm To Construct a Rectilinear Steiner Minimal Tree for k -Extremal Point Sets // *Algorithmica.* 1992. V. 7. P. 247–276.
23. *Тужилин А. А.* Полная классификация локально минимальных бинарных деревьев с правильной границей. Случай скелетов // *Фундаментальная и прикладная математика* 1996. Т. 2. № 2. С. 511–562.

Поступило в редакцию
22.V.2001