Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Данченко, О массивности множеств нарушения принципа максимума модуля, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2010, том 74, выпуск 4, 63–74

DOI: <https://doi.org/10.4213/im4021>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 12:49:38

УДК 517.544.5+517.544.45

В. И. Данченко

О массивности множеств нарушения принципа максимума модуля

В круге $D = \{z: |z| < 1\}$ рассматриваются множества $E_\nu(f) = \{z: |f(z)| \geq \nu\}$ при $\nu > \nu_0(f) := \limsup_{z \rightarrow \partial D} |f(z)|$, где $f(z)$, $z = x + iy$, — комплекснозначные функции, заданные в D и имеющие определенные свойства гладкости по вещественным переменным x, y . Получены оценки некоторых метрических характеристик множеств $E_\nu(f)$. Например, показано, что если $\nu_0(f) = 0$ и $\Delta f \in L_1(D)$, то гиперболическая площадь множества $E_\nu(f)$ растет не быстрее $\nu^{-1-o(1)}$, $\nu \rightarrow 0$, с положительной величиной $o(1)$; если же $f_{\bar{z}} \in L_2(D)$, то эта площадь растет не быстрее $\nu^{-2-o(1)}$. Оценки точны по порядку величины ν .

Библиография: 7 наименований.

Ключевые слова: гиперболические расстояния и площади, емкости и потенциалы, полианалитические функции, принцип максимума модуля, формулы Грина.

§ 1. Введение

Нам понадобятся некоторые факты из гиперболической геометрии в единичном круге (см. [1, гл. 8]). Пусть

$$\varphi(z; \zeta) := \frac{z - \zeta}{1 - z\bar{\zeta}}, \quad z, \zeta \in D := \{z: |z| < 1\}. \quad (1)$$

Гиперболическая метрика в круге D определяется линейным элементом $ds = (1 - |z|^2)^{-1} |dz|$. Гиперболическое расстояние $\rho(z; \zeta)$ между точками z и ζ определяется равенством

$$\operatorname{th} \rho(z; \zeta) = |\varphi(z; \zeta)| \Leftrightarrow \rho(z; \zeta) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + |\varphi(z; \zeta)|}{1 - |\varphi(z; \zeta)|}. \quad (2)$$

Гиперболический круг $g(z_0; r)$ с гиперболическим радиусом $r > 0$ и гиперболическим центром $z_0 \in D$ определяется неравенством

$$\rho(z; z_0) < r \Leftrightarrow |\varphi(z; z_0)| < \frac{e^{2r} - 1}{e^{2r} + 1}.$$

Обычные центр c_0 и радиус R гиперболического круга $g(z_0; r)$ вычисляются по формулам

$$c_0 = z_0 \frac{1 - \operatorname{th}^2 r}{1 - |z_0|^2 \operatorname{th}^2 r}, \quad R = \operatorname{th} r \frac{1 - |z_0|^2}{1 - |z_0|^2 \operatorname{th}^2 r} = (1 - c_0 \bar{z}_0) \operatorname{th} r. \quad (3)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 08-01-00648) и Аналитической ведомственной целевой программы “Развитие научного потенциала высшей школы” (рег. номер 2.1.1/5568).

Гиперболическая площадь измеримого множества $E \subset D$ вычисляется по формуле

$$S_h(E) = \int_E \frac{d \operatorname{mes}_2(z)}{(1 - |z|^2)^2}, \quad d \operatorname{mes}_2(z) = dx dy, \quad z = x + iy. \quad (4)$$

Гиперболические расстояния и площади инвариантны относительно дробно-линейных преобразований круга D [1].

Пусть μ – неотрицательная борелевская мера в единичном круге D . При $\gamma \geq 0$ определим потенциал меры μ :

$$u_\gamma(\mu; z) = \int Q_\gamma(|\varphi(z; \zeta)|) d\mu(\zeta), \quad Q_\gamma(r) = \ln^\gamma \left(\frac{e}{1-r} \right) \ln \frac{1}{r}, \quad (5)$$

и интеграл энергии:

$$I_\gamma(\mu) = \int u_\gamma(\mu; z) d\mu(z). \quad (6)$$

Пусть E – компакт, лежащий в круге D . Через $\mathcal{M}_\gamma$ обозначим класс всех неотрицательных мер μ , сосредоточенных на E , для которых $\|\mu\| = \mu(E) = 1$ и $I_\gamma(\mu) < \infty$. Если $\mathcal{M}_\gamma \neq \emptyset$, то определим емкость $\mathcal{C}_\gamma(E)$ пары (конденсатора) $[E, \partial D]$ формулой (см. [2], [3])

$$\mathcal{C}_\gamma(E) = \left(\inf_{\mu \in \mathcal{M}_\gamma} I_\gamma(\mu) \right)^{-1}.$$

В случае $\mathcal{M}_\gamma = \emptyset$ положим $\mathcal{C}_\gamma(E) = 0$. При $\mathcal{C}_\gamma(E) \neq 0$ существует мера $\tilde{\mu}_\gamma \in \mathcal{M}_\gamma$, минимизирующая интеграл энергии (см., например, [2], [3]). Соответствующее *равновесное распределение* $\mu_\gamma = \mathcal{C}_\gamma(E) \tilde{\mu}_\gamma$ обладает следующим свойством: $u_\gamma(\mu_\gamma; z) = 1$ п. в. на E (почти всюду относительно μ_γ). При этом $\mathcal{C}_\gamma(E) = \|\mu_\gamma\|$. Непосредственно из определения следует, что емкости $\mathcal{C}_\gamma$ инвариантны относительно дробно-линейных преобразований круга D .

Потенциал $u_\gamma(\mu_\gamma; z)$ при $\gamma > 0$ может иметь локальные и глобальные максимумы вне множества E . Неравенство $u_\gamma(\mu_\gamma; z) > 1$ выполняется на множестве положительной емкости. При этом $u_\gamma(\mu_\gamma; z) \rightarrow 0$, $z \rightarrow \partial D$ (поскольку $Q_\gamma(r) \rightarrow 0$, $r \rightarrow 1$).

Далее нам понадобятся введенные потенциалы и емкости $\mathcal{C}_\gamma = \mathcal{C}_\gamma(E)$ только при $\gamma = 0$ или $\gamma = 1$. Очевидно, емкость $\mathcal{C}_1$ не превосходит классической гриновой емкости $\mathcal{C}_0$. С другой стороны, если $\mathcal{C}_0 \neq 0$, то в силу монотонности ядра $Q_1(r)$ для минимизирующей интеграл $I_0(\mu)$ меры $\tilde{\mu}_0 \in \mathcal{M}_0$ имеем

$$\begin{aligned} u_1(\tilde{\mu}_0; z) &\leq \ln \left(\frac{e}{1-r} \right) u_0(\tilde{\mu}_0; z) + \ln \left(\frac{e}{1-r} \right) \ln \frac{1}{r} \cdot 1, \\ u_0(\tilde{\mu}_0; z) &= \frac{1}{\mathcal{C}_0}, \quad r \in (0, 1), \end{aligned}$$

п. в. на E . Отсюда и из определения емкости при $r = \exp(-1/\mathcal{C}_0)$ получаем

$$\frac{1}{2} \mathcal{C}_0 \ln^{-1} \left(\frac{e}{1 - \exp(-1/\mathcal{C}_0)} \right) \leq \mathcal{C}_1 \leq \mathcal{C}_0.$$

Для кругов гиперболические площади S_h и емкости C_0 легко вычисляются с учетом их инвариантности и формулы (3):

$$S_h(g(z_0; r)) = S_h(g(0; r)) = \pi \operatorname{sh}^2 r, \quad C_0(g(z_0; r)) = C_0(g(0; r)) = \ln^{-1} \operatorname{cth} r. \quad (7)$$

Следовательно, $\pi S_h(g(z_0; r)) \leq 2C_0(g(z_0; r))$ при всех $r > 0$, а при $r \geq r_0 > 0$ эти величины слабо эквивалентны: $C_0(g(z_0; r)) \asymp S_h(g(z_0; r))$, т. е. их отношение ограничено снизу и сверху некоторыми положительными постоянными.

Для определенной в круге D комплекснозначной функции $f(z) = f(x + iy)$ двух вещественных переменных x, y положим

$$\begin{aligned} \nu_0(f) &:= \limsup_{z \rightarrow \partial D} |f(z)| = \lim_{\varepsilon \rightarrow 1} \sup_{\varepsilon \leq |z| < 1} |f(z)|, \\ d(f) &:= \left(\int_D |f_{\bar{z}}(z)|^2 d \operatorname{mes}_2(z) \right)^{1/2}, \quad f_{\bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right), \\ \delta(f) &:= \int_D |\Delta f(z)| d \operatorname{mes}_2(z), \quad \Delta f(z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

Величины $d(f)$ и $\delta(f)$ будем использовать для функций $f(z) = f(x + iy)$ классов $C^1(D)$ и $C^2(D)$ соответственно. При $\nu > 0$ положим

$$E_\nu = E_\nu(f) = \{z \in D: |f(z)| \geq \nu\}.$$

В работе рассматривается вопрос о том, насколько массивно могут располагаться множества E_ν вблизи границы круга D в зависимости от $\nu > \nu_0(f)$. В качестве характеристик массивности этих множеств будем применять C_1 -емкость и интеграл

$$J_\sigma(f, E_\nu) := \int_{E_\nu} |f(z)|^\sigma \frac{d \operatorname{mes}_2(z)}{(1 - |z|^2)^2} = \int_{E_\nu} |f(z)|^\sigma dS_h(z), \quad \sigma \in [0, 2). \quad (8)$$

Отметим, что при $\sigma = 0$ в (8) получается интеграл (4), равный гиперболической площади множества E_ν : $J_0(f, E_\nu) = S_h(E_\nu)$.

Сформулируем основные результаты.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f \in C^1(D)$ и конечны величины $\nu_0 = \nu_0(f)$ и $d = d(f)$. Тогда при $\nu > \nu_0$ имеем оценку емкости:

$$C_1(E_\nu) \leq C \frac{d^2}{(\nu - \nu_0)^2}, \quad C = \operatorname{const} \leq 50. \quad (9)$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f \in C^1(D)$ и конечны величины $\nu_0 = \nu_0(f)$ и $d = d(f)$. Тогда при $\nu > \nu_0$ и $\sigma \in [0, 2)$ имеем

$$J_\sigma(f, E_\nu) \leq A(\sigma) \nu^\sigma \frac{d^2}{(\nu - \nu_0)^2} \ln^3 \left(e + \frac{d}{\nu - \nu_0} \right) \quad (10)$$

с некоторой конечной величиной¹ $A(\sigma)$.

¹В теореме 2 и ниже через $A(\cdot)$, $A_j(\cdot)$ обозначаются конечные положительные величины, зависящие лишь от указанных аргументов и, вообще говоря, различные в различных параграфах.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $f \in C^2(D)$ и конечны величины $\nu_0 = \nu_0(f)$ и $\delta = \delta(f)$. Тогда при $\nu > \nu_0$ имеем оценку гиперболической площади:

$$S_h(E_\nu) \leq A \frac{\delta}{\nu - \nu_0} \ln^2 \left(e + \frac{\delta}{\nu - \nu_0} \right), \quad A = \text{const} > 0. \quad (11)$$

Для голоморфных в круге D функций f имеем $d(f) = \delta(f) = 0$, и, следовательно, оценки (9)–(11) равносильны обычному принципу максимума модуля. Неравенство (11) можно рассматривать как свойство решения f уравнения Пуассона в круге D : $\Delta f(z) = F(z)$. В этом случае в оценке (11) величину $\delta(f)$ следует заменить интегралом $\int_D |F(z)| d \text{mes}_2(z)$.

Приведем несколько замечаний о точности оценок.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Степень 3 в (10) можно заменить на $2 + \alpha$ при любом $\alpha \in (0, 1)$; тогда $A(\sigma)$ следует заменить на $A(\sigma, \alpha)$. Степень 2 в (11) можно заменить на $1 + \alpha$ с заменой A на $A(\alpha)$ (см. далее доказательства теорем 2, 3 в § 3).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При $\nu \rightarrow \nu_0$, $\nu_0 = 0$, оценка (10) принимает вид

$$J_\sigma(f, E_\nu) \leq \nu^{\sigma-2-o(1)}, \quad \nu \rightarrow 0, \quad \sigma \in [0, 2),$$

с положительной величиной $o(1)$. Покажем, что степень $\sigma - 2 - o(1)$ здесь нельзя заменить на $\sigma - 2 + \alpha$ при сколь угодно малых постоянных $\alpha > 0$. Пусть $\varepsilon \in (0, 1]$,

$$f(z) = f(\varepsilon; z) = (1 - |z|^2)^{\frac{1+\varepsilon}{2}}, \quad |f_{\bar{z}}|^2 = \frac{(\varepsilon + 1)^2}{4} |z|^2 (1 - |z|^2)^{\varepsilon-1},$$

$$d^2(f) = \frac{\pi}{4} \frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon}.$$

При $\nu \in (0, 1)$ имеем $E_\nu = \{z \in D: |z|^2 \leq r_0^2\}$, где $r_0^2 = 1 - \nu^{2/(1+\varepsilon)}$. Отсюда при $\sigma(1 + \varepsilon) < 2$ находим

$$J_\sigma(f, E_\nu) = 2\pi \int_0^{r_0} r(1 - r^2)^{\sigma \frac{\varepsilon+1}{2} - 2} dr = \frac{2\pi}{2 - \sigma(1 + \varepsilon)} (\nu^{\sigma - \frac{2}{\varepsilon+1}} - 1). \quad (12)$$

Следовательно, при $\sigma \in [0, 2)$ из (12) получаем

$$J_1(f, E_\nu) \geq A(\sigma, \varepsilon) \nu^{\sigma-2+\frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}}, \quad \sigma(1 + \varepsilon) < 2, \quad \nu \rightarrow 0, \quad (13)$$

что и требовалось показать.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. При $\sigma = 0$, $\nu_0(f) = 0$ и конечных величинах $d(f)$ и $\delta(f)$ из оценок (10) и (11) получаются соответственно следующие оценки роста гиперболической площади при $\nu \rightarrow 0$:

$$S_h(E_\nu) \leq \nu^{-2-o(1)} \quad (d(f) < \infty), \quad S_h(E_\nu) \leq \nu^{-1-o(1)} \quad (\delta(f) < \infty), \quad (14)$$

с положительными величинами $o(1)$. Из неравенства (13), в частности, следует, что первая оценка в (14) точна по порядку величины ν в указанном смысле. Точной по порядку является и вторая оценка в (14). Это проверяется на примере функции $f(\varepsilon; z)$ из замечания 2 при $\varepsilon = 1$. В этом случае $f(1; z) = 1 - |z|^2$, и из (12) при $\sigma = 0$ находим $S_h(E_\nu) = \pi(\nu^{-1} - 1)$, $\nu \in (0, 1)$.

Отметим, что класс вещественных функций $f \in C^2(D)$, для которых $\nu_0(f) = \nu_0(f|\operatorname{grad} f|) = 0$ и применима первая оценка в (14), шире аналогичного класса для второй оценки. Другими словами, справедлива импликация $\delta(f) < \infty \Rightarrow d(f) < \infty$. Действительно, по формуле Грина имеем (см. [4, с. 288])

$$\int_D (f_x^2(z) + f_y^2(z)) d\operatorname{mes}_2(z) = - \int_D f(z) \Delta f(z) d\operatorname{mes}_2(z), \quad \nu_0(f|\operatorname{grad} f|) = 0.$$

Отсюда для вещественных функций получаем

$$4d^2(f) \leq \int_D |f(z)| |\Delta f(z)| d\operatorname{mes}_2(z) \leq \sup_{z \in D} |f(z)| \delta(f).$$

Вместе с тем возможны случаи, когда $d(f) < \infty$, а $\delta(f) = \infty$. Примером может служить рассматриваемая в замечании 2 функция $f(\varepsilon; z)$ при любом $\varepsilon \in (0, 1)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Покажем, что оценка (11) точна по порядку величины δ , когда $\delta \rightarrow \infty$, т. е. δ в правой части (11) нельзя заменить на $\delta^{1-\alpha}$ при сколь угодно малых постоянных $\alpha > 0$. Рассмотрим функцию

$$f_a(z) = (1 - |z|^2)(z - a)^{-2}, \quad a \in (1, \sqrt{2}).$$

В данном случае $\nu_0(f_a) = 0$. При $\nu = 1$ оценим гиперболическую площадь множества $E_1(f_a)$. Это множество определяется неравенством

$$|f_a(re^{i\varphi})| \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - r^2 \geq (r - a)^2 + 4ra \sin^2 \frac{\varphi}{2},$$

т. е., как легко проверить,

$$E_1(f_a) = \left\{ re^{i\varphi} : r \in [r_1, r_2], \sin \frac{\varphi}{2} \in [-\varphi_0(r), \varphi_0(r)] \right\},$$

где

$$[r_1, r_2] = \left[\frac{a - \sqrt{2 - a^2}}{2}, \frac{a + \sqrt{2 - a^2}}{2} \right], \quad \varphi_0(r) = \sqrt{\frac{(r_2 - r)(r - r_1)}{2ra}}, \\ 0 < r_1 < 2^{-1/2} < r_2 < 1, \quad 1 - r_2 = O(a - 1)^2, \quad a \rightarrow 1. \quad (15)$$

Оценим гиперболическую площадь множества

$$e_1 = \{ re^{i\varphi} : r \in [r_1, r_2], \varphi \in [-2\varphi_0(r), 2\varphi_0(r)] \} \subset E_1(f_a).$$

Легко проверяется неравенство $4\varphi_0(r) \geq \sqrt{r_2 - r}$ при $r \in [2^{-1/2}, r_2]$ и достаточно малых $a - 1 > 0$ (можно взять $1 < a \leq 4/3$). Отсюда получаем с некоторой константой $A > 0$:

$$S_h(E_1(f_a)) \geq S_h(e_1) = 4 \int_0^{r_2} \varphi_0(r) \frac{r dr}{(1 - r^2)^2} \geq A \int_0^{r_2} \sqrt{r_2 - r} \frac{r dr}{(1 - r^2)^2}.$$

Последний интеграл равен

$$\frac{1}{4\sqrt{1 - r_2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{r_2}{1 - r_2}} - \frac{\sqrt{r_2}}{2} + \frac{1}{8\sqrt{1 + r_2}} \ln \frac{\sqrt{1 + r_2} + \sqrt{r_2}}{\sqrt{1 + r_2} - \sqrt{r_2}} \asymp \frac{1}{a - 1}, \quad a \rightarrow 1.$$

Здесь мы учли (15).

С другой стороны, имеем $\Delta f_a(z) = -4(z(z - a)^{-2})'$, и, как несложно проверить, $\delta(f_a) \asymp (a - 1)^{-1}$ при $a \rightarrow 1$. Следовательно, $S_h(E_1(f_a)) \geq A_1 \delta(f_a) \rightarrow \infty$ при $a \rightarrow 1$, $A_1 = \operatorname{const}$.

§ 2. Вспомогательные результаты

Пусть $f(z)$, $z = x + iy$, – комплекснозначная функция, непрерывная в $\bar{D}$ и имеющая непрерывные производные по x и y в D (кратко $f \in C(\bar{D}) \cap C^1(D)$). Справедлива следующая формула Грина (см., например, [5, с. 297]):

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{\pi} \int_D f_{\bar{\zeta}}(\zeta) \frac{d \operatorname{mes}_2(\zeta)}{\zeta - z}.$$

Последний интеграл, вообще говоря, понимается как несобственный, т. е. как предельное значение соответствующих интегралов по кругам $|z| \leq 1 - \varepsilon$ при $0 < \varepsilon \rightarrow 0$. Однако в содержательном для нас случае $d(f) < \infty$ он является интегралом Лебега. Отсюда, заменив $f(\zeta)$ на $f(\zeta)/(1 - \zeta \bar{z})$, $z \in D$, получим $f(z) = G_1(z) - G_2(z)$, где

$$G_1(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=1} \frac{(1 - |z|^2)f(\zeta) |d\zeta|}{|\zeta - z|^2}, \quad G_2(z) = \frac{1}{\pi} \int_D f_{\bar{\zeta}}(\zeta) \frac{(1 - |z|^2) d \operatorname{mes}_2(\zeta)}{(\zeta - z)(1 - \zeta \bar{z})}. \quad (16)$$

Для функций $f \in C(\bar{D}) \cap C^2(D)$ будем использовать также другую формулу Грина (см. [4, с. 291]):

$$f(z) = G_1(z) + G_3(z), \quad G_3(z) = \frac{1}{2\pi} \int_D \Delta f(\zeta) \ln |\varphi(z; \zeta)| d \operatorname{mes}_2(\zeta). \quad (17)$$

Нам понадобится оценка интеграла

$$K(\mu) := \pi \int |G_2(z)| d\mu(z),$$

где $\mu(z)$ – неотрицательная конечная борелевская мера на D . При оценке, а также при доказательстве теоремы 1 (в § 3) будем пользоваться методом, примененным в работе [2, гл. 5].

ЛЕММА 1. При $d = d(f)$ и некотором $A_1 \leq 450$ имеет место неравенство

$$K^2(\mu) \leq A_1 d^2 \iint \ln \left(\frac{e}{1 - |\varphi(z_1; z_2)|} \right) \ln \left(\frac{1}{|\varphi(z_1; z_2)|} \right) d\mu(z_1) d\mu(z_2),$$

т. е. (см. (6))

$$K^2(\mu) \leq A_1 d^2 I_1(\mu), \quad d = d(f). \quad (18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем обозначение

$$L_E(z_1, z_2) := \int_E \frac{(1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2) d \operatorname{mes}_2(\zeta)}{|\zeta - z_1| |\zeta - z_2| |1 - \zeta \bar{z}_1| |1 - \zeta \bar{z}_2|}, \quad (19)$$

где E – измеримое подмножество круга D . Несложно проверить, что (см. (2))

$$\frac{(1 - |\zeta|^2)(1 - |z|^2)}{|\zeta - z| |1 - \zeta \bar{z}|} = \frac{1 - \operatorname{th}^2 \rho(z; \zeta)}{\operatorname{th} \rho(z; \zeta)} = \frac{2}{\operatorname{sh} 2\rho(z; \zeta)}, \quad \zeta, z \in D,$$

поэтому интеграл (19) можно переписать в виде

$$L_E(z_1, z_2) = \int_E \frac{4}{\operatorname{sh}(2\rho(z_1; \zeta)) \operatorname{sh}(2\rho(z_2; \zeta))} \frac{d \operatorname{mes}_2(\zeta)}{(1 - |\zeta|^2)^2}. \quad (20)$$

Далее, используя неравенство Коши–Буняковского, находим

$$\begin{aligned} K^2(\mu) &\leq \left(\int_D |f_{\bar{\zeta}}(\zeta)| \left(\int \frac{1-|z|^2}{|\zeta-z||1-\zeta\bar{z}|} d\mu(z) \right) d\text{mes}_2(\zeta) \right)^2 \\ &\leq d^2 \int_D \left(\int \frac{(1-|z|^2) d\mu(z)}{|\zeta-z||1-\zeta\bar{z}|} \right)^2 d\text{mes}_2(\zeta) \\ &= d^2 \int d\mu(z_1) \int L_D(z_1, z_2) d\mu(z_2). \end{aligned} \quad (21)$$

Оценим величину $L_D(z_1, z_2)$ при $z_1 \neq z_2$. Пусть $r_0 = \rho(z_1; z_2)$ — гиперболическое расстояние между точками z_1, z_2 . Исключим из D объединение кругов $g_1 = g(z_1; r_0)$ и $g_2 = g(z_2; r_0)$. Оставшееся множество обозначим через $\mathcal{E}$, $\mathcal{E} = D \setminus (g_1 \cup g_2)$. Пусть

$$\mathcal{E}_1 = \{\zeta \in \mathcal{E} : \rho(z_1; \zeta) \leq \rho(z_2; \zeta)\}, \quad \mathcal{E}_2 = \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_1.$$

Перейдем к переменной $r = \rho(z_1; \zeta)$. Тогда, учитывая, что $S_h(g(z_1; r)) = \pi \text{sh}^2 r$ (см. (7)) и

$$dS_h(g(z_1; r)) = \pi \text{sh}(2r) dr,$$

из (20) при $E = \mathcal{E}_1$ получим

$$L_{\mathcal{E}_1}(z_1, z_2) \leq \int_{\mathcal{E}_1} \frac{4}{\text{sh}^2(2\rho(z_1; \zeta))} \frac{d\text{mes}_2(\zeta)}{(1-|\zeta|^2)^2} = 4\pi \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{\text{sh}(2r)} = 2\pi \ln \frac{1}{\text{th } r_0}.$$

Положим $t = \text{th } r_0$. Тогда, используя предыдущую оценку и аналогичную оценку интеграла $L_{\mathcal{E}_2}(z_1, z_2)$, получим

$$L_{\mathcal{E}}(z_1, z_2) \leq 4\pi \ln \frac{1}{t}, \quad t = \text{th } r_0 = \text{th } \rho(z_1; z_2) = |\varphi(z_1; z_2)|. \quad (22)$$

Оценим интеграл $L_{g_1}(z_1, z_2)$. Сделаем замену переменной

$$v = v(\zeta) = \frac{\zeta - z_1}{1 - \zeta \bar{z}_1}, \quad \zeta = \frac{v + z_1}{1 + v \bar{z}_1}, \quad d\zeta = \frac{1 - |z_1|^2}{(1 + v \bar{z}_1)^2} dv.$$

Тогда после простых преобразований получим

$$\begin{aligned} \zeta - z_1 &= \frac{1 - |z_1|^2}{1 + v \bar{z}_1} v, & 1 - \zeta \bar{z}_1 &= \frac{1 - |z_1|^2}{1 + v \bar{z}_1}, \\ \zeta - z_2 &= \frac{1 - \bar{z}_1 z_2}{1 + v \bar{z}_1} (v - v_2), & 1 - \zeta \bar{z}_2 &= \frac{1 - z_1 \bar{z}_2}{1 + v \bar{z}_1} (1 - v \bar{v}_2), \\ v_2 &= v(z_2) = \varphi(z_2; z_1), & |v_2| &= t. \end{aligned}$$

Следовательно, интеграл (19) при $E = g_1$ принимает вид

$$L_{g_1}(z_1, z_2) = \frac{(1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)}{|1 - \bar{z}_1 z_2|^2} M = (1 - t^2) M \leq 2(1 - t) M, \quad (23)$$

где

$$M = \int_{|v| \leq t} \frac{d\text{mes}_2(v)}{|v| |v - v_2| |1 - v \bar{v}_2|}, \quad |v_2| = t > 0. \quad (24)$$

При оценке M будем считать для простоты записи, что величина v_2 вещественна и положительна, так что $v_2 = t \in (0, 1)$. Далее, при $\varphi \in [0, \pi]$ и $0 < r \leq t \leq 1$ используем неравенства

$$\frac{r^2 + t^2 - 2rt \cos \varphi}{(t - r + t\varphi)^2} \geq \frac{1}{20}, \quad \frac{1 + r^2 t^2 - 2rt \cos \varphi}{(1 - tr + t\varphi)^2} \geq \frac{1}{20},$$

которые легко получаются из неравенства

$$\cos \varphi = 1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \leq 1 - 2 \frac{\varphi^2}{\pi^2}, \quad \varphi \in [0, \pi].$$

Тогда, перейдя к полярным координатам $v = re^{i\varphi}$, из (24) получим

$$\begin{aligned} \frac{M}{40} &= \frac{1}{20} \int_0^t dr \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{r^2 + t^2 - 2rt \cos \varphi} \sqrt{1 + r^2 t^2 - 2rt \cos \varphi}} \\ &\leq \int_0^t dr \int_0^\infty \frac{d\varphi}{(t - r + t\varphi)(1 - rt + t\varphi)} \\ &= \frac{1}{t(1-t)} \int_0^t \frac{1}{r+1} \ln \left(\frac{1-tr}{t-r} \right) dr \leq \frac{1}{t(1-t)} \int_0^t \ln \left(\frac{1-tr}{t-r} \right) dr \\ &= -\frac{(1+t) \ln(1-t^2)}{t^2} - \frac{\ln t}{1-t} \leq -2 \frac{\ln(1-t)}{t} - \frac{\ln t}{1-t}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (23) находим

$$L_{g_1}(z_1, z_2) \leq -80(1-t) \left(2 \frac{\ln(1-t)}{t} + \frac{\ln t}{1-t} \right) \leq A_2 \ln \left(\frac{e}{1-t} \right) \ln \frac{1}{t},$$

где, как несложно проверить, можно взять $A_2 = 200$. Оценка для $L_{g_2}(z_1, z_2)$ аналогична. Отсюда и из (22) получаем

$$L_D(z_1, z_2) \leq 4\pi \ln \frac{1}{t} + 2A_2 \ln \left(\frac{e}{1-t} \right) \ln \frac{1}{t}, \quad t = |\varphi(z_1; z_2)|,$$

откуда с учетом (21) следует оценка (18). Лемма доказана.

Будем использовать следующий результат о покрытии из [6, теорема 4.1], где следует положить $\alpha = 0$, $\beta = 2$.

ЛЕММА 2 [6]. Пусть μ – неотрицательная и конечная в D борелевская мера, $\gamma \geq 0$, $\varepsilon > \gamma$. Тогда существует конечный или счетный набор (зависящий от ε и γ) кругов $g(z_k; r_k)$, $k = 1, 2, \dots$, объединение W которых обладает следующими свойствами:

$$S_h(W) \leq \sum_k S_h(g(z_k; r_k)) = \pi \sum_k \text{sh}^2 r_k \leq A_0 \|\mu\| \ln^{1+\varepsilon}(e + \|\mu\|), \quad (25)$$

где $A_0 = A_0(\varepsilon, \gamma)$; при $z \in D \setminus W$ справедливо неравенство

$$u_\gamma(\mu; z) \leq \frac{1}{2}. \quad (26)$$

§ 3. Доказательство основных результатов

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Без ограничения общности можно считать, что f непрерывна в замкнутом круге $\overline{D}$. Действительно, в противном случае при малых $\varepsilon > 0$ рассмотрим непрерывные в $\overline{D}$ функции $f_\varepsilon(z) = f(z(1 - \varepsilon))$. При $\varepsilon \rightarrow 0$ функции $f_\varepsilon(z)$ и их частные производные первого порядка сходятся к функции f и к ее соответствующим производным равномерно на компактных подмножествах круга D . При этом, очевидно, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \nu_0(f_\varepsilon) = \nu_0(f)$, $d(f_\varepsilon) \rightarrow d(f) < \infty$. Поэтому если неравенство (9) справедливо для функций f_ε , то, выбрав положительные $\delta(\varepsilon) \rightarrow 0$ ($\varepsilon \rightarrow 0$) так, что $E_\nu(f) \subset E_{\nu-\delta(\varepsilon)}(f_\varepsilon)$, получим при достаточно малых ε :

$$\mathcal{C}_1(E_\nu(f)) \leq \mathcal{C}_1(E_{\nu-\delta(\varepsilon)}(f_\varepsilon)) \leq C \frac{d^2(f_\varepsilon)}{(\nu - \delta(\varepsilon) - \nu_0(f_\varepsilon))^2}.$$

Отсюда, выбрав $\varepsilon_n \rightarrow 0$ так, что $\nu_0(f_{\varepsilon_n}) \rightarrow \nu_0(f)$, в пределе получим нужное неравенство для f .

Итак, пусть $f \in C(\overline{D}) \cap C^1(D)$. Тогда, применив очевидную оценку интеграла Пуассона в (16), получим $|G_1(z)| \leq \nu_0$ при $z \in D$. Поэтому из неравенства $|f(z)| \geq \nu > \nu_0$ на $E_\nu \subset D$ следует, что $|G_2(z)| \geq |f(z)| - |G_1(z)| \geq \nu - \nu_0 > 0$ на E_ν . Пусть μ_1 – равновесное распределение на E_ν , т.е. $\mu_1(E_\nu) = \mathcal{C}_1(E_\nu)$, и $u_1(\mu_1; \zeta) = 1$ п.в. на E_ν . Из (18) получаем

$$(\nu - \nu_0)^2 \pi^2 \mathcal{C}_1^2(E_\nu) \leq K^2(\mu_1) \leq A_1 d^2 \mathcal{C}_1(E_\nu),$$

что и требовалось доказать.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть $F_n = \{z: 2^n \nu \leq |f(z)| \leq 2^{n+1} \nu\}$, $n = 0, 1, \dots$. Тогда $E_\nu = \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n$. По теореме 1 имеем

$$c_n := \mathcal{C}_1(F_n) \leq C(2^n \nu - \nu_0)^{-2} d^2 \leq 2^{-2n} C(\nu - \nu_0)^{-2} d^2, \quad n = 0, 1, \dots \quad (27)$$

Используя для равновесной на F_n массы $\mu_1^{(n)}$ лемму 2 с $\gamma = 1$, $\varepsilon = 2$, получим набор кругов $g(z_k^{(n)}; r_k^{(n)})$, $k = 1, 2, \dots$, объединение W_n которых обладает свойствами (25) и (26). В силу (26) множество W_n покрывает все множество F_n , за возможным исключением некоторого его подмножества нулевой емкости $\mathcal{C}_1$ (и нулевой площади). С учетом (25) имеем следующую оценку интеграла (8) при $n \geq 0$:

$$J_\sigma(f, F_n) \leq 2^{(n+1)\sigma} \nu^\sigma S_h(W_n) \leq A_0 2^{(n+1)\sigma} \nu^\sigma c_n \ln^3(e + c_n). \quad (28)$$

Из (27) и (28) находим

$$J_\sigma(f, F_n) \leq A_3(\sigma) 2^{(\sigma-2)n} \frac{\nu^\sigma d^2}{(\nu - \nu_0)^2} \ln^3\left(e + \frac{d}{\nu - \nu_0}\right), \quad n = 0, 1, \dots$$

Просуммировав полученные неравенства по всем n , получим (10). Теорема доказана. Для уточнения, отмеченного в замечании 1, следует взять $\varepsilon = 1 + \alpha$, $\alpha \in (0, 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Как и при доказательстве теоремы 1, можно считать, что $f \in C(\overline{D}) \cap C^2(D)$. Тогда из формулы Грина (17), как и в доказательстве теоремы 1, получаем, что $|G_3(z)| \geq \nu - \nu_0 > 0$ на E_ν . Рассмотрим потенциал вида (5)

$$u_0(\mu; z) = \int_D Q_0(|\varphi(z; \zeta)|) d\mu(\zeta) = - \int_D \ln |\varphi(z; \zeta)| d\mu(\zeta)$$

меры

$$d\mu(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\nu - \nu_0} |\Delta f(\zeta)| d \operatorname{mes}_2(\zeta).$$

Пусть $\gamma = 0$, $\varepsilon = 1$. По лемме 2 существует покрытие кругами $g(z_k; r_k)$, объединение W которых обладает свойствами (25), (26). Заметим, что $E_\nu \subset W$. Действительно, если бы нашлась точка $z_0 \in E_\nu \setminus W$, то с учетом неравенств $|G_3(z_0)| \geq \nu - \nu_0$ и (26) мы пришли бы к противоречию:

$$\nu - \nu_0 \leq |G_3(z_0)| \leq (\nu - \nu_0) u_0(\mu; z_0) \leq \frac{1}{2}(\nu - \nu_0).$$

Следовательно, из (25) при $\gamma = 0$, $\varepsilon = 1$ получаем

$$S_h(E_\nu) \leq S_h(W) \leq A_0 \|\mu\| \ln^2(e + \|\mu\|),$$

где $\|\mu\| = (2\pi)^{-1}(\nu - \nu_0)^{-1} \delta(f)$. Теорема доказана. Для уточнения, отмеченного в замечании 1, следует взять $\varepsilon = \alpha \in (0, 1)$.

§ 4. Некоторые оценки для бианалитических функций

Рассмотрим бианалитические в круге D функции f , т. е. однозначные решения обобщенного уравнения Коши–Римана $\partial^2 f / \partial \bar{z}^2 = 0$. Такие функции представляются в виде $f(z) = \varphi_0(z) + \bar{z}\varphi_1(z)$, где $\varphi_{0,1}(z)$ – голоморфные в D функции (компоненты). Для бианалитических функций обычный принцип максимума модуля неверен; это видно из простейшего примера $f(z) = 1 - |z|^2 = 1 - z\bar{z}$. Однако для них можно получить некоторый обобщенный принцип максимума. Используем следующую формулу для среднего значения (см. [7]):

$$\varepsilon f(0) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon \cos t} f(\rho \sqrt{1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon \cos t} e^{is}) \cos t ds dt,$$

где $\rho > 0$, $\varepsilon \in (0, 1)$, $\rho(1 + \varepsilon) < 1$. Отсюда получаем

$$|\varepsilon f(0)| \leq \frac{\|f\|_{C(K(\rho, \varepsilon))}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1 - \varepsilon^2) |\cos t|}{1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon \cos t} dt = 2 \frac{1 + \varepsilon^2}{\pi} \frac{\arctg \varepsilon}{\varepsilon} \|f\|_{C(K(\rho, \varepsilon))}, \quad (29)$$

где $K(\rho, \varepsilon) = \{z: \rho(1 - \varepsilon) \leq |z| \leq \rho(1 + \varepsilon) < 1\}$. Оценка (29) уточняет следующее неравенство из работы [7]:

$$|\varepsilon f(0)| \leq \|f\|_{C(K(\rho, \varepsilon))}, \quad \rho > 0, \quad \varepsilon \in (0, 1),$$

поскольку множитель перед нормой в правой части неравенства (29) монотонно возрастает от $2/\pi$ до 1 при $\varepsilon \in (0, 1)$.

При $\rho = \rho(\varepsilon) = (1 + \varepsilon)^{-1}$ из (29) следует, что для любой бианалитической в круге D функции f имеем

$$\sup_{z \in K_\varepsilon} |f(z)| \geq \frac{\pi}{2} \frac{\varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2} \frac{|f(0)|}{\operatorname{arctg} \varepsilon} \geq \varepsilon |f(0)|, \quad K_\varepsilon := \left\{ z : \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \leq |z| < 1 \right\}. \quad (30)$$

Пусть $\nu > 0$, $E_\nu = E_\nu(f)$, $f(0) \neq 0$. Предположим, что $E_\nu \cap K_\varepsilon = \emptyset$. Тогда из (30) получаем

$$\nu > \sup_{z \in K_\varepsilon} |f(z)| > \varepsilon |f(0)| \Rightarrow \varepsilon < \nu |f(0)|^{-1}.$$

Следовательно, при $\varepsilon = \varepsilon_\nu := \nu |f(0)|^{-1} < 1$ имеем $E_\nu \cap K_\varepsilon \neq \emptyset$. Отсюда получаем оценку для расстояния от множеств $E_\nu \neq \emptyset$ до границы круга:

$$\operatorname{dist}(E_\nu, \partial D) \leq 1 - (1 - \varepsilon_\nu)(1 + \varepsilon_\nu)^{-1} < 2\nu |f(0)|^{-1}, \quad \nu > 0.$$

Следующее утверждение дает некоторую характеристику разреженности множеств E_ν , $\nu > \nu_0$, вблизи границы круга в зависимости от свойств компоненты φ_1 .

СЛЕДСТВИЕ (из теорем 2, 3). Пусть $f(z) = \varphi_0(z) + \bar{z}\varphi_1(z)$ – бианалитическая в D функция, $\nu_0 = \nu_0(f) < \infty$. Тогда при любых $\nu > \nu_0$ и $\sigma \in [0, 2)$ для интеграла $J_\sigma(f, E_\nu)$ справедливо неравенство (10), а для гиперболической площади $S_h(E_\nu)$ справедливо неравенство (11), где следует положить

$$d = \left(\int_D |\varphi_1(z)|^2 d\operatorname{mes}_2(z) \right)^{1/2}, \quad \delta = 4 \int_D |\varphi_1'(z)| d\operatorname{mes}_2(z).$$

Неравенства (10), (11) со значениями d и δ из данного следствия вытекают из теорем 2, 3 с учетом равенств

$$f_{\bar{z}} = \varphi_1(z), \quad \Delta f(z) = 4\varphi_1'(z).$$

Точность по порядку оценки (11) в данном случае подтверждают примеры бианалитических функций из замечаний 3, 4.

Список литературы

1. Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, Наука, М., 1966; англ. пер.: G. M. Goluzin, *Geometric theory of functions of a complex variable*, Transl. Math. Monogr., **26**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1969.
2. Л. Карлесон, *Избранные проблемы теории исключительных множеств*, Мир, М., 1971; пер. с англ.: L. Carleson, *Selected problems on exceptional sets*, Van Nostrand, Princeton, NJ, 1967.
3. У. Хейман, П. Кеннеди, *Субгармонические функции*, Мир, М., 1980; пер. с англ.: W. K. Hayman, P. B. Kennedy, *Subharmonic functions*, London Math. Soc. Monogr. Ser., **9**, Academic Press, London–New York–San Francisco, 1976.
4. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, *Уравнения математической физики*, 4-е изд., Наука, М., 1972; англ. пер. 2-го изд.: A. N. Tikhonov, A. A. Samarskii, *Equations of mathematical physics*, Macmillan, New York; Pergamon Press, Oxford, 1963.

5. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, *Методы теории функций комплексного переменного*, 5-е изд., Наука, М., 1987; нем. пер. 3-го изд.: М. А. Lawrentjew, B. W. Schabat, *Methoden der komplexen Funktionentheorie*, VEB, Berlin, 1967.
6. В. И. Данченко, “Оценки потенциалов Грина. Приложения”, *Матем. сб.*, **194**:1 (2003), 61–86; англ. пер.: V. I. Danchenko, “Estimates of Green potentials. Applications”, *Sb. Math.*, **194**:1 (2003), 63–88.
7. В. И. Данченко, Е. П. Долженко, “О средних интегральных значениях решений обобщенного уравнения Коши–Римана”, *Соврем. матем. и ее прил.*, **36** (2005), 41–44; англ. пер.: V. I. Danchenko, E. P. Dolzhenko, “On mean integral values of solutions of the generalized Cauchy–Riemann equations”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **145**:5 (2007), 5188–5191.

В. И. ДАНЧЕНКО (V. I. DANCHENKO)
Владимирский государственный университет
им. А. Г. и Н. Г. Столетовых
E-mail: danch@vpti.vladimir.ru

Поступило в редакцию
18.09.2008