Общероссийский математический портал

Ю. А. Неретин, Действие надалгебры в планшерелевском разложении и операторы сдвига в минимом направлении, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2002, том 66, выпуск 5, 171–182

DOI: <https://doi.org/10.4213/im404>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 15:52:34

УДК 519.46

Ю. А. Неретин

Действие надалгебры в планшерелевском разложении и операторы сдвига в мнимом направлении

Рассматривается тензорное произведение унитарного представления группы $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ со старшим весом и комплексно-сопряженного представления с младшим весом. В пространстве представления действует прямое произведение групп $G \times G$. Разложим полученное представление в прямой интеграл относительно диагональной подгруппы $G \subset G \times G$, этот прямой интеграл реализуется как пространство L^2 на произведении окружности с координатой $\phi \in [0, 2\pi)$ и полупрямой $s \geq 0$, где s нумерует унитарные представления группы G основной серии.

Получены явные формулы для действия алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2$ в этом прямом интеграле. Оказывается, что операторы представления являются дифференциальными операторами второго порядка по ϕ и разностными операторами второго порядка по s , причем разностные операторы выражаются через сдвиг в мнимом направлении $s \mapsto s + i$.

Библиография: 32 наименования.

0. Введение.

В последние 50 лет было решено много задач о явном спектральном разложении ограничений унитарных представлений на подгруппы (см. библиографию в [22]).

Этот класс задач содержит некоторые проблемы, которые обычно формулируются в других терминах.

1. *Разложение тензорного произведения представлений ρ_1, ρ_2 группы G .* Действительно, это в точности задача об ограничении представлений группы $G \times G$ на диагональную подгруппу $G \subset G \times G$.

2. *Разложение L^2 на псевдоримановом симметрическом пространстве G/H .* Как было показано в [23], для любого классического псевдориманова симметрического пространства G/H существуют классическая группа $\tilde{G} \supset G$ и представление ρ основной вырожденной серии группы $\tilde{G}$, удовлетворяющее одному из следующих двух свойств (обычно первому):

1) ограничение ρ на G есть $L^2(G/H)$;

2) ограничение ρ на G есть прямая сумма пространств $L^2(G/H_j)$, где G/H_j – конечный набор симметрических пространств, а G/H – одно из пространств G/H_j .

Следовательно, разложение L^2 на классическом псевдоримановом симметрическом пространстве может рассматриваться как задача об ограничении представлений¹.

Работа поддержана грантом NWO 047–008–009.

¹Это явление легко увидеть из статьи Макаревича [18], опубликованной в 1973 г., странным образом оно оставалось не сформулированным в течение длительного времени.

Описание спектрального типа (без явной формулы Планшереля) для всех псевдоримановых симметрических пространств было недавно получено в работах ван ден Бана, Шлихткрулля, Делорма и Ошимы (доказательство содержится в объединении большого числа работ, ссылки см. в [2], [7]). По-видимому, для классических симметрических пространств проблема явного вычисления меры Планшереля близка к полному решению.

Для некоторых случаев явная мера Планшереля известна; в частности, для L^2 на полупростых группах (см. [9], [14]), на римановых симметрических пространствах (см. [9]–[11], а также [15]), на пространствах ранга 1 (см. [20], [21]) и на пространствах $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$, где $G_{\mathbb{C}}$ – комплексная группа, а $G_{\mathbb{R}}$ – ее вещественная форма (см. [12], [13]).

3. *Керн-представления Березина* (деформация L^2 на псевдоримановом симметрическом пространстве G/K) также могут быть получены как ограничения с некоторой надгруппы $G^0 \supset G$ (см. [24], [26] и ссылки в [26]).

Обычно проблема некоммутативного гармонического анализа формулируется как задача о спектре представления или как более сложная задача о явном разложении представления в прямой интеграл неприводимых представлений. Последний вопрос включает явное вычисление спектральной меры (так называемой меры Планшереля). Недавние работы автора [25], [26] содержат попытку изучения “анализа после формулы Планшереля”.

Настоящая работа является продолжением статьи [25]. Здесь мы пытаемся понять, возможен ли ответ на следующий вопрос.

Вопрос. Пусть нам известна явная формула Планшереля для ограничения унитарного представления ρ группы G на подгруппу H . Возможно ли явно выписать формулы, задающие действие алгебры Ли группы G в прямом интеграле представлений H ?

Мы получаем положительное решение этой проблемы в одном из простейших возможных случаев, а именно для тензорного произведения представления $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ со старшим весом и комплексно-сопряженного представления с младшим весом. Это тензорное произведение и его разложение многократно рассматривались в литературе по теории представлений и специальным функциям в последние 40 лет (см., например, [27], [5], [31], [19], [8], [28], [29]). Однако формулы для действия алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2$ в тензорном произведении не были известны. Причина – необычный для теории представлений вид этих операторов.

Оказывается, что выписанные ниже операторы (12)–(14) алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2$ являются дифференциальными операторами второго порядка по одной переменной и разностными операторами второго порядка по другой переменной; более того, оказывается, что разностные операторы определены через сдвиг в мнимом направлении, т. е. в нашей формуле появляются операторы вида

$$Tf(x) = f(x + i), \quad f \in L^2(\mathbb{R})$$

($i^2 = -1$). Здесь нет внутреннего противоречия, разностные операторы корректно определены на функциях, допускающих аналитическое продолжение в подходящую полосу. Ведь стандартные операторы $f \mapsto xf$ и $f \mapsto \frac{d}{dx}f$ тоже не определены во всем пространстве $L^2(\mathbb{R})$.

Сначала эти операторы были получены автором с помощью теорем об операционном исчислении для индексного гипергеометрического преобразования (см. ниже формулу (22)) из [25]. Но окончательные формулы оказываются элементарными и могут быть проверены непосредственно элементарными методами.

Так как примерная структура формул для действия надалгебры теперь стала относительно понятной, естественно сформулировать более общую задачу, что и сделано выше.

Настоящая работа была выполнена во время моего пребывания в институте им. Эрвина Шрёдингера (Вена). Я благодарю администрацию института за гостеприимство.

1. Группа $SL(2, \mathbb{R})$. Зададим группу $SL(2, \mathbb{R})$ как группу комплексных (2×2) -матриц вида

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad |a|^2 - |b|^2 = 1.$$

Через D обозначим круг $|z| < 1$ на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, а через S^1 — окружность $|z| = 1$. Представим точки окружности в виде $z = e^{i\varphi}$.

Группа $SL(2, \mathbb{R})$ действует на круге D мёбиусовскими преобразованиями

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}: \quad z \mapsto \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}}. \quad (1)$$

Если точка $z \in S^1$, то ее образ под действием (1) также содержится в S^1 .

2. Представления группы $SL(2, \mathbb{R})$ со старшим весом. Фиксируем $\alpha > 1$. Рассмотрим пространство H_α голоморфных в круге D функций f , удовлетворяющих условию

$$\int_D |f(z)|^2 (1 - |z|^2)^{\alpha-2} \{dz\} < \infty, \quad (2)$$

где $\{dz\}$ обозначает меру Лебега на D . Определим скалярное произведение в пространстве H_α по формуле

$$\langle f, g \rangle_\alpha = \frac{\alpha - 1}{\pi} \int_D f(z) \overline{g(z)} (1 - |z|^2)^{\alpha-2} \{dz\}; \quad (3)$$

предынтегральный множитель обеспечивает равенство $\langle 1, 1 \rangle_\alpha = 1$. Выражение скалярного произведения через коэффициенты Тейлора имеет вид

$$\left\langle \sum c_k z^k, \sum c'_k z^k \right\rangle_\alpha = \sum_{k \geq 0} c_k \bar{c}'_k \frac{k!}{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+k-1)},$$

а условие (2) для $f(z) = \sum c_k z^k$ переписывается как

$$\sum |c_k|^2 k^{-(\alpha-1)} < \infty. \quad (4)$$

Легко проверить, что пространство H_α полно по отношению к норме, заданной этим скалярным произведением, т.е. H_α — гильбертово пространство.

Группа $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ действует в H_α унитарными операторами

$$T_\alpha \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} (z) = f \left(\frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}} \right) (\bar{b}z + \bar{a})^{-\alpha}. \quad (5)$$

Рассмотрим сначала случай, когда число α целое. Множитель $(\bar{b}z + \bar{a})^{-\alpha}$ является степенью производной функции (1), поэтому T_α является представлением:

$$T_\alpha(g_1)T_\alpha(g_2) = T_\alpha(g_1g_2). \quad (6)$$

Операторы $T_\alpha(g)$ унитарны, т. е.

$$\langle T_\alpha(g)f_1, T_\alpha(g)f_2 \rangle_\alpha = \langle f_1, f_2 \rangle_\alpha,$$

это легко проверить, заменяя переменную в интеграле.

Если α не целое, то $T_\alpha(g)$ также является унитарным представлением; мы должны лишь объяснить смысл выражения

$$(\bar{b}z + \bar{a})^{-\alpha} = (1 + b\bar{a}^{-1}z)^{-\alpha} a^{-\alpha} = (1 + b\bar{a}^{-1}z)^{-\alpha} e^{-\alpha(\ln a + 2\pi i k)}. \quad (7)$$

Очевидно, $|b\bar{a}^{-1}| < 1$. Следовательно, функция

$$(1 + b\bar{a}^{-1}z)^{-\alpha} := 1 + \frac{\alpha}{1!} b\bar{a}^{-1}z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} (b\bar{a}^{-1})^2 z^2 + \dots$$

корректно определена. Поэтому выражение (5) определено с точностью до множителя $e^{-2\pi i k \alpha}$, по модулю равного 1. Следовательно, равенство (6) заменяется на равенство

$$T_\alpha(g_1)T_\alpha(g_2) = \theta \cdot T_\alpha(g_1g_2),$$

где $|\theta| = 1$. Итак, $T_\alpha(g)$ – унитарное проективное представление группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Очевидно, $T_\alpha(g)$ может также рассматриваться как линейное представление универсальной накрывающей группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$.

3. Тензорное произведение. Через $\bar{T}_\alpha(g)$ обозначим представление, комплексно-сопряженное к $T_\alpha(g)$, оно действует в пространстве $\bar{H}_\alpha$ антиголоморфных функций в круге $|u| < 1$ по формуле

$$T_\alpha \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} f(\bar{u}) = f \left(\frac{\bar{a}\bar{u} + \bar{b}}{b\bar{u} + a} \right) (b\bar{u} + a)^{-\alpha}.$$

Скалярное произведение в $\bar{H}_\alpha$ задается той же формулой (3).

Рассмотрим тензорное произведение $H_\alpha \otimes \bar{H}_\alpha$. Оно состоит из функций $f(z, \bar{u})$ на бикруге $D \times D$, голоморфных по z и антиголоморфных по u ; скалярное произведение в $H_\alpha \otimes \bar{H}_\alpha$ имеет вид

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \frac{(\alpha-1)^2}{\pi^2} \iint_{D \times D} f_1(z, \bar{u}) \overline{f_2(z, \bar{u})} (1 - z\bar{z})^{\alpha-2} (1 - u\bar{u})^{\alpha-2} \{dz\} \{d\bar{u}\}.$$

Группа $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ действует в $H_\alpha \otimes \bar{H}_\alpha$ операторами $T_\alpha(g_1) \otimes \bar{T}_\alpha(g_2)$ вида

$$\begin{aligned} T_\alpha \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ \bar{b}_1 & \bar{a}_1 \end{pmatrix} \otimes \bar{T}_\alpha \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ \bar{b}_2 & \bar{a}_2 \end{pmatrix} f(z, u) \\ = f \left(\frac{a_1 z + b_1}{\bar{b}_1 z + \bar{a}_1}, \frac{\bar{a}_2 \bar{u} + \bar{b}_2}{b_2 \bar{u} + a_2} \right) (\bar{b}_1 z + \bar{a}_1)^{-\alpha} (b_2 \bar{u} + a_2)^{-\alpha}. \end{aligned}$$

Ограничим это представление на диагональную подгруппу $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, это соответствует подстановке $a_1 = a_2 = a$, $b_1 = b_2 = b$ в последнюю формулу. Полученное представление группы $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ является линейным (не проективным). Действительно,

$$(\bar{b}z + \bar{a})^{-\alpha} (b\bar{u} + a)^{-\alpha} = (1 + \bar{a}^{-1}\bar{b}z)^{-\alpha} (1 + a^{-1}b\bar{u})^{-\alpha} (a\bar{a})^{-\alpha},$$

и это выражение является однозначной функцией при $|z| < 1$, $|u| < 1$.

4. Основная серия представлений. Фиксируем $s \in \mathbb{R}$. Рассмотрим представление ρ_s группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, действующее в L^2 на круге S^1 по формуле

$$\rho_s \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} f(e^{i\varphi}) = f \left(\frac{ae^{i\varphi} + b}{\bar{b}e^{i\varphi} + \bar{a}} \right) |\bar{b}e^{i\varphi} + \bar{a}|^{-1-2is}.$$

Это так называемые представления основной серии. Напомним, что представление T_s эквивалентно T_{-s} (см. [3]).

5. Спектральное разложение. Пусть α – то же, что и выше. Рассмотрим ядро

$$K_\alpha(\varphi, s; z, u) := \frac{(1 - \bar{z}e^{i\varphi})^{-1/2-is}(1 - ue^{-i\varphi})^{-1/2-is}}{(1 - \bar{z}u)^{\alpha-1/2-is}},$$

где $|z| < 1$, $|u| < 1$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $s \in \mathbb{R}$. Рассмотрим интегральный оператор J_α , переводящий функцию $f \in H_\alpha \otimes \bar{H}_\alpha$ в функцию $F(\varphi, s)$, заданную формулой

$$F(\varphi, s) = \iint_{D \times D} K_\alpha(\varphi, s; z, u) f(z, \bar{u}) (1 - z\bar{z})^{\alpha-2} (1 - u\bar{u})^{\alpha-2} \{dz\} \{du\}. \quad (8)$$

Рассмотрим действие группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ в пространстве функций от переменных (φ, s) , определенное формулой

$$R \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} F(e^{i\varphi}, s) = F \left(\frac{ae^{i\varphi} + b}{\bar{b}e^{i\varphi} + \bar{a}}, s \right) |\bar{b}e^{i\varphi} + \bar{a}|^{-1-2is}.$$

Заметим, что при фиксированном $s \in \mathbb{R}$ функция $F(e^{i\varphi}, s)$ (как функция от φ) преобразуется по формуле для основной серии.

Простое вычисление показывает, что оператор J_α сплетает представления $T_\alpha(g) \otimes \bar{T}_\alpha(g)$ и R группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$:

$$J_\alpha \cdot (T_\alpha(g) \otimes \bar{T}_\alpha(g)) = R(g) \cdot J_\alpha. \quad (9)$$

ТЕОРЕМА 1. Оператор J_α является унитарным оператором из $H_\alpha \otimes \overline{H}_\alpha$ в L^2 на полосе $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $s \geq 0$ по мере

$$\frac{|\Gamma(\alpha - 1/2 + is)|^2}{\Gamma(\alpha)^2} s \frac{\text{sh}(\pi s)}{\text{ch}(\pi s)} ds d\varphi = \left| \frac{\Gamma(\alpha - 1/2 + is)\Gamma(1/2 + is)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(is)} \right|^2 ds d\varphi. \quad (10)$$

Итак, $T_\alpha \otimes \overline{T}_\alpha$ является однократным прямым интегралом по основной серии представлений (этот факт был обнаружен Пуканским [27]). Различные способы получения меры Планшереля (10) можно найти в [31], [19], [8], [25].

6. Голоморфное продолжение $J_\alpha f(\varphi, s)$. Обозначим через W пространство всех функций $f \in H_\alpha \otimes \overline{H}_\alpha$, гладких вплоть до границы бидиска $|z| < 1$, $|u| < 1$. Пусть $f \in W$. Рассмотрим ее ряд Тейлора

$$f(z, \bar{u}) = \sum_{k,l} c_{kl} z^k \bar{u}^l.$$

Очевидно, коэффициенты c_{kl} быстро убывают при $k + l \rightarrow \infty$, т. е. для всех N

$$|c_{k,l}| = o(k + l)^{-N}.$$

ЛЕММА. Фиксируем φ . Для любой $f \in W$ функция $J_\alpha f(\varphi, s)$ продолжается голоморфно по s во всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем $s \in \mathbb{C}$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Функция $K_\alpha(\varphi, s; z, u)$ как функция переменных z, u имеет полиномиальный рост при подходе к границе бидиска $D \times D$:

$$|K_\alpha(\varphi, s; z, u)| \leq \exp\{4\pi(1 + |\text{Im } s|)\}(1 - |z|)^{-(1+\alpha+2|\text{Re } s|)}(1 - |u|)^{-(1+\alpha+2|\text{Re } s|)}.$$

Поэтому для фиксированных s, φ коэффициенты $a_{kl} = a_{kl}(\varphi, s)$ ряда

$$K_\alpha(\varphi, s; z, u) = \sum a_{kl}(s, \varphi) \bar{z}^k u^l$$

имеют полиномиальный рост при $k, l \rightarrow +\infty$.

Действительно, рассмотрим функцию $q(z, u)$ в бидиске, удовлетворяющую

$$|q(z, u)| \leq C \cdot \delta^{-h}, \quad |z| \leq 1 - \delta, \quad |u| \leq 1 - \delta.$$

Тейлоровские коэффициенты b_{kl} функции $q(z, u)$ задаются формулой

$$b_{kl} = \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint_{|z|=1-\delta, |u|=1-\delta} \frac{q(z, \bar{u}) dz du}{z^{k+1} \bar{u}^{l+1}}.$$

Поэтому для некоторой константы C выполнено

$$|b_{kl}| \leq C \delta^{-h} (1 - \delta)^{-k-l-2}$$

для всех δ . Мы выбираем $\delta = h/(h + k + l + 2)$ и получаем полиномиальный рост для коэффициентов b_{kl} .

Для ядра $K_\alpha(z, u)$ таким способом получаем оценки вида $|a_{kl}| \leq C(1 + k + l)^\tau$ в каждом прямоугольнике

$$|\text{Im } s| \leq N, \quad |\text{Re } s| \leq M. \quad (11)$$

Так как тейлоровские коэффициенты c_{kl} для $f \in W$ быстро убывают, ряд

$$J_\alpha f(\varphi, s) = \sum c_{kl} a_{kl}(s, \varphi) \frac{k! l!}{(\alpha)_k (\alpha)_l}$$

абсолютно сходится (см. (4)); слагаемые голоморфны по s , и ряд равномерно сходится в прямоугольнике (11).

7. Соответствие дифференциальных операторов. Операторы алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{sl}(2)$ в пространстве $H_\alpha \otimes \bar{H}_\alpha$ имеют вид

$$\begin{aligned} L_0^{(z)} &= z \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\alpha}{2}, & L_1^{(z)} &= z^2 \frac{\partial}{\partial z} + \alpha z, & L_{-1}^{(z)} &= \frac{\partial}{\partial z}, \\ L_0^{(u)} &= \bar{u} \frac{\partial}{\partial \bar{u}} + \frac{\alpha}{2}, & L_1^{(u)} &= \frac{\partial}{\partial \bar{u}}, & L_{-1}^{(u)} &= \bar{u}^2 \frac{\partial}{\partial \bar{u}} + \alpha \bar{u}. \end{aligned}$$

Будет удобнее работать со следующим набором операторов:

$$\begin{aligned} L_0 &:= L_0^{(z)} - L_0^{(u)}, & L_{-1} &:= L_1^{(u)} - L_{-1}^{(z)}, & L_1 &:= L_1^{(z)} - L_{-1}^{(u)}, \\ M_0 &:= L_0^{(z)} + L_0^{(u)}, & M_{-1} &:= L_1^{(u)} + L_{-1}^{(z)}, & M_1 &:= L_1^{(z)} + L_{-1}^{(u)}. \end{aligned}$$

Операторы L_0, L_1, L_{-1} порождают диагональную подалгебру $\mathfrak{sl}_2$ в $\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2$. Оператор J_α преобразует их в следующие операторы:

$$\begin{aligned} J_\alpha \circ \left[z \frac{\partial}{\partial z} - \bar{u} \frac{\partial}{\partial \bar{u}} \right] f(\varphi, s) &= \left[\frac{\partial}{i \partial \varphi} \circ J_\alpha \right] f(\varphi, s), \\ J_\alpha \circ \left[\bar{u}^2 \frac{\partial}{\partial \bar{u}} + \alpha \bar{u} - \frac{\partial}{\partial z} \right] f(\varphi, s) &= - \left[e^{i\varphi} \frac{\partial}{i \partial \varphi} + \left(\frac{1}{2} + is \right) e^{i\varphi} \right] J_\alpha f(\varphi, s), \\ J_\alpha \circ \left[z^2 \frac{\partial}{\partial z} + \alpha z - \frac{\partial}{\partial \bar{u}} \right] f(\varphi, s) &= \left[e^{-i\varphi} \frac{\partial}{i \partial \varphi} - \left(\frac{1}{2} + is \right) e^{-i\varphi} \right] J_\alpha f(\varphi, s). \end{aligned}$$

Эти три формулы легко следуют из (9).

ТЕОРЕМА 2. Унитарный оператор J_α преобразует оператор M_0 в оператор

$$\begin{aligned} Q_0 f(\varphi, s) &= - \frac{\left(-\frac{1}{2} + is\right) \left(-\alpha + \frac{1}{2} + is\right)}{2is} f(\varphi, s + i) \\ &+ \frac{\left(\frac{1}{2} + is\right) \left(\alpha - \frac{1}{2} + is\right)}{2is} f(\varphi, s - i) - \frac{-\alpha + \frac{1}{2} + is}{2is \left(-\frac{1}{2} + is\right)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} f(\varphi, s + i), \end{aligned} \quad (12)$$

т. е. для любой функции $f \in W$ (см. п. 6)

$$Q_0 J_\alpha f = J_\alpha M_0 f.$$

Оператор M_1 переводится в оператор

$$Q_1 f(\varphi, s) = e^{i\varphi} \left[\frac{(\frac{1}{2} + is)(-\alpha + \frac{1}{2} + is)}{2is} f(\varphi, s + i) + \frac{(\frac{1}{2} + is)(\alpha - \frac{1}{2} + is)}{2is} f(\varphi, s - i) - \frac{-\alpha + \frac{1}{2} + is}{2is(-\frac{1}{2} + is)} \frac{d^2}{d\varphi^2} f(\varphi, s + i) + \frac{-\alpha + \frac{1}{2} + is}{-\frac{1}{2} + is} \frac{\partial}{i\partial\varphi} f(\varphi, s + i) \right]. \quad (13)$$

Оператор M_{-1} переходит в оператор

$$Q_{-1} f(\varphi, s) = e^{-i\varphi} \left[-\frac{(\frac{1}{2} + is)(-\alpha + \frac{1}{2} + is)}{2is} f(\varphi, s + i) + \frac{(\frac{1}{2} + is)(\alpha - \frac{1}{2} + is)}{2is} f(\varphi, s - i) - \frac{-\alpha + \frac{1}{2} + is}{2is(-\frac{1}{2} + is)} \frac{d^2}{d\varphi^2} f(\varphi, s + i) - \frac{-\alpha + \frac{1}{2} + is}{-\frac{1}{2} + is} \frac{\partial}{i\partial\varphi} f(\varphi, s + i) \right]. \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эти формулы могут быть проверены прямым вычислением. Например, рассмотрим M_0 . Очевидно, оператор M_0 самосопряжен в $H_\alpha \otimes \overline{H}_\alpha$. Поэтому

$$\begin{aligned} J_\alpha M_0 f(\varphi, s) &= \iint_{D \times D} K(\varphi, s; \bar{z}, u) \left[\left(z \frac{\partial}{\partial z} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial \bar{u}} + \alpha \right) \right] \\ &\quad \times f(z, \bar{u}) (1 - z\bar{z})^{\alpha-2} (1 - u\bar{u})^{\alpha-2} \{dz\} \{du\} \\ &= \iint_{D \times D} \left[\left(\bar{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + u \frac{\partial}{\partial u} + \alpha \right) \right] K(\varphi, s; \bar{z}, u) \\ &\quad \times f(z, \bar{u}) (1 - z\bar{z})^{\alpha-2} (1 - u\bar{u})^{\alpha-2} \{dz\} \{du\}. \end{aligned}$$

Итак, утверждение теоремы равносильно следующему:

$$\left(u \frac{\partial}{\partial u} + \bar{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + \alpha \right) K(\varphi, s; \bar{z}, u) - Q_0[K(\varphi, s; \bar{z}, u)] = 0. \quad (15)$$

После деления на K это тождество принимает вид

$$\begin{aligned} K^{-1} \left\{ u \frac{\partial}{\partial u} + z \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right\} K + \alpha + K^{-1} \frac{(-\frac{1}{2} + is)(-\alpha + \frac{1}{2} + is)}{2is} K(s + i) \\ - K^{-1} \frac{(\frac{1}{2} + is)(\alpha - \frac{1}{2} + is)}{2is} K(s - i) \\ + K^{-1} \frac{-\alpha + \frac{1}{2} + is}{2is(-\frac{1}{2} + is)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} K(s + i) = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Функция в левой части является длинным рациональным выражением по $z, \bar{u}, e^{i\varphi}, s, \alpha$; поэтому тождество (16) может быть легко проверено с помощью программы

MAPLE. Проведем его проверку вручную. Каждое слагаемое (16) может быть представлено в виде линейной комбинации

$$\begin{aligned} a(s) + b(s) \frac{1}{1 - z\bar{u}} + c(s) \left[\frac{1}{1 - ze^{i\varphi}} + \frac{1}{1 - \bar{u}e^{-i\varphi}} \right] \\ + d(s) \frac{(1 - ze^{i\varphi})(1 - \bar{u}e^{-i\varphi})}{1 - z\bar{u}}. \end{aligned} \quad (17)$$

После этого будет достаточно сложить коэффициенты.

Обозначим

$$\begin{aligned} \mu = 1 - z\bar{u}, \quad \nu = 1 - ze^{i\varphi}, \quad \theta = 1 - \bar{u}e^{-i\varphi}, \\ L = \frac{(1 - ze^{i\varphi})(1 - \bar{u}e^{-i\varphi})}{1 - z\bar{u}}. \end{aligned}$$

Во-первых,

$$\begin{aligned} K^{-1} \left(z \frac{\partial}{\partial z} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial \bar{u}} + \alpha \right) K \\ = \left(\frac{1}{2} + is \right) \left[\frac{ze^{i\varphi}}{\mu} + \frac{\bar{u}e^{-i\varphi}}{\nu} \right] - 2 \left(-\alpha + \frac{1}{2} + is \right) \frac{z\bar{u}}{\theta} + \alpha \\ = \left(\frac{1}{2} + is \right) \left[\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu} - 2 \right] - 2 \left(-\alpha + \frac{1}{2} + is \right) \left[\frac{1}{\theta} - 1 \right] + \alpha \\ = \left(\frac{1}{2} + is \right) \left[\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu} \right] - 2 \left(-\alpha + \frac{1}{2} + is \right) \frac{1}{\theta} - \alpha. \end{aligned} \quad (18)$$

Далее,

$$K^{-1}K(\varphi, s - i) = \frac{1 - z\bar{u}}{(1 - ze^{i\varphi})(1 - \bar{u}e^{-i\varphi})} = -1 + \left[\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu} \right], \quad (19)$$

$$K^{-1}K(\varphi, s + i) = L. \quad (20)$$

Наиболее громоздко последнее слагаемое в (16). Обозначим через μ' , μ'' , ν' , ν'' производные от μ , ν по φ . Легко видеть, что

$$\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} K = \left(\frac{1}{2} + is \right) \left\{ \left(\frac{3}{2} + is \right) \left[\frac{(\mu')^2}{\mu^2} + \frac{(\nu')^2}{\nu^2} \right] - \left[\frac{\mu''}{\mu} + \frac{\nu''}{\nu} \right] + 2 \left(\frac{1}{2} + is \right) \frac{\mu'\nu'}{\mu\nu} \right\} K.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} K^{-1} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} K(\varphi, s + i) &= \left(-\frac{1}{2} + is \right) \\ &\times \left\{ \left(\frac{1}{2} + is \right) \left[\frac{(\mu')^2}{\mu^2} + \frac{(\nu')^2}{\nu^2} \right] - \left[\frac{\mu''}{\mu} + \frac{\nu''}{\nu} \right] + 2 \left(-\frac{1}{2} + is \right) \frac{\mu'\nu'}{\mu\nu} \right\} L. \end{aligned}$$

Далее, преобразуем все слагаемые последнего выражения:

$$\begin{aligned}\left[\frac{(\mu')^2}{\mu^2} + \frac{(\nu')^2}{\nu^2}\right]L &= -L + 1 - \left[\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu}\right] + \frac{2}{\theta}, \\ \left[\frac{\mu''}{\mu} + \frac{\nu''}{\nu}\right]L &= -L + 1, \\ \frac{\mu'\nu'}{\mu\nu}L &= \frac{1}{\theta} - 1.\end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$\begin{aligned}K^{-1}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}K(\varphi, s+i) &= \left(-\frac{1}{2} + is\right)\left\{-\left(-\frac{1}{2} + is\right)L - \left(\frac{1}{2} + is\right)\left[\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu}\right]\right. \\ &\quad \left.+ 4is \cdot \frac{1}{\theta} - \left(-\frac{1}{2} + is\right)\right\}.\end{aligned}\quad (21)$$

Итак, формулы (18)–(21) содержат разложения (17) для всех слагаемых (16). Остается сложить коэффициенты.

ЗАМЕЧАНИЕ. Применим оператор Q_0 к функциям вида $f(\varphi, s) = g(s)$. Тогда уравнение

$$Q_0g(s) = (k + \alpha)g(s)$$

становится частным случаем разностных уравнений для непрерывных двойственных многочленов Хана (continuous dual Hahn polynomials [1, (6.10.9)]).

8. Несколько замечаний. 1) Рассмотрим преобразование Меллина

$$\hat{f}(s) = \int_0^\infty x^{is} f(x) \frac{dx}{x}$$

для гладких функций на промежутке $(0, \infty)$ с компактным носителем. Тогда

$$\int_0^\infty |f(x)|^2 \frac{dx}{x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty |\hat{f}(s)|^2 ds.$$

Очевидно,

$$\hat{f}'(s) = (1 - is)\hat{f}(s + i).$$

Это – простейшая ситуация, где появляются сдвиги в мнимом направлении.

2) Разностные уравнения для нескольких неоклассических семейств ортогональных многочленов, а именно многочленов Мейкснера–Поллачека, непрерывных многочленов Хана, непрерывных двойственных многочленов Хана и многочленов Вильсона, также пишутся через сдвиги в мнимом направлении (см. [1], [16]).

3) В работе автора [25] были получены некоторые элементы операционного исчисления для индексного гипергеометрического преобразования (оно также называется преобразованием Олевского или преобразованием Якоби; см. [32], [17])

$$\begin{aligned}g(x) &\mapsto \hat{g}(s) = \\ &= \frac{1}{\Gamma(b+c)} \int_0^\infty g(x) {}_2F_1(b+is, b-is; b+c; -x) x^{b+c-1} (1+x)^{b-c} dx.\end{aligned}\quad (22)$$

В [25] было показано, что индексное гипергеометрическое преобразование переводит дифференциальные операторы

$$Ag(x) = xg(x), \quad Bg(x) = x \frac{\partial}{\partial x} g(x)$$

(а поэтому и все операторы, выражающиеся полиномиально через x , $x \frac{\partial}{\partial x}$) в разностные операторы мнимого направления². Существование формул (11)–(13) более-менее следует из этих утверждений. Однако этот способ получения выражений (11)–(13) также не очень прост.

4) Возникают следующие вопросы: *возможно ли выписать явные операторы для надалгебры в случае L^2 на псевдоримановом симметрическом пространстве и для kern-представлений? можно ли это сделать по крайней мере для симметрических пространств ранга 1?*

Список литературы

1. Andrews G. R., Askey R., Roy R. Special functions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999.
2. Van den Ban E. P., Schlichtkrull H. A residue calculus for root systems // Compositio Math. 2000. V. 123. № 1. P. 27–72.
3. Bargmann V. Irreducible unitary representations of the Lorentz group // Ann. Math. 1947. V. 48. P. 568–640.
4. Березин Ф. А. О связи между ко- и контравариантными символами операторов на классических комплексных симметрических пространствах // ДАН СССР. 1978. Т. 241. С. 15–17.
5. De Branges L. Tensor product spaces // J. Math. Anal. Appl. 1972. V. 38. P. 109–148.
6. Cherednik I. Harish-Chandra transform and difference operators. Preprint, available via <http://arXiv.org/abs/math/9706010>.
7. Delorme P. Formule de Plancherel pour les espaces symétriques réductifs // Ann. of Math. 1998. V. 147. P. 417–452.
8. Van Dijk H., Hille S. C. Canonical representations related to hyperbolic spaces // J. Funct. Anal. 1997. V. 147. P. 109–139.
9. Гельфанд И. М., Наймарк М. И. Унитарные представления классических групп // Тр. Матем. ин-та. им. В. А. Стеклова АН СССР. 1950. Т. 36.
10. Гиндикин С. Г., Карпелевич Ф. И. Мера Планшереля для римановых симметрических пространств неположительной кривизны // ДАН СССР. 1962. Т. 145. С. 252–255.
11. Гиндикин С. Г., Карпелевич Ф. И. Об одном интеграле, связанном с римановыми симметрическими пространствами неположительной кривизны // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1966. Т. 30. С. 1147–1156.
12. Harinck P. Plancherel formula pour $GL(n, \mathbb{C})/U(p, q)$ // J. Reine Angew. Math. 1992. V. 428. P. 45–95.
13. Harinck P. Fonctions orbitales sur $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$. Formula d'inversion des integrales orbitales et formula de Plancherel // J. Funct. Anal. 1998. V. 153. P. 52–107.
14. Harish-Chandra. Harmonic analysis on real semisimple groups. III: The Maas–Selberg relations and the Plancherel formula // Ann. Math. 1976. V. 104. P. 117–201.
15. Хелгасон С. Группы и геометрический анализ. М.: Мир, 1987.
16. Koekoek R., Swarttouw R. F. Askey scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and their q -analogues // Delft University of Technology, 1994; available via <http://aw.twi.tudelft.nl/~koekoek/research.html>.

²См. также работу [6], содержащую некоторые похожие утверждения для симметрических функций в многомерном случае.

17. Koornwinder T. H. Jacobi functions and analysis on noncompact symmetric spaces // Special functions: group theoretical aspects and applications / Eds. R. Askey, T. H. Koornwinder, W. Schempp. Dordrecht-Boston: D. Reidel Publ. Co, 1984. P. 1–85.
18. Макаревич Б. О. Открытые орбиты редуктивных групп в симметрических R -пространствах // Матем. сб. 1973. Т. 91(133). С. 390–401.
19. Молчанов В. Ф. Тензорные произведения унитарных представлений трехмерной группы Лоренца // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1979. Т. 43. № 4. С. 860–891.
20. Молчанов В. Ф. Формула Планшереля для гиперboloидов // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1980. Т. 147. С. 65–85.
21. Молчанов В. Ф. Формула Планшереля для псевдоримановых симметрических пространств ранга 1 // ДАН СССР. 1986. Т. 290. № 3. С. 545–549.
22. Молчанов В. Ф. Гармонический анализ на однородных пространствах // Совр. пробл. математики. Фундаментальные направления. Некоммутативный гармонический анализ-II. Т. 59. М.: ВИНТИ, 1990. С. 5–144.
23. Неретин Ю. А. Псевдоримановы симметрические пространства: однотипные реализации и открытые вложения в грассманианы // Записки научн. семин. ПОМИ РАН. Т. 256. С. 145–167.
24. Neretin Yu. A. Plancherel formula for Berezin deformation of L^2 on Riemannian symmetric space // J. Funct. Anal. 2001. V. 189. P. 336–408.
25. Неретин Ю. А. Индексное гипергеометрическое преобразование и имитация анализа ядер Березина на гиперболических пространствах // Матем. сб. 2001. Т. 192. № 3. С. 83–114.
26. Neretin Yu. A. Matrix balls, radial analysis of Berezin kernels and hypergeometric determinants // Moscow Math. J. 2001. V. 1. P. 157–220.
27. Pukanszky L. On the Kronecker products of irreducible unitary representations of the 2×2 real unimodular group // Trans. Amer. Math. Soc. 1961. V. 100. P. 116–152.
28. Rosengren H. Multilinear Hankel forms of higher order and orthogonal polynomials // Math. Scand. 1998. V. 82. № 1. P. 53–88.
29. Rosengren H. Multivariable orthogonal polynomials and coupling coefficients for discrete series representations // SIAM J. Math. Anal. 1999. V. 30. P. 233–272.
30. Unterberger A., Upmeyer H. The Berezin transform and invariant differential operators // Comm. Math. Phys. 1994. V. 164. P. 563–597.
31. Вершик А. М., Гельфанд И. М., Граев М. И. Представления $SL_2(R)$, где R – кольцо функций // УМН. 1973. Т. 28. № 5. С. 83–128.
32. Weyl H. Über gewöhnliche lineare Differentialgleichungen mit singularen Stellen und ihre Eigenfunktionen 2 Note // Nachr. König. Gess. Wissen. Göttingen. Math.-Phys., 1910. P. 442–467; Перепечатано в книге Weyl H., Gessamelte Abhandlungen. Bd. 1. Springer, 1968. P. 224–247.