Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Д. Первушин, О примыканиях нильпотентных орбит пучков матриц четвертого порядка, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2002, том 66, выпуск 5, 183–192

DOI: <https://doi.org/10.4213/im405>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 16:14:35

УДК 512.643+512.813+512.815

Д. Д. Первушин

О примыканиях нильпотентных орбит пучков матриц четвертого порядка

Найден простой критерий нильпотентности пучка квадратных матриц порядка n относительно действия группы $SL_n(\mathbb{C}) \times SL_n(\mathbb{C}) \times SL_2(\mathbb{C})$, получен метод классификации орбит, с помощью которого при $n = 4$ классификация пучков произведена явно и построен граф примыканий нильпотентных орбит. Кроме того, показано, что алгебра инвариантов этого действия естественно изоморфна алгебре инвариантов действия группы $SL_2(\mathbb{C})$ в пространстве бинарных форм степени n .

Библиография: 6 наименований.

1. Введение. В настоящей работе изучается естественное линейное представление группы $G = SL_n(\mathbb{C}) \times SL_n(\mathbb{C}) \times SL_2(\mathbb{C})$ в пространстве $V = \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^2$. Если в пространствах $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}^2$ выбраны базисы, то компоненты T^{ijk} тензора $T \in V$ составляют две квадратные матрицы X и Y , элементы которых суть T^{ij1} и T^{ij2} соответственно. Элемент пространства V , интерпретируемый как пара комплексных $(n \times n)$ -матриц, называется *пучком* квадратных матриц порядка n и обозначается в виде суммы $\lambda X + \mu Y$ с неопределенными коэффициентами. Полиномиальное отображение $\varphi: V \rightarrow W = S^n(\mathbb{C}^{2*})$, сопоставляющее каждому пучку $\lambda X + \mu Y$ бинарную форму $\det(\lambda X + \mu Y)$, доминантно и G -эквивариантно, если считать, что первые два сомножителя группы G действуют на W тривиально, а соответствующее отображение алгебр инвариантов $\varphi^*: \mathbb{C}[W]^G \rightarrow \mathbb{C}[V]^G$ является вложением. Будем говорить, что два пучка матриц порядка n *эквивалентны* (строго эквивалентны), если они эквивалентны относительно действия группы $SL_n(\mathbb{C}) \times SL_n(\mathbb{C}) \times SL_2(\mathbb{C})$ (группы $SL_n(\mathbb{C}) \times SL_n(\mathbb{C})$).

Сформулируем некоторые результаты, относящиеся к пучкам прямоугольных матриц любого размера. *Прямой суммой* пучков $P_1 = \lambda X_1 + \mu Y_1$ и $P_2 = \lambda X_2 + \mu Y_2$ матриц размеров $n_1 \times m_1$ и $n_2 \times m_2$ соответственно называется пучок

$$P_1 + P_2 = \lambda(X_1 \oplus X_2) + \mu(Y_1 \oplus Y_2)$$

матриц размера $(n_1 + n_2) \times (m_1 + m_2)$, где $Z_1 \oplus Z_2$ – блочно-диагональная матрица, составленная из блоков Z_1 и Z_2 . Пучок называется *неразложимым*, если его нельзя представить в виде прямой суммы двух нетривиальных пучков. Как и в [3], допуская определенную вольность, будем говорить о пучках матриц размеров $n \times 0$ и $0 \times m$, имея в виду, что, когда такой пучок добавляется в качестве прямого слагаемого к другому пучку, к соответствующим матрицам добавляются нулевые строки или столбцы. Пучок $\lambda X + \mu Y$ называется *регулярным*, если он квадратный

и форма $\det(\lambda X + \mu Y)$ не равна тождественно нулю; в противном случае пучок называется *сингулярным*. Как известно [3], любой пучок строго эквивалентен пучку вида

$$L_{\varepsilon_1} + \dots + L_{\varepsilon_q} + L_{\tilde{\varepsilon}_1}^\top + \dots + L_{\tilde{\varepsilon}_q}^\top + R_1 + \dots + R_s, \quad (1)$$

где $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_q$ и $\tilde{\varepsilon}_1, \dots, \tilde{\varepsilon}_q$ – минимальные индексы столбцов и строк соответственно (напомним определение этих понятий в следующем абзаце), L_r – неразложимый прямоугольный $(r \times (r + 1))$ -пучок вида

$$\begin{pmatrix} \lambda & \mu & & & \\ & \lambda & \mu & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & \mu \end{pmatrix}, \quad (2)$$

а $R_1, \dots, R_s$ – неразложимые регулярные пучки. Слагаемые разложения (1) определены однозначно с точностью до перестановки. Пучок называется *абсолютно сингулярным*, если в разложении (1) отсутствуют регулярные слагаемые. Любой пучок P приводится к виду $P^r + P^s$, где P^r – регулярный пучок, а P^s – абсолютно сингулярный пучок.

Напомним определение минимальных индексов строк и столбцов. С каждым пучком $P = \lambda X + \mu Y$ можно связать $\mathbb{C}[\lambda, \mu]$ -модуль $\text{Ker } P$, состоящий из всех столбцов $x(\lambda, \mu) \in (\mathbb{C}[\lambda, \mu])^n$, удовлетворяющих условию

$$(\lambda X + \mu Y)x(\lambda, \mu) = 0. \quad (3)$$

Известно, что модуль $\text{Ker } P$ является свободным [3]. *Фундаментальным набором решений* уравнения (3) называется минимальная система однородных образующих этого модуля, а степени $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$ элементов (любого) фундаментального набора решений, расположенные в возрастающем порядке, называются *минимальными индексами столбцов* пучка $\lambda X + \mu Y$. Минимальные индексы столбцов пучка $P^\top = \lambda X^\top + \mu Y^\top$ называются *минимальными индексами строк* пучка $\lambda X + \mu Y$.

2. Критерий нильпотентности пучка. Далее под пучком матриц будем понимать пучок квадратных матриц. В общей ситуации для линейного представления редуктивной алгебраической группы H в векторном пространстве M элемент x пространства M называется *нильпотентным*, если замыкание $\overline{\theta_x}$ его орбиты θ_x содержит нуль. Совокупность всех нильпотентных элементов пространства M называется *нуль-конусом* и обозначается $\mathfrak{N}_M$. Нуль-конус является важным объектом в теории инвариантов: среди всех слоев отображения инвариантов он имеет наибольшую размерность, и модалность действия группы на любом слое не превосходит модалности ее действия на нуль-конусе [1].

ЛЕММА 1. *Сингулярный пучок всегда нильпотентен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, если $\varepsilon_1 = 0$ или $\tilde{\varepsilon}_1 = 0$, то канонический вид пучка содержит нулевую строку или столбец и, следовательно, такой пучок является нильпотентным. Покажем теперь, что если $r = \varepsilon_1 > 0$ и $s = \tilde{\varepsilon}_1 > 0$, то в замыкании орбиты такого пучка содержится пучок, имеющий нулевую строку. Для этого умножим столбцы блока L_r на t^s , столбцы блока $L_s^\top$ на t^{-r-1} , строки блока L_r на t^{-s} , все строки блока $L_s^\top$, кроме последней, на t^{r+1} , а последнюю – на t^{-s} . В результате этих действий изменится только единственный элемент последней строки блока $L_s^\top$: он будет умножен на t^{-1-r-s} . В пределе при $t \rightarrow \infty$ получаем нулевую строку.

ТЕОРЕМА 1. *Регулярный пучок $\lambda X + \mu Y$ нильпотентен тогда и только тогда, когда соответствующая ему бинарная форма $\det(\lambda X + \mu Y)$ нильпотентна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что $\varphi(\mathfrak{N}_V) \subset \mathfrak{N}_W$. Покажем теперь, что $\varphi^{-1}(\mathfrak{N}_W) \subset \mathfrak{N}_V$. Предположим, что пучку $\lambda X + \mu Y$ соответствует нильпотентная форма. Мы должны показать, что $\lambda X + \mu Y \in \mathfrak{N}_V$. Если пучок $\lambda X + \mu Y$ сингулярный, то $\lambda X + \mu Y \in \mathfrak{N}_V$ и доказывать нечего. В противном случае преобразованиями из G его можно привести к виду $\lambda E + \mu D'$, где E – единичная, а D' – верхнетреугольная матрица с числами $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ на диагонали. Поскольку $\overline{\theta_{\lambda E + \mu D'}} \supset \theta_{\lambda E + \mu D}$, где $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, достаточно показать, что $\theta_{\lambda E + \mu D} \ni 0$. Хорошо известно, что бинарная форма нильпотентна тогда и только тогда, когда она содержит линейный множитель кратности, большей половины ее степени. Это означает, что среди чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, как минимум, $s = [n/2] + 1$ равны между собой. Можно считать, что $\lambda_1 = \dots = \lambda_s$, а преобразованием $D \mapsto D - \lambda_1 E$ можно добиться того, чтобы все они были равны нулю.

Теперь покажем, что пучок $\lambda E + \mu D$ нильпотентен. Для этого рассмотрим однопараметрическую подгруппу $g_t = (A_t, B_t, C_t)$, где $A_t = \text{diag}(t^{\alpha_1}, \dots, t^{\alpha_n})$, $B_t = E$, $C_t = \text{diag}(t^q, t^{-q})$ и $\sum \alpha_i = 0$. Тогда

$$g_t(\lambda E + \mu D) = \lambda(\text{diag}(t^{-q+\alpha_1}, \dots, t^{-q+\alpha_n})) + \mu(\text{diag}(0, \dots, \lambda_{s+1}t^{q+\alpha_{s+1}}, \dots, \lambda_n t^{q+\alpha_n})).$$

Для того чтобы предел $g_t(\lambda E + \mu D)$ при $t \rightarrow \infty$ был равен нулю, нужно выбрать $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ так, чтобы в предыдущем равенстве показатели всех степеней t были отрицательны, т.е. чтобы выполнялись следующие условия:

$$\begin{aligned} \alpha_1, \dots, \alpha_n &< q, \\ \alpha_{s+1}, \dots, \alpha_n &< -q, \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_n &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Убедиться в том, что $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ и q , удовлетворяющие этим условиям, существуют, можно следующим образом. Представим себе рычажные весы (рис. 1). Мы должны разместить на них n материальных точек одинаковой массы таким образом, чтобы весы находились в равновесии, первые s точек находились левее центра правой чаши, а оставшиеся $n - s$ точек – левее центра левой чаши. Ясно, что если на правой чаше больше точек, чем на левой ($s > n/2$), то их всегда можно так расположить.

Рис. 1. Механическая интерпретация условий (4)

3. Классификация пучков. Используя присоединенное представление градуированной алгебры Ли типа E_7 , в [2] была получена классификация нильпотентных пучков матриц порядка 4. Изложенный в этом пункте метод позволяет произвести классификацию пучков матриц любого порядка.

ЛЕММА 2. Пусть $P = \lambda X + \mu Y$ – абсолютно сингулярный пучок. Тогда для любых $t_1, t_2 \in \mathbb{C}$ пучки P и $P' = \lambda(t_1 X) + \mu(t_2 Y)$ строго эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что $P = L_r + L_s^\top$. Достаточно показать, что $\lambda X + \mu Y$ и $\lambda X + \mu(tY)$ строго эквивалентны. Положим $\gamma = t^{-\frac{r+s}{2}}$,

$$\begin{aligned} A &= \text{diag}(\gamma^{-1}, \gamma^{-1}t^{-1}, \dots, \gamma^{-1}t^{1-r}, \gamma, \gamma t, \dots, \gamma t^s), \\ B &= \text{diag}(\gamma, \gamma t, \dots, \gamma t^r, \gamma^{-1}, \gamma^{-1}t^{-1}, \dots, \gamma^{-1}t^{1-s}). \end{aligned} \quad (5)$$

Нетрудно показать, что $(A, B) \in \text{SL}_n(\mathbb{C}) \times \text{SL}_n(\mathbb{C})$ и при действии (A, B) на $\lambda X + \mu Y$ вторая матрица, т. е. Y , умножается на t , а первая остается неизменной.

ТЕОРЕМА 2. Сингулярные пучки P_1 и P_2 эквивалентны тогда и только тогда, когда P_1^s эквивалентен P_2^s и P_1^r эквивалентен kP_2^r для некоторого $k \in \mathbb{C}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть P_1 и P_2 эквивалентны. Тогда, согласно [4, теорема 3], P_1^s и P_2^s эквивалентны относительно $\text{GL}_n(\mathbb{C}) \times \text{GL}_n(\mathbb{C})$, а P_1^r и P_2^r – относительно $\text{GL}_n(\mathbb{C}) \times \text{GL}_n(\mathbb{C}) \times \text{GL}_2(\mathbb{C})$. Значит, P_1^s и P_2^s эквивалентны (см. лемму 2), а P_1^r эквивалентен kP_2^r для некоторого $k \in \mathbb{C}$. Обратно, если P_1^r и kP_2^r эквивалентны для некоторого $k \in \mathbb{C}$ и P_1^s нетривиален, то, применяя подходящее преобразование из $\text{SL}_n(\mathbb{C})$, пучок P_1 можно привести к виду $tP_2^s + P_2^r$. Теперь требуемое утверждение вытекает из леммы 2.

Таким образом, классификация всех пучков распадается на две независимые задачи: классификацию абсолютно сингулярных пучков и классификацию регулярных пучков. Поскольку абсолютно сингулярный пучок полностью определяется минимальными индексами строк и столбцов, первая задача сводится к перебору комбинаций блоков вида L_r и $L_s^\top$, которыми можно заполнить данную квадратную матрицу. Классификацию регулярных пучков можно произвести, развивая идею элементарных делителей [4]. Однако для того, чтобы получить информацию о примыканиях орбит, нам потребуется несколько иной подход.

Любой регулярный пучок $\lambda X + \mu Y$ эквивалентен пучку вида $\lambda E + \mu D$, где матрица E единичная, а D – жорданова матрица. Пучки $\lambda E + \mu D$ и $\lambda E + \mu D'$ эквивалентны относительно G тогда и только тогда, когда существуют такие матрицы $A, B \in \text{SL}_n(\mathbb{C})$ и $C \in \text{SL}_2(\mathbb{C})$, что

$$\begin{aligned} A(c_{11}E + c_{12}D)B^{-1} &= E, \\ A(c_{21}E + c_{22}D)B^{-1} &= D', \end{aligned} \quad (6)$$

где c_{ij} – элементы матрицы C^{-1} . Это условие эквивалентно существованию таких матриц $A \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ и $C \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, что $A(\psi_C(D))A^{-1} = D'$ и

$$\det(c_{11}E + c_{12}D) = 1, \quad (7)$$

где ψ_C – дробно-линейное преобразование матриц, определенное соотношением

$$\psi_C(X) = (c_{21}E + c_{22}X)(c_{11}E + c_{12}X)^{-1}. \quad (8)$$

ЛЕММА 3. *В предыдущих обозначениях если пучки $\lambda E + \mu D$ и $\lambda E + \mu D'$ эквивалентны и матрица D состоит из одной жордановой клетки, соответствующей собственному значению α , то D' также состоит из одной клетки, собственное (единственное) значение которой равно $\psi_C(\alpha)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $D = \alpha E + N$, где N – нильпотентная матрица. Тогда

$$\begin{aligned} D' = \psi_C(D) &= ((c_{21} + c_{22}\alpha)E + N)((c_{11} + c_{12}\alpha)E + N)^{-1} \\ &= \psi_C(\alpha)(E + \gamma_1 N + \gamma_2 N^2 + \dots). \end{aligned}$$

Поскольку $\mathrm{Ker} N \subset \mathrm{Ker} N^k$, то $\mathrm{Ker}(D - \alpha E) \subset \mathrm{Ker}(\psi_C(D) - \psi_C(\alpha)E)$. Учитывая, что $\psi_{C^{-1}}(\psi_C(D)) = D$, получаем

$$\dim \mathrm{Ker}(D - \alpha E) = \dim \mathrm{Ker}(\psi_C(D) - \psi_C(\alpha)E) = 1.$$

Следовательно, D' состоит только из одной жордановой клетки с собственным значением $\psi_C(\alpha)$.

Из доказанной леммы вытекает

ТЕОРЕМА 3. *Пучки $\lambda E + \mu D$ и $\lambda E + \mu D'$ эквивалентны тогда и только тогда, когда наборы собственных значений матриц D и D' переводятся друг в друга некоторым дробно-линейным преобразованием, обладающим свойством (7), и размерности соответствующих клеток равны.*

Итак, класс эквивалентных регулярных пучков определяется:

1) набором $(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ (различных) собственных значений матрицы D , определенным с точностью до некоторого дробно-линейного преобразования, удовлетворяющего условию (7), и набором $(k_1, \dots, k_s)$ их кратностей;

2) разбиением $(k_{i1}, \dots, k_{il_i})$ каждого из чисел k_i , соответствующим набору жордановых клеток.

Можно применить этот результат к построению графа примыканий нильпотентных орбит при $n \leq 4$ (при $n > 4$ таких орбит бесконечное число [5]). Нильпотентный регулярный пучок матриц порядка $n \leq 4$ имеет не более двух различных собственных значений (теорема 1), и любые две такие пары переводятся друг в друга некоторым дробно-линейным преобразованием, удовлетворяющим условию (7). Таким образом, в этом случае класс эквивалентных нильпотентных регулярных пучков определяется только разбиениями $(k_1, \dots, k_s)$ и $(k_{i1}, \dots, k_{il_i})$. Он будет обозначаться

$$R_{k_1}(k_{11}, \dots, k_{1l_1}) + \dots + R_{k_s}(k_{s1}, \dots, k_{sl_s}),$$

причем k_{ij} , равные единице, в этой записи не указываются. Например, пучок, соответствующий двум жордановым клеткам размерностей 1 и 2 с собственным значением α_1 и одной жордановой клетке размерности 1 с собственным значением $\alpha_2 \neq \alpha_1$, обозначается $R_3(2) + R_1$.

Результаты классификации нильпотентных пучков матриц порядка 4 представлены в таблице; $\dim$ обозначает размерность орбиты пучка, R и r – ранговые инварианты (см. п. 4), а ε_i и $\tilde{\varepsilon}_i$ – минимальные индексы столбцов и строк соответственно. В столбце, в котором указан канонический вид, пучок вида $P + P$ сокращенно обозначается $2P$, а слагаемые L_0 и $L_0^\top$ не указываются вовсе. Например, запись $2L_1$ означает $L_1 + L_1 + L_0^\top + L_0^\top$. Размерность орбиты пучка можно вычислить, зная размерность его стационарной подгруппы, которая равна размерности его централизатора в касательной алгебре группы G . Размерность централизатора мы нашли непосредственно, вычислив (на компьютере) ранг задающей его системы линейных уравнений.

Таблица. Нильпотентные пучки матриц порядка 4

№	Канон. вид	$\dim$	R	r	ε_i	$\tilde{\varepsilon}_i$	№	Канон. вид	$\dim$	R	r	ε_i	$\tilde{\varepsilon}_i$
1	$R_1 + R_3(3)$	30	4	3			21	$L_1 + R_2$	22	3	1	0	1
2	$R_4(4)$	29	4	3			22	$L_1^\top + R_2$	22	3	1	1	0
3	$R_1 + R_3(2)$	28	4	2			23	$R_3(3)$	22	3	2	0	0
4	$R_4(3)$	27	4	2			24	$R_1 + R_2$	21	3	1	0	0
5	$L_1 + L_2^\top$	27	3	3	2	1	25	$R_3(2)$	20	3	1	0	0
6	$L_1^\top + L_2$	27	3	3	1	2	26	$2L_1$	20	2	2	0 0	1 1
7	L_3	27	3	3	0	3	27	$L_1 + L_1^\top$	20	2	2	1 0	1 0
8	$L_3^\top$	27	3	3	3	0	28	$2L_1^\top$	20	2	2	1 1	0 0
9	$L_1 + L_1^\top + R_1$	26	3	2	1	1	29	L_2	19	2	2	0 0	2 0
10	$L_2 + R_1$	26	3	2	0	2	30	$L_2^\top$	19	2	2	2 0	0 0
11	$L_2^\top + R_1$	26	3	2	2	0	31	$L_1 + R_1$	18	2	1	0 0	1 0
12	$2R_1 + L_1^\top$	25	3	2	0	1	32	$L_1^\top + R_1$	18	2	1	1 0	0 0
13	$2R_1 + L_1^\top$	25	3	2	1	0	33	R_4	17	4	0		
14	$R_4(2, 2)$	25	4	2			34	$2R_1$	16	2	1	0 0	0 0
15	$3R_1$	24	3	2	0	0	35	R_3	16	3	0	0	0
16	$R_1 + R_3$	24	4	1			36	$R_2(2)$	15	2	1	0 0	0 0
17	$L_1 + R_2(2)$	24	3	2	0	1	37	R_2	13	2	0	0 0	0 0
18	$L_1^\top + R_2(2)$	24	3	2	1	0	38	L_1	11	1	1	0 0 0	1 0 0
19	$R_1 + R_2(2)$	23	3	2	0	0	39	$L_1^\top$	11	1	1	1 0 0	0 0 0
20	$R_4(2)$	23	4	1			40	R_1	8	1	0	0 0 0	0 0 0

4. Граф примыканий нильпотентных орбит. Вершинами графа примыканий являются классы эквивалентных пучков, т.е. орбиты. Две вершины, соответствующие орбитам $\mathcal{O}_1$ и $\mathcal{O}_2$, соединяются стрелкой в том и только том случае, если замыкание $\mathcal{O}_1$ содержит $\mathcal{O}_2$ и никаких нетривиальных промежуточных, т.е. таких, что $\overline{\mathcal{O}_1} \supset \overline{\mathcal{O}} \supset \mathcal{O}_2$, орбит $\mathcal{O}$ нет. Построение графа примыканий орбит нильпотентных пучков порядка 4 основано на следующих леммах и том простом соображении, что в замыкании какой-либо орбиты могут содержаться только орбиты меньшей размерности.

ЛЕММА 4. Если пучок P содержит в своем замыкании пучок $\bar{P}$, то $\dim \text{Ker}_m P \leq \dim \text{Ker}_m \bar{P}$, где $\text{Ker}_m Q$ обозначает пространство всех однородных элементов $\mathbb{C}[\lambda, \mu]$ -модуля $\text{Ker } Q$ степени m .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть последовательность $P_t \in \mathcal{O}_P$ сходится к $\bar{P}$. Так как все P_t принадлежат одной орбите, то все $\dim \text{Ker}_m P_t$ равны между собой. Поскольку грасманово многообразие компактно, из последовательности подпространств $\text{Ker}_m P_t$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность, предел которой, очевидно, лежит в $\text{Ker } \bar{P}$. Следовательно, $\dim \text{Ker}_m P \leq \dim \text{Ker}_m \bar{P}$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если орбита пучка P содержит в своем замыкании пучок $\bar{P}$ и $\varepsilon_1(P) = \varepsilon_1(\bar{P}), \dots, \varepsilon_{k-1}(P) = \varepsilon_{k-1}(\bar{P})$, то $\varepsilon_k(P) \geq \varepsilon_k(\bar{P})$.

Для любого пучка $P = \lambda X + \mu Y$ положим

$$\begin{aligned} r(P) &= \min_{(\lambda, \mu) \neq (0, 0)} \text{rk}(\lambda X + \mu Y), \\ R(P) &= \max_{(\lambda, \mu)} \text{rk}(\lambda X + \mu Y). \end{aligned} \quad (9)$$

Очевидно, что $r(P)$ и $R(P)$ инвариантны относительно действия группы G .

ЛЕММА 5. Если орбита пучка P содержит в своем замыкании пучок $\bar{P}$, то $r(P) \geq r(\bar{P})$ и $R(P) \geq R(\bar{P})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть последовательность $P_t = \lambda X_t + \mu Y_t \in \mathcal{O}_P$ сходится к $\bar{P} = \lambda \bar{X} + \mu \bar{Y}$. Ясно, что $r(P_t) = r(P)$ и $R(P_t) = R(P)$. Для каждого t положим

$$M_t = \{(\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1 \mid \text{rk}(\lambda X_t + \mu Y_t) = r(P)\}.$$

Последовательность непустых множеств M_t имеет в $\mathbb{P}^1$ по крайней мере одну предельную точку $(\lambda_0 : \mu_0)$. Тогда $r(P) \geq \text{rk}(\lambda_0 \bar{X} + \mu_0 \bar{Y}) \geq r(\bar{P})$. Неравенство $R(P) \geq R(\bar{P})$ очевидно.

ЛЕММА 6. Пусть $P = P^r + Z_m$, где Z_m — нулевой пучок матриц порядка m , и замыкание орбиты пучка P содержит $\bar{P} = \bar{P}^r + Z_m$. Тогда количество различных собственных значений пучка $\bar{P}^r$ не превосходит количества различных собственных значений пучка P^r .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из соотношений (6) вытекает, что если последовательность $g_t = (A_t, B_t, C_t)$ элементов группы G такова, что $\lim g_t P = \bar{P}$, то и $\lim g'_t P^r = \bar{P}^r$, где $g'_t = (A'_t, B'_t, C_t)$, а A'_t и B'_t — соответствующие угловые подматрицы матриц A_t и B_t . Следовательно, замыкание $\text{SL}_2(\mathbb{C})$ -орбиты бинарной формы $\varphi(P^r)$ содержит $\varphi(\bar{P}^r)$. Число различных собственных значений равно числу различных линейных множителей, на которые разлагается $\varphi(P^r)$, и, очевидно, не может увеличиться при переходе к пределу.

Граф примыканий был построен следующим образом. Мы перебирали орбиты в порядке возрастания их размерности и для каждой орбиты проверяли, какие из орбит меньшей размерности могут лежать в ее замыкании. Для этого мы либо подбирали кривую, выводящую на рассматриваемую орбиту меньшей размерности, либо при помощи доказанных лемм показывали, что одна орбита в замыкании другой не содержится.

Приведем здесь несколько примеров:

- 1) $L_2^\top \notin \overline{L_1 + L_1^\top}$, так как $\dim \text{Ker}_0 L_2^\top = 2$, а $\dim \text{Ker}_0(L_1 + L_1^\top) = 1$;
- 2) $R_1 + R_3 \notin \overline{R_4(4)}$, так как число различных собственных значений у $R_1 + R_3$ равно двум, а у $R_4(4)$ — одному;
- 3) $2L_1 \notin \overline{R_4(2)}$, так как $r(2L_1) > r(R_4(2))$;
- 4) $R_n(k) \in \overline{R_{n-1}(k-1) + R_1}$ и, в частности, $R_4(2) \in \overline{R_1 + R_3}$;

$$\begin{pmatrix} \lambda & \mu & & \\ t^2\lambda & \lambda & & \\ & & \lambda + t\mu & \\ & & & \lambda + t\mu \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda & \mu & & \\ & \lambda & & \\ & & \lambda & \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{при } t \rightarrow 0;$$

- 5) $L_2 \in \overline{2L_1}$; если $\varepsilon_1(P) = \varepsilon_2(P) = 1$ и соответствующие векторы $x_1(\lambda, \mu)$ и $x_2(\lambda, \mu)$ суть $(\mu, 0, -\lambda, \lambda)$ и $(0, \mu, -\mu, \mu - 1)$, а $\varepsilon_1(\overline{P}) = 2$ и $x_1(\lambda, \mu) = (\mu^2 - 1, -\mu, \lambda, 0)$, то при $t \rightarrow 0$

$$\begin{pmatrix} \lambda & \mu & \mu & \\ & \lambda & \mu & t\mu \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda & \mu & \mu & \\ & \lambda & \mu & 0 \end{pmatrix}.$$

Граф примыканий нильпотентных орбит является симметричным относительно операции перехода к транспонированному пучку. Из теоремы 3 вытекает, что если пучок P регулярный, то P эквивалентен $P^\top$, и поэтому транспонирование достаточно применять только к сингулярной части пучка. Для экономии места на рис. 2 приведена только часть графа примыканий. Для того чтобы получить граф примыканий полностью, в этом графе необходимо транспонировать все пучки, добавить полученный граф к исходному, а затем отождествить вершины с одинаковыми метками. При объединении двух симметричных частей графа новые ребра не возникают. Однако это вовсе не означает, что если P_1 и P_2 принадлежат разным частям графа, то θ_{P_1} не лежит в замыкании θ_{P_2} , или наоборот. Так, например, замыкание орбиты $L_1 + 2R_1$ содержит $L_1 + L_1^\top$, замыкание которой, в свою очередь, содержит как $L_1 + R_1$, так и $L_1^\top + R_1$.

5. Инварианты. Покажем, что алгебра инвариантов действия G в пространстве пучков квадратных матриц порядка n естественно изоморфна алгебре инвариантов действия $\text{SL}_2(\mathbb{C})$ в пространстве бинарных форм степени n .

ЛЕММА 7. *Расширение $\varphi^*: \mathbb{C}[W]^G \rightarrow \mathbb{C}[V]^G$ является целым.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через I идеал алгебры $\mathbb{C}[V]^G$, порожденный образом максимального однородного идеала алгебры $\mathbb{C}[W]^G$ при отображении φ^* . Из теоремы 1 и теоремы Гильберта о нулях вытекает, что радикал идеала I совпадает с идеалом алгебры $\mathbb{C}[V]^G$, порожденным всеми ее однородными элементами положительной степени. Тогда, согласно теореме Гильберта [6], расширение $\varphi^*: \mathbb{C}[W]^G \rightarrow \mathbb{C}[V]^G$ является целым.

ТЕОРЕМА 4. *Морфизм $\varphi^*: \mathbb{C}[W]^G \rightarrow \mathbb{C}[V]^G$ алгебр инвариантов является изоморфизмом.*

Рис. 2. Граф примыканий нильпотентных орбит

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 3 следует, что регулярный пучок общего положения можно привести к виду $\lambda E + \mu D$, где матрица E – единичная, а D – диагональная, все диагональные элементы которой различны, причем пучки $\lambda E + \mu D$ и $\lambda E + \mu D'$ эквивалентны, если и только если существует дробно-линейное преобразование, обладающее свойством (7) и переводящее набор диагональных элементов матрицы D в набор диагональных элементов матрицы D' . Нетрудно видеть, что бинарные формы $\prod(\lambda + \mu x_i)$ и $\prod(\lambda + \mu y_i)$ также эквивалентны тогда и только тогда, когда $\{x_1, \dots, x_n\}$ и $\{y_1, \dots, y_n\}$ связаны дробно-линейным преобразованием, которое оставляет старший коэффициент формы равным единице. Нетрудно видеть, что последнее условие эквивалентно (7). Таким образом, φ осуществляет взаимно однозначное соответствие между орбитами общего положения группы G

в пространствах V и W и, следовательно, индуцирует изоморфизм полей рациональных G -инвариантов на V и W . Эти поля совпадают с полями частных соответствующих алгебр целых инвариантов, поскольку алгебры $\mathbb{C}[W]$ и $\mathbb{C}[V]$ факториальны, а группа G не имеет нетривиальных характеров [1, теорема 3.3]. Требуемое утверждение теперь вытекает из леммы 7 и целозамкнутости алгебры $\mathbb{C}[W]^G$.

Список литературы

1. Винберг Э. Б., Попов В. Л. Теория инвариантов // Итоги науки и техн. Современ. пробл. матем. Фундам. направл. Т. 55. М.: ВИНТИ, 1989. С. 137–309.
2. Первушин Д. Д. Орбиты и инварианты стандартного $SL_4(\mathbb{C}) \times SL_4(\mathbb{C}) \times SL_2(\mathbb{C})$ -модуля // Изв. РАН. Сер. матем. 2001. Т. 64. № 5. С. 133–146.
3. Gantmacher F. R. The Theory of Matrices. N. Y.: Chelsea, 1974.
4. Ja'ja J. An addendum to Kronecker's theory of pencils // SIAM J. Appl. Math. 1979. V. 37. № 3. P. 700–712.
5. Кас V. G. Some remarks on nilpotent orbits // J. of Algebra. 1980. V. 64. P. 190–213.
6. Hilbert D. Über die vollen Invarianten Systeme // Math. Ann. 1893. V. 42. P. 313–373.

Поступило в редакцию
27.III.2001
8.V.2002