Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Устинов, О распределении чисел Фробениуса с тремя аргументами, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2010, том 74, выпуск 5, 145–170

DOI: <https://doi.org/10.4213/im4053>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 18:28:46

УДК 511.335+511.336+517.524

А. В. Устинов

О распределении чисел Фробениуса с тремя аргументами

Доказано существование предельной плотности распределения нормированных чисел Фробениуса от трех аргументов. Плотность найдена явно. Библиография: 22 наименования.

Ключевые слова: числа Фробениуса, суммы Клостермана, цепные дроби.

Пусть A – некоторое утверждение. Тогда $[A] = 1$, если A истинно, и $[A] = 0$ в противном случае.

Для натурального q через $\delta_q(a)$ будем обозначать характеристическую функцию делимости на q :

$$\delta_q(a) = [a \equiv 0 \pmod{q}] = \begin{cases} 1, & \text{если } a \equiv 0 \pmod{q}, \\ 0, & \text{если } a \not\equiv 0 \pmod{q}. \end{cases}$$

Знак $*$ в суммах вида $\sum_{m=1}^{*n} \dots$ означает, что суммирование проводится по приведенной системе вычетов.

Сумма степеней делителей натурального q выражается формулой

$$\sigma_\alpha(q) = \sum_{d|q} d^\alpha.$$

§ 1. Введение

Для натуральных $a_1, \dots, a_n$, взаимно простых в совокупности, *числом Фробениуса* $g(a_1, \dots, a_n)$ называется наибольшее натуральное m , не представимое в виде

$$x_1 a_1 + \dots + x_n a_n = m, \quad (1)$$

где $x_1, \dots, x_n$ – целые неотрицательные числа. В большинстве задач, связанных с числами Фробениуса, удобнее рассматривать функцию

$$f(a_1, \dots, a_n) = g(a_1, \dots, a_n) + a_1 + \dots + a_n,$$

которая дает наибольшее натуральное m , не представимое в виде (1) с натуральными коэффициентами $x_1, \dots, x_n$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 10-01-98001-р_сибирь_а, 07-01-00306, 09-01-12129-офи_м), Программы Президента РФ (грант МД-2339.2010.1), Фонда “Династия”, Проекта ДВО (№ 09-I-П4-03) и Фонда содействия отечественной науке.

При $n = 2$ известна формула, приписываемая Сильвестру (см. [1], обсуждение истории вопроса см. в [2]): $f(a, b) = ab$. Если $n = 3$, то задача о нахождении $f(a, b, c)$ сводится к рассмотрению случая, когда аргументы попарно взаимно просты, и при

$$(a, b) = (a, c) = (b, c) = 1, \quad b \equiv lc \pmod{a}, \quad 1 \leq l \leq a,$$

значение $f(a, b, c)$ выражается через элементы цепной дроби для числа l/a (см. результаты из [3], [4], а также формулы (5), (6) ниже). При $n \geq 4$ формулы для нахождения $f(a_1, \dots, a_n)$ не известны. Доказано, что для фиксированного n число Фробениуса можно вычислить за полиномиальное время (см. [5]), а при произвольном n нахождение $f(a_1, \dots, a_n)$ становится NP-трудной задачей (см. [6]).

Вопросы о поведении чисел Фробениуса в среднем были поставлены Дж. Дэйвисоном и В. И. Арнольдом (см. [7]; [8, задачи 1999-8, 2003-5]). В работе [9] на основании одного естественного предположения, подтвержденного позднее в [10] (см. также [11]), доказано существование предельного распределения величины $f(a, b, c)N^{-3/2}$ при $1 \leq a, b, c \leq N$ и $N \rightarrow \infty$. Для произвольного $n \geq 4$ в [9] также доказано, что (при дополнительном техническом условии) для любого $\varepsilon > 0$ существует $D = D(\varepsilon)$ такое, что

$$P_{N,\alpha}\{f(a_1, \dots, a_n)N^{-1-\frac{1}{n+1}} \leq D\} \geq 1 - \varepsilon,$$

где $P_{N,\alpha}$ – вероятность, соответствующая равномерному распределению на множестве

$$\{(a_1, \dots, a_n): \alpha N < a_1, \dots, a_n \leq N, (a_1, \dots, a_n) = 1\}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

В работе [12] (см. также [13]) методами геометрии чисел получен более точный результат:

$$P_{N,0}\{f(a_1, \dots, a_n)N^{-1-\frac{1}{n+1}} > t\} \ll t^{-2}.$$

Там же доказано, что в среднем числа $f(a_1, \dots, a_n)$ ведут себя как $N^{1+\frac{1}{n+1}}$, но отношение $f(a_1, \dots, a_n)/N^{1+\frac{1}{n+1}}$ может быть неограниченно большим.

В [14] методами эргодической теории доказано существование предельной функции распределения для нормированных чисел Фробениуса $\frac{f(a_1, \dots, a_n)}{(a_1 \cdots a_n)^{1/(n-1)}}$ при любом $n \geq 3$.

В статье [15] решена задача Арнольда о существовании слабой асимптотики для чисел $f(a, b, c)$. Доказано, что в среднем по множеству

$$M_a(x_1, x_2) = \{(a, b, c): 1 \leq b \leq x_1 a, 1 \leq c \leq x_2 a, (a, b, c) = 1\}$$

при любых $x_1, x_2 > 0$ числа Фробениуса ведут себя как $\frac{8}{\pi} \sqrt{abc}$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|M_a(x_1, x_2)|} \sum_{(a,b,c) \in M_a(x_1, x_2)} f(a, b, c) \\ &= \frac{1}{|M_a(x_1, x_2)|} \sum_{(a,b,c) \in M_a(x_1, x_2)} \frac{8}{\pi} \sqrt{abc} + O_{x_1, x_2, \varepsilon}(a^{4/3+\varepsilon}). \end{aligned} \quad (2)$$

Как следствие, доказаны гипотезы Дэйвисона из [7] в более сильной формулировке:

$$\frac{1}{|M_a(1, 1)|} \sum_{(a, b, c) \in M_a(1, 1)} \frac{f(a, b, c)}{\sqrt{abc}} = \frac{8}{\pi} + O_\varepsilon(a^{-1/12+\varepsilon}). \quad (3)$$

Оказывается, что предельная плотность распределения нормированных чисел Фробениуса $\frac{f(a, b, c)}{\sqrt{abc}}$ от трех аргументов может быть найдена явно. Как и в работе [15], она выделяется при усреднении по двум аргументам из трех, а в остаточном члене получается явное степенное понижение.

ТЕОРЕМА. Пусть a – натуральное, x_1, x_2, ε – действительные положительные числа. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{|M_a(x_1, x_2)|} \sum_{(a, b, c) \in M_a(x_1, x_2)} [f(a, b, c) \leq \tau \sqrt{abc}] \\ = \int_0^\tau p(t) dt + O_\varepsilon(R(a; x_1, x_2; \tau) a^\varepsilon), \end{aligned}$$

где

$$R(a; x_1, x_2; \tau) \ll_{x_1, x_2, \tau} a^{-1/6},$$

и плотность $p(t)$ задается равенствами

$$p(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \in [0, \sqrt{3}], \\ \frac{12}{\pi} \left(\frac{t}{\sqrt{3}} - \sqrt{4-t^2} \right), & \text{если } t \in [\sqrt{3}, 2], \\ \frac{12}{\pi^2} \left(t\sqrt{3} \arccos \frac{t+3\sqrt{t^2-4}}{4\sqrt{t^2-3}} + \frac{3}{2} \sqrt{t^2-4} \log \frac{t^2-4}{t^2-3} \right), & \text{если } t \in [2, +\infty). \end{cases}$$

Для функции $p(t)$ проверяется равенство

$$\int_0^\infty tp(t) dt = \frac{8}{\pi},$$

которое согласуется с формулами (2), (3). Из теоремы следует, что для почти всех троек чисел $(a, b, c) \in M_a(1, 1)$ числа Фробениуса $f(a, b, c)$ имеют порядок $\sqrt{abc}$. Используя свойства плотности, удастся описать мощность исключительного множества: при $a > \tau^{34+\varepsilon}$

$$\frac{1}{|M_a(1, 1)|} \sum_{(a, b, c) \in M_a(1, 1)} [f(a, b, c) > \tau \sqrt{abc}] = \frac{9}{\pi^2 \tau^2} + O\left(\frac{1}{\tau^4}\right).$$

Доказательство теоремы (как и результата работы [15]) основано на формуле Рёдсета для чисел Фробениуса. Наиболее естественную интерпретацию эта формула получает в терминах решеток и геометрической теории цепных дробей (§ 2). Наибольшие остаточные члены, возникающие в доказательстве, оцениваются с помощью метода ван дер Корпута и оценок сумм Клостермана (§ 3). Сначала задача о распределении нормированных чисел Фробениуса сводится к задаче о распределении значений функции Рёдсета. При этом появляется усреднение по решеткам, состоящим из решений линейных сравнений (§ 4).

После вспомогательных преобразований, основанных на симметрии функции Рёдсета (§ 5), сумма по решеткам заменяется аналогичным интегралом (§ 6). Тройной интеграл, выражающий функцию распределения, дифференцируется по параметру, что приводит к представлению искомой плотности в виде двойного интеграла (§ 7). Полученный интеграл вычисляется явно (§ 8).

Автор благодарит рецензента за найденные недочеты в первоначальной версии статьи и О. Рёдсета за указания на ссылки, связанные с темой работы.

§ 2. Функция Рёдсета

Пусть l – фиксированное целое число, $1 \leq l \leq a$, $(l, a) = 1$, и $\bar{l}$ – решение сравнения $\bar{l}l \equiv 1 \pmod{a}$, $1 \leq \bar{l} \leq a$. В соответствии с работой [3] рассмотрим разложение a/l в цепную дробь с минусами:

$$\frac{a}{l} = a_1 - \frac{1}{a_2 - \frac{1}{\ddots - \frac{1}{a_m}}}, \quad a_1, \dots, a_m \geq 2,$$

длины $m = m(a/l)$. Определим последовательности $\{s_j\}$, $\{q_j\}$, $-1 \leq j \leq m$, условиями

$$\begin{aligned} s_m = 0, \quad s_{m-1} = 1, \quad q_{-1} = 0, \quad q_0 = 1, \\ s_{j-1} = a_{j+1}s_j - s_{j+1}, \quad q_{j+1} = a_{j+1}q_j - q_{j-1}, \quad 0 \leq j \leq m-1. \end{aligned} \quad (4)$$

Легко показать следующие свойства чисел $\{s_j\}$, $\{q_j\}$ (см. [3], [15]):

1°) справедливы равенства $s_{-1} = q_m = a$, $s_0 = l$, $q_{m-1} = \bar{l}$;

2°) последовательность $\{s_j\}$ монотонно убывает, $\{q_j\}$ – монотонно возрастает, и выполнены неравенства

$$0 = \frac{s_m}{q_m} < \frac{s_{m-1}}{q_{m-1}} < \dots < \frac{s_0}{q_0} < \frac{s_{-1}}{q_{-1}} = \infty;$$

3°) при любом n , $0 \leq n \leq m$, векторы $e_n = (q_n, s_n)$ и $e_{n-1} = (q_{n-1}, s_{n-1})$ образуют базис решетки

$$\Lambda_l = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2: xl \equiv y \pmod{a}\},$$

при этом $\begin{vmatrix} q_n & s_n \\ q_{n-1} & s_{n-1} \end{vmatrix} = \det \Lambda_l = a$;

4°) точки (q_n, s_n) , $-1 \leq n \leq m$, являются вершинами выпуклой оболочки ненулевых точек решетки Λ_l , лежащих в первой координатной четверти;

5°) четверки $(q_n, s_{n-1}, q_{n-1}, s_n)$ при $1 \leq l < a$, $(l, a) = 1$, $0 \leq n \leq m(l/a)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с решениями (u_1, u_2, v_1, v_2) уравнения $u_1u_2 - v_1v_2 = a$, для которых $0 \leq v_1 < u_1 \leq a$, $(u_1, v_1) = 1$, $0 \leq v_2 < u_2 \leq a$, $(u_2, v_2) = 1$;

6°) при $0 \leq n \leq m$ выполняются неравенства $s_{n-1} - s_n \leq a/q_n$, $q_n - q_{n-1} \leq a/s_{n-1}$.

Введем функцию Рёдсета $\rho_{l,a}(t_1, t_2)$, которая для неотрицательных действительных t_1, t_2 таких, что

$$\frac{s_n}{q_n} \leq \frac{t_2}{t_1} < \frac{s_{n-1}}{q_{n-1}},$$

определяется равенством

$$\rho_{l,a}(t_1, t_2) = t_1 s_{n-1} + t_2 q_n - \min \{t_1 s_n, t_2 q_{n-1}\}. \quad (5)$$

Тогда, как показано в [3], при $(b, a) = 1$ и $c \equiv bl \pmod{a}$ число Фробениуса вычисляется по формуле

$$f(a, b, c) = \rho_{l,a}(b, c). \quad (6)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Функция $\rho_{l,a}(t_1, t_2)$ непрерывна и равенство (5) выполняется при

$$\frac{s_n}{q_n} \leq \frac{t_2}{t_1} \leq \frac{s_{n-1}}{q_{n-1}}.$$

§ 3. Применение оценок сумм Клостермана

Пусть q – натуральное число, a – целое и f – неотрицательная функция. Обозначим через $T[f]$ число решений сравнения $xy \equiv a \pmod{q}$, лежащих в области $P_1 < x \leq P_2$, $0 < y \leq f(x)$:

$$T[f] = \sum_{P_1 < x \leq P_2} \sum_{0 < y \leq f(x)} \delta_q(xy - a).$$

Как показано в работе [16], вычисление $T[f]$ сводится к нахождению суммы

$$S[f] = \frac{1}{q} \sum_{P_1 < x \leq P_2} \mu_{q,a}(x) f(x),$$

где $\mu_{q,a}(x)$ – число решений сравнения $xy \equiv a \pmod{q}$ относительно переменной y , лежащей на отрезке $[1, q]$.

Приведем упрощенный результат работы [17], уточняющий соответствующую теорему из [16]. Он основан на оценках сумм Клостермана

$$K_q(l, m, n) = \sum_{x, y=1}^q \delta_q(xy - l) \exp \left\{ 2\pi i \frac{mx + ny}{q} \right\}$$

и методе ван дер Корпута оценки тригонометрических сумм. Доказательство использует неравенство

$$|K_q(l, m, n)| \leq \sigma_0(q) \sigma_0((l, m, n, q)) (lm, ln, mn, q)^{1/2} q^{1/2},$$

обобщающее результат Эстермана [18]

$$|K_q(\pm 1, m, n)| \leq \sigma_0(q) (m, n, q)^{1/2} q^{1/2}.$$

ЛЕММА 1. Пусть P_1, P_2 – действительные числа, $P = P_2 - P_1 \geq 2$, на всем отрезке $[P_1, P_2]$ вещественная неотрицательная функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема и для некоторых $A > 0$, $w \geq 1$

$$\frac{1}{A} \leq |f''(x)| \leq \frac{w}{A}.$$

Тогда справедлива асимптотическая формула

$$T[f] = S[f] - \frac{P}{2}\delta_q(a) + R[f],$$

где

$$R[f] \ll_{w,\varepsilon} (PA^{-1/3} + A^{1/2}D + q^{1/2})P^\varepsilon, \quad D = (a, q).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из тривиальной формулы

$$\sum_{y=1}^Y \delta_q(xy - a) = \frac{Y}{q} \mu_{q,a}(x) + O(1)$$

следует, что в обозначениях леммы 1

$$T[f] = S[f] + O(P).$$

ЛЕММА 2 [15, лемма 5]. Пусть P_1, P_2 – действительные числа такие, что $P = P_2 - P_1 > 0$, и вещественная неотрицательная функция $f(x)$ на отрезке $[P_1, P_2]$ постоянна. Тогда

$$T[f] = S[f] + O\left(\left(q^{1/2} + \left(\frac{P}{q} + 1\right)D\right)q^\varepsilon\right),$$

где $D = (a, q)$.

В свою очередь, сумма $S[f]$ также регулярна, и ее нахождение может быть сведено к вычислению интеграла.

ЛЕММА 3 [15, лемма 6]. Пусть f – убывающая на отрезке $[P_1, P_2]$ функция и $f(P_1) - f(P_2) = Q$. Тогда в обозначениях леммы 1

$$S[f] = \psi(a, q) \int_{P_1}^{P_2} f(x) dx + O(DQq^{-1+\varepsilon}),$$

где

$$\psi(a, q) = \frac{K_q(a, 0, 0)}{q^2} = \frac{1}{q} \sum_{k|(a, q)} \sum_{\delta|q/k} \frac{\mu(\delta)}{\delta} \ll q^{-1+\varepsilon}. \quad (7)$$

ЛЕММА 4 [15, лемма 7]. Пусть $\tau > 0$, функция $I(r)/r \in C([0, \tau])$ имеет конечное число участков монотонности, $|I(r)/r| \leq B$ для всех $r \in [0, \tau]$, $\psi(a, q)$ определено в (7) и $1 \leq U\tau \leq a$. Тогда

$$\sum_{q \leq \tau U} \psi(a, q) I\left(\frac{q}{U}\right) = \frac{\sigma_{-1}(a)}{\zeta(2)} \int_0^\tau \frac{I(r)}{r} dr + O(BU^{-1}a^\varepsilon).$$

§ 4. Сведение к интегралу с функцией Рёдсета

ЛЕММА 5 [15, замечание 2]. Пусть Ω – плоская односвязная область со спрямляемой границей, V – площадь области Ω , P – ее периметр. Если Λ – подрешетка $\mathbb{Z}^2$ индекса d и $N(\Lambda)$ – число точек Λ , содержащихся в области Ω , то

$$\left|N(\Lambda) - \frac{V}{d}\right| \leq 4(P + 1).$$

ЛЕММА 6. Пусть $1 \leq l < a$, $(l, a) = 1$, δ_1, δ_2 – натуральные, x_1, x_2 – положительные действительные числа и последовательности $\{s_j\}, \{q_j\}$ заданы равенствами (4). Определим целое $r = r(l, a; x_1, x_2)$ с помощью неравенств

$$\frac{s_r}{q_r} \leq \frac{x_2}{x_1} < \frac{s_{r-1}}{q_{r-1}}.$$

Тогда для суммы

$$S_{l,a}(\delta_1, \delta_2; x_1, x_2; \tau) = \sum_{\substack{b \leq x_1 a \\ \delta_1 | b}} \sum_{\substack{c \leq x_2 a \\ \delta_2 | c}} \delta_a(bl - c) [\rho_{l,a}(b, c) \leq \tau \sqrt{abc}]$$

справедлива асимптотическая формула

$$\begin{aligned} S_{l,a}(\delta_1, \delta_2; x_1, x_2; \tau) \\ = a \frac{(a, \delta_1, \delta_2)}{\delta_1 \delta_2} \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} [\rho_{l,a}(t_1, t_2) \leq \tau \sqrt{at_1 t_2}] dt_1 dt_2 + O(R_{l,a}(x_1, x_2)), \end{aligned}$$

где

$$R_{l,a}(x_1, x_2) = x_1 a \left(\frac{1}{s_0} + \cdots + \frac{1}{s_{r-1}} \right) + x_2 a \left(\frac{1}{q_r} + \cdots + \frac{1}{q_{m-1}} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим решетку

$$\Lambda_l(\delta_1, \delta_2) = \{(x, y) \in \Lambda_l : \delta_1 | x, \delta_2 | y\}.$$

Произвольная точка (x, y) решетки Λ_l имеет вид $(x, y) = ue_{-1} + ve_0$, где u, v – целые, $e_{-1} = (0, a)$, $e_0 = (1, l)$ (см. свойство 3°)). Такая точка будет принадлежать подрешетке $\Lambda_l(\delta_1, \delta_2)$ в том и только в том случае, когда выполняются сравнения

$$v \equiv 0 \pmod{\delta_1}, \quad au + lv \equiv 0 \pmod{\delta_2}.$$

Отсюда $\Lambda_l(\delta_1, \delta_2)$ – подрешетка индекса $\delta_1 \delta_2 / (a, \delta_1, \delta_2)$ в решетке Λ_l .

Рассмотрим сумму

$$\begin{aligned} S_n &= S_{l,a,n}(\delta_1, \delta_2; x_1, x_2) \\ &= \sum_{\substack{b \leq x_1 a \\ \delta_1 | b}} \sum_{\substack{c \leq x_2 a \\ \delta_2 | c}} \left[(b, c) \in \Lambda_l(\delta_1, \delta_2), \frac{s_n}{q_n} \leq \frac{c}{b} < \frac{s_{n-1}}{q_{n-1}}, \rho_{l,a}(b, c) \leq \tau \sqrt{abc} \right]. \end{aligned}$$

Согласно свойству 3°) последовательностей $\{s_j\}, \{q_j\}$ все решения сравнения $bl \equiv c \pmod{a}$, для которых $s_n/q_n \leq c/b < s_{n-1}/q_{n-1}$, имеют вид

$$b(u, v) = uq_n + vq_{n-1}, \quad c(u, v) = us_n + vs_{n-1}$$

с целыми $u > 0, v \geq 0$. Поэтому

$$S_n = \sum_{u > 0} \sum_{v \geq 0} [b(u, v) \leq x_1 a, \delta_1 | b(u, v), c(u, v) \leq x_2 a, \delta_2 | c(u, v)] h_{l,a,n}(u, v),$$

где

$$h_{l,a,n}(u, v) = [\rho_{l,a}(uq_n + vq_{n-1}, us_n + vs_{n-1}) \leq \tau \sqrt{a(uq_n + vq_{n-1})(us_n + vs_{n-1})}].$$

При $n > r$ из двух ограничений $b \leq x_1 a$, $c \leq x_2 a$ существенным является лишь первое. Значит,

$$S_n = \sum_{u>0} \sum_{v \geq 0} [uq_n + vq_{n-1} \leq x_1 a, \delta_1 | uq_n + vq_{n-1}, \delta_2 | us_n + vs_{n-1}] h_{l,a,n}(u, v).$$

Переменные u и v меняются внутри треугольной области $u > 0$, $v \geq 0$, $uq_n + vq_{n-1} \leq x_1 a$, периметр которой есть $O(x_1 a / q_{n-1})$. Кроме того, как отмечалось выше, $\Lambda_l(\delta_1, \delta_2)$ – подрешетка индекса $\delta_1 \delta_2 / (a, \delta_1, \delta_2)$ в Λ_l . Поэтому, применяя лемму 5, находим (под знаками интегралов прежние переменные суммирования принимают уже действительные значения)

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{(a, \delta_1, \delta_2)}{\delta_1 \delta_2} \int_0^a \int_0^a [uq_n + vq_{n-1} \leq x_1 a] h_{l,a,n}(u, v) du dv + O\left(\frac{x_1 a}{q_{n-1}}\right) \\ &= \frac{(a, \delta_1, \delta_2)}{a \delta_1 \delta_2} \int_0^{x_1 a} \int_0^{x_2 a} \left[\frac{s_n}{q_n} \leq \frac{c}{b} < \frac{s_{n-1}}{q_{n-1}}, \rho_{l,a}(b, c) \leq \tau \sqrt{abc} \right] db dc + O\left(\frac{x_1 a}{q_{n-1}}\right) \\ &= a \frac{(a, \delta_1, \delta_2)}{\delta_1 \delta_2} \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \left[\frac{s_n}{q_n} \leq \frac{t_2}{t_1} < \frac{s_{n-1}}{q_{n-1}}, \rho_{l,a}(t_1, t_2) \leq \tau \sqrt{at_1 t_2} \right] dt_1 dt_2 \\ &\quad + O\left(\frac{x_1 a}{q_{n-1}}\right). \end{aligned} \quad (8)$$

Аналогично, при $n < r$ из двух ограничений $b \leq x_1 a$, $c \leq x_2 a$ остается лишь второе, что приводит к равенству

$$\begin{aligned} S_n &= a^2 \frac{(a, \delta_1, \delta_2)}{\delta_1 \delta_2} \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \left[\frac{s_n}{q_n} \leq \frac{t_2}{t_1} < \frac{s_{n-1}}{q_{n-1}}, \rho_{l,a}(t_1, t_2) \leq \tau \sqrt{at_1 t_2} \right] dt_1 dt_2 \\ &\quad + O\left(\frac{x_1 a}{s_n}\right). \end{aligned} \quad (9)$$

Если $n = r$, то прямая $c/b = x_2/x_1$ на плоскости Obc делит угол $s_n/q_n \leq c/b < s_{n-1}/q_{n-1}$ на две части, в первой из которых ($s_n/q_n \leq c/b < x_2/x_1$) нужно учитывать ограничение $b \leq x_1 a$, а во второй ($x_2/x_1 \leq c/b < s_{n-1}/q_{n-1}$) – ограничение $c \leq x_2 a$. Поэтому

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{u>0} \sum_{v \geq 0} [b(u, v) \leq x_1 a, x_2 b(u, v) > x_1 c(u, v), \delta_1 | b(u, v), \delta_2 | c(u, v)] h_{l,a,r}(u, v) \\ &\quad + \sum_{u>0} \sum_{v \geq 0} [c(u, v) \leq x_2 a, x_2 b(u, v) \leq x_1 c(u, v), \delta_1 | b(u, v), \delta_2 | c(u, v)] h_{l,a,r}(u, v). \end{aligned}$$

Переменные u , v меняются внутри четырехугольной области $u > 0$, $v \geq 0$, $uq_r + vq_{r-1} \leq x_1 a$, $us_r + vs_{r-1} \leq x_2 a$, периметр которой оценивается как (см. свойство 6°))

$$O\left(\frac{x_1 a}{q_r} + \frac{x_2 a}{s_{r-1}} + x_1(s_{r-1} - s_r) + x_2(q_r - q_{r-1})\right) = O\left(\frac{x_1 a}{q_r} + \frac{x_2 a}{s_{r-1}}\right).$$

Снова применяя лемму 5, приходим к равенству

$$\begin{aligned} S_r &= a \frac{(a, \delta_1, \delta_2)}{\delta_1 \delta_2} \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \left[\frac{s_r}{q_r} \leq \frac{t_2}{t_1} < \frac{s_{r-1}}{q_{r-1}}, \rho_{l,a}(t_1, t_2) \leq \tau \sqrt{at_1 t_2} \right] dt_1 dt_2 \\ &\quad + O\left(\frac{x_1 a}{q_r} + \frac{x_2 a}{s_{r-1}}\right). \end{aligned} \quad (10)$$

Суммируя равенства (8)–(10), получаем нужную асимптотическую формулу для суммы

$$S_{l,a}(\delta_1, \delta_2; x_1, x_2; \tau) = \sum_{n=0}^m S_n.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 7. В условиях леммы 6 для суммы $R_a(x_1, x_2) = \sum_{l=1}^{*a} R_{l,a}(x_1, x_2)$ при любом $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$R_a(x_1, x_2) \ll (x_1 + x_2)a^{1/2+\varepsilon}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь симметрией суммы $R_a(x_1, x_2)$ (она переходит в себя при заменах $x_1 \leftrightarrow x_2$, $s_j \leftrightarrow q_{m-j-1}$) и свойством 5°) последовательностей $\{s_j\}$ и $\{q_j\}$, можем выписать оценку

$$R_a(x_1, x_2) \ll \sum_{u_1=1}^a \sum_{v_1=0}^{u_1-1} \sum_{u_2=1}^a \sum_{v_2=0}^{u_2-1} \left[u_1 u_2 - v_1 v_2 = a, \frac{v_2}{u_1} \leq \frac{x_2}{x_1} \right] \frac{x_1}{u_1}.$$

Введем новые переменные $x = u_2$, $y = u_1 - v_1$, $z = u_1$, $w = u_2 - v_2$. Тогда

$$\begin{aligned} R_a(x_1, x_2) &\ll \sum_{z=1}^a \frac{x_1}{z} \sum_{w \geq 0} \sum_{x \leq x_2 z / x_1} \sum_{y \leq z} [zw + xy = a] \\ &\ll \sum_{z=1}^a \frac{x_1}{z} \sum_{x \leq x_2 z / x_1} \sum_{y \leq z} [xy \leq a] \delta_z(xy - a). \end{aligned}$$

Для каждого z область изменения переменных x и y можно разбить на части ($x \leq \sqrt{a}$ и $x > \sqrt{a}$), каждая из которых по одной из координат имеет размер не больше $\sqrt{a}$. Применяя для каждой из них замечание 2 и леммы 2, 3, получаем нужную оценку:

$$\begin{aligned} R_a(x_1, x_2) &= \sum_{z \leq \sqrt{x_1 a / x_2}} \frac{x_1}{z} \left(\frac{x_2 z}{x_1} + \sqrt{a} \right) a^\varepsilon + \sum_{z > \sqrt{x_1 a / x_2}} \frac{x_1}{z} \left(\frac{a}{z} + \sqrt{a} \right) a^\varepsilon \\ &\ll (x_1 + x_2) a^{1/2+\varepsilon}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. В условиях леммы 6 для суммы

$$S_a(\delta_1, \delta_2; x_1, x_2; \tau) = \sum_{l=1}^a {}^* S_{l,a}(\delta_1, \delta_2; x_1, x_2; \tau)$$

справедлива асимптотическая формула

$$S_a(\delta_1, \delta_2; x_1, x_2; \tau) = a \frac{(a, \delta_1, \delta_2)}{\delta_1 \delta_2} \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \rho_a(t_1, t_2; \tau) dt_1 dt_2 + O((x_1 + x_2) a^{3/2+\varepsilon}),$$

где

$$\rho_a(t_1, t_2; \tau) = \sum_{l=1}^a {}^* [\rho_{l,a}(t_1, t_2) \leq \tau \sqrt{a t_1 t_2}].$$

ЛЕММА 8. Пусть x_1, x_2 – положительные действительные числа. Тогда для суммы

$$F_a(x_1, x_2; \tau) = \sum_{(a,b,c) \in M_a(x_1, x_2)} [f(a, b, c) \leq \tau \sqrt{abc}] \quad (11)$$

справедлива асимптотическая формула

$$\begin{aligned} F_a(x_1, x_2; \tau) &= \\ &= \sum_{\substack{d_1 d_2 | a \\ (d_1, d_2) = 1}} \frac{a}{d_1 d_2} \sum_{\delta_1 | d_2 a_1} \frac{\mu(\delta_1)}{\delta_1} \sum_{\delta_2 | d_1 a_1} \frac{\mu(\delta_2)}{\delta_2} (a, \delta_1, \delta_2) \int_0^{x_1 d_2} \int_0^{x_2 d_1} \rho_{a_1}(t_1, t_2; \tau) dt_1 dt_2 \\ &\quad + O((x_1 + x_2) a^{3/2+\varepsilon}), \end{aligned}$$

где $a_1 = a/(d_1 d_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для нахождения суммы $F_a(x_1, x_2; \tau)$ введем параметры $d_1 = (a, b)$, $d_2 = (a, c)$ и положим $b_1 = b/d_1$, $c_1 = c/d_2$, $a_1 = a/(d_1 d_2)$. Для всех ненулевых слагаемых $(d_1, d_2) = 1$. Поэтому

$$\begin{aligned} F_a(x_1, x_2; \tau) &= \sum_{\substack{d_1 d_2 | a \\ (d_1, d_2) = 1}} \sum_{\substack{b \leq x_1 a \\ (b, a) = d_1}} \sum_{\substack{c \leq x_2 a \\ (c, a) = d_2}} [f(a, b, c) \leq \tau \sqrt{abc}] \\ &= \sum_{\substack{d_1 d_2 | a \\ (d_1, d_2) = 1}} \sum_{\substack{b_1 \leq x_1 d_2 a_1 \\ (b_1, d_2 a_1) = 1}} \sum_{\substack{c_1 \leq x_2 d_1 a_1 \\ (c_1, d_1 a_1) = 1}} [f(d_1 d_2 a_1, d_1 b_1, d_2 c_1) \leq \tau d_1 d_2 \sqrt{a_1 b_1 c_1}]. \end{aligned}$$

Применяя тождество Джонсона (см. [19])

$$f(a, b, c) = df\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}, c\right),$$

находим

$$F_a(x_1, x_2; \tau) = \sum_{\substack{d_1 d_2 | a \\ (d_1, d_2) = 1}} \sum_{\substack{b_1 \leq x_1 d_2 a_1 \\ (b_1, d_2 a_1) = 1}} \sum_{\substack{c_1 \leq x_2 d_1 a_1 \\ (c_1, d_1 a_1) = 1}} [f(a_1, b_1, c_1) \leq \tau \sqrt{a_1 b_1 c_1}].$$

Теперь число Фробениуса можно выразить через функцию Рёдсета по формуле (6). Значит,

$$\begin{aligned} F_a(x_1, x_2; \tau) &= \sum_{\substack{d_1 d_2 | a \\ (d_1, d_2) = 1}} \sum_{l=1}^{a_1} \sum_{\substack{b_1 \leq x_1 d_2 a_1 \\ (b_1, d_2 a_1) = 1}} \sum_{\substack{c_1 \leq x_2 d_1 a_1 \\ (c_1, d_1 a_1) = 1}} \delta_{a_1}(b_1 l - c_1) \\ &\quad \times [\rho_{l, a_1}(b_1, c_1) \leq \tau \sqrt{a_1 b_1 c_1}] \\ &= \sum_{\substack{d_1 d_2 | a \\ (d_1, d_2) = 1}} \sum_{\delta_1 | d_2 a_1} \mu(\delta_1) \sum_{\delta_2 | d_1 a_1} \mu(\delta_2) \sum_{l=1}^{a_1} \sum_{\substack{b_1 \leq x_1 d_2 a_1 \\ \delta_1 | b_1}} \sum_{\substack{c_1 \leq x_2 d_1 a_1 \\ \delta_2 | c_1}} \delta_{a_1}(b_1 l - c_1) \\ &\quad \times [\rho_{l, a_1}(b_1, c_1) \leq \tau \sqrt{a_1 b_1 c_1}] \\ &= \sum_{\substack{d_1 d_2 | a \\ (d_1, d_2) = 1}} \sum_{\delta_1 | d_2 a_1} \mu(\delta_1) \sum_{\delta_2 | d_1 a_1} \mu(\delta_2) S_{a_1}(\delta_1, \delta_2; x_1 d_2, x_2 d_1; \tau). \end{aligned}$$

Подставляя в последнюю формулу результат следствия 1, приходим к утверждению леммы.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Те же самые рассуждения, примененные к сумме

$$G_a(x_1, x_2; \tau) = \sum_{(a,b,c) \in M_a(x_1, x_2)} g(\tau)$$

с числом $g(\tau) \in [0, 1]$, приводят к формуле

$$\begin{aligned} G_a(x_1, x_2; \tau) = & \sum_{\substack{d_1 d_2 | a \\ (d_1, d_2) = 1}} \frac{a}{d_1 d_2} \varphi\left(\frac{a}{d_1 d_2}\right) \sum_{\delta_1 | d_2 a_1} \frac{\mu(\delta_1)}{\delta_1} \sum_{\delta_2 | d_1 a_1} \frac{\mu(\delta_2)}{\delta_2} (a, \delta_1, \delta_2) \\ & \times \int_0^{x_1 d_2} \int_0^{x_2 d_1} g(\tau) dt_1 dt_2 + O((x_1 + x_2)a^{3/2+\varepsilon}). \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В силу однородности функции $\rho_{l,a}(t_1, t_2)$

$$\rho_{l,a}(t_1, t_2) = t_1 \rho_{l,a}\left(\frac{t_2}{t_1}\right),$$

где при $s_n/q_n \leq \xi < s_{n-1}/q_{n-1}$

$$\rho_{l,a}(\xi) = s_{n-1} + \xi q_n - \min\{s_n, \xi q_{n-1}\}.$$

Поэтому, зная плотность

$$\rho_a(\xi; \tau) = \sum_{l=1}^a [\rho_{l,a}(\xi) \leq \tau \sqrt{a\xi}], \quad (12)$$

легко найти нужную функцию

$$\rho_a(t_1, t_2; \tau) = \rho_a(t_2/t_1; \tau). \quad (13)$$

§ 5. Вспомогательные преобразования

В соответствии со свойством 5°) последовательностей $\{s_j\}$, $\{q_j\}$

$$\begin{aligned} \rho_a(\xi; \tau) = & \sum_{u_1=1}^a \sum_{v_1=0}^{u_1-1} \sum_{u_2=1}^a \sum_{v_2=0}^{u_2-1} \left[u_1 u_2 - v_1 v_2 = a, \frac{v_2}{u_1} \leq \xi < \frac{u_2}{v_1}, \right. \\ & \left. u_2 + \xi u_1 - \min\{v_2, \xi v_1\} \leq \tau \sqrt{a\xi} \right]. \end{aligned}$$

Рассматривая отдельно случаи $v_2 > \xi v_1$ и $v_2 \leq \xi v_1$, запишем искомую плотность в виде

$$\rho_a(\xi; \tau) = \lambda^*(a; \xi; \tau) + \eta^*(a; \xi; \tau),$$

где

$$\begin{aligned}\lambda^*(a; \xi; \tau) &= \sum_{u_1=1}^a \sum_{v_1=0}^{u_1-1} \sum_{u_2=1}^a \sum_{v_2=0}^{u_2-1} \left[u_1 u_2 - v_1 v_2 = a, \frac{v_2}{u_1} \leq \xi < \frac{v_2}{v_1}, \right. \\ &\quad \left. u_2 + \xi(u_1 - v_1) \leq \tau \sqrt{a\xi} \right], \\ \eta^*(a; \xi; \tau) &= \sum_{u_1=1}^a \sum_{v_1=0}^{u_1-1} \sum_{u_2=1}^a \sum_{v_2=0}^{u_2-1} \left[u_1 u_2 - v_1 v_2 = a, \frac{v_2}{v_1} \leq \xi < \frac{u_2}{v_1}, \right. \\ &\quad \left. u_2 - v_2 + \xi u_1 \leq \tau \sqrt{a\xi} \right].\end{aligned}$$

Делая замену переменных $u_1 \leftrightarrow u_2$, $v_1 \leftrightarrow v_2$ и учитывая замечание 1, получаем равенство $\eta^*(a; \xi; \tau) = \lambda^*(a; 1/\xi; \tau)$. Поэтому

$$\rho_a(\xi; \tau) = \lambda^*(a; \xi; \tau) + \lambda^*(a; 1/\xi; \tau). \quad (14)$$

Для вычисления функции $\lambda^*(a; \xi; \tau)$ перепишем уравнение $u_1 u_2 - v_1 v_2 = a$ в виде

$$u_1(u_2 - v_2) + v_2(u_1 - v_1) = a$$

и введем переменные $x = u_1$, $y = u_2 - v_2$, $z = u_1 - v_1$, $w = v_2$. Соответственно, сумма $\lambda^*(a; \xi; \tau)$ перепишется в виде

$$\lambda^*(a; \xi; \tau) = \sum_{x=1}^a \sum_{z=1}^x \sum_{y=1}^a \sum_{w=0}^{a-1} \left[xy + wz = a, \frac{w}{x} \leq \xi < \frac{w}{x-z}, y + w + \xi z \leq \tau \sqrt{a\xi} \right].$$

Освобождаясь от условий взаимной простоты, получаем

$$\lambda^*(a; \xi; \tau) = \sum_{d_1 d_2 | a} \mu(d_1) \mu(d_2) \lambda\left(\frac{a}{d_1 d_2}; \frac{d_1 \xi}{d_2}; \tau\right), \quad (15)$$

где

$$\lambda(a; \xi; \tau) = \sum_{x \geq 1} \sum_{z=1}^x \sum_{y \geq 1} \sum_{w \geq 0} \left[xy + wz = a, \frac{w}{x} \leq \xi < \frac{w}{x-z}, y + w + \xi z \leq \tau \sqrt{a\xi} \right]. \quad (16)$$

§ 6. Интегральное представление для функции распределения

ЛЕММА 9. Для суммы $\lambda(a; \xi; \tau)$, определенной равенством (16), справедлива асимптотическая формула

$$\lambda(a; \xi; \tau) = \frac{a \sigma_{-1}(a)}{\zeta(2)} \Phi(\tau) + O_\varepsilon(R_0(a, \xi, \tau)),$$

где

$$\begin{aligned}\Phi(\tau) &= \int_0^\tau \frac{I(r, \tau)}{r} dr, \\ I(r, \tau) &= \int_r^\infty \int_r^\infty \left[1 \leq \alpha\beta \leq 1 + r^2, \quad \alpha + \beta - \tau \leq \frac{\alpha\beta - 1}{r} \right] d\alpha d\beta, \\ R_0(a, \xi, \tau) &= (a^{5/6} \tau^{5/3} \xi^{1/2} + a^{3/4} \tau^{3/2} (\xi^{3/4} + \xi^{1/2}) + a^{1/2} \tau (\xi^{1/2} + \xi^{-1/2})) a^\varepsilon.\end{aligned}\quad (17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что для известных w , x и y таких, что $xy \equiv a \pmod{w}$, значение z однозначно находится из формулы

$$z = \frac{a - xy}{w}.$$

Поэтому, учитывая ограничение $z \leq x$, перепишем сумму $\lambda(a; \xi; \tau)$ в виде

$$\begin{aligned}\lambda(a; \xi; \tau) &= \sum_{w \leq \tau \sqrt{a\xi}} \sum_{x \geq w/\xi} \sum_{y \geq 1} \delta_w(xy - a) [\max\{y_0(x), y_1(x)\} \leq y < y_2(x)] \\ &= \sum_{w \leq \tau \sqrt{a\xi}} \sum_{y \geq 1} \sum_{x \geq w/\xi} \delta_w(xy - a) [\max\{x_0(y), x_1(y)\} \leq x < x_2(y)] \\ &= \sum_{w \leq \tau \sqrt{a\xi}} \sum_{(x, y) \in \Omega} \delta_w(xy - a),\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}y_0(x) &= \frac{a + \frac{w^2}{\xi} - w\tau \sqrt{\frac{a}{\xi}}}{x - \frac{w}{\xi}}, & y_1(x) &= \frac{a}{x} - w, & y_2(x) &= \frac{a}{x} - w + \frac{w^2}{\xi x}, \\ x_0(y) &= \frac{a + \frac{w^2}{\xi} - w\tau \sqrt{\frac{a}{\xi}}}{y} + \frac{w}{\xi}, & x_1(y) &= \frac{a}{w + y}, & x_2(y) &= \frac{1}{w + y} \left(a + \frac{w^2}{\xi} \right),\end{aligned}$$

а область $\Omega = \Omega(a, \xi, \tau)$ задается неравенствами

$$x \geq \frac{w}{\xi}, \quad \max\{y_0(x), y_1(x)\} \leq y < y_2(x),$$

или равносильными условиями

$$x \geq \frac{w}{\xi}, \quad \max\{x_0(y), x_1(y)\} \leq x < x_2(y).$$

Чтобы сумма $\lambda(a; \xi; \tau)$ не была равна тождественно нулю, область $y_0(x) \leq y < y_2(x)$ должна быть непустой. Уравнение $y_1(x) = y_2(x)$ сводится к квадратному с дискриминантом $-3r^2 + 2r\tau + \tau^2 - 4$, где $r = w/\sqrt{a\xi}$. Он может принимать неотрицательные значения только при $\tau \geq \sqrt{3}$. Значит, при $\tau < \sqrt{3}$ область пуста и функция $\lambda(a; \xi; \tau)$ (как и $I(r, \tau)$) тождественно равна нулю. Поэтому в дальнейшем будем везде предполагать справедливость неравенства $\tau \geq \sqrt{3}$ (соответствующего оценке Рёдсета $f(a, b, c) \geq \sqrt{3abc}$ [20]).

Введем параметры

$$U_0 = \sqrt{a + \frac{w^2}{\xi} - w\tau \sqrt{\frac{a}{\xi}}} \leq \sqrt{a}, \quad U_1 = \sqrt{a}, \quad U_2 = \sqrt{a + \frac{w^2}{\xi}}.$$

Область Ω разобьем на части горизонтальными прямыми

$$y = U_0, \quad y = U_1 - w, \quad y = U_2 - w$$

и вертикальными

$$x = U_0 + \frac{w}{\xi}, \quad x = U_1, \quad x = U_2.$$

При $x \leq U_0 + w/\xi$ будем применять лемму 1 к функции $y_0(x)$, разбивая область изменения переменной x на полуинтервалы вида $(X + w/\xi, 2X + w/\xi]$. На каждом из них

$$y_0''(x) \asymp \frac{a + \frac{w^2}{\xi} - w\tau\sqrt{\frac{a}{\xi}}}{(x - \frac{w}{\xi})^3} \asymp \frac{U_0^2}{X^3} = \frac{1}{A_0(X)}, \quad A_0(X) \leq U_0 \leq U_2.$$

При $x \geq U_0 + w/\xi$ ($y \leq U_0$) будем применять лемму 1 к функции $x_0(y)$, разбивая область изменения переменной y на полуинтервалы вида $(Y, 2Y]$. На каждом из таких интервалов

$$x_0''(y) \asymp \frac{a + \frac{w^2}{\xi} - w\tau\sqrt{\frac{a}{\xi}}}{y^3} \asymp \frac{U_0^2}{Y^3} = \frac{1}{A_0(Y)}, \quad A_0(Y) \leq U_0 \leq U_2.$$

Для функции $y_1(x)$ лемму 1 будем применять при $x \leq U_1$, причем для $x \in (X, 2X]$

$$y_1''(x) \asymp \frac{a}{x^3} \asymp \frac{U_1^2}{X^3} = \frac{1}{A_1(X)}, \quad A_1(X) \leq U_1 \leq U_2.$$

Для функции $x_1(y)$ лемму 1 будем применять при $y \leq U_1 - w$ ($x \geq U_1$). При этом для $y \in (Y - w, 2Y - w]$

$$x_1''(y) \asymp \frac{a}{(w + y)^3} \asymp \frac{U_1^2}{Y^3} = \frac{1}{A_1(Y)}, \quad A_1(Y) \leq U_1 \leq U_2.$$

Для функции $y_2(x)$ лемму 1 будем применять при $x \leq U_2$, причем для $x \in (X, 2X]$

$$y_2''(x) \asymp \frac{a + \frac{w^2}{\xi}}{x^3} \asymp \frac{U_2^2}{X^3} = \frac{1}{A_2(X)}, \quad A_2(X) \leq U_2.$$

Для функции $x_2(y)$ лемму 1 будем применять при $y \leq U_2 - w$ ($x \geq U_2$), причем для $y \in (Y - w, 2Y - w]$

$$x_2''(y) \asymp \frac{a + \frac{w^2}{\xi}}{(w + y)^3} \asymp \frac{U_2^2}{Y^3} = \frac{1}{A_2(Y)}, \quad A_2(Y) \leq U_2.$$

Для прямоугольных частей разбиения области Ω применим лемму 2. Для сумм $S[x_i(y)]$, $S[y_i(x)]$, $i = 0, 1, 2$, применим лемму 3. С учетом соотношений

$$S[f - g] = S[f] - S[g], \quad x_2(y) - x_1(y) \leq \frac{w}{\xi}, \quad y_2(x) - y_1(x) \leq \frac{w^2}{\xi x} \leq w$$

приходим к главному члену

$$\sum_{w \leq \tau \sqrt{a\xi}} \psi(a, w) \iint_{\Omega(a, \xi, \tau)} dx dy$$

и остатку

$$\begin{aligned} R_0(a, \xi, \tau) &\ll \sum_{w \leq \tau \sqrt{a\xi}} \left(\left(a + \frac{w^2}{\xi} \right)^{1/3} + \left(a + \frac{w^2}{\xi} \right)^{1/4} D_w + w^{1/2} \right. \\ &\quad \left. + \delta_w(a) \left(a + \frac{w^2}{\xi} \right)^{1/2} + \frac{D_w}{w} \left(w \left(1 + \frac{1}{\xi} \right) + \left(a + \frac{w^2}{\xi} \right)^{1/2} + w^{1/2} \right) \right) a^\varepsilon \\ &\ll (a^{5/6} \tau^{5/3} \xi^{1/2} + a^{3/4} \tau^{3/2} (\xi^{1/2} + \xi^{3/4}) + a^{1/2} \tau (\xi^{1/2} + \xi^{-1/2})) a^\varepsilon. \end{aligned}$$

В главном члене сделаем замены переменных $x = \alpha \sqrt{a/\xi}$, $y = \beta \sqrt{a\xi}$ и положим $r = w/\sqrt{a\xi}$. Тогда получим

$$\lambda(a; \xi; \tau) = \sum_{w \leq \tau \sqrt{a\xi}} \psi(a, w) I\left(\frac{w}{\sqrt{a\xi}}, \tau\right) + O_\varepsilon(R_0(a, \xi, \tau)),$$

где

$$\begin{aligned} I(r, \tau) &= a \int_r^\infty d\alpha \int_0^\infty [\max\{\beta_0(\alpha), \beta_1(\alpha)\} \leq \beta < \beta_2(\alpha)] d\beta, \\ \beta_0(\alpha) &= \frac{1+r^2-r\tau}{\alpha-r}, \quad \beta_1(\alpha) = \frac{1}{\alpha} - r, \quad \beta_2(\alpha) = \frac{1+r^2}{\alpha} - r. \end{aligned}$$

Замена $\beta \rightarrow \beta - r$ приводит интеграл $I(r, \tau)$ к виду (17). Применяя лемму 4 и пользуясь оценкой $I(r, \tau) \ll r \leq \tau$, приходим к требуемой формуле для суммы $\lambda(a; \xi; \tau)$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2. В обозначениях леммы 9 для функции $\rho_a(\xi; \tau)$, задаваемой равенством (12), справедлива асимптотическая формула

$$\rho_a(\xi; \tau) = \frac{2\varphi(a)}{\zeta(2)} \Phi(\tau) + O_\varepsilon(R(a, \xi, \tau)),$$

где

$$R(a, \xi, \tau) = (a^{5/6} \tau^{5/3} (\xi^{1/2} + \xi^{-1/2}) + a^{3/4} \tau^{3/2} (\xi^{3/4} + \xi^{-3/4}) + a^{1/2} \tau (\xi^{1/2} + \xi^{-1/2})) a^\varepsilon.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С помощью равенства

$$\sum_{d_1 d_2 | a} \mu(d_1) \mu(d_2) \frac{a}{d_1 d_2} \sigma_{-1} \left(\frac{a}{d_1 d_2} \right) = \varphi(a)$$

по формуле (15) получаем, что

$$\lambda^*(a; \xi; \tau) = \frac{\varphi(a)}{\zeta(2)} \Phi(\tau) + O_\varepsilon(R_0(a, \xi, \tau)).$$

Подставляя найденное равенство в (14), приходим к утверждению следствия.

СЛЕДСТВИЕ 3. Для суммы $F_a^*(x_1, x_2; \tau)$, определенной формулой (11), выполняется равенство

$$F_a^*(x_1, x_2; \tau) = \frac{2}{\zeta(2)} |M_a(x_1, x_2)| \Phi(\tau) + O_\varepsilon(R(a; x_1, x_2; \tau)),$$

где

$$R(a; x_1, x_2; \tau) = (a^{11/6} \tau^{5/3} x_1^{1/2} x_2^{1/2} (x_1 + x_2) + a^{7/4} \tau^{3/2} x_1^{1/4} x_2^{1/4} (x_1^{3/2} + x_2^{3/2}) + a^{3/2} (x_1 + x_2) (x_1^{1/2} x_2^{1/2} \tau + 1)) a^\varepsilon.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужная формула получается, если результат следствия 2 подставить в равенство (13), к полученному результату применить лемму 8 и воспользоваться замечанием 3.

§ 7. Интегральное представление для плотности

Для нахождения плотности $p(\tau)$ продифференцируем тройной интеграл, задающий $\Phi(\tau)$, по параметру τ .

ЛЕММА 10. Плотность $p(\tau) = \frac{2}{\zeta(2)} \Phi'(\tau)$ может быть записана в виде

$$p(\tau) = \frac{2}{\zeta(2)} \int_0^\infty \int_0^\infty \left[\alpha + \beta > \tau, (\alpha + \beta - \tau)^2 \leq \alpha\beta - 1, \right. \\ \left. \frac{\alpha\beta - 1}{\alpha + \beta - \tau} \leq \min\{\alpha, \beta\} \right] \frac{d\alpha d\beta}{\alpha + \beta - \tau}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, прежде всего, что при $r > \tau$ внутренний двойной интеграл в равенстве

$$\Phi(\tau) = \int_0^\tau \frac{dr}{r} \int_r^\infty \int_r^\infty \left[1 \leq \alpha\beta \leq 1 + r^2, \alpha + \beta - \tau \leq \frac{\alpha\beta - 1}{r} \right] d\alpha d\beta$$

равен нулю. Введем малый параметр $\Delta > 0$ и рассмотрим разность

$$\Phi(\tau + \Delta) - \Phi(\tau) = \int_0^\infty \frac{dr}{r} \int_r^\infty \int_r^\infty \left[1 \leq \alpha\beta \leq 1 + r^2, \right. \\ \left. \alpha + \beta - \tau - \Delta \leq \frac{\alpha\beta - 1}{r} < \alpha + \beta - \tau \right] d\alpha d\beta \\ = \Phi_1(\Delta, \tau) + \Phi_2(\Delta, \tau),$$

где

$$\Phi_1(\Delta, \tau) = \int_0^\infty \frac{dr}{r} \int_r^\infty \int_r^\infty \left[1 \leq \alpha\beta \leq 1 + r^2, \right. \\ \left. \alpha + \beta - \tau - \Delta \leq 0 < \alpha + \beta - \tau, \frac{\alpha\beta - 1}{r} < \alpha + \beta - \tau \right] d\alpha d\beta, \\ \Phi_2(\Delta, \tau) = \int_0^\infty \frac{dr}{r} \int_r^\infty \int_r^\infty \left[1 \leq \alpha\beta \leq 1 + r^2, \alpha + \beta - \tau - \Delta > 0, \right. \\ \left. \frac{\alpha\beta - 1}{\alpha + \beta - \tau} < r \leq \frac{\alpha\beta - 1}{\alpha + \beta - \tau - \Delta} \right] d\alpha d\beta.$$

В первом случае можно предполагать, что $\tau \geq 2$, поскольку иначе при $\Delta < 2 - \tau$ интеграл $\Phi_1(\Delta, \tau)$ равен нулю. Из условий

$$\alpha + \beta = \tau + O(\Delta), \quad \alpha\beta = 1 + O(\Delta\tau)$$

следует, что

$$\alpha = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4}}{2} + O(\Delta), \quad \beta = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4}}{2} + O(\Delta).$$

Поэтому область изменения параметров α и β имеет площадь, не превосходящую $O(\Delta^2)$. С другой стороны, для фиксированного $\alpha \geq 1$ (если $\alpha < 1$, то из неравенства $\alpha\beta \geq 1$ следует, что $\beta > 1$, и рассуждения можно провести аналогично) переменная β меняется в интервале, длина которого не превосходит

$$\frac{1+r^2}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} = \frac{r^2}{\alpha} \leq r^2.$$

Поэтому область изменения параметров α и β по площади можно оценить и как $O(r^2\Delta)$. Следовательно,

$$\Phi_1(\Delta, \tau) \ll \int_0^{\Delta^{1/3}} \frac{r^2\Delta}{r} dr + \int_{\Delta^{1/3}}^{\tau} \frac{\Delta^2}{r} dr \ll \Delta^{5/3}.$$

Поэтому $\Phi_1(\Delta, \tau)/\Delta \rightarrow 0$ при $\Delta \rightarrow 0$ и

$$p(\tau) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\Phi(\tau + \Delta) - \Phi(\tau)}{\Delta} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\Phi_2(\Delta, \tau)}{\Delta}.$$

В интеграле $\Phi_2(\Delta, \tau)$ внесем интегрирование по переменной r внутрь:

$$\begin{aligned} \Phi_2(\Delta, \tau) = \iint_{\Omega(\Delta)} d\alpha d\beta \int_0^\infty \left[\sqrt{\alpha\beta - 1} \leq r \leq \min\{\alpha, \beta\}, \right. \\ \left. \frac{\alpha\beta - 1}{\alpha + \beta - \tau} < r \leq \frac{\alpha\beta - 1}{\alpha + \beta - \tau - \Delta} \right] \frac{dr}{r}. \end{aligned}$$

Здесь и далее

$$\Omega(\Delta) = \{(\alpha, \beta) : \alpha, \beta > 0, \alpha\beta \geq 1, \alpha + \beta > \tau + \Delta\}.$$

Случай, когда отрезок $\left[\frac{\alpha\beta-1}{\alpha+\beta-\tau}, \frac{\alpha\beta-1}{\alpha+\beta-\tau-\Delta}\right]$ содержит точку $\sqrt{\alpha\beta-1}$, дает малый вклад в $\Phi_2(\Delta, \tau)$. Действительно, для фиксированного значения $t = \alpha + \beta - \tau > \Delta$ переменные α и β удовлетворяют неравенствам $t - \Delta \leq \sqrt{\alpha\beta - 1} \leq t$. Поэтому переменные меняются внутри интервалов, суммарная длина которых есть $O(\sqrt{\Delta})$, и выполняются оценки

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega(\Delta)} d\alpha d\beta \int_0^\infty \left[\frac{\alpha\beta - 1}{\alpha + \beta - \tau} \leq \sqrt{\alpha\beta - 1} \leq r \leq \frac{\alpha\beta - 1}{\alpha + \beta - \tau - \Delta} \right] \frac{dr}{r} \\ & \ll \iint_{\Omega(\Delta)} \left[\frac{\alpha\beta - 1}{\alpha + \beta - \tau} \leq \sqrt{\alpha\beta - 1} \leq \frac{\alpha\beta - 1}{\alpha + \beta - \tau - \Delta} \right] \frac{d\alpha d\beta}{\alpha + \beta - \tau} \\ & \ll \Delta \int_\Delta^\tau \frac{\sqrt{\Delta}}{t} dt \ll \Delta^{3/2-\varepsilon}. \end{aligned}$$

Случай, когда отрезок $\left[\frac{\alpha\beta-1}{\alpha+\beta-\tau}, \frac{\alpha\beta-1}{\alpha+\beta-\tau-\Delta}\right]$ содержит точку $\min\{\alpha, \beta\}$, также дает малый вклад в $\Phi_2(\Delta, \tau)$. Для получения соответствующих оценок заметим, что при $\tau < 2$ и $\Delta < 2 - \tau$ из неравенств $\alpha\beta \geq 1$, $\min\{\alpha, \beta\} \leq \frac{\alpha\beta-1}{\alpha+\beta-\tau-\Delta}$ следует, что этот вклад равен нулю. Если $\tau \geq 2$, то в силу симметрии можно предполагать, что $\alpha \leq \beta$. Тогда для фиксированного β

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \left[\alpha + \beta > \tau - \Delta, \sqrt{\alpha\beta - 1} \leq \min\{\alpha, \beta\}, \right. \\ & \quad \left. \frac{\alpha\beta - 1}{\alpha + \beta - \tau} \leq \min\{\alpha, \beta\} \leq \frac{\alpha\beta - 1}{\alpha + \beta - \tau - \Delta} \right] d\alpha \\ & \quad \times \int_0^\infty \left[\frac{\alpha\beta - 1}{\alpha + \beta - \tau} < r \leq \frac{\alpha\beta - 1}{\alpha + \beta - \tau - \Delta} \right] \frac{dr}{r} \\ & \ll \int_0^\infty \left[\alpha + \beta > \tau - \Delta, \sqrt{\alpha\beta - 1} \leq \min\{\alpha, \beta\}, \right. \\ & \quad \left. \frac{\alpha\beta - 1}{\alpha + \beta - \tau} \leq \min\{\alpha, \beta\} \leq \frac{\alpha\beta - 1}{\alpha + \beta - \tau - \Delta} \right] \frac{\Delta}{\alpha + \beta - \tau} d\alpha \\ & \ll -\Delta \log \Delta. \end{aligned}$$

Кроме того, при $\alpha \leq \beta$ из неравенств $\frac{\alpha\beta-1}{\alpha+\beta-\tau} \leq \min\{\alpha, \beta\} \leq \frac{\alpha\beta-1}{\alpha+\beta-\tau-\Delta}$ вытекает, что β меняется в следующих пределах:

$$\beta_1(\Delta) \leq \beta \leq \beta_1, \quad \beta_2 \leq \beta \leq \beta_2(\Delta),$$

где

$$\begin{aligned} \beta_{1,2} &= \frac{\tau \mp \sqrt{\tau^2 - 4}}{2}, \quad \beta_{1,2}(\Delta) = \frac{\tau + \Delta \mp \sqrt{(\tau + \Delta)^2 - 4}}{2}, \\ \beta_1 - \beta_1(\Delta) &\ll \sqrt{\Delta}, \quad \beta_2(\Delta) - \beta_2 \ll \sqrt{\Delta}. \end{aligned}$$

Поэтому и в таком случае вклад оценивается как $O(\Delta^{3/2-\varepsilon})$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \Phi_2(\Delta, \tau) &= \iint_{\Omega(\Delta)} \left[\sqrt{\alpha\beta - 1} \leq \frac{\alpha\beta - 1}{\alpha + \beta - \tau} \leq \min\{\alpha, \beta\} \right] d\alpha d\beta \\ & \quad \times \int_0^\infty \left[\frac{\alpha\beta - 1}{\alpha + \beta - \tau} \leq r < \frac{\alpha\beta - 1}{\alpha + \beta - \tau - \Delta} \right] \frac{dr}{r} + O(\Delta^{3/2-\varepsilon}) \\ &= \iint_{\Omega(\Delta)} \left[\sqrt{\alpha\beta - 1} \leq \frac{\alpha\beta - 1}{\alpha + \beta - \tau} \leq \min\{\alpha, \beta\} \right] \\ & \quad \times \left(\frac{\Delta}{\alpha + \beta - \tau} + O\left(\left(\frac{\Delta}{\alpha + \beta - \tau} \right)^2 \right) \right) d\alpha d\beta + O(\Delta^{3/2-\varepsilon}). \end{aligned}$$

Здесь при фиксированном $t = \alpha + \beta - \tau > \Delta$ переменные α и β меняются внутри интервалов, длина которых есть $O(t)$. Поэтому

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega(\Delta)} \left[\sqrt{\alpha\beta - 1} \leq \frac{\alpha\beta - 1}{\alpha + \beta - \tau} \leq \min\{\alpha, \beta\} \right] \left(\frac{\Delta}{\alpha + \beta - \tau} \right)^2 d\alpha d\beta \\ & \ll \int_\Delta^\tau \frac{\Delta^2}{t} dt \ll \Delta^{2-\varepsilon}. \end{aligned}$$

Значит,

$$\frac{\Phi_2(\Delta, \tau)}{\Delta} = \iint_{\Omega(\Delta)} \left[\sqrt{\alpha\beta - 1} \leq \frac{\alpha\beta - 1}{\alpha + \beta - \tau} \leq \min\{\alpha, \beta\} \right] \frac{d\alpha d\beta}{\alpha + \beta - \tau} + O(\Delta^{1/2-\varepsilon}).$$

Предельный переход при $\Delta \rightarrow 0$ завершает доказательство леммы.

§ 8. Вычисление плотности

Для нахождения явного вида плотности $p(\tau)$ изобразим кривые, участвующие в интегральном представлении

$$p(\tau) = \frac{2}{\zeta(2)} \int_0^\infty \int_0^\infty \left[\alpha + \beta > \tau, (\alpha + \beta - \tau)^2 \leq \alpha\beta - 1, \right. \\ \left. \frac{\alpha\beta - 1}{\alpha + \beta - \tau} \leq \min\{\alpha, \beta\} \right] \frac{d\alpha d\beta}{\alpha + \beta - \tau}.$$

На рис. 1 при $\sqrt{3} < \tau < 2$ показаны прямая $\alpha + \beta = \tau$, эллипс $(\alpha + \beta - \tau)^2 = \alpha\beta - 1$ (сплошными линиями) и гипербола $\alpha\beta = 1$ (пунктиром). На рис. 2 при $\tau > 2$ к ним добавлены горизонтальные прямые $\beta = \beta_{1,2}$, $\beta = \tau$ и вертикальные $\alpha = \alpha_{1,2}$, $\alpha = \tau$, где

$$\alpha_1 = \beta_1 = \frac{\tau - \sqrt{\tau^2 - 4}}{2}, \quad \alpha_2 = \beta_2 = \frac{\tau + \sqrt{\tau^2 - 4}}{2}.$$

ЛЕММА 11. Для плотности $p(\tau)$ справедливы равенства

$$p(\tau) = \begin{cases} 0, & \text{если } \tau \in [0, \sqrt{3}], \\ \frac{12}{\pi} \left(\frac{\tau}{\sqrt{3}} - \sqrt{4 - \tau^2} \right), & \text{если } \tau \in [\sqrt{3}, 2], \\ \frac{12}{\pi^2} \left(\tau\sqrt{3} \arccos \frac{\tau + 3\sqrt{\tau^2 - 4}}{4\sqrt{\tau^2 - 3}} + \frac{3}{2} \sqrt{\tau^2 - 4} \log \frac{\tau^2 - 4}{\tau^2 - 3} \right), & \text{если } \tau \in [2, +\infty). \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как отмечалось ранее, при $\tau < \sqrt{3}$ область интегрирования пуста и $p(\tau) = 0$.

Рассмотрим случай, когда $\sqrt{3} < \tau < 2$. Если $\alpha + \beta > \tau$, то выполняется неравенство $\frac{\alpha\beta - 1}{\alpha + \beta - \tau} \leq \min\{\alpha, \beta\}$. Поэтому область изменения переменных задается условием $(\alpha + \beta - \tau)^2 \leq \alpha\beta - 1$ (неравенство $\alpha + \beta > \tau$ следует из того, что $\alpha\beta \geq 1$). Таким образом, интегрирование проводится по внутренности эллипса $(\alpha + \beta - \tau)^2 = \alpha\beta - 1$ (см. рис. 1). Введем переменную $x = \alpha + \beta - \tau$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\zeta(2)}{2} p(\tau) &= \int_0^\infty \int_0^\infty [(\alpha + \beta - \tau)^2 \leq \alpha\beta - 1] \frac{d\alpha d\beta}{\alpha + \beta - \tau} \\ &= \int_0^\infty \frac{dx}{x} \int_0^\infty [x^2 + 1 \leq \alpha(x + \tau - \alpha)] d\alpha \\ &= \int_0^\infty [(x + \tau)^2 - 4(x^2 + 1) \geq 0] \frac{\sqrt{(x + \tau)^2 - 4(x^2 + 1)}}{x} dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{(x + \tau)^2 - 4(x^2 + 1)}}{x} dx, \end{aligned}$$

Рис. 1

Рис. 2

где

$$x_{1,2} = \frac{\tau \mp \sqrt{4\tau^2 - 12}}{3}.$$

Замена переменной $y = x - \frac{\tau}{3}$ приводит к интегралу ($b = \frac{\tau}{3}$, $a^2 = \frac{4\tau^2 - 12}{9}$)

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y + b} dy &= \sqrt{a^2 - y^2} + b \operatorname{arctg} \frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}} \\ &\quad - \sqrt{b^2 - a^2} \operatorname{arctg} \frac{a^2 + by}{\sqrt{b^2 - a^2} \sqrt{a^2 - y^2}}, \end{aligned}$$

для которого

$$\int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y + b} dy = \pi(b - \sqrt{b^2 - a^2}).$$

Отсюда

$$p(\tau) = \frac{2\pi}{\zeta(2)} \left(\frac{\tau}{\sqrt{3}} - \sqrt{4 - \tau^2} \right) = \frac{12}{\pi} \left(\frac{\tau}{\sqrt{3}} - \sqrt{4 - \tau^2} \right).$$

Рассмотрим теперь случай, когда $\tau \geq 2$. Как и раньше, неравенство $(\alpha + \beta - \tau)^2 \leq \alpha\beta - 1$ задает внутренность эллипса. Условие $\frac{\alpha\beta - 1}{\alpha + \beta - \tau} \leq \min\{\alpha, \beta\}$ равносильно тому, что $\alpha \in [0, \alpha_1] \cup [\alpha_2, \infty)$, $\beta \in [0, \beta_1] \cup [\beta_2, \infty)$. Поэтому плотность $p(\tau)$ можно представить в виде

$$p(\tau) = \frac{2}{\zeta(2)} (J_1 + 2J_2),$$

где J_1 — интеграл по области, ограниченной отрезками AC , BC и дугой эллипса AB , а J_2 — по сегменту эллипса, отсекаемому отрезком DE (см. рис. 2).

Интеграл J_1 также находится с помощью замены $x = \alpha + \beta - \tau$:

$$J_1 = \int_{\sqrt{\tau^2 - 4}}^{\alpha_2} \frac{x - \sqrt{\tau^2 - 4}}{x} dx + \int_{\alpha_2}^{\frac{\tau + 2\sqrt{\tau^2 - 3}}{3}} \frac{\sqrt{(x + \tau)^2 - 4(x^2 + 1)}}{x} dx.$$

Применяя в этом случае формулу

$$\int \frac{\sqrt{(x+\tau)^2 - 4(x^2+1)}}{x} dx = \sqrt{(x+\tau)^2 - 4(x^2+1)} - \frac{\tau}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{\tau - 3x}{2\sqrt{\tau^2 - 3}} - \sqrt{\tau^2 - 4} \log \frac{2(\tau^2 - 4) + 2x\tau + 2\sqrt{\tau^2 - 4}\sqrt{(x+\tau)^2 - 4(x^2+1)}}{x},$$

получаем

$$J_1 = \frac{\tau}{\sqrt{3}} \arccos \frac{\tau + 3\sqrt{\tau^2 - 4}}{4\sqrt{\tau^2 - 3}} + \frac{1}{2} \sqrt{\tau^2 - 4} \log \frac{\tau^2 - 4}{\tau^2 - 3}.$$

Интеграл J_2 запишем в виде

$$\begin{aligned} J_2 &= \int_{\frac{2}{3}(\tau - \sqrt{\tau^2 - 3})}^{\beta_1} d\beta \int_{\alpha_1(\beta)}^{\alpha_2(\beta)} \frac{d\alpha}{\alpha + \beta - \tau} \\ &= \int_{\frac{2}{3}(\tau - \sqrt{\tau^2 - 3})}^{\beta_1} (\log(\alpha_2(\beta) + \beta - \tau) - \log(\alpha_1(\beta) + \beta - \tau)) d\beta, \end{aligned}$$

где

$$\alpha_{1,2}(\beta) = \frac{2\tau - \beta \mp \sqrt{-3\beta^2 + 4\beta\tau - 4}}{2}.$$

Первообразную подынтегральной функции можно указать явно:

$$\int (\log(\alpha_2(\beta) + \beta - \tau) - \log(\alpha_1(\beta) + \beta - \tau)) d\beta = F_0(\beta),$$

где

$$\begin{aligned} F_0(\beta) &= (\beta_1 - \beta) \log(\beta_1 - \beta) + (\beta_2 - \beta) \log(\beta_2 - \beta) + \frac{\tau}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{3\beta - 2\tau}{2\sqrt{\tau^2 - 3}} \\ &\quad + 2\beta \log \frac{\beta + \sqrt{-3\beta^2 + 4\beta\tau - 4}}{2} \\ &\quad - \beta_1 \log(2\beta_1\tau - 4 + \beta(2\tau - 3\beta_1) + \beta_1 \sqrt{-3\beta^2 + 4\beta\tau - 4}) \\ &\quad - \beta_2 \log(2\beta_2\tau - 4 + \beta(2\tau - 3\beta_2) + \beta_2 \sqrt{-3\beta^2 + 4\beta\tau - 4}). \end{aligned}$$

Применяя формулу Ньютона–Лейбница, находим значение интеграла J_2 :

$$\begin{aligned} F_0(\beta_1) &= \frac{\sqrt{\tau^2 - 4}}{2} \log(\tau^2 - 4) - \tau \log 2 - \frac{\tau}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{\tau + 3\sqrt{\tau^2 - 4}}{4\sqrt{\tau^2 - 3}} - \beta_2 \log(\tau^2 - 3), \\ F_0\left(\frac{2}{3}(\tau - \sqrt{\tau^2 - 3})\right) &= -\frac{\pi\tau}{2\sqrt{3}} - \tau \log 2 - \frac{\tau}{2} \log(\tau^2 - 3), \\ J_2 = J_1 &= \frac{\tau}{\sqrt{3}} \arccos \frac{\tau + 3\sqrt{\tau^2 - 4}}{4\sqrt{\tau^2 - 3}} + \frac{1}{2} \sqrt{\tau^2 - 4} \log \frac{\tau^2 - 4}{\tau^2 - 3}. \end{aligned}$$

Значит,

$$p(\tau) = \frac{6J_1}{\zeta(2)} = \frac{12}{\pi^2} \left(\tau \sqrt{3} \arccos \frac{\tau + 3\sqrt{\tau^2 - 4}}{4\sqrt{\tau^2 - 3}} + \frac{3}{2} \sqrt{\tau^2 - 4} \log \frac{\tau^2 - 4}{\tau^2 - 3} \right).$$

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Подставляя в следствие 3 плотность $p(t)$, вычисленную в лемме 11, приходим к утверждению теоремы с остаточным членом $O_\varepsilon(R(a; x_1, x_2; \tau)a^\varepsilon)$, где

$$\begin{aligned} R(a; x_1, x_2; \tau) = & a^{-1/6} \tau^{5/3} x_1^{-1/2} x_2^{-1/2} (x_1 + x_2) \\ & + a^{-1/4} \tau^{3/2} x_1^{-3/4} x_2^{-3/4} (x_1^{3/2} + x_2^{3/2}) \\ & + a^{-1/2} (x_1 + x_2) (x_1^{-1/2} x_2^{-1/2} \tau + x_1^{-1} x_2^{-1}) \ll_{x_1, x_2, \tau} a^{-1/6}. \end{aligned}$$

Теорема доказана

§ 9. Свойства плотности

График функции $p(t)$ представлен на рис. 3. Докажем основные свойства плотности.

Рис. 3

ЛЕММА 12. Для функции $p(t)$ выполняются следующие соотношения:

- 1) функция $p(t)$ возрастает на отрезке $[\sqrt{3}, 2]$ и убывает на полуинтервале $[2, +\infty)$, $\lim_{t \rightarrow 2-0} p'(t) = +\infty$, $\lim_{t \rightarrow 2+0} p'(t) = -\infty$;
- 2) $p(t) = \frac{18}{\pi^2 t^3} + O\left(\frac{1}{t^5}\right)$, $t \rightarrow \infty$;
- 3) $\int_0^\infty p(t) dt = 1$;
- 4) $\int_0^\infty t p(t) dt = \frac{8}{\pi}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойства 1), 2) непосредственно вытекают из формулы для $p(t)$, доказанной в лемме 11.

Для доказательства свойства 3) заметим, что согласно лемме 9

$$\int_0^\infty p(t) dt = \frac{2}{\zeta(2)} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \Phi(\tau) = \frac{2}{\zeta(2)} \int_0^\infty \frac{dr}{r} \int_r^\infty \int_r^\infty [1 \leq \alpha\beta \leq 1 + r^2] d\alpha d\beta.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \int_0^\infty p(t) dt &= \frac{2}{\zeta(2)} \int_0^1 \left((1+r^2) \log \left(1 + \frac{1}{r^2} \right) - \log \frac{1}{r^2} - r^2 \right) \frac{dr}{r} \\ &\quad + \frac{2}{\zeta(2)} \int_1^\infty \left((1+r^2) \log \left(1 + \frac{1}{r^2} \right) - 1 \right) \frac{dr}{r} \\ &= \frac{2}{\zeta(2)} \left(\left(-\frac{1}{2} + \frac{\zeta(2)}{4} + \log 2 \right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{\zeta(2)}{4} - \log 2 \right) \right) = 1. \end{aligned}$$

Для функции $tp(t)$ первообразная находится явно:

$$\begin{aligned} F_1(t) &= \int \pi t \left(\frac{t}{\sqrt{3}} - \sqrt{4-t^2} \right) dt = \frac{\pi}{3} \left(\frac{t^3}{\sqrt{3}} + (4-t^2)^{3/2} \right), \\ F_2(t) &= \int t \left(t\sqrt{3} \arccos \frac{t+3\sqrt{t^2-4}}{4\sqrt{t^2-3}} + \frac{3}{2} \sqrt{t^2-4} \log \frac{t^2-4}{t^2-3} \right) dt \\ &= \frac{t^3}{\sqrt{3}} \arccos \frac{t+3\sqrt{t^2-4}}{4\sqrt{t^2-3}} + 4 \operatorname{arctg} \sqrt{t^2-4} + \frac{(t^2-4)^{3/2}}{2} \log \frac{t^2-4}{t^2-3}. \end{aligned}$$

При этом

$$F_1(\sqrt{3}) = \frac{4\pi}{3}, \quad F_1(2) = \frac{8\pi}{3\sqrt{3}}, \quad F_2(2) = \frac{8\pi}{3\sqrt{3}}, \quad F_2(\infty) = 2\pi.$$

Следовательно,

$$\int_0^\infty tp(t) dt = \frac{2}{\zeta(2)} \left(2\pi - \frac{4\pi}{3} \right) = \frac{8}{\pi}.$$

Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 4. Из свойств функции $p(t)$ вытекает, что для почти всех троек чисел $(a, b, c) \in M_a(x_1, x_2)$ числа Фробениуса $f(a, b, c)$ имеют порядок $\sqrt{abc}$. В наиболее простом случае, когда $x_1 = x_2 = 1$, $a > \tau^{34+\varepsilon}$,

$$\frac{1}{|M_a(x_1, x_2)|} \sum_{(a,b,c) \in M_a(x_1, x_2)} [f(a, b, c) > \tau\sqrt{abc}] = \frac{9}{\pi^2 \tau^2} + O\left(\frac{1}{\tau^4}\right).$$

§ 10. Заключительные замечания

Особый интерес представляет рассмотрение функции $n(a, b, c)$, которая при $(a, b, c) = 1$ равна количеству натуральных m , не представимых в виде

$$m = ax + by + cz, \quad x, y, z \geq 0.$$

Вместе с функцией Фробениуса она характеризует работу двухконтурных сетей (причем $g(a, b, c)$ отвечает за максимальный диаметр сети, а $n(a, b, c)$ – за средний; см. [20], [21]). Модифицированная величина

$$N(a, b, c) = n(a, b, c) + \frac{a+b+c-1}{2},$$

как и $f(a, b, c)$, при $d \mid (a, b)$ удовлетворяет уравнению (см. [20, лемма 1])

$$N(a, b, c) = dN\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}, c\right).$$

Рёдсет (см. [20, теорема 2]) доказал формулу

$$2N(a, b, c) = bs_{n-1} + cq_n - \frac{s_n q_{n-1}}{a} (b(s_{n-1} - s_n) + c(q_n - q_{n-1})), \quad (18)$$

справедливую, как и (6), при $(a, b) = (a, c) = (b, c) = 1$, $s_n/q_n \leq c/b \leq s_{n-1}/q_{n-1}$. Метод, предложенный в настоящей статье, позволяет описать распределение значений $N(a, b, c)$ и других подобных функций. Из доказательства леммы 9 следует, что за совместное распределение троек (α, β, r) , где

$$\alpha = \frac{u_1}{\sqrt{a/\xi}} = \frac{q_n}{\sqrt{a/\xi}}, \quad \beta = \frac{u_2}{\sqrt{a\xi}} = \frac{s_{n-1}}{\sqrt{a\xi}}, \quad r = \frac{v_2}{\sqrt{a\xi}} = \frac{s_n}{\sqrt{a\xi}},$$

отвечает вероятностная плотность

$$\frac{1}{\zeta(2) \max\{r, \frac{\alpha\beta-1}{r}\}} \left[\max\left\{r, \frac{\alpha\beta-1}{r}\right\} \leq \min\{\alpha, \beta\}, \alpha\beta \geq 1 \right].$$

Она же описывает распределение L -образных диаграмм, возникающих при анализе двухконтурных сетей (см. [20]). При $r > \frac{\alpha\beta-1}{r}$ эта плотность (в сумме с симметричной частью) становится плотностью

$$p(\alpha, \beta, r) = \frac{2}{\zeta(2)r} [r \leq \min\{\alpha, \beta\}, 1 \leq \alpha\beta \leq 1 + r^2],$$

которая в неявном виде появляется в доказательстве леммы 10. С помощью этой плотности можно записать функцию распределения для величин, зависящих от четверок $(q_n, s_{n-1}, q_{n-1}, s_n) = (u_1, u_2, v_1, v_2)$ и дополнительного параметра ξ , удовлетворяющих соотношению

$$f(u_1, u_2, v_1, v_2; \xi) = f(u_2, u_1, v_2, v_1; 1/\xi).$$

Так, для нормированных чисел Фробениуса

$$f(u_1, u_2, v_1, v_2; \xi) = \frac{1}{\sqrt{a\xi}} (u_2 + \xi u_1 - \min\{v_2, \xi v_1\}).$$

Числам $2N(a, b, c)/\sqrt{abc}$ согласно (18) соответствует

$$f(u_1, u_2, v_1, v_2; \xi) = \frac{1}{\sqrt{a\xi}} (u_2 + \xi u_1 - v_1 v_2 (u_2 - v_2 + \xi(u_1 - v_1)) a^{-1}),$$

что приводит к функции распределения

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(\tau) &= \frac{2}{\zeta(2)} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \left[\alpha + \beta - (\alpha\beta - 1) \left(\alpha + \beta - r - \frac{\alpha\beta - 1}{r} \right) \leq \frac{\tau}{2} \right] \\ &\quad \times p(\alpha, \beta, r) d\alpha d\beta dr \\ &= \frac{2}{\zeta(2)} \int_0^\infty \frac{dr}{r} \int_r^\infty \int_r^\infty \left[1 \leq \alpha\beta \leq 1 + r^2, \right. \\ &\quad \left. \alpha + \beta - \frac{\alpha\beta - 1}{r} + \frac{(\alpha - r)(\beta - r)(\alpha\beta - 1)}{r} \leq \frac{\tau}{2} \right] d\alpha d\beta. \end{aligned}$$

В аналогичной форме можно записать функции распределения для отношения $N(a, b, c)/f(a, b, c)$ (что в неявном виде дает ответ на вопрос Арнольда о математическом ожидании этого отношения; см. [8, задача 1999–9]) и псевдочисел Фробениуса с тремя аргументами (см. [22]).

Список литературы

1. J. J. Sylvester, “Problem 7382”, *Educational Times*, **37** (1884), 26; “Mathematical questions with their solution”, *Educational Times* (with additional papers and solutions), **41** (1884), 21.
2. J. L. Ramírez Alfonsín, *The Diophantine Frobenius problem*, Oxford Lecture Ser. Math. Appl., **30**, Oxford Univ. Press, Oxford, 2005.
3. Ö. J. Rödseth, “On a linear Diophantine problem of Frobenius”, *J. Reine Angew. Math.*, **301** (1978), 171–178.
4. E. S. Selmer, Ö. Beyer, “On the linear Diophantine problem of Frobenius in three variables”, *J. Reine Angew. Math.*, **301** (1978), 161–170.
5. R. Kannan, “Lattice translates of a polytope and the Frobenius problem”, *Combinatorica*, **12:2** (1992), 161–177.
6. Р. М. Карп, “Возможность редукции в комбинаторных задачах”, *Кибернетический сб. Нов. сер.*, 1975, 16–38; пер. с англ.: R. M. Karp, “Reducibility among combinatorial problems”, *Complexity of computer computations* (Yorktown Heights, NY, 1972), Plenum, New York, 1972, 85–103.
7. J. L. Davison, “On the linear Diophantine problem of Frobenius”, *J. Number Theory*, **48:3** (1994), 353–363.
8. В. И. Арнольд, *Задачи Арнольда*, Фазис, М., 2000; англ. пер.: V. Arnold, *Arnold’s problems*, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
9. Ж. Бургейн, Я. Г. Синай, “Предельное поведение больших чисел Фробениуса”, *УМН*, **62:4** (2007), 77–90; англ. пер.: J. Bourgain, Ya. G. Sinai, “Limit behaviour of large Frobenius numbers”, *Russian Math. Surveys*, **62:4** (2007), 713–725.
10. А. В. Устинов, “О статистических свойствах элементов цепных дробей”, *Докл. РАН*, **424:4** (2009), 459–461; англ. пер.: A. V. Ustinov, “On the statistical properties of elements of continued fractions”, *Dokl. Math.*, **79:1** (2009), 87–89.
11. V. Shchur, Ya. Sinai, A. Ustinov, “Limiting distribution of Frobenius numbers for $n = 3$ ”, *J. Number Theory*, **129:11** (2009), 2778–2789.
12. I. Aliev, M. Henk, “Integer knapsacks: average behavior of the Frobenius numbers”, *Math. Oper. Res.*, **34:3** (2009), 698–705.
13. I. Aliev, M. Henk, A. Hinrichs, “Expected Frobenius numbers”, *J. Combin. Theory Ser. A* (to appear), arXiv: [abs/0910.2620](https://arxiv.org/abs/0910.2620).
14. J. Marklof, “The asymptotic distribution of Frobenius numbers”, *Invent. Math.*, **181:1** (2010), 179–207.
15. А. В. Устинов, “Решение задачи Арнольда о слабой асимптотике для чисел Фробениуса с тремя аргументами”, *Матем. сб.*, **200:4** (2009), 131–160; англ. пер.: A. V. Ustinov, “The solution of Arnold’s problem on the weak asymptotics of Frobenius numbers with three arguments”, *Sb. Math.*, **200:4** (2009), 597–627.
16. В. А. Быковский, “Асимптотические свойства целых точек (a_1, a_2) , удовлетворяющих сравнению $a_1 a_2 \equiv l \pmod{q}$ ”, *Аналитическая теория чисел и теория функций*. 4, Записки науч. сем. ЛОМИ, **112**, Наука, Л., 1981, 5–25; англ. пер.: V. A. Bykovskii, “Asymptotic properties of integral points (a_1, a_2) , satisfying the congruence $a_1 a_2 \equiv l \pmod{q}$ ”, *J. Soviet Math.*, **25:2** (1984), 975–988.
17. А. В. Устинов, “О числе решений сравнения $xy \equiv l \pmod{q}$ под графиком дважды непрерывно дифференцируемой функции”, *Алгебра и анализ*, **20:5** (2008),

- 186–216; англ. пер.: A. V. Ustinov, “On the number of solutions of the congruence $xy \equiv l \pmod{q}$ under the graph of a twice continuously differentiable function”, *St. Petersburg Math. J.*, **20**:5 (2009), 597–627.
18. T. Estermann, “On Kloosterman’s sum”, *Mathematika*, **8** (1961), 83–86.
 19. S. M. Johnson, “A linear diophantine problem”, *Canad. J. Math.*, **12** (1960), 390–398.
 20. Ö. J. Rödsseth, “Weighted multi-connected loop networks”, *Discrete Math.*, **148**:1–3 (1996), 161–173.
 21. C. K. Wong, D. Coppersmith, “A Combinatorial problem related to multimodule memory organizations”, *J. Assoc. Comput. Mach.*, **21**:3 (1974), 392–402.
 22. J. C. Rosales, P. A. García-Sánchez, “Numerical semigroups with embedding dimension three”, *Arch. Math. (Basel)*, **83**:6 (2004), 488–496.

А. В. УСТИНОВ (A. V. USTINOV)

Хабаровское отделение

Института прикладной математики ДВО РАН

E-mail: ustinov@iam.khv.ru

Поступило в редакцию

14.10.2008

23.06.2009