Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Г. Плотников, Квазимеры, хаусдорфовы p -меры и ряды Уолша и Хаара, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2010, том 74, выпуск 4, 157–188

DOI: <https://doi.org/10.4213/im4055>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 17:37:25

УДК 517.518.3

М. Г. Плотников

Квазимеры, хаусдорфовы p -меры и ряды Уолша и Хаара

Рассматриваются классы кратных рядов Хаара и Уолша с не более чем степенным ростом прямоугольных частичных сумм. В терминах хаусдорфовой p -меры находится достаточное условие (критерий для кратных рядов Хаара) принадлежности множества семейству U -множеств для рядов из данного класса. Решается проблема восстановления коэффициентов рядов из указанного класса, сходящихся вне множеств единственности. Доказывается теорема типа Бари для множеств относительной единственности кратных рядов Хаара. Для одномерных рядов Хаара получен критерий принадлежности заданного множества классу U -множеств при некоторых условиях, обобщающих условие Арутюняна–Талаляна. Изучен вопрос о принадлежности множеств канторовского типа классу множеств относительной единственности для рядов Хаара.

Библиография: 38 наименований.

Ключевые слова: двоичная группа, ряды Хаара, ряды Уолша, множества единственности.

Введение

Теория единственности представления функций ортогональными рядами берет начало со следующей теоремы Кантора (см. [1], [2, гл. 1], [3, т. 1, гл. 9]). Если тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

всюду на $[0, 2\pi)$ сходится к нулю, то этот ряд является *тождественно нулевым*, т. е. все его коэффициенты равны нулю. В дальнейшем теория единственности развивалась по многим направлениям.

Пусть $\{f_n(x)\}$ – ортонормированная система функций, определенных на некотором отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$, а

$$\sum_n c_n f_n(x) \tag{1}$$

– ряд по этой системе. Будем рассматривать два типа задач теории единственности ортогональных рядов. В общем виде их можно сформулировать так.

ЗАДАЧА 1 (о множествах единственности). *Указать множества $A \subset [a, b]$ такие, что любой ряд (1), сходящийся к нулю на множестве $[a, b] \setminus A$, является тождественно нулевым.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 08-01-00669) и Программ Президента РФ “Ведущие научные школы” и “Молодые российские ученые” (гранты НШ-3252.2010.1 и МК-3667.2007.1).

Множества A из задачи 1 называются *множествами единственности* (иначе U -множествами) для рядов (1). Теорема Кантора означает, что пустое множество – U -множество для тригонометрических рядов. Пусть множество $A \subset [a, b]$ не является множеством единственности для рядов (1), т. е. существует тождественно ненулевой ряд (S) вида (1), сходящийся к нулю на $[a, b] \setminus A$. Тогда A называется *множеством множественности* (иначе M -множеством) для рядов (1), а о ряде (S) говорят, что он *реализует M -множество A* . Если задачу 1 рассматривать не для всех рядов (1), а лишь для рядов (1) из некоторого класса Θ , то множества A из такой задачи будут называться $U(\Theta)$ -множествами (иначе *множествами относительной единственности*). Естественным образом определяются $M(\Theta)$ -множества. Понятия U - и M -множеств легко переносятся на кратные ряды, но при этом необходимо уточнять, какая сходимость имеется в виду.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть $\Theta_1 \subset \Theta_2$ – классы рядов (1). Тогда любое $M(\Theta_1)$ -множество является $M(\Theta_2)$ -множеством, а любое $U(\Theta_2)$ -множество является $U(\Theta_1)$ -множеством.

ЗАДАЧА 2 (о восстановлении коэффициентов). Пусть A – U -множество для рядов (1). Предположим, что ряд (1) сходится к конечной функции $f(x)$ для всех $x \in [a, b] \setminus A$. Следует ли из этого, что данный ряд является рядом Фурье функции $f(x)$ (т. е. $a_n = \int_a^b f(x) f_n(x) dx$ для всех n)?

Известно [3, гл. 11], что ряд $\sum_{k=2}^{\infty} \sin(kx)/\ln k$ всюду сходится к конечной функции, но его сумма не является суммируемой. Этот ряд не может быть рядом Фурье–Лебега ни своей суммы, ни какой-то другой суммируемой функции. Аналогичная ситуация имеет место для многих систем функций. Поэтому решение задачи 2 часто требует построения интегралов, обобщающих лебеговский. Задачу 2 можно поставить и для $U(\Theta)$ -множеств.

Известно [4]–[6], что пустое множество является U -множеством для рядов Хаара

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \chi_n(x). \quad (2)$$

Несложный пример [7] показывает, что других U -множеств для рядов (2) не существует. Поэтому для рядов (2) часто рассматривается задача о множествах относительной единственности.

В теории рядов Хаара важную роль играет условие

$$c_n \chi_n(x) = o_x(n), \quad n \rightarrow \infty \quad (3)$$

(условие Арутюняна–Талаляна [4]). Пусть Θ_{AT} – класс рядов (2), всюду на $[0, 1]$ удовлетворяющих этому условию. Г. М. Мушегян доказал [8], что множество $A \subset [0, 1]$ является $M(\Theta_{AT})$ -множеством тогда и только тогда, когда A содержит непустое совершенное подмножество. Отсюда вытекает, что борелевское множество $A \subset [0, 1]$ является $U(\Theta_{AT})$ -множеством тогда и только тогда, когда оно не более чем счетно. Результат, полученный Г. М. Мушегяном, был перенесен на многомерный случай: при сходимости по прямоугольникам – В. А. Скворцовым [9], при ограниченной сходимости по прямоугольникам – автором [10].

В работе [11] рассматривались ряды (2), коэффициенты которых удовлетворяют условию

$$c_n = o(n^{p-1/2}), \quad n \rightarrow \infty. \quad (4)$$

При $p = 1$ условие (4) преобразуется в равномерный аналог условия Арутюняна–Талаляна. Пусть Θ_p – класс рядов (2), удовлетворяющих условию (4).

Из результатов работ [4]–[6], [8], [12] вытекает, что при $p > 1$ пустое множество, и только оно, является $U(\Theta_p)$ -множеством, а при $p = 1$ борелевское множество является $U(\Theta_p)$ -множеством тогда и только тогда, когда оно не более чем счетно. Г. М. Мушегян показал [8] наличие совершенных $U(\Theta_p)$ -множеств при $p < 1$. Следующие результаты доказал В. Р. Вэйд [11]. При всех $p < 0$ существуют $U(\Theta_p)$ -множества, лебегова мера которых сколь угодно близка к единице. Для $0 \leq p < 1$ верна теорема типа Бари: объединение не более чем счетного семейства замкнутых $U(\Theta_p)$ -множеств является $U(\Theta_p)$ -множеством (при $p = 0$ нужно предполагать, что исходные $U(\Theta_p)$ -множества имеют лебегову меру нуль). При $p > 0$ все $U(\Theta_p)$ -множества имеют лебегову меру нуль. Однако не было дано явного описания $U(\Theta_p)$ -множеств при $0 < p < 1$. Частичное описание $U(\Theta_p)$ -множеств в терминах некоторых размерностных характеристик было получено в [13].

В настоящей работе будут найдены близкие к критерию условия принадлежности заданного множества классу $U(\Theta_p)$ -множеств. Рассмотрим также условие

$$c_n = O(n^{p-1/2}), \quad n \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Пусть Θ^p – класс рядов (2), удовлетворяющих условию (5). Нами будет получен критерий принадлежности заданного множества семейству $U(\Theta^p)$ -множеств. Аналогичные результаты будут получены для кратных рядов Хаара в ситуации, когда одномерные функции Хаара определены на двоичной группе G .

Мы также рассмотрим ряды Уолша

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \omega_n(t) \quad (6)$$

на двоичной группе G . Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$ и Λ_α – класс рядов (6), коэффициенты которых удовлетворяют условию

$$b_n = o(n^{-\alpha}), \quad n \rightarrow \infty. \quad (7)$$

В терминах хаусдорфовой p -меры будет найдено достаточное условие принадлежности заданного множества классу $U(\Lambda_\alpha)$ -множеств при $\alpha \in (0, 1)$. Необходимое условие такой принадлежности не может быть описано, как это сделано для рядов Хаара, в терминах хаусдорфовой p -меры. Это вытекает из результатов, полученных в работе [14]. Будет рассмотрен и случай кратных рядов.

Одновременно с задачей о множествах единственности будет решена задача о восстановлении коэффициентов кратных рядов Хаара и Уолша, сходящихся вне соответствующих $U(\Theta)$ -множеств.

§ 1. Группа G^m и ряды Уолша и Хаара: основные определения

Напомним [15, гл. 1], что точки множества $Q_d := \{p/2^k \in [0, 1] : p, k \in \mathbb{Z}_+\}$ называются *двоично-рациональными*, а точки множества $I_d := [0, 1] \setminus Q_d$ – *двоично-иррациональными*.

Рассмотрим *двоичную группу* G [15]–[17], т. е. множество последовательностей $t = \{t_j\}_{j=0}^{\infty}$, где $t_j = 0, 1$. Сложение на G определяется как покоординатное сложение по mod 2. Отображение

$$\phi(t) = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j-1} t_j \quad (8)$$

устанавливает соответствие между группой G и отрезком $[0, 1]$. Это отображение является сюръективным, но не взаимно однозначным.

Рассмотрим *модифицированный отрезок* $J^* = [0, 1]^*$, который можно интерпретировать как отрезок $[0, 1]$, где двоично-рациональные точки считаются дважды: “левая” точка $p/2^k - 0$, соответствующая бесконечному двоичному разложению, и “правая” точка $p/2^k + 0$, соответствующая конечному разложению. Вместо отображения ϕ , задаваемого формулой (8), можно рассмотреть отображение $\tilde{\phi}: G \rightarrow [0, 1]^*$, также задаваемое этой формулой. Отображение $\tilde{\phi}$ является взаимно однозначным, поэтому мы не будем различать G и J^* .

Зафиксируем натуральное m . Пусть отображение ϕ определяется формулой (8). Для любого $\mathbf{t} = (t^1, \dots, t^m) \in G^m$ положим

$$\gamma(\mathbf{t}) = (\phi(t^1), \dots, \phi(t^m)). \quad (9)$$

Отображение $\gamma: G^m \rightarrow [0, 1]^m$ является сюръективным. Под *мерой* на группе G^m будем понимать нормированную меру Хаара (если речь не идет о хаусдорфовых p -мерах, которые мы определим ниже). Для всех $E \subset G^m$ указанная мера множества E совпадает с мерой Лебега множества $\gamma(E) \subset [0, 1]^m$.

Рассмотрим m -мерные сегменты

$$\Delta = \left[\frac{p_1}{2^{k_1}} + 0, \frac{p_1 + 1}{2^{k_1}} - 0 \right] \times \dots \times \left[\frac{p_m}{2^{k_m}} + 0, \frac{p_m + 1}{2^{k_m}} - 0 \right] \subset (J^*)^m, \quad (10)$$

где $k_s = 0, 1, \dots$ и $p_s = 0, \dots, 2^{k_s} - 1$ для всех $s = 1, \dots, m$. Такие сегменты называются *двоичными интервалами* ранга $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_m)$. *Двоичным кубом* Δ_k ранга k называется двоичный интервал в форме (10) с $k_1 = \dots = k_m = k$; 2^m двоичных кубов ранга k назовем *смежными*, если их объединение есть двоичный куб ранга $k - 1$.

Группа G^m является топологическим пространством со счетной базой. Топология на G^m порождается всевозможными двоичными интервалами. Двоичные интервалы являются одновременно открытыми и замкнутыми множествами в такой топологии. Данная топология является метризуемой [15, гл. 1]. Метрику ϱ на G^m можно ввести следующим образом. Пусть $x^i = \{x_j^i\}_{j=0}^{\infty} \in G$, $y^i = \{y_j^i\}_{j=0}^{\infty} \in G$, $i = 1, \dots, m$, $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^m) \in G^m$, $\mathbf{y} = (y^1, \dots, y^m) \in G^m$. Тогда

$$\varrho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{|x_j^i - y_j^i|}{2^{j+1}} \right)^2 \right)^{1/2}. \quad (11)$$

Для $E \subset G^m$ выражение $\overline{E}$ будет означать *замыкание* множества E в топологии G^m . *Порцией* множества $E \subset G^m$ будем называть любое множество вида $E \cap \Delta$, где Δ – двоичный куб. Из структуры множеств G^m и $[0, 1]^m$ вытекает следующий факт.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть отображение γ задается формулами (8) и (9). Тогда:

- 1) если множество $X \subset [0, 1]^m$ является замкнутым, то его полный прообраз при отображении γ также является замкнутым;
- 2) если множество $X \subset [0, 1]^m$ является совершенным, то найдется совершенное множество $E \subset G^m$ такое, что $\gamma(E) = X$.

Параметром регулярности двоичного интервала (10) (параметром регулярности вектора $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_m)$) назовем число $\text{reg } \Delta$ (соответственно, $\text{reg } \mathbf{a}$), равное $\min_{i,j} \{2^{k_i}/2^{k_j}\}$ (соответственно, $\min_{i,j} \{a_i/a_j\}$). Пусть Δ – двоичный интервал в форме (10). Тогда $|\Delta|$ означает меру интервала Δ , т. е. $2^{-(k_1 + \dots + k_m)}$, а $\text{diam } \Delta$ – его диаметр в метрике (11), т. е. $\sqrt{2^{-2k_1} + \dots + 2^{-2k_m}}$. Для всех двоичных кубов $\Delta \subset G^m$ выполнено равенство

$$\text{diam } \Delta = \sqrt{m} |\Delta|^{1/m}. \quad (12)$$

Пусть $t^i \in J^*$. Последовательность $\{\Delta_{k_i}\}_{k_i=0}^\infty$ одномерных двоичных интервалов назовем t^i -последовательностью, если $t^i \in \Delta_{k_i}$ для всех k_i и ранг интервала Δ_{k_i} равен k_i . Пусть $\mathbf{t} = (t^1, \dots, t^m) \in (J^*)^m$. Тогда m -мерную последовательность $\{\Delta_{\mathbf{k}} = \Delta_{k_1, \dots, k_m}\}$ m -мерных двоичных интервалов назовем $\mathbf{t}$ -последовательностью, если

$$\Delta_{\mathbf{k}} = \Delta_{k_1} \times \dots \times \Delta_{k_m}, \quad (13)$$

где $\{\Delta_{k_i}\}$ является одномерной t^i -последовательностью для всех $i = 1, \dots, m$. Из последовательности $\{\Delta_{\mathbf{k}}\}$ выделим одномерную подпоследовательность $\{\Delta_k := \Delta_{k, \dots, k}\}$ такую, которая состоит из двоичных кубов и которую мы будем называть $\mathbf{t}_{\square}$ -последовательностью.

Функции Уолша в нумерации Пэли на G определяются следующим образом [15, гл. 1]:

$$\omega_n(t) = \prod_{j=0}^{\infty} (-1)^{t_j \varepsilon_j^{(n)}}, \quad \text{где } t = \{t_j\} \in G, \quad n = \sum_{j=0}^{\infty} 2^j \varepsilon_j^{(n)}, \quad \varepsilon_j^{(n)} \in \{0, 1\}.$$

Рассмотрим систему Хаара $\{\chi_n(t)\}_{n=0}^\infty$ на J^* [15, гл. 1], $\chi_0(t) \equiv 1$. Если $n = 2^k + i$, $k = 0, 1, \dots$, $i = 0, \dots, 2^k - 1$, то

$$\chi_n(t) = \begin{cases} 2^{k/2} & \text{при } t \in \left[\frac{2i}{2^{k+1}} + 0, \frac{2i+1}{2^{k+1}} - 0 \right], \\ -2^{k/2} & \text{при } t \in \left[\frac{2i+1}{2^{k+1}} + 0, \frac{2i+2}{2^{k+1}} - 0 \right], \\ 0 & \text{при } t \in [0, 1]^* \setminus \left[\frac{2i}{2^{k+1}} + 0, \frac{2i+2}{2^{k+1}} - 0 \right]. \end{cases}$$

Пусть $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_m) \in \mathbb{Z}_+^m$ и m -мерный ряд Уолша (Хаара) на G^m определяется формулой

$$\sum_{\mathbf{n}=0}^{\infty} b_{\mathbf{n}} \omega_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \dots \sum_{n_m=0}^{\infty} b_{n_1, \dots, n_m} \prod_{i=1}^m \omega_{n_i}(t^i) \quad (14)$$

$$\left(\sum_{\mathbf{n}=0}^{\infty} a_{\mathbf{n}} \chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \dots \sum_{n_m=0}^{\infty} a_{n_1, \dots, n_m} \prod_{i=1}^m \chi_{n_i}(t^i) \right). \quad (15)$$

Коэффициенты $b_{\mathbf{n}}$ и $a_{\mathbf{n}}$ в (14) и (15) будем считать действительными. Если $2^{k-1} \leq n \leq 2^k - 1$, то назовем число k *рангом* функции Уолша $\omega_n(t)$. Под *рангом* m -мерной функции Уолша $\omega_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}) = \omega_{n_1}(t^1) \cdots \omega_{n_m}(t^m)$ мы понимаем вектор $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_m)$ такой, что для всех $i = 1, \dots, m$ число k_i является рангом функции $\omega_{n_i}(t^i)$.

Пусть $\mathbf{N} = (N_1, \dots, N_m) \in \mathbb{N}^m$. Тогда $\mathbf{N}$ -й *прямоугольной частичной суммой* $S_{\mathbf{N}}(\mathbf{t})$ ряда (14) (ряда (15)) в точке $\mathbf{t}$ называется выражение

$$S_{\mathbf{N}}(\mathbf{t}) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \cdots \sum_{n_m=0}^{N_m-1} b_{\mathbf{n}} \omega_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}) \quad \left(S_{\mathbf{N}}(\mathbf{t}) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \cdots \sum_{n_m=0}^{N_m-1} a_{\mathbf{n}} \chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}) \right).$$

Если $N_1 = \dots = N_m = N$, то частичная сумма $S_{\mathbf{N}}(\mathbf{t}) := S_{N, \dots, N}(\mathbf{t})$ называется *кубической*.

Пусть $\rho \in (0, 1]$. Тогда ряд (S) вида (14) или (15) ρ -сходится к сумме $A(\mathbf{t})$ в точке $\mathbf{t}$ (что обозначается $(S) \xrightarrow{\rho} A(\mathbf{t})$), если

$$S_{\mathbf{N}}(\mathbf{t}) \rightarrow A(\mathbf{t}), \quad \min_i \{N_i\} \rightarrow \infty, \quad \text{reg } \mathbf{N} \geq \rho. \quad (16)$$

Без последнего условия в (16) получим *сходимость по прямоугольникам*. Если ряд (14) или (15) сходится по прямоугольникам к сумме $A(\mathbf{t})$ в точке $\mathbf{t}$, то для всех $\rho \in (0, 1]$ этот ряд ρ -сходится к $A(\mathbf{t})$ в той же точке. 1-регулярная сходимость иначе называется *сходимостью по кубам*. Будем использовать тот факт, что при $m = 1$ все упомянутые типы сходимостей преобразуются в обычную сходимость.

§ 2. Квазимеры на группе G^m

Пусть $\mathcal{B}$ – семейство всех двоичных интервалов (10). Функции $\tau: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ будем называть *$\mathcal{B}$ -функциями*. $\mathcal{B}$ -функция τ называется *$\mathcal{B}$ -супераддитивной* (*$\mathcal{B}$ -субаддитивной*) [18], если для любого дизъюнктного набора $\{\Delta_i\}_{i=1}^p$ двоичных интервалов таких, что $\bigsqcup_{i=1}^p \Delta_i \in \mathcal{B}$, выполнено неравенство

$$\sum_{i=1}^p \tau(\Delta_i) \leq \tau\left(\bigsqcup_{i=1}^p \Delta_i\right) \quad \left(\sum_{i=1}^p \tau(\Delta_i) \geq \tau\left(\bigsqcup_{i=1}^p \Delta_i\right) \right).$$

Через $\bar{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}$ ($\underline{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}$) обозначим множество всех $\mathcal{B}$ -супераддитивных ($\mathcal{B}$ -субаддитивных) функций. $\mathcal{B}$ -функция $\tau \in \mathcal{A} := \bar{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} \cap \underline{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}$ называется *$\mathcal{B}$ -аддитивной*. Аддитивные $\mathcal{B}$ -функции часто называют *квазимерами* [17], [19], мы будем придерживаться этой терминологии. Отметим [17], что любая неотрицательная квазимера продолжается до борелевской меры.

Для ортогонального ряда (S) будем записывать $(S) \cong 0$, если этот ряд равен тождественно нулю, т. е. все его коэффициенты равны нулю. Запись $(S) \not\equiv 0$ понимается естественным образом. Аналогичные обозначения будем использовать для $\mathcal{B}$ -функций.

Назовем $\mathcal{B}$ -функцию τ :

- (i) *неотрицательной*, если $\tau(\Delta) \geq 0$ для любого $\Delta \in \mathcal{B}$;
- (ii) *сосредоточенной на множестве* $E \subset G^m$, если $\tau(\Delta) = 0$ для всех $\Delta \in \mathcal{B}$ таких, что $\Delta \cap E = \emptyset$;

(iii) ρ -непрерывной ($\rho \in (0, 1]$), если при любой точке $\mathbf{t} \in G^m$ для $\mathbf{t}$ -последовательности $\{\Delta_{\mathbf{k}}\}$ выполнено условие

$$\tau(\Delta_{\mathbf{k}}) \rightarrow 0, \quad \min_i \{k_i\} \rightarrow \infty, \quad \text{reg } \Delta_{\mathbf{k}} \geq \rho.$$

При $m = 1$ понятие ρ -непрерывности не зависит от ρ ($\text{reg } \Delta_k \equiv 1$); в этом случае ρ -непрерывную $\mathcal{B}$ -функцию τ назовем *непрерывной*.

Пусть выбрана и зафиксирована $\mathcal{B}$ -функция τ . Условимся называть двоичный интервал Δ *правильным*, если $\tau(\Delta) > 0$. Следующий результат является аналогом леммы 1 из [10].

ЛЕММА 1. Пусть заданы 1-непрерывная $\mathcal{B}$ -функция $\tau \in \mathcal{A}_{\mathcal{B}}$ и правильный двоичный куб J^0 . Тогда существуют непересекающиеся правильные двоичные кубы $J_1, J_2 \subset J^0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Куб J^0 является дизъюнктивным объединением 2^m смежных двоичных кубов вдвое меньшего линейного размера. Поскольку куб J^0 является правильным и $\tau \in \mathcal{A}_{\mathcal{B}}$, то хотя бы один из этих кубов J^1 является правильным. Если таких кубов больше одного, утверждение леммы доказано. Иначе, повторяя многократно предыдущее рассуждение, получим следующую альтернативу: либо утверждение леммы является верным, либо можно построить вложенную последовательность правильных двоичных кубов $\{J^k\}_{k=0}^{\infty}$, обладающую следующими свойствами. Для всех k ранг куба J^k на единицу больше ранга куба J^{k-1} , и среди кубов J_i^k , $i = 1, \dots, 2^m$, вдвое меньшего линейного размера, лежащих в J^k , только куб J^{k+1} является правильным. Тогда, с одной стороны, $\tau(J_i^k) \leq 0$ для всех $J_i^k \neq J^{k+1}$, поэтому с учетом субаддитивности функции τ имеем

$$\tau(J^k) \leq \sum_{i=1}^{2^m} \tau(J_i^k) \leq \tau(J^{k+1}),$$

а отсюда $\tau(J^k) \leq \tau(J^{k+1})$ и $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \tau(J^k) \geq \tau(J^0) > 0$, с другой стороны, в силу 1-непрерывности функции τ имеем $\lim_{k \rightarrow \infty} \tau(J^k) = 0$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$, $\rho \in (0, 1]$. Через $H^{\alpha, \rho}$ обозначим класс $\mathcal{B}$ -функций τ таких, что для некоторого $C > 0$ и для любого двоичного интервала Δ , $\text{reg } \Delta \geq \rho$, выполнен следующий аналог условия Гёльдера:

$$|\tau(\Delta)| \leq C|\Delta|^{\alpha}. \quad (17)$$

Пусть $H_{\alpha, \rho}$ – класс $\mathcal{B}$ -функций τ , для которых выполнено условие

$$\tau(\Delta) = o(|\Delta|^{\alpha}), \quad |\Delta| \rightarrow 0, \quad \text{reg } \Delta \geq \rho, \quad (18)$$

где Δ – двоичный интервал. Для всех $\mathbf{t} \in G^m$ рассмотрим $\mathbf{t}$ -последовательность $\{\Delta_{\mathbf{k}}(\mathbf{t})\}$ в форме (13). Пусть $H^{\alpha, \rho, *}$ – класс $\mathcal{B}$ -функций τ , для которых всюду на G^m выполнено условие

$$\tau(\Delta_{\mathbf{k}}(\mathbf{t})) = O_{\mathbf{t}}(|\Delta_{\mathbf{k}}(\mathbf{t})|^{\alpha}), \quad \min_i \{k_i\} \rightarrow \infty, \quad \text{reg}(\Delta_{\mathbf{k}}(\mathbf{t})) \geq \rho. \quad (19)$$

ЛЕММА 2. Пусть τ – неотрицательная квазимера. Тогда:

1) для всех $\alpha \geq 0$ и $\rho \in (0, 1]$ справедливы соотношения

$$\tau \in H^{\alpha,1} \Rightarrow \tau \in H^{\alpha,\rho}, \quad \tau \in H_{\alpha,1} \Rightarrow \tau \in H_{\alpha,\rho}, \quad \tau \in H^{\alpha,1,*} \Rightarrow \tau \in H^{\alpha,\rho,*};$$

2) если квазимера τ является 1-непрерывной, то она является ρ -непрерывной для всех $\rho \in (0, 1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $\rho \in (0, 1]$. Положим $L = \log_2[1/\rho]$ (здесь $[a]$ обозначает целую часть числа a). Рассмотрим $\mathbf{t}$ -последовательность $\{\Delta_{\mathbf{k}}\}$ в форме (13). Пусть $\Delta_{k_1, \dots, k_m}$ – произвольный интервал из этой последовательности такой, что $\text{reg}(\Delta_{k_1, \dots, k_m}) \geq \rho$. Тогда $\max_{i,j} |k_i - k_j| \leq L$. Если $k_0 = \min\{k_1, \dots, k_m\}$, то двоичный куб $\Delta_{k_0, \dots, k_0}$ можно разбить на не более чем 2^{mL} двоичных интервалов ранга $(k_1, \dots, k_m)$, один из которых есть $\Delta_{k_1, \dots, k_m}$. Из этого факта и из неотрицательности квазимеры τ вытекает следующая цепочка неравенств:

$$0 \leq \frac{\tau(\Delta_{k_1, \dots, k_m})}{|\Delta_{k_1, \dots, k_m}|^\alpha} \leq 2^{\alpha mL} \frac{\tau(\Delta_{k_1, \dots, k_m})}{|\Delta_{k_0, \dots, k_0}|^\alpha} \leq 2^{\alpha mL} \frac{\tau(\Delta_{k_0, \dots, k_0})}{|\Delta_{k_0, \dots, k_0}|^\alpha}. \quad (20)$$

Из (20) сразу получаем утверждение леммы (для доказательства утверждения 2) надо рассмотреть формулу (20) при $\alpha = 0$).

Пусть $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_m)$. Обозначим через $2^{\mathbf{k}}$ вектор $(2^{k_1}, \dots, 2^{k_m})$. Для ряда (14) или (15) определим $\mathcal{B}$ -функцию ψ следующим образом:

$$\psi(\Delta) = S_{2^{\mathbf{k}}}(\mathbf{t})|\Delta|. \quad (21)$$

Здесь Δ – двоичный интервал ранга $\mathbf{k}$, причем $\mathbf{t} \in \Delta$. При этом значение $\psi(\Delta)$, определяемое (21), не зависит от выбора точки $\mathbf{t} \in \Delta$ в правой части этой формулы. Функция ψ получается при однократном формальном интегрировании ряда (14) или (15). Хорошо известно [15], [17], [20], что ψ является квазимерой, причем соответствие между множеством всех рядов (14) или (15) и множеством всех квазимер, определяемое формулой (21), является изоморфизмом, если естественным образом наделить эти множества структурой линейного пространства. Ниже под изоморфной ряду (14) или (15) квазимерой будем понимать квазимеру, построенную по формуле (21).

Пусть τ – $\mathcal{B}$ -функция и $\rho \in (0, 1]$. Двоичная ρ -регулярная производная $D_a^\rho \tau(\mathbf{t})$ функции τ в точке $\mathbf{t} \in G^m$ определяется следующей формулой:

$$D_a^\rho \tau(\mathbf{t}) = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \frac{\tau(\Delta)}{|\Delta|}, \quad |\Delta| \rightarrow 0, \quad \text{reg } \Delta \geq \rho, \quad \mathbf{t} \in \Delta.$$

Естественным образом определяются верхняя и нижняя двоичные ρ -регулярные производные $\overline{D}_a^\rho \tau(\mathbf{t})$ и $\underline{D}_a^\rho \tau(\mathbf{t})$ функции τ в точке $\mathbf{t} \in G^m$.

Пусть заданы $\alpha \in \mathbb{R}$ и $\rho \in (0, 1]$. Рассмотрим следующие условия на поведение частичных сумм $S_{\mathbf{N}}(\mathbf{t}) = S_{N_1, \dots, N_m}(\mathbf{t})$ рядов (14) или (15):

1°) $|S_{\mathbf{N}}(\mathbf{t})| \leq C(N_1 \cdots N_m)^{1-\alpha}$, $\text{reg } \mathbf{N} \geq \rho$ (здесь величина C не зависит от $\mathbf{N}$ и $\mathbf{t}$);

2°) $S_{\mathbf{N}}(\mathbf{t}) = o(N_1 \cdots N_m)^{1-\alpha}$ равномерно по $\mathbf{t} \in G^m$, $\min_i \{N_i\} \rightarrow \infty$, $\text{reg } \mathbf{N} \geq \rho$;

3°) $S_{\mathbf{N}}(\mathbf{t}) = O_{\mathbf{t}}((N_1 \cdots N_m)^{1-\alpha})$, $\min_i \{N_i\} \rightarrow \infty$, $\text{reg } \mathbf{N} \geq \rho$.

ЛЕММА 3. Пусть заданы $\rho \in (0, 1]$, $\mathbf{t} \in G^m$, возрастающая последовательность натуральных чисел $\{k_j\}$ и ряд (S) вида (14) или (15). Рассмотрим квазимеру ψ , изоморфную ряду (S) . Тогда:

- 1) если ряд (S) ρ -сходится в точке $\mathbf{t}$ к сумме A , то $D_d^\rho \psi(\mathbf{t}) = A$;
- 2) если подпоследовательность $S_{2^{k_j}}(\mathbf{t})$ кубических частичных сумм ряда (S) стремится при $j \rightarrow \infty$ к значению A , то для $\mathbf{t}_\square$ -последовательности $\{\Delta_k\}$ выполняется условие

$$\frac{\psi(\Delta_{k_j})}{|\Delta_{k_j}|} \rightarrow A, \quad j \rightarrow \infty;$$

- 3) если для некоторого $\alpha \in \mathbb{R}$ частичные суммы $S_{\mathbf{N}}(\mathbf{t})$ ряда (S) удовлетворяют условию 1°), 2°) или 3°), то для квазимеры ψ выполнено условие (17), (18) или (19) соответственно.

Если $\rho = 2^{-s}$, $s \in \mathbb{Z}_+$, то для рядов (S) вида (15) верны также утверждения, обратные утверждениям 1)–3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения 1) и 2) вытекают из (21). Доказательство утверждения 3) полностью аналогично доказательству теоремы 2 из [10]. Пусть $S_{\mathbf{N}}(\mathbf{t})$ – частичная сумма ряда (15) при $\text{reg } \mathbf{N} \geq 2^{-s}$, где $s \in \mathbb{Z}_+$. Тогда $S_{\mathbf{N}}(\mathbf{t}) = S_{2^{\mathbf{k}}}(\mathbf{t})$ для некоторого вектора $\mathbf{k}$, $\text{reg } 2^{\mathbf{k}} \geq 2^{-s}$. Из этого наблюдения, а также из (21) и доказательства теоремы 2 в [10] вытекает справедливость для рядов (15) утверждений, обратных утверждениям 1)–3). Лемма доказана.

§ 3. Размерность Хаусдорфа множеств из G^m и $[0, 1]^m$

Рассмотрим следующие определения [21, п. 6]. Покрытием множества $E \subset G^m$ называется семейство Ω множеств из G^m такое, что

$$E \subset \bigcup_{V \in \Omega} V.$$

Аналогично определяется покрытие множества $A \subset \mathbb{R}^m$.

Пусть $p \in \mathbb{R}$; тогда хаусдорфовой p -мерой множества $E \subset G^m$ называется величина

$$\text{mes}_p E = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \text{mes}_p^\varepsilon E, \quad \text{mes}_p^\varepsilon E = \inf \sum_i (\text{diam } \Delta_i)^p,$$

где инфимум берется по всем не более чем счетным покрытиям $\{\Delta_i\}$ множества E двоичными кубами с $\text{diam } \Delta_i < \varepsilon$. Хаусдорфовой размерностью множества E называется величина $\dim_H E$, равная $\sup\{p \in \mathbb{R} : \text{mes}_p E > 0\}$.

Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^m$, снабженное евклидовой метрикой. Далее через $B(\mathbf{x}, r)$ обозначим замкнутый шар из $\mathbb{R}^m$ с радиусом r и центром в точке $\mathbf{x}$, а через $\text{diam } I$ – диаметр множества $I \subset \mathbb{R}^m$. Положим $\text{mes}'_p A = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \inf \sum_i (\text{diam } I_i)^p$, где инфимум берется по всем не более чем счетным покрытиям $\{I_i\}$ множества A замкнутыми кубами $I_i \subset \mathbb{R}^m$ с $\text{diam } I_i < \varepsilon$. Тогда величина

$$\dim'_H A = \sup\{p \in \mathbb{R} : \text{mes}'_p A > 0\}$$

называется хаусдорфовой размерностью множества $A \subset \mathbb{R}^m$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть отображение γ задается формулами (8) и (9), $E \subset G^m$ и $A = \gamma(E) \subset [0, 1]^m$. Если $p \in \mathbb{R}$, то существуют величины $B_1, B_2 > 0$, зависящие только от p и m , такие, что

$$B_1 \text{mes}'_p A \leq \text{mes}_p E \leq B_2 \text{mes}'_p A. \quad (22)$$

В частности, $\dim_H E = \dim'_H A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С одной стороны, для любого двоичного куба $\Delta \subset G^m$ образ $\gamma(\Delta)$ есть куб из $[0, 1]^m$ того же диаметра. Поэтому

$$\text{mes}_p E \geq \text{mes}'_p A. \quad (23)$$

С другой стороны, любой отрезок $J \subset [0, 1]$ лежит в объединении образов не более чем трех двоичных интервалов из G диаметром не больше $|J|$. Следовательно, любой куб $K \subset [0, 1]^m$ лежит в объединении образов не более чем 3^m двоичных кубов из G^m с диаметром не больше $\text{diam } K$. Поэтому

$$\text{mes}_p E \leq 3^{mp} \text{mes}'_p A. \quad (24)$$

Из (23) и (24) вытекает справедливость данного утверждения.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть Ω – покрытие множества $E \subset G^m$ двоичными кубами. Удалив из набора Ω двоичные кубы, лежащие в других кубах из этого набора, получим поднабор $\Omega_1 \subset \Omega$, состоящий из попарно неперекрывающихся кубов и образующий покрытие множества E .

Известно, что p -мера является метрической внешней мерой [21, п. 1]. В частности, для любого не более чем счетного набора $\{E_n\}$ множеств из G^m имеет место неравенство

$$\text{mes}_p \left(\bigcup_n E_n \right) \leq \sum_n \text{mes}_p(E_n). \quad (25)$$

Нам понадобится следующий факт, являющийся в некотором смысле обратным к известному в теории размерности *принципу равномерного распределения масс* [21, п. 7]. Данный факт сразу вытекает из [22, теорема 4.10, утверждение 4.11].

ТЕОРЕМА A1. Пусть заданы действительное число p и борелевское множество $A \subset \mathbb{R}^m$, $\text{mes}'_p A > 0$. Тогда существуют $b > 0$ и компактное множество $X \subset A$ такое, что $0 < \text{mes}_p X < \infty$, для которых неравенство

$$\text{mes}'_p(X \cap B(\mathbf{x}, r)) \leq br^p \quad (26)$$

выполнено для всех $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ и $r > 0$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть заданы $\alpha \in (0, 1)$ и замкнутое множество $F \subset G^m$, $\text{mes}_{\alpha m} F > 0$. Тогда существует неотрицательная квазимера $\xi \not\equiv 0$, сосредоточенная на множестве F и такая, что $\xi \in H^{\alpha, p}$ для всех $p \in (0, 1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим отображение $\gamma: G^m \rightarrow [0, 1]^m$, задаваемое формулами (8) и (9). Пусть $A = \gamma(F) \subset [0, 1]^m$. Из (22) вытекает, что $\text{mes}'_{\alpha m} A > 0$. Воспользуемся теоремой A1 и найдем $b > 0$ и замкнутое множество $X \subset A$ такое, что

$$0 < \text{mes}'_{\alpha m} X < \infty, \quad (27)$$

удовлетворяющие неравенству (26) для всех $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ и $r > 0$. Из утверждения 1 вытекает, что множество $E = \gamma^{-1}(X)$ является замкнутым. Рассмотрим замкнутое множество $E \cap F$. С одной стороны,

$$E \cap F \subseteq E \Rightarrow \gamma(E \cap F) \subseteq \gamma(E) = X. \quad (28)$$

С другой стороны, если $\mathbf{x}_0 \in X$, то в силу соотношений $X \subset A = \gamma(F)$ существует $\mathbf{f}_0 \in F$ такое, что $\gamma(\mathbf{f}_0) = \mathbf{x}_0$. Поскольку $E = \gamma^{-1}(X)$, то $\mathbf{f}_0 \in E$. Таким образом, $X \subseteq \gamma(E \cap F)$. Отсюда, учитывая (28), получаем

$$\gamma(E \cap F) = X. \quad (29)$$

Рассмотрим $\mathcal{B}$ -функцию ξ , определяемую на каждом двоичном интервале $\Delta \subset G^m$ следующим образом:

$$\xi(\Delta) = \text{mes}_{\alpha m}(E \cap F \cap \Delta). \quad (30)$$

В силу формул (22), (27) и (28) функция ξ является конечной и $\xi \not\equiv 0$. Очевидно, ξ является квазимерой. Ясно, что ξ сосредоточена на множестве F и неотрицательна. Пусть Δ – произвольный двоичный куб. Тогда $\gamma(\Delta) \subset B(\mathbf{x}_1, r)$ при $r = (\text{diam } \Delta)/2$ и некотором $\mathbf{x}_1 \in [0, 1]^m$. Используя формулы (12), (24), (26), (29) и (30), получим следующую цепочку соотношений:

$$\begin{aligned} \xi(\Delta) &= \text{mes}_{\alpha m}(E \cap F \cap \Delta) \leq B_2 \text{mes}'_{\alpha m}(\gamma(E \cap F \cap \Delta)) \\ &= B_2 \text{mes}'_{\alpha m}(X \cap \gamma(\Delta)) \leq B_2 \text{mes}'_{\alpha m}(X \cap B(\mathbf{x}_1, r)) \\ &\leq B_2 b (\text{diam } \Delta)^{\alpha m} \frac{1}{2^{\alpha m}} = \frac{1}{2^{\alpha m}} B_2 b m^{\alpha m/2} |\Delta|^\alpha, \end{aligned} \quad (31)$$

где величины B_2 и b не зависят от Δ . Из (31) и неотрицательности квазимеры ξ вытекает, что $\xi \in H^{\alpha, 1}$. Отсюда по лемме 2 имеем $\xi \in H^{\alpha, \rho}$ для всех $\rho \in (0, 1]$. Теорема доказана.

§ 4. Теорема о монотонности для $\mathcal{B}$ -функций

Здесь будет установлена теорема о монотонности для $\mathcal{B}$ -функций. Такие теоремы используются при построении интегралов, решающих задачу восстановления коэффициентов. Мы применим эту теорему и для решения задач о множествах единственности.

ТЕОРЕМА 2. Пусть заданы $\alpha \in [0, 1)$, множество $E \subset G^m$ и 1-непрерывная $\mathcal{B}$ -функция $\tau \in \underline{A}_B$. Предположим, что во всех точках $\mathbf{t} \in G^m \setminus E$ для функции τ справедливо неравенство

$$\underline{D}_d^1 \tau(\mathbf{t}) \leq 0. \quad (32)$$

Пусть $\tau(J) > 0$ для некоторого двоичного интервала J . Тогда:

- 1) если $\tau \in H^{\alpha, 1, *}$, то множество E содержит совершенное подмножество F , $\text{mes}_{\alpha m} F > 0$;
- 2) если $\tau \in H_{\alpha, 1}$, то множество E содержит совершенное подмножество F , $\text{mes}_{\alpha m} F = \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разобьем интервал J на конечное число двоичных кубов. Поскольку $\tau \in \mathcal{A}_B$, то $\tau(J_1) > 0$ для одного из этих кубов J_1 . Введем функцию $\tau_1(\Delta) = \tau(\Delta) - \varepsilon_1|\Delta|$, где $\varepsilon_1 > 0$ настолько мало, что $\tau_1(J_1) > 0$. Очевидно, $\tau_1 \in \mathcal{A}_B$. Кроме того, функция τ_1 как сумма двух 1-непрерывных функций является 1-непрерывной. Поскольку $\alpha < 1$, то $\varepsilon_1|\Delta| \in H^{\alpha,1,*} \cap H_{\alpha,1}$. Поэтому

$$\tau \in H^{\alpha,1,*} \Rightarrow \tau_1 \in H^{\alpha,1,*}, \quad \tau \in H_{\alpha,1} \Rightarrow \tau_1 \in H_{\alpha,1}. \quad (33)$$

Пусть k_0 – ранг куба J_1 . Рассмотрим множество

$$F = \bigcap_{k=k_0}^{\infty} \bigcup \Delta,$$

где объединение берется по всем двоичным кубам $\Delta \subseteq J_1$, имеющим ранг k и таким, что $\tau_1(\Delta) > 0$. Множество F замкнуто как пересечение замкнутых множеств. В силу леммы 1 и 1-непрерывности функции τ_1 это множество не имеет изолированных точек, т. е. оно совершенно. Назовем *цепью* конечную или бесконечную вложенную последовательность $\{\Delta_k\}$ двоичных кубов таких, что для всех k ранг куба Δ_k равен k , $\Delta_k \subset J_1$ и $\tau_1(\Delta_k) > 0$. В рамках доказательства теоремы докажем ряд утверждений.

ЛЕММА 4. *Множество F непусто.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разобьем куб $\Delta_{k_0} := J_1$ на 2^m смежных двоичных кубов. В силу того, что $\tau_1 \in \mathcal{A}_B$, выполнено $\tau(\Delta_{k_0+1}) > 0$ для одного из таких кубов Δ_{k_0+1} . Неограниченно продолжая процесс, получим цепь $\{\Delta_k\}_{k=k_0}^{\infty}$. По построению множества F точка $\mathbf{t}_0 = \bigcap_{k=k_0}^{\infty} \Delta_k$ принадлежит этому множеству, т. е. $F \neq \emptyset$.

ЛЕММА 5. *Если $\mathbf{t} \in F$, то для любого двоичного куба Δ ранга $k \geq k_0$, содержащего эту точку, выполнено неравенство $\tau_1(\Delta) > 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы вытекает из построения множества F .

ЛЕММА 6. *Пусть двоичные кубы $K_1 \subsetneq J_1$ и K_2 являются смежными, причем $K_1 \cap F \neq \emptyset$ и $K_2 \cap F = \emptyset$. Тогда $\tau_1(K_2) \leq 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\tau_1(K_2) > 0$. Из леммы 5 вытекает существование цепи, соединяющей кубы J_1 и K_1 . Поскольку кубы K_1 и K_2 являются смежными и $\tau_1(K_2) > 0$, существует цепь $\{\Delta_k\}_{k=k_0}^{k_1}$ такая, что $\Delta_{k_0} = J_1$, $\Delta_{k_1} = K_2$. Так как $\tau_1(K_2) > 0$, то из доказательства леммы 4 вытекает существование цепи $\{\Delta_k\}_{k=k_1}^{\infty}$, начинающейся с $\Delta_{k_1} = K_2$. Объединяя цепи $\{\Delta_k\}_{k=k_0}^{k_1}$ и $\{\Delta_k\}_{k=k_1}^{\infty}$, получаем цепь $\{\Delta_k\}_{k=k_0}^{\infty}$, причем точка $\mathbf{t}_0 = \bigcap_{k=k_0}^{\infty} \Delta_k$ принадлежит множеству F . Однако $\mathbf{t}_0 \in K_2$, но это противоречит тому, что $K_2 \cap F = \emptyset$. Отсюда получаем доказательство леммы.

Вернемся к доказательству теоремы. Выберем произвольную точку $\mathbf{t} \in F$. К ней стягивается некоторая цепь $\{\Delta_k\}_{k=k_0}^{\infty}$, начинающаяся с куба J_1 . Тогда

$$\underline{D}_d^1 \tau(\mathbf{t}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\tau_1(\Delta_k) + \varepsilon|\Delta_k|}{|\Delta_k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\tau_1(\Delta_k)}{|\Delta_k|} + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon|\Delta_k|}{|\Delta_k|} \geq 0 + \varepsilon = \varepsilon.$$

Из последней цепочки соотношений вытекает, что для точки $\mathbf{t}$ не выполнено условие (32), откуда имеем $\mathbf{t} \in E$. Поскольку $\mathbf{t}$ – произвольная точка множества F , то $F \subset E$. Оценим снизу $\text{mes}_{\alpha m} F$.

Случай 1: $\tau \in H^{\alpha,1,*}$. Для всех $\mathbf{t} \in F$ рассмотрим $\mathbf{t}_{\square}$ -последовательность $\{\Delta_k(\mathbf{t})\}$. Для каждого натурального M через E_M обозначим множество таких точек $\mathbf{t} \in F$, что неравенство

$$\tau_1(\Delta) \leq M|\Delta|^\alpha \quad (34)$$

выполнено для всех $\Delta = \Delta_k(\mathbf{t})$. В силу включения $F \subset E$ и (33) имеет место равенство $F = \bigcup_{M=1}^{\infty} E_M$. Поскольку множество F замкнуто, то по теореме Бэра [23, гл. 2] существует натуральное M такое, что множество E_M плотно на непустой порции множества F . Таким образом, существует такой двоичный куб $J_2 \subset J_1$, что $\bar{E}_M \cap J_2 = \bar{F}$, где $\bar{F} := F \cap J_2 \neq \emptyset$. В силу леммы 5 имеем $\tau_1(J_2) = C > 0$.

Рассмотрим произвольное покрытие $\{X_i\}$ замкнутого множества $\bar{F}$ двоичными кубами. Выделим из этого покрытия конечное подпокрытие, удалим из него кубы, имеющие пустое пересечение с $\bar{F}$, и кубы, лежащие в других кубах из этого набора. Получим конечный дизъюнктивный набор $\{Y_j\}$, причем $Y_j \cap \bar{F} \neq \emptyset$ для всех j . Множество $J_2 \setminus \bigcup_j Y_j$ можно представить как дизъюнктивное объединение двоичных кубов из некоторого конечного набора P . Если набор P содержит 2^m смежных кубов, объединим их в один. Повторив эту процедуру достаточное число раз, получим конечный дизъюнктивный набор $Q = \{Z_l\}$ двоичных кубов (причем $\bigcup_l Z_l = J_2 \setminus \bigcup_j Y_j$) такой, что для каждого куба $Z_l \in Q$ существует смежный куб W_l , имеющий непустое пересечение с множеством $\bar{F} \subset F$. По построению набора Q имеем $Z_l \cap F = \emptyset$, поэтому согласно лемме 6

$$\tau_1(Z_l) \leq 0 \quad \forall l. \quad (35)$$

Отметим, что для всех j множество E_M плотно в $Y_j \cap \bar{F}$. Поэтому $Y_j \cap E_M \neq \emptyset$ для всех j . Отсюда вытекает, что для функции τ_1 и для всех кубов Y_j выполнено условие (34). Заметим, что $(\bigcup_j Y_j) \sqcup (\bigcup_l Z_l) = J_2$, откуда, учитывая субаддитивность функции τ_1 , получаем неравенство

$$\sum_j \tau_1(Y_j) + \sum_l \tau_1(Z_l) \geq \tau_1(J_2). \quad (36)$$

Имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \sum_i (\text{diam } X_i)^{\alpha m} &\geq \sum_j (\text{diam } Y_j)^{\alpha m} \stackrel{(12)}{=} m^{\alpha/2} \sum_j |Y_j|^\alpha \\ &\stackrel{(34)}{\geq} \frac{m^{\alpha/2}}{M} \sum_j \tau(Y_j) \stackrel{(36)}{\geq} \frac{m^{\alpha/2}}{M} \left(\tau_1(J_2) - \sum_l \tau_1(Z_l) \right) \\ &\stackrel{(35)}{\geq} \frac{m^{\alpha/2} \tau_1(J_2)}{M} = \frac{C m^{\alpha/2}}{M} > 0. \end{aligned} \quad (37)$$

В силу произвольности покрытия $\{X_i\}$ множества $\bar{F}$ двоичными кубами из соотношений (37) вытекает неравенство $\text{mes}_{\alpha m} \bar{F} > 0$. Поскольку $F \supset \bar{F}$, то $\text{mes}_{\alpha m} F > 0$. Последнее неравенство доказывает теорему в рассматриваемом случае.

Случай 2: $\tau \in H_{\alpha,1}$. Для каждого $\mathbf{t} \in F$ рассмотрим $\mathbf{t}_{\square}$ -последовательность $\{\Delta_k(\mathbf{t})\}$. Зафиксируем произвольное натуральное M . Тогда, учитывая (33), найдем натуральное $k(M)$ такое, что неравенство

$$\tau_1(\Delta) \leq \frac{|\Delta|^\alpha}{M}$$

выполнено для всех $\Delta = \Delta_k(\mathbf{t})$, $k \geq k(M)$. Рассмотрим произвольное покрытие $\{X_i\}$ замкнутого множества F двоичными кубами ранга меньше $k(M)$. Рассуждая, как при доказательстве случая 1, получим следующее неравенство, аналогичное (37):

$$\sum_i (\text{diam } X_i)^{\alpha m} \geq m^{\alpha/2} M \tau_1(J_1) > 0. \quad (38)$$

Поскольку $\{X_i\}$ – произвольное покрытие множества F двоичными кубами ранга меньше $k(M)$, из (38) вытекает неравенство $\text{mes}_{\alpha m} F > m^{\alpha/2} M \tau_1(J_1)$. В силу произвольности натурального M последнее неравенство означает, что $\text{mes}_{\alpha m} F = \infty$. Теорема доказана полностью.

§ 5. Множества относительной единственности для кратных рядов Уолша и Хаара

Здесь мы используем теорему 2 для получения результатов о множествах относительной единственности для ряда (14) ((15)). Пусть Θ – множество ряда (14) ((15)), удовлетворяющего условию 3°), и $U_{W,m,\rho}(\alpha)$ ($U_{H,m,\rho}(\alpha)$) – класс $U(\Theta)$ -множеств при ρ -сходимости. Пусть $M_{W,m,\rho}(\alpha)$ ($M_{H,m,\rho}(\alpha)$) – класс соответствующих $M(\Theta)$ -множеств. Заменяя в определениях классов $U_{W,m,\rho}(\alpha)$, $U_{H,m,\rho}(\alpha)$, $M_{W,m,\rho}(\alpha)$ и $M_{H,m,\rho}(\alpha)$ условие 3° на 1°), получим классы $U_{W,m,\rho}^*(\alpha)$, $U_{H,m,\rho}^*(\alpha)$, $M_{W,m,\rho}^*(\alpha)$ и $M_{H,m,\rho}^*(\alpha)$. Отметим, что при фиксированном α условие 1°) сильнее условия 3°). Поэтому согласно замечанию 1 справедливы следующие включения:

$$\begin{aligned} U_{W,m,\rho}^*(\alpha) &\supset U_{W,m,\rho}(\alpha), & U_{H,m,\rho}^*(\alpha) &\supset U_{H,m,\rho}(\alpha), \\ M_{W,m,\rho}^*(\alpha) &\subset M_{W,m,\rho}(\alpha), & M_{H,m,\rho}^*(\alpha) &\subset M_{H,m,\rho}(\alpha). \end{aligned} \quad (39)$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть выбраны $\alpha \in (0,1)$ и $\rho \in (0,1]$. Если $E \in M_{W,m,\rho}(\alpha) \cup M_{H,m,\rho}(\alpha)$, то E содержит совершенное подмножество F , $\text{mes}_{\alpha m} F > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $E \in M_{W,m,\rho}(\alpha) \cup M_{H,m,\rho}(\alpha)$, то существует ряд $(S) \not\equiv 0$ вида (14) или (15), всюду на G^m удовлетворяющий условию 3°) и такой, что $(S) \xrightarrow{\rho} 0$ при $\mathbf{t} \in G^m \setminus E$. Пусть ψ – изоморфная этому ряду квазимера. Поскольку $(S) \not\equiv 0$, то $\psi \not\equiv 0$. Заменяя, если нужно, ряд (S) на ряд с противоположными коэффициентами, получим, что $\psi(\Delta) > 0$ для некоторого двоичного интервала Δ .

Поскольку $(S) \xrightarrow{\rho} 0$ на множестве $G^m \setminus E$, то по лемме 3 имеем $D_a^1 \psi(\mathbf{t}) = 0$ для всех $\mathbf{t} \in G^m \setminus E$. Так как ряд (S) всюду на G^m удовлетворяет условию 3°), то по лемме 3 квазимера ψ удовлетворяет условию (19) всюду на G^m . Из условия (19) вытекает также 1-непрерывность квазимеры ψ . Мы находимся в условиях утверждения 1) теоремы 2, поэтому существует совершенное множество $F \subset E$, $\text{mes}_{\alpha m} F > 0$. Теорема доказана.

Следующие три теоремы вытекают из теоремы 3 и формулы (39).

ТЕОРЕМА 4. Пусть выбраны $\alpha \in (0, 1)$, $\rho \in (0, 1]$ и множество $E \subset G^m$. Если $E \in M_{W,m,\rho}^*(\alpha) \cup M_{H,m,\rho}^*(\alpha)$, то E содержит совершенное подмножество F , $\text{mes}_{\alpha m} F > 0$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть заданы $\alpha \in (0, 1)$ и $\rho \in (0, 1]$. Если множество $E \subset G^m$ не содержит совершенных подмножеств F , $\text{mes}_{\alpha m} F > 0$, то $E \in U_{W,m,\rho}^*(\alpha) \cap U_{H,m,\rho}^*(\alpha) \cap U_{W,m,\rho}(\alpha) \cap U_{H,m,\rho}(\alpha)$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть выбраны $\alpha \in (0, 1)$, $\rho \in (0, 1]$ и множество $E \subset G^m$. Если $\text{mes}_{\alpha m} E = 0$, то

$$E \in U_{W,m,\rho}^*(\alpha) \cap U_{H,m,\rho}^*(\alpha) \cap U_{W,m,\rho}(\alpha) \cap U_{H,m,\rho}(\alpha).$$

В частности, утверждение теоремы является верным, если $\dim_H E < \alpha m$.

Теоремы 5, 6 выражают достаточное условие принадлежности множества $E \subset G^m$ классам $U_{W,m,\rho}(\alpha)$, $U_{H,m,\rho}(\alpha)$, $U_{W,m,\rho}^*(\alpha)$ и $U_{H,m,\rho}^*(\alpha)$. Изучим вопрос о необходимых условиях такой принадлежности.

В работе [24] показано, что для любого $a \in [0, m]$ существует множество $A \subset G^m$, $\dim_H A = a$, являющееся U -множеством для рядов (14) при $\rho = 1$. Ясно, что $A \in U_{W,m,\rho}(\alpha) \cup U_{W,m,\rho}^*(\alpha)$ для всех $\rho \in (0, 1]$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. Поэтому необходимое условие принадлежности заданного множества классам $U_{W,m,\rho}(\alpha)$ и $U_{W,m,\rho}^*(\alpha)$ не может быть найдено в терминах хаусдорфовой p -меры. При $\rho \in (0, 1/2]$ подобный результат имеет место [25] и для рядов по перестановкам функций Уолша, сохраняющим ранг этих функций.

Для рядов (15) имеет место иная ситуация. Покажем, что теорема 4, примененная к таким рядам, является обратимой.

ТЕОРЕМА 7. Пусть выбрано $\alpha \in (0, 1)$. Если множество $E \subset G^m$ содержит совершенное подмножество F , $\text{mes}_{\alpha m} F > 0$, то $E \in M_{H,m,\rho}(\alpha) \cap M_{H,m,\rho}^*(\alpha)$ для всех $\rho \in (0, 1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим к множеству F теорему 1 и найдем квазимеру $\xi \not\equiv 0$, принадлежащую классу $H^{\alpha,\rho}$ для всех $\rho \in (0, 1]$ и сосредоточенную на множестве F . Рассмотрим ряд (S) вида (15), изоморфный квазимере ξ . Тогда имеют место следующие рассуждения.

1) Поскольку $\xi \not\equiv 0$, то (S) $\not\equiv 0$.

2) Так как $\xi \in H^{\alpha,\rho}$ при всех $\rho \in (0, 1]$, то согласно лемме 3 ряд (S) удовлетворяет условию 1°) при всех $\rho \in (0, 1]$.

3) Зафиксируем произвольную точку $\mathbf{t} \notin E$. Тогда $\mathbf{t} \notin F$. Пусть $\{\Delta_{\mathbf{k}}\} - \mathbf{t}$ -последовательность. Поскольку множество F замкнуто и $\mathbf{t} \notin F$, найдется $l(\mathbf{t}) > 0$ такое, что $\Delta_{\mathbf{k}} \cap F = \emptyset$ для всех векторов $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_m)$, удовлетворяющих условию $\min\{k_1, \dots, k_m\} \geq l(\mathbf{t})$. Значит, с учетом того, что квазимера ξ сосредоточена на множестве F , имеем $\xi(\Delta_{\mathbf{k}}) = 0$ для всех таких $\mathbf{k}$. Используя лемму 3, получаем, что (S) $\xrightarrow{p} 0$ в точке $\mathbf{t}$ при всех $\rho \in (0, 1]$. В силу произвольности точки $\mathbf{t} \notin E$ имеем (S) $\xrightarrow{p} 0$ на $G^m \setminus E$.

Из рассуждений 1)–3) следует, что $E \in M_{H,m,\rho}^*(\alpha)$ при всех $\rho \in (0, 1]$. Учитывая (39), получаем, что $E \in M_{H,m,\rho}(\alpha)$ при всех $\rho \in (0, 1]$. Теорема доказана.

Следующие два результата являются прямыми следствиями теорем 4, 7. В работе [13] в одномерном случае были найдены необходимые, а также достаточные условия принадлежности заданного множества классу $M_{H,1}(\alpha)$. Однако в [13] эти условия не совпадали между собой. Следующая теорема заполняет этот пробел сразу в многомерном случае.

ТЕОРЕМА 8. Пусть заданы $\alpha \in (0,1)$, $\rho \in (0,1]$ и множество $E \subset G^m$. Тогда $E \in M_{H,m,\rho}(\alpha)$ ($E \in M_{H,m,\rho}^*(\alpha)$), если и только если существует совершенное множество $F \subset E$, $\text{mes}_{\alpha m} F > 0$.

ТЕОРЕМА 9. Пусть $\alpha \in (0,1)$, $\rho \in (0,1]$ и $E \subset G^m$. Тогда $E \in U_{H,m,\rho}(\alpha)$ ($E \in U_{H,m,\rho}^*(\alpha)$), если и только если не существует совершенных множеств $F \subset E$, $\text{mes}_{\alpha m} F > 0$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть заданы $\alpha \in (0,1)$ и $\rho \in (0,1]$. Тогда $M_{H,m,\rho}(\alpha) = M_{H,m,\rho}^*(\alpha)$, $U_{H,m,\rho}(\alpha) = U_{H,m,\rho}^*(\alpha)$.

ТЕОРЕМА 10. Выберем произвольные $\alpha \in (0,1)$, $\rho \in (0,1]$ и множество $E \in M_{H,m,\rho}^*(\alpha)$. Если (S) – ряд вида (15), реализующий M -множество E , то (S) можно выбрать таким, что все его частичные суммы будут неотрицательными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 4 множество E содержит совершенное подмножество F , $\text{mes}_{\alpha m} F > 0$. Из теоремы 1 и доказательства теоремы 7 вытекает, что ряд (S) вида (15), реализующий M -множество E , можно выбрать таким, что изоморфная ему квазимера будет неотрицательной. Из этого факта и формулы (21) вытекает утверждение теоремы.

ТЕОРЕМА 11. Пусть заданы $\alpha \in (0,1)$, $\rho \in (0,1]$ и замкнутое множество $X \subset G^m$. Тогда $X \in U_{H,m,\rho}^*(\alpha)$, если и только если $\text{mes}_{\alpha m} X = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. По известной теореме Кантора–Бендиксона [26, гл. 6] любое замкнутое множество в топологическом пространстве со счетной базой является объединением не более чем счетного и совершенного множеств. Пусть $X = A \cup B$, где множество A не более чем счетно, а множество B совершенно. Если $X \in U_{H,m,\rho}^*(\alpha)$, то по теореме 7 не существует совершенных множеств $F \subset X$, $\text{mes}_{\alpha m} F > 0$. Следовательно, $\text{mes}_{\alpha m} B = 0$. Поскольку $\alpha > 0$, а множество A не более чем счетно, то $\text{mes}_{\alpha m} A = 0$. Из последних двух равенств согласно (25) получаем $\text{mes}_{\alpha m} X = 0$, что и требовалось доказать.

Достаточность сразу вытекает из теоремы 8. Теорема доказана.

Используя утверждение 2) теоремы 2, по аналогии с доказательствами теорем 3, 11 легко получается следующий результат.

ТЕОРЕМА 12. Пусть выбраны $\alpha \in (0,1)$, $\rho \in (0,1]$ и замкнутое множество $X \subset G^m$, причем $\text{mes}_{\alpha m} X < \infty$. Тогда множество X является $U(\Theta)$ -множеством при ρ -сходимости, где Θ – класс ряда (14) или (15), удовлетворяющего условию 2°).

Теоремы 7–12 по-видимому являются новыми и в одномерном случае. Из теорем 6, 11 несложно получить результат, являющийся теоремой типа Бари для рядов (15). Верна

ТЕОРЕМА 13. Пусть выбраны $\alpha \in (0, 1)$ и $\rho \in (0, 1]$. Тогда объединение не более чем счетного числа замкнутых множеств из класса $U_{H,m,\rho}^*(\alpha)$ также есть множество из этого класса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $E = \bigcup_n X_n$ – объединение не более чем счетного числа замкнутых множеств из класса $U_{H,m,\rho}^*(\alpha)$. По теореме 11 для всех n справедливо равенство $\text{mes}_{\alpha m} X_n = 0$. Отсюда согласно (25) получаем, что $\text{mes}_{\alpha m} E = 0$. Следовательно, по теореме 6 имеем $E \in U_{H,m,\rho}^*(\alpha)$. Теорема доказана.

Теоремы, подобные теореме 13, хорошо известны. Н.К. Бари доказала (см. [2, гл. 14], [27], [28]), что объединение не более чем счетного числа замкнутых U -множеств для тригонометрических рядов также является U -множеством. Для рядов Уолша подобный результат получил В.Р. Вэйд [29], а для кратных рядов Уолша и тригонометрических при сходимости по прямоугольникам – Н.Н. Холщевникова [30]. Отметим теорему Вэйда [11, теорема 3], где в одномерном случае доказывается аналог теоремы 13, в котором рассматриваются множества относительной единственности для класса рядов (2), удовлетворяющих условию (4).

ТЕОРЕМА 14. Пусть заданы $\alpha \in (0, 1)$, $\rho \in (0, 1]$ и множество $E \in M_{H,m,\rho}^*(\alpha)$. Тогда существует непустое замкнутое множество $X \subset E$ (ядро M -множества E), обладающее тем свойством, что любая непустая порция множества X является $M_{H,m,\rho}^*(\alpha)$ -множеством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 4 существует совершенное множество $F \subset E$, $\text{mes}_{\alpha m} F > 0$. Пусть $\mathcal{W}$ – семейство двоичных кубов Δ таких, что

$$\text{mes}_{\alpha m}(F \cap \Delta) = 0. \quad (40)$$

Рассмотрим множества

$$S = \bigcup_{\Delta \in \mathcal{W}} (F \cap \Delta), \quad X = F \setminus S. \quad (41)$$

Отсюда вытекает, что множество X можно записать в виде

$$X = F \setminus \left(\bigcup_{\Delta \in \mathcal{W}} \Delta \right). \quad (42)$$

Из (42) видно, что множество X замкнуто как разность замкнутого и открытого множеств. Семейство $\mathcal{W}$ не более чем счетно, поэтому из (25) и (40) вытекает, что

$$\text{mes}_{\alpha m} S = 0, \quad \text{mes}_{\alpha m} X = \text{mes}_{\alpha m} F > 0. \quad (43)$$

Из (43) и неравенства $\alpha > 0$ следует непустота множества X .

Пусть Δ_0 – произвольный двоичный куб такой, что множество $X \cap \Delta_0$ непусто. Предположим, что

$$\text{mes}_{\alpha m}(X \cap \Delta_0) = 0. \quad (44)$$

Из (41) и структуры двоичных кубов вытекает, что

$$F \cap \Delta_0 \subset (X \cap \Delta_0) \cup \left(\bigcup_{\Delta \in \mathcal{W}} (F \cap \Delta) \right). \quad (45)$$

Из (25), (40), (44) и (45) следует равенство

$$\text{mes}_{\alpha m}(F \cap \Delta_0) = 0.$$

Это означает, что $\Delta_0 \in \mathcal{W}$. Значит, с учетом (42) имеем $X \cap \Delta_0 = \emptyset$. Получили противоречие, которое доказывает, что $\text{mes}_{\alpha m}(X \cap \Delta_0) > 0$. По теореме 8 множество $X \cap \Delta_0$ является $M_{H,m,\rho}^*(\alpha)$ -множеством. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 15. Пусть $\alpha < 1$ и $\rho \in (0, 1]$, а множество E измеримо на G^m и $E \in U_{H,m,\rho}^*(\alpha)$. Тогда множество E имеет меру нуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать теорему для $\alpha \in (0, 1)$, так как если $\alpha \leq 0$, то $U_{H,m,\rho}^*(\alpha) \subset U_{H,m,\rho}^*(\alpha_0)$ для любого $\alpha_0 \in (0, 1)$. Если утверждение теоремы не верно, то для некоторого $\alpha \in (0, 1)$ найдется замкнутое множество $X \in U_{H,m,\rho}^*(\alpha)$ положительной меры. Тогда $\text{mes}_m X > 0$ и $\text{mes}_{\alpha m} X > 0$. Это означает согласно теореме 11, что $X \in M_{H,m,\rho}^*(\alpha)$. Получили противоречие, доказывающее теорему.

§ 6. Ряды Хаара и квазимеры на отрезке $[0, 1]$

Одномерные функции Хаара можно определять не только на группе G , но и на отрезке $[0, 1]$. Считалось, что задачи о множествах единственности для рядов Хаара решаются одинаково, вне зависимости от того, где рассматривать одномерные функции Хаара. Однако в кратном случае при сходимости по кубам это оказалось не так. Для рядов (15), определенных на G^m , пустое множество является U -множеством при сходимости по кубам. Доказательство этого факта аналогично доказательству, проведенному для рядов (14) в работе [31]. С другой стороны, как показано в [32], существует двумерный ряд Хаара $(S) \not\equiv 0$ на $[0, 1]^2$, всюду на единичном квадрате сходящийся к нулю по кубам.

В следующем параграфе будет показано, что в одномерном случае подобная ситуация невозможна, и теорию единственности для одномерных рядов Хаара можно считать в каком-то смысле не зависимой от того, где определяются функции Хаара.

Здесь рассматривается случай $m = 1$ и доказывается ряд технических результатов. До конца настоящего параграфа все объекты рассматриваются на отрезке $[0, 1]$. Понятия открытости и замкнутости множества рассматриваются относительно топологии единичного отрезка $[0, 1]$; так, A° означает *внутренность* множества A в топологии $[0, 1]$. Через $|A|$ обозначим *меру Лебега* множества $A \subset [0, 1]$.

Двоичным интервалом ранга k будем называть замкнутый сегмент вида

$$\Delta_k^i = \left[\frac{i}{2^k}, \frac{i+1}{2^k} \right], \quad k = 0, 1, \dots, \quad i = 0, \dots, 2^k - 1. \quad (46)$$

Вложенную последовательность $\{\Delta_k\}_{k=0}^\infty$ двоичных интервалов назовем *x -последовательностью* [33], если $x \in \Delta_k$ и ранг Δ_k равен k для всех k . Если $x \in I_d$, то для точки x существует одна x -последовательность, а если $x \in Q_d$ и $x \notin \{0, 1\}$, то две.

ЛЕММА 7. Пусть $K \subset [0, 1]$ – двоичный интервал ранга k_0 , а τ – квази-мера на $[0, 1]$ такая, что $\tau(\Delta) = 0$ для всех двоичных интервалов, не перекрывающихся с K . Пусть $\tau(K) > 0$. Тогда существует последовательность квазимер $\{\xi_k\}_{k=k_0}^\infty$, обладающая следующими свойствами:

- (I) $\xi_k(K) = \tau(K)$ для всех $k = k_0, k_0 + 1, \dots$;
- (II) $|\xi_{k+1}(\Delta)| \leq |\xi_k(\Delta)|$ для любого $k \geq k_0$ и для всех двоичных интервалов Δ ;
- (III) если $k \geq k_0$, то $\xi_k(\Delta) \geq 0$ для всех двоичных интервалов Δ ранга $\leq k$;
- (IV) если Δ – двоичный интервал ранга $k \geq k_0$, то $\xi_k(\Delta) = \xi_{k+1}(\Delta) = \xi_{k+2}(\Delta) = \dots$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем индукцией по $k = k_0, k_0 + 1, \dots$.

Основание индукции. Функция $\xi_{k_0} := \tau$ удовлетворяет свойству (I). Пусть Δ – двоичный интервал ранга $\leq k$. Если $\Delta^\circ \cap K^\circ = \emptyset$, то $\xi_{k_0}(\Delta) = 0$ по условию леммы. Если $\Delta^\circ \cap K^\circ \neq \emptyset$, то существует конечный набор Ω двоичных интервалов такой, что $J^\circ \cap K^\circ = \emptyset$ для всех $J \in \Omega$ и

$$\Delta = K \cup \left(\bigcup_{J \in \Omega} J \right). \quad (47)$$

Из равенства (47), аддитивности функции ξ_{k_0} и из условий леммы вытекает, что эта функция обладает свойством (III).

Индукционный переход. Пусть построены квазимеры $\xi_{k_0}, \dots, \xi_k$, удовлетворяющие свойствам (I)–(IV). Построим квазимеру ξ_{k+1} . Положим

$$\xi_{k+1}(\Delta) = \xi_k(\Delta) \quad (48)$$

для всех двоичных интервалов Δ ранга $\leq k$. Пусть J – произвольный двоичный интервал ранга k , $J = J^1 \cup J^2$ – объединение неперекрывающихся двоичных интервалов ранга $k + 1$. Если $\xi_k(J) = 0$, положим $\xi_{k+1}(J^1) = \xi_{k+1}(J^2) = 0$. Если $\xi_k(J) \neq 0$, то согласно индукционному предположению имеем

$$\xi_k(J) > 0. \quad (49)$$

Поскольку ξ_k является квазимерой, то

$$\xi_k(J) = \xi_k(J^1) + \xi_k(J^2). \quad (50)$$

Возможны два случая. В первом из них $\xi_k(J^1) > 0$ и $\xi_k(J^2) > 0$. Тогда положим $\xi_{k+1}(\Delta) = \xi_k(\Delta)$ для любого двоичного интервала $\Delta \subset J$. Во втором случае одно из значений $\xi_k(J^1)$ или $\xi_k(J^2)$ неположительно. Без ограничения общности считаем

$$\xi_k(J^2) \leq 0. \quad (51)$$

Положим

$$\xi_{k+1}(\Delta) = \frac{\xi_k(J)}{\xi_k(J^1)} \xi_k(\Delta) \quad (52)$$

для любого двоичного интервала $\Delta \subset J^1$ и

$$\xi_{k+1}(\Delta) = 0 \quad (53)$$

для любого двоичного интервала $\Delta \subset J^2$. Тогда из (49)–(51) вытекают неравенства $\xi_k(J^1) > 0$ и $\xi_k(J^1) \geq \xi_k(J)$, поэтому правая часть формулы (52) имеет смысл и справедливы неравенства

$$0 < \frac{\xi_k(J)}{\xi_k(J^1)} \leq 1. \quad (54)$$

Рассмотрим функцию двоичного интервала ξ_{k+1} . Эта функция, с учетом построения, формул (48), (50), (52) и (53), а также предположения индукции, является квазимерой. Согласно индукционному предположению и построению эта квазимера удовлетворяет свойству (I). Проверим для нее свойство (II). Из (48) вытекает, что это нужно сделать лишь для двоичных интервалов ранга не меньше $k+1$. Зафиксируем такой интервал Δ и найдем единственный интервал J ранга k , содержащий Δ . Если $\xi_k(J) = 0$, то по построению $\xi_{k+1}(\Delta) = 0$ и для двоичного интервала Δ выполнено свойство (II). Если $\xi_k(J) > 0$, то свойство (II) выполнено в силу (53) и (54). Справедливость свойства (II) доказана. Выполнение свойств (III) и (IV) следует из построения квазимер ξ_k и из индукционного предположения. Лемма доказана.

ЛЕММА 8. Пусть $K \subset [0, 1]$ – двоичный интервал ранга k_0 , а τ – квазимера на $[0, 1]$. Предположим, что $\tau(K) > 0$ и $\tau(\Delta) = 0$ для всех двоичных интервалов Δ таких, что $\Delta^\circ \cap K^\circ = \emptyset$. Тогда существует квазимера $\xi \not\equiv 0$ такая, что $0 \leq \xi(\Delta) \leq |\tau(\Delta)|$ для любого двоичного интервала Δ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем лемму 7 и построим последовательность $\{\xi_k\}_{k=k_0}^\infty$ квазимер, для которых справедливы свойства (I)–(IV). Для всех двоичных интервалов Δ положим

$$\xi(\Delta) = \lim_{k \rightarrow \infty} \xi_k(\Delta). \quad (55)$$

В силу свойства (IV) предел в правой части формулы (55) существует и конечен. Поскольку $\tau(K) > 0$, то с учетом свойства (I) получаем неравенство $\xi(K) > 0$. Таким образом, $\xi \not\equiv 0$. В силу свойств (III) и (IV) квазимера ξ является неотрицательной. Используя свойство (II) и неотрицательность квазимеры ξ , получаем, что для любого двоичного куба Δ выполнено неравенство $\xi(\Delta) \leq |\tau(\Delta)|$. Лемма доказана.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Пусть задан двоичный интервал Δ_0 и неотрицательная квазимера τ . Тогда для любого набора Ω попарно неперекрывающихся двоичных кубов, лежащих в Δ_0 , выполнено неравенство

$$\sum_{\Delta \in \Omega} \tau(\Delta) \leq \tau(\Delta_0). \quad (56)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Omega_1 \subset \Omega$ – любой конечный поднабор. Тогда Ω_1 можно дополнить до конечного набора Ω_2 попарно неперекрывающихся двоичных интервалов, объединение которых есть Δ_0 . Используя аддитивность и положительность функции τ , получаем

$$\sum_{\Delta \in \Omega_1} \tau(\Delta) \leq \sum_{\Delta \in \Omega_2} \tau(\Delta) = \tau(\Delta_0). \quad (57)$$

В силу произвольности конечного поднабора $\Omega_1 \subset \Omega$ неравенство (56) следует из формулы (57).

ЛЕММА 9. Пусть $\xi \not\equiv 0$ – неотрицательная и непрерывная квазимера на отрезке $[0, 1]$. Для всех $x \in Q_d \setminus \{0, 1\}$ и $j = 1, 2$ рассмотрим j -ю x -последовательность $\{\Delta_k^j(x)\}$. Тогда найдется квазимера η такая, что:

1) $\eta \not\equiv 0$,

2) $0 \leq \eta(\Delta) \leq \xi(\Delta)$, Δ – произвольный двоичный интервал,

и для любой точки $x \in Q_d$ найдется натуральное $k(x)$ такое, что для всех $k \geq k(x)$ и $j = 1, 2$ выполнено равенство

$$\eta(\Delta_k^j(x)) = 0. \quad (58)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\xi(K) = M > 0$ для некоторого двоичного интервала K . Покроем каждую двоично-рациональную точку одним или двумя двоичными интервалами так, чтобы эти интервалы образовали (не более чем счетное) семейство $\hat{\Omega} = \{J\}$, обладающее следующими свойствами:

$$Q_d \subset \left(\bigcup_{J \in \hat{\Omega}} J \right)^\circ, \quad (59)$$

$$0 \leq \sum_{J \in \hat{\Omega}} \xi(J) < M. \quad (60)$$

Выполнения условия (60) можно добиться в силу неотрицательности и непрерывности квазимеры ξ . Удалим из набора $\hat{\Omega}$ все интервалы, лежащие в других интервалах из этого набора. Получится набор $I \subset \hat{\Omega}$, который состоит из попарно неперекрывающихся интервалов и для которого также выполнены условия (59) и (60).

Введем функцию двоичного интервала η , полагая

$$\eta(\Delta) = \xi(\Delta) - \sum_{J \in \Omega} \xi(\Delta \cap J). \quad (61)$$

При этом значение функции ξ на пустом или одноточечном множестве считаем равным нулю. При фиксированном J каждое слагаемое под знаком суммы в формуле (61) является квазимерой. Поэтому функция η также является квазимерой. Поскольку квазимера ξ является неотрицательной, то согласно утверждению 3 ряд в правой части формулы (61) сходится. Из утверждения 3 также вытекает неотрицательность квазимеры η . Из (56) и (60) вытекает, что $\eta(K) > 0$, т.е. справедливо условие 1). Из формул (56) и (61), а также из неотрицательности квазимеры η вытекает условие 2).

Рассмотрим произвольную точку $x \in Q_d$ и любую x -последовательность $\{\Delta_k\}$. Тогда существует двоичный интервал $J_0 \in \Omega$ такой, что $\Delta_k \subset J_0$ для всех достаточно больших k . Следовательно, для таких k согласно (61) верны следующие соотношения:

$$\eta(\Delta_k) = \xi(\Delta_k) - \xi(\Delta_k \cap J_0) = \xi(\Delta_k) - \xi(\Delta_k) = 0. \quad (62)$$

Из (62) вытекает справедливость формулы (58). Лемма доказана.

§ 7. Множества относительной единственности для одномерных рядов Хаара

Здесь мы будем рассматривать как двоичную группу G , так и отрезок $[0, 1]$. Чтобы отметить отличие от случая, когда рассматривается отрезок $[0, 1]$, в настоящем параграфе иногда будем использовать символ $*$ для обозначения объектов на группе G .

Используем стандартное определение одномерных *функций Хаара* $\chi_n(x)$ на отрезке $[0, 1]$. А именно, $\chi_0(x) \equiv 1$ на $[0, 1]$, а если $n = 2^k + i$, $k = 0, 1, \dots$, $i = 0, \dots, 2^k - 1$, то

$$\chi_n(x) = \begin{cases} 2^{k/2} & \text{при } x \in \left(\frac{2i}{2^{k+1}}, \frac{2i+1}{2^{k+1}} \right), \\ -2^{k/2} & \text{при } x \in \left(\frac{2i+1}{2^{k+1}}, \frac{2i+2}{2^{k+1}} \right), \\ 0 & \text{при } x \notin \left[\frac{2i}{2^{k+1}}, \frac{2i+2}{2^{k+1}} \right]. \end{cases}$$

В точке 0 (1) значение функции $\chi_n(x)$ равно ее пределу справа (слева), а в остальных точках отрезка $[0, 1]$ – среднему арифметическому правого и левого пределов. При таком определении ряд Фурье–Хаара любой непрерывной на отрезке $[0, 1]$ функции сходится к этой функции равномерно на $[0, 1]$ (см. [34, гл. 3], [35]).

Пусть $S_N(x) := \sum_{n=0}^{N-1} c_n \chi_n(x)$ – N -я *частичная сумма* ряда Хаара (2) в точке x . Аналогично (21), для рядов (2) можно определить функцию Ψ двоичного интервала следующим образом:

$$\Psi(\Delta) = S_{2^k}(x) |\Delta|. \quad (63)$$

Здесь Δ – двоичный интервал ранга k такой, что $x \in \Delta^\circ$. Функция Ψ является квазимерой, т. е. конечно-аддитивной функцией двоичного интервала (46). Формула (63), как и (21), определяет изоморфизм между множеством рядов вида (2) и множеством квазимер на отрезке $[0, 1]$.

УТВЕРЖДЕНИЕ A1 [36]. Пусть (S) – ряд вида (2), а Ψ – изоморфная ему квазимера. Если $x \in I_d$ или $x \in \{0, 1\}$, то ряд (S) сходится к значению B в точке x тогда и только тогда, когда $\Psi(\Delta_k)/|\Delta_k| \rightarrow B$, где $\{\Delta_k\}$ – x -последовательность.

Следующий результат вытекает из [13, утверждение 2].

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Пусть задан ряд вида (2), а Ψ – изоморфная ему квазимера. Если $x \in Q_d \setminus \{0, 1\}$, а для любой x -последовательности $\{\Delta_k\}$ и для некоторого $B \in \mathbb{R}$ выполнено условие

$$\Psi(\Delta_k) = B |\Delta_k| + o(|\Delta_k|),$$

то данный ряд сходится в точке x к значению B .

Рассмотрим также одномерные ряды Хаара на двоичной группе:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi_n(t). \quad (64)$$

Пусть заданы ряд (S) вида (2) и ряд (S^*) вида (64). Будем называть ряды (S) и (S^*) *изоморфными* (обозначение $(S) \sim (S^*)$), если их коэффициенты равны, т.е. $c_n = a_n$ для всех $n = 0, 1, \dots$. Пусть Θ – некоторый класс рядов (2), а Θ^* – некоторый класс рядов (64). Назовем классы Θ и Θ^* *изоморфными* (обозначение $\Theta \sim \Theta^*$), если для любого ряда, принадлежащего одному из этих классов, изоморфный ему ряд принадлежит другому из этих классов.

Каждому ряду вида (2) или (64) можно поставить в соответствие набор чисел $S^{i,k}$, $k = 0, 1, \dots$, $i = 0, \dots, 2^k - 1$, который назовем *определяющим набором*. А именно, если задан ряд (S) вида (2), то пусть выражение $S^{i,k}$ означает постоянное значение частичной суммы $S_{2^k}(x)$ ряда (S) внутри двоичного интервала Δ_k^i в форме (46). Если задан ряд (S^*) вида (64), то пусть выражение $S^{i,k}$ означает постоянное значение частичной суммы $S_{2^k}(t)$ ряда (S^*) в любой точке двоичного интервала

$$\Delta_k^i = \left[\frac{i}{2^k} + 0, \frac{i+1}{2^k} - 0 \right] \subset G.$$

Рассмотрим отображение $\phi: G \rightarrow [0, 1]$, задаваемое формулой (8). Следующий результат вытекает из построения определяющих наборов и из формул (21) и (63).

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. *Предположим, что ряд (S) вида (2) и ряд (S^*) вида (64) являются изоморфными. Пусть Ψ и ψ – квазимеры, изоморфные соответственно этим рядам. Тогда:*

- 1) *определяющие наборы рядов (S) и (S^*) совпадают;*
- 2) *если $\Delta^* \subset G$ – произвольный двоичный интервал и $\Delta = \phi(\Delta^*)$ – двоичный интервал на отрезке $[0, 1]$, то $\psi(\Delta^*) = \Psi(\Delta)$.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Скажем, что класс Θ рядов (2) *удовлетворяет условию Δ* , если выполнено следующее свойство. Пусть рядам (S) и (S_1) вида (2) поставлены в соответствие определяющие наборы $S^{i,k}$ и $S_1^{i,k}$. Предположим, что $|S_1^{i,k}| \leq |S^{i,k}|$ при всех возможных i и k . Тогда из принадлежности $(S) \in \Theta$ вытекает принадлежность $(S_1) \in \Theta$.

Найдем соотношения между множествами относительной единственности для рядов (2) и (64).

ЛЕММА 10. *Пусть Θ – произвольный класс рядов (2), а $\Theta^* \sim \Theta$ – класс рядов (64). Предположим, что множество $E \subset G$ является $M(\Theta^*)$ -множеством. Тогда множество $A = \phi(E) \subset [0, 1]$ является $M(\Theta)$ -множеством.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку множество $E \subset G$ является $M(\Theta^*)$ -множеством, существует ряд (S^*) вида (64) такой, что $(S^*) \not\equiv 0$, $(S^*) \in \Theta^*$ и $(S^*) \rightarrow 0$ на $G \setminus E$. Пусть (S) – ряд вида (2), изоморфный ряду (S^*) . Тогда $(S) \not\equiv 0$ и $(S) \in \Theta$. Остается показать, что $(S) \rightarrow 0$ на $[0, 1] \setminus A$.

Рассмотрим произвольную точку $x \in [0, 1] \setminus A$. Предположим, что для рядов (S^*) и (S) построены изоморфные им квазимеры ψ и Ψ соответственно. Пусть $x \in I_d$ или $x \in \{0, 1\}$. Тогда прообраз точки x при отображении ϕ состоит из одной точки $t \in G$, причем $t \in G \setminus E$. Поэтому ряд (S^*) сходится к нулю в точке t . Пусть $\{\Delta_k^*\}$ – t -последовательность, а $\{\Delta_k\}$ – x -последовательность. Из леммы 3 вытекает, что

$$\psi(\Delta_k^*) = o(|\Delta_k^*|), \quad k \rightarrow \infty,$$

поэтому согласно утверждению 5 имеем

$$\Psi(\Delta_k) = o(|\Delta_k|), \quad k \rightarrow \infty. \quad (65)$$

Из (65) и утверждения A1 следует, что (S) сходится к нулю в точке x .

Пусть $x \in Q_d \setminus \{0, 1\}$. Тогда прообраз точки x при отображении ϕ состоит из двух точек $t_1, t_2 \in G \setminus E$. Ряд (S^*) сходится к нулю в точках t_1 и t_2 . Пусть $\{\Delta_k^{j,*}\}$ – t_j -последовательность, $j = 1, 2$, а $\{\Delta_k\}$ – любая из x -последовательностей. Из леммы 3 вытекает, что при $j = 1, 2$

$$\psi(\Delta_k^{j,*}) = o(|\Delta_k^{j,*}|), \quad k \rightarrow \infty,$$

поэтому в силу утверждения 5 справедливо равенство (65). Отсюда следует согласно утверждению 4, что ряд (S) сходится к нулю в точке x . Лемма доказана.

Пусть, как и ранее, Θ_{AT} – класс рядов (2), всюду на $[0, 1]$ удовлетворяющих условию (3). Через Θ_{AT}^* обозначим класс рядов (64), всюду на G удовлетворяющих условию

$$a_n \chi_n(t) = o_t(n), \quad n \rightarrow \infty.$$

Очевидно, $\Theta_{\text{AT}} \sim \Theta_{\text{AT}}^*$.

УТВЕРЖДЕНИЕ A2 [33]. Включение $(S) \in \Theta_{\text{AT}}$ выполнено тогда и только тогда, когда изоморфная этому ряду квазимера Ψ является непрерывной.

Пусть μ – квазимера на отрезке $[0, 1]$, а $K \subset [0, 1]$ – двоичный интервал. Введем функцию множества μ_K , полагая $\mu_K(\Delta) = \mu(\Delta \cap K)$ и считая значение функции μ_K на пустом или одноточечном множестве равным нулю. Функцию двоичного интервала μ_K можно понимать как сужение квазимеры μ на двоичный интервал K . Имеем

$$\begin{aligned} \mu_K\left(\bigcup_{i=1}^p \Delta_i\right) &= \mu\left(\left(\bigcup_{i=1}^p \Delta_i\right) \cap K\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^p (\Delta_i \cap K)\right) \\ &= \sum_{i=1}^p \mu(\Delta_i \cap K) = \sum_{i=1}^p \mu_K(\Delta_i). \end{aligned} \quad (66)$$

Из (66) вытекает, что функция μ_K является квазимерой. При этом $\mu_K(\Delta) = \mu(\Delta)$, если $\Delta \subset K$, и $\mu_K(\Delta) = 0$, если $\Delta^\circ \cap K^\circ = \emptyset$.

ЛЕММА 11. Пусть $\Theta \subset \Theta_{\text{AT}}$ – произвольный класс рядов (2), удовлетворяющий условию Δ , а $\Theta^* \sim \Theta$ – класс рядов (64). Пусть $E \subset G$ и множество $A = \phi(E) \subset [0, 1]$ является $M(\Theta)$ -множеством. Тогда множество E является $M(\Theta^*)$ -множеством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку A является $M(\Theta)$ -множеством, то существует ряд $(S) \in \Theta$, $(S) \not\equiv 0$, который сходится к нулю на $[0, 1] \setminus A$. Пусть Ψ – квазимера, порожденная рядом (S) . Тогда $\Psi \not\equiv 0$. Заменяя, если нужно, ряд (S) на ряд с противоположными коэффициентами, найдем двоичный интервал K такой, что $\Psi(K) > 0$. Рассмотрим квазимеру $\tau := \Psi_K$, являющуюся сужением квазимеры Ψ на двоичный интервал K . Пусть Δ – двоичный интервал

такой, что $|\Delta| \leq |K|$. Тогда либо $\Delta \subset K$, в этом случае $\tau(\Delta) = \Psi(\Delta)$, либо $K^\circ \cap \Delta^\circ = \emptyset$, в этом случае $\tau(\Delta) = 0$. В любом случае выполнено неравенство

$$|\tau(\Delta)| \leq |\Psi(\Delta)|, \quad (67)$$

где Δ – двоичный интервал, $|\Delta| \leq |K|$.

Отметим, что $\tau(K) > 0$ и $\tau(\Delta) = 0$, если $K^\circ \cap \Delta^\circ = \emptyset$. Поэтому к квазимере τ и двоичному интервалу K применима лемма 8. Значит, найдется неотрицательная квазимера $\xi \not\equiv 0$ такая, что

$$0 \leq \xi(\Delta) \leq |\tau(\Delta)| \quad (68)$$

для любого двоичного интервала Δ .

По условию леммы ряд (S) удовлетворяет условию (3). Поэтому согласно утверждению A2 квазимера Ψ является непрерывной. Из (67) и (68) вытекает, что квазимера ξ также является непрерывной.

Применим к квазимере ξ лемму 9 и рассмотрим квазимеру η , для которой выполнены утверждения этой леммы. Рассмотрим ряд (S_1) вида (2), изоморфный квазимере η . Пусть $S_1^{i,k}$ и $S_1^{i,k}$ – определяющие наборы рядов (S) и (S_1) . Из (21), (63) и условия 2) леммы 9 следует, что

$$|S_1^{i,k}| \leq |S^{i,k}|, \quad k = 0, 1, \dots, \quad i = 1, \dots, 2^k - 1. \quad (69)$$

Поскольку класс Θ удовлетворяет условию Δ , а $(S) \in \Theta$, то из (69) вытекает, что $(S_1) \in \Theta$.

Пусть $(S_1^*) \sim (S_1)$ – ряд вида (64) и η^* – квазимера на G , порожденная рядом (S_1^*) . Согласно утверждению 5 набор $S_1^{i,k}$ является определяющим набором ряда (S_1^*) . Тогда имеют место следующие рассуждения.

1) Поскольку $(S_1) \in \Theta$, то $(S_1^*) \in \Theta^*$.

2) Поскольку согласно условию 1) леммы 9 имеем $\eta \not\equiv 0$, то с учетом утверждения 5 выполнено $\eta^* \not\equiv 0$, поэтому $(S_1^*) \not\equiv 0$.

3) Выберем произвольную точку $t \in G \setminus E$. Пусть $x = \phi(t)$. По условию леммы $x \in [0, 1] \setminus A$, поэтому ряд (S) сходится к нулю в точке x . Пусть $\{\Delta_k^*\}$ – t -последовательность, а $\{\Delta_k\}$ – соответствующая x -последовательность, где $\Delta_k = \phi(\Delta_k^*)$ для всех $k = 0, 1, \dots$. Рассмотрим два случая. В первом из них $x \in I_d \cup \{0, 1\}$. Поскольку ряд (S) сходится к нулю в точке x , то согласно формуле (69) ряд (S_1) сходится к нулю в точке x . Из утверждения A2 вытекает, что

$$\eta(\Delta_k) = o(|\Delta_k|), \quad k \rightarrow \infty,$$

поэтому согласно утверждению 5

$$\eta^*(\Delta_k^*) = o(|\Delta_k^*|), \quad k \rightarrow \infty. \quad (70)$$

Из (70) и леммы 3 вытекает сходимост к нулю ряда (S_1^*) в точке t . Если $x \in Q_d \setminus \{0, 1\}$, то из (58) и утверждения 5 следует, что при достаточно больших k справедливо равенство $\eta^*(\Delta_k^*) = 0$. Используя лемму 3, получаем, что ряд (S_1^*) сходится к нулю в точке t .

Из рассуждений 1)–3) вытекает, что множество E является $M(\Theta^*)$ -множеством. Лемма доказана.

Из лемм 10, 11 получаем следующее важное утверждение.

ТЕОРЕМА 16. Пусть $\Theta \subset \Theta_{\text{AT}}$ – произвольный класс рядов (2), удовлетворяющий условию Δ , а $\Theta^* \sim \Theta$ – класс рядов (64). Тогда множество $E \subset G$ является $M(\Theta^*)$ -множеством, если и только если множество $A = \phi(E) \subset [0, 1]$ является $M(\Theta)$ -множеством.

§ 8. U -множества Вэйда для рядов Хаара и Уолша

Пусть, как ранее, Θ_p и Θ^p – классы рядов (2), удовлетворяющие соответственно условию (4) и (5). Ясно, что для всех $p \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ выполнена следующая пара включений:

$$\Theta^{p-\varepsilon} \subset \Theta_p \subset \Theta^p. \quad (71)$$

Несложно показать, что при $p > 0$ условие (4) равносильно условию

$$S_N(x) = o(N^p) \quad \text{равномерно по } x \in [0, 1], \quad N \rightarrow \infty, \quad (72)$$

а (5) – условию

$$S_N(x) = O(N^p) \quad \text{равномерно по } x \in [0, 1], \quad N \rightarrow \infty. \quad (73)$$

Рассмотрим $U(\Theta_p)$ - и $U(\Theta^p)$ -множества. Из (71) и замечания 1 вытекают включения

$$U(\Theta^q) \subset U(\Theta_q) \subset U(\Theta^p), \quad M(\Theta^p) \subset M(\Theta_q) \subset M(\Theta^q), \quad p < q. \quad (74)$$

Результаты из предыдущих параграфов позволяют нам получить близкое к окончательному описание $U(\Theta_p)$ -множеств, а также точное описание $U(\Theta^p)$ -множеств.

Будем использовать результаты из § 5. В силу определений классов Θ_p и Θ^p получаем, что при любом p для этих классов справедливо условие Δ (см. определение 1). Из формул (3)–(5) видно, что при $p < 1$ любой ряд из класса Θ_p или Θ^p всюду на $[0, 1]$ удовлетворяет условию Арутюняна–Талаляна. Учтем также эквивалентность при $p > 0$ условий (4) и (72), а также (5) и (73). Далее, если множество $F_1 \subset [0, 1]$ является замкнутым (совершенным), а отображение ϕ задано формулой (8), то согласно утверждению 1 существует замкнутое (совершенное) множество $F_2 \subset G$ такое, что $\phi(F_2) = F_1$. Таким образом, можно использовать теорему 16 и перенести большинство результатов из § 5 на классы Θ_p и Θ^p . Из теоремы 9 вытекает

ТЕОРЕМА 17. Пусть заданы $p \in (0, 1)$ и множество $A \subset [0, 1]$. Множество A является $U(\Theta^p)$ -множеством тогда и только тогда, когда не существует совершенных множеств $F \subset A$, $\text{mes}'_{1-p} F > 0$.

Из (74) и теорем 9, 12 вытекает

ТЕОРЕМА 18. Пусть выбраны $p \in (0, 1)$ и множество $A \subset [0, 1]$, причем не существует совершенных множеств $F \subset A$, $\text{mes}'_{1-p} F > 0$. Тогда A является $U(\Theta_p)$ -множеством. Если A является $U(\Theta_p)$ -множеством, то не существует совершенных множеств $F \subset A$, $\text{mes}'_{1-p} F = \infty$.

Теорема 18 не является критерием принадлежности заданного множества классам $U(\Theta_p)$, хотя и близка к критерию. Но для некоторого семейства замкнутых множеств можно точно указать, каким из классов $U(\Theta_p)$ они принадлежат.

ТЕОРЕМА 19. Пусть выбрано замкнутое множество $X \subset [0, 1]$. Предположим, что $\text{mes}'_\alpha X = \infty$ при $\alpha < 1 - p$ и $\text{mes}'_\alpha X < \infty$ при $\alpha \geq 1 - p$ для некоторого $p \in (0, 1)$. Это означает, в частности, что $\dim'_H X = 1 - p$. Тогда множество X является:

- 1) $U(\Theta_q)$ -множеством при всех $q \leq p$;
- 2) $M(\Theta_q)$ -множеством при всех $q > p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию теоремы $\text{mes}'_\alpha X < \infty$ для всех $\alpha \leq 1 - p$. Согласно теореме 12 для таких α множество X является $U(\Theta_q)$ -множеством при $q = 1 - \alpha$, т. е. при $q \leq p$, что доказывает утверждение 1) теоремы.

По условию теоремы $\text{mes}'_\alpha X = \infty$ для всех $\alpha < 1 - p$. Согласно теореме 11 для таких α множество X является $M(\Theta^q)$ -множеством при $q = 1 - \alpha$, т. е. при $q > p$. Отсюда получаем с учетом формулы (74), что множество X является $M(\Theta_q)$ -множеством при всех $q > p$, это доказывает утверждение 2) теоремы.

Множествами, удовлетворяющими условиям теоремы 19, являются, в частности, симметрические совершенные множества F_ζ с постоянным отношением ζ , $0 < \zeta < 1/2$ [2, гл. 12]. Множество $F_{1/3}$ называется канторовским множеством. Известно [2, гл. 12], что

$$\dim'_H F_\zeta = -\frac{\ln 2}{\ln \zeta}, \quad \text{mes}'_{-\ln 2 / \ln \zeta} F_\zeta < \infty. \quad (75)$$

Из (75) и теоремы 19 вытекает

ТЕОРЕМА 20. Множество F_ζ является $U(\Theta_q)$ -множеством тогда и только тогда, когда

$$q \leq 1 + \frac{\ln 2}{\ln \zeta}.$$

В частности, канторовское множество является $U(\Theta_q)$ -множеством тогда и только тогда, когда

$$q \leq 1 - \frac{\ln 2}{\ln 3}.$$

Теорема 20 дает ответ на вопрос, заданный автору П. Л. Ульяновым в 2001 г.

Далее изучим $U(\Theta)$ -множества для рядов (6). Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$. Напомним, что Λ_α означает класс рядов (6), коэффициенты которых удовлетворяют условию (7). Рассмотрим также следующие условия, налагаемые на поведение коэффициентов и частичных сумм $S_N(t)$ рядов (6):

$$b_n = O(n^{-\alpha}), \quad n \rightarrow \infty, \quad (76)$$

$$S_N(t) = o(N^{1-\alpha}) \quad \text{равномерно по } t \in G, \quad N \rightarrow \infty, \quad (77)$$

$$S_N(t) = O(N^{1-\alpha}) \quad \text{равномерно по } t \in G, \quad N \rightarrow \infty. \quad (78)$$

Поскольку $|\omega_n(t)| \equiv 1$, при $\alpha > 0$ верны следующие соотношения:

$$(7) \Rightarrow (76) \Rightarrow (78), \quad (7) \Rightarrow (77) \Rightarrow (78). \quad (79)$$

Приведенные далее теоремы являются следствием формулы (79) и теорем 5, 12.

ТЕОРЕМА 21. Пусть $\alpha \in (0, 1)$, а множество $E \subset G$ не содержит совершенных подмножеств F , $\text{mes}_\alpha F > 0$. Рассмотрим класс Θ рядов (6), удовлетворяющих одному из условий (7), (76), (77) или (78). Тогда множество E является $U(\Theta)$ -множеством. В частности, утверждение теоремы является верным, если $\dim_H E < \alpha$.

ТЕОРЕМА 22. Пусть выбраны $\alpha \in (0, 1)$ и замкнутое множество $X \subset G$, $\text{mes}_\alpha X < \infty$. Рассмотрим класс Θ рядов (6), удовлетворяющих одному из условий (7) или (77). Тогда множество X является $U(\Theta)$ -множеством. В частности, утверждение теоремы является верным, если $\dim_H X < \alpha$.

Утверждение теоремы 21, касающееся условий (7) и (76), не является обратимым, так как из результатов работы [14] вытекает, что при $\alpha > 0$ существуют $U(\Lambda_\alpha)$ -множества, мера которых сколь угодно близка к единице. Утверждение теоремы 21, касающееся условий (77) и (78), также не является обратимым в силу результатов работы [24]. В этом смысле результаты о множествах относительной единственности для рядов Уолша похожи на результаты для тригонометрических рядов [2, гл. 14].

Для рядов Уолша остается открытым в общем случае вопрос о принадлежности множеств канторовского типа F_ζ классу множеств единственности и относительной единственности. Для множеств единственности известно лишь [37], что при $\zeta = 2^{-n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, множество F_ζ является U -множеством для рядов Уолша. Из теоремы 22 вытекает, что при $\alpha \geq -\ln 2 / \ln \zeta$ множество F_ζ , точнее его полный прообраз при отображении ϕ , задаваемом формулой (8), является $U(\Lambda_\alpha)$ -множеством. Что происходит при других α , неизвестно.

§ 9. Многомерные обобщенные интегралы и восстановление коэффициентов кратных рядов Уолша и Хаара

В § 5 мы использовали теорему 2 для решения задачи о множествах единственности для рядов (14) и (15). Однако указанная теорема позволяет получить результаты более сильные, чем некоторые теоремы из § 5. С ее помощью мы решим задачу восстановления коэффициентов рядов (14) и (15). Построим семейство многомерных обобщенных интегралов двоичного перроновского типа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $\alpha \in (0, 1)$ и для всех $\mathbf{t} \in G^m$, кроме, быть может, некоторого множества $E \subset G^m$, $\text{mes}_{\alpha m} E = 0$, выбрана возрастающая последовательность натуральных чисел $\{k_j(\mathbf{t})\}$. Пусть

$$\mathbf{a} = \{ \{k_j(\mathbf{t})\} : \mathbf{t} \in G^m \setminus E \}. \quad (80)$$

Назовем конечную функцию $f(\mathbf{t})$, определенную на $G^m \setminus E$, $(\text{PHW}^\alpha(\mathbf{a}))$ -интегрируемой, если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $\mathcal{B}$ -функции $F_1 \in \bar{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}$ (мажоранта) и $F_2 \in \underline{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}$ (миноранта) такие, что:

(А) если $\mathbf{t} \in G^m \setminus E$, то для $\mathbf{t}$ -последовательности $\{\Delta_k\}$ выполнено условие

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{F_1(\Delta_{k_j})}{|\Delta_{k_j}|} \geq f(\mathbf{t}) \geq \overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \frac{F_2(\Delta_{k_j})}{|\Delta_{k_j}|};$$

(В) если $\mathbf{t} \in E$, то для $\mathbf{t}$ -последовательности $\{\Delta_{\mathbf{k}}\}$ и для функций F_1 и F_2 выполнено условие (19);

(С) $F_1(G^m) - F_2(G^m) < \varepsilon$.

(PHW $^\alpha(\mathbf{a})$)-интеграл (интеграл Перрона–Хаара–Уолша) от функции $f(\mathbf{t})$ по любому двоичному интервалу Δ определяется следующим образом:

$$(\text{PHW}^\alpha(\mathbf{a})) \int_{\Delta} f(\mathbf{t}) d\mathbf{t} = \inf_{F_1} F_1(\Delta) = \sup_{F_2} F_2(\Delta).$$

Пусть функции F_1 и F_2 удовлетворяют условиям (А) и (В) из определения 2. Тогда для всех $\mathbf{t} \in G^m \setminus E$ имеем

$$\begin{aligned} \underline{D}_d^1(F_2 - F_1)(\mathbf{t}) &\leq \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{F_2(\Delta_{k_j}) - F_1(\Delta_{k_j})}{|\Delta_{k_j}|} \leq \overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \frac{F_2(\Delta_{k_j}) - F_1(\Delta_{k_j})}{|\Delta_{k_j}|} \\ &\leq \overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \frac{F_2(\Delta_{k_j})}{|\Delta_{k_j}|} - \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{F_1(\Delta_{k_j})}{|\Delta_{k_j}|} \leq f(\mathbf{t}) - f(\mathbf{t}) = 0. \end{aligned} \quad (81)$$

Из (81) и теоремы 2 вытекает корректность определения (PHW $^\alpha(\mathbf{a})$)-интеграла, понимаемая в том смысле, что невозможна ситуация, когда $\inf_{F_1} F_1(\Delta) < \sup_{F_2} F_2(\Delta)$.

Далее рассмотрим определение 2 при фиксированных множествах $E = E_j$, $j = 1, 2$, $\text{mes}_{\alpha m} E_j = 0$, а также при множестве $E_1 \cup E_2$. Из (25) вытекает равенство $\text{mes}_{\alpha m}(E_1 \cup E_2) = 0$. Тогда

$$(\text{PHW}^{E_1}(\mathbf{a})) \int_{\Delta} \star = (\text{PHW}^{E_1 \cup E_2}(\mathbf{a})) \int_{\Delta} \star = (\text{PHW}^{E_2}(\mathbf{a})) \int_{\Delta} \star, \quad (82)$$

где $(\text{PHW}^E(\mathbf{a})) \int_{\Delta} \star$ есть значение (PHW $^\alpha(\mathbf{a})$)-интеграла с фиксированным исключительным множеством E ($\text{mes}_{\alpha m} E = 0$) в определении 2. Из (82) вытекает инвариантность определения (PHW $^\alpha(\mathbf{a})$)-интеграла по отношению к таким множествам E .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если в определении (PHW $^\alpha(\mathbf{a})$)-интеграла рассматривать, как в теореме 3, все множества E , не содержащие совершенных множеств F , $\text{mes}_{\alpha m} F > 0$, то получим некорректное определение. Действительно, уже в одномерном случае существуют (неизмеримые) непересекающиеся множества E_1 и E_2 , не содержащие совершенных подмножеств, при этом $E_1 \sqcup E_2 = G$. Пусть $f(t)$ – характеристическая функция множества E_1 . Можно показать, что в приведенных выше обозначениях для всех допустимых наборов последовательностей $\mathbf{a}$ имеют место равенства

$$(\text{PHW}^{E_1}(\mathbf{a})) \int_G f(t) dt = 0, \quad (\text{PHW}^{E_2}(\mathbf{a})) \int_G f(t) dt = 1.$$

Это означает, что при таком подходе значение (PHW $^\alpha(\mathbf{a})$)-интеграла зависит от множества E в определении 2, т. е. определение (PHW $^\alpha(\mathbf{a})$)-интеграла не является в некотором смысле корректным. Автор благодарит Н. Н. Холщевникову, сообщившую ему это наблюдение.

Несложно показать, что (PHW $^\alpha(\mathbf{a})$)-интеграл обладает рядом стандартных свойств. В частности, $\mathcal{B}$ -функция

$$F(\Delta) := (\text{PHW}^\alpha(\mathbf{a})) \int_{\Delta} f(\mathbf{t}) d\mathbf{t}$$

является квазимерой. Далее под рядом Фурье будем понимать ряд Фурье–Волппа или Фурье–Хаара, в зависимости от того, рассматриваем мы ряд (14) или (15). Нам понадобится следующее наблюдение [38].

УТВЕРЖДЕНИЕ А3. Рассмотрим некоторый процесс интегрирования $\mathcal{I}$, причем $\mathcal{B}$ -функция $F(\Delta) = (\mathcal{I}) \int_{\Delta} f dt$ является квазимерой для всех $\mathcal{I}$ -интегрируемых функций f . Пусть задан ряд (S) вида (14) или (15), а ψ – изоморфная этому ряду квазимера. Тогда ряд (S) является $\mathcal{I}$ -рядом Фурье $\mathcal{I}$ -интегрируемой функции g , если и только если $\psi(\Delta) \equiv (\mathcal{I}) \int_{\Delta} g dt$.

ТЕОРЕМА 23. Пусть выбраны $\alpha \in (0, 1)$, $\rho \in (0, 1]$ и ряд (S) вида (14) или (15), а для всех $\mathbf{t} \in G^m$, кроме, быть может, некоторого множества E , $\text{mes}_{\alpha m} E = 0$, задана возрастающая последовательность натуральных чисел $\{k_j(\mathbf{t})\}$. Предположим, что выполнены следующие условия:

- (i) при всех $\mathbf{t} \in G^m \setminus E$ подпоследовательность $S_{2^{k_j}(\mathbf{t})}$ кубических частичных сумм ряда (S) стремится при $j \rightarrow \infty$ к конечному значению $f(\mathbf{t})$;
- (ii) при всех $\mathbf{t} \in E$ частичные суммы $S_{\mathbf{N}}(\mathbf{t})$ ряда (S) в точке $\mathbf{t}$ удовлетворяют условию 3°).

Пусть набор $\mathbf{a}$ определяется формулой (80). Тогда функция $f(\mathbf{t})$ является $(\text{PHW}^{\alpha}(\mathbf{a}))$ -интегрируемой и ряд (S) является $(\text{PHW}^{\alpha}(\mathbf{a}))$ -рядом Фурье этой функции.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ψ – квазимера, изоморфная ряду (S) . Положим $F_1(\Delta) = F_2(\Delta) \equiv \psi(\Delta)$. Поскольку $\psi \in \mathcal{A}$, то $F_1, F_2 \in \mathcal{A}$. Объединяя условие (i) и утверждение леммы 3, получим выполнение для функций F_1 и F_2 условия (A) из определения 2. Из условия (ii) и утверждения леммы 3 вытекает, что для функций F_1 и F_2 выполнено условие (B) из определения 2. Условие (C) из данного определения, очевидно, выполнено. Таким образом, функция $f(\mathbf{t})$ является $(\text{PHW}^{\alpha}(\mathbf{a}))$ -интегрируемой. Пусть Δ – произвольный двоичный интервал; тогда

$$\psi(\Delta) \geq \inf_{F_1} F_1(\Delta) = (\text{PHW}^{\alpha}(\mathbf{a})) \int_{\Delta} f dt = \sup_{F_2} F_2(\Delta) \geq \psi(\Delta).$$

Таким образом, $\psi(\Delta) = (\text{PHW}^{\alpha}(\mathbf{a})) \int_{\Delta} f(\mathbf{t}) dt$. Объединяя последнюю формулу и утверждение А3, получим, что ряд (S) является $(\text{PHW}^{\alpha}(\mathbf{a}))$ -рядом Фурье. Теорема доказана.

Пусть $\rho \in (0, 1]$. Тогда из ρ -сходимости ряда (14) или (15) в некоторой точке $\mathbf{t} \in G^m$ следует выполнение условия (i) теоремы 23 в этой точке. Поэтому из теоремы 23 сразу вытекает

ТЕОРЕМА 24. Пусть выбраны $\alpha \in (0, 1)$, $\rho \in (0, 1]$ и ряд (S) вида (14) или (15). Предположим, что выполнены следующие условия:

- 1) во всех точках $\mathbf{t} \in G^m$, кроме, быть может, некоторого множества E , $\text{mes}_{\alpha m} E = 0$, ряд (S) ρ -сходится к конечной сумме $f(\mathbf{t})$;
- 2) при всех $\mathbf{t} \in E$ частичные суммы $S_{\mathbf{N}}(\mathbf{t})$ данного ряда в точке $\mathbf{t}$ удовлетворяют условию 3°).

Тогда при любом выборе набора последовательностей $\mathbf{a}$ согласно (80) функция $f(\mathbf{t})$ является $(\text{PHW}^{\alpha}(\mathbf{a}))$ -интегрируемой и ряд (S) является $(\text{PHW}^{\alpha}(\mathbf{a}))$ -рядом Фурье функции $f(\mathbf{t})$.

Список литературы

1. G. Cantor, "Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen", *Math. Ann.*, **5**:1 (1872), 123–132.
2. Н. К. Бари, *Тригонометрические ряды*, Физматгиз, М., 1961; англ. пер.: N. K. Bary, *A treatise on trigonometric series*, vols. I, II, Pergamon Press, Oxford, 1964.
3. А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, т. 1, 2, Мир, М., 1965; пер. с англ.: A. Zygmund, *Trigonometric series*, v. I, II, Cambridge Univ. Press, New York, 1959.
4. Ф. Г. Арутюнян, А. А. Талалян, "О единственности рядов по системам Хаара и Уолша", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **28**:6 (1964), 1391–1408.
5. М. Б. Петровская, "Некоторые теоремы единственности для рядов по системе Хаара", *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1964, № 5, 15–28.
6. В. А. Скворцов, "Теорема типа Кантора для системы Хаара", *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1964, № 5, 3–6.
7. G. Faber, "Über die Orthogonalfunktionen des Herrn Haar", *Jahresber. Deutsch. Math.-Ver.*, **19** (1910), 104–112.
8. Г. М. Мушегян, "О множествах единственности для системы Хаара", *Изв. АН АрмССР. Сер. математика*, **2**:6 (1967), 350–361.
9. В. А. Скворцов, "О множествах единственности для многомерных рядов Хаара", *Матем. заметки*, **14**:6 (1973), 789–798; англ. пер.: V. A. Skvortsov, "Uniqueness sets for multiple Haar series", *Math. Notes*, **14**:6 (1973), 1011–1016.
10. М. Г. Плотников, "Вопросы единственности для кратных рядов Хаара", *Матем. сб.*, **196**:2 (2005), 97–116; англ. пер.: M. G. Plotnikov, "Uniqueness for multiple Haar series", *Sb. Math.*, **196**:2 (2005), 243–261.
11. W. R. Wade, "Sets of uniqueness for Haar series", *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **30**:3–4 (1977), 265–281.
12. J. R. McLaughlin, J. J. Price, "Comparison of Haar series with gaps with trigonometric series", *Pacific J. Math.*, **28**:3 (1969), 623–627.
13. М. Г. Плотников, "Вопросы единственности для некоторых классов рядов Хаара", *Матем. заметки*, **75**:3 (2004), 392–404; англ. пер.: M. G. Plotnikov, "Uniqueness questions for some classes of Haar series", *Math. Notes*, **75**:3–4 (2004), 360–371.
14. V. L. Shapiro, " $U(\varepsilon)$ -sets for Walsh series", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **16** (1965), 867–870.
15. Б. И. Голубов, А. В. Ефимов, В. А. Скворцов, *Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения*, Наука, М., 1987; англ. пер.: B. Golubov, A. Efimov, V. Skvortsov, *Walsh series and transforms. Theory and applications*, Math. Appl. (Soviet Ser.), **64**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1991.
16. Г. Н. Агаев, Н. Я. Виленкин, Г. М. Джафарли, А. И. Рубинштейн, *Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нульмерных группах*, ЭЛМ, Баку, 1981.
17. F. Schipp, W. R. Wade, P. Simon, *Walsh series. An introduction to dyadic harmonic analysis*, Adam Hilger Publ., Bristol–New York, 1990.
18. K. M. Ostaszewski, "Henstock integration in the plane", *Mem. Amer. Math. Soc.*, **63**, no. 353, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986, 1–106.
19. W. R. Wade, K. Yoneda, "Uniqueness and quasi-measure on the group of integers of p -series field", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **84**:2 (1982), 202–206.
20. В. А. Скворцов, А. А. Талалян, "Некоторые вопросы единственности кратных рядов по системе Хаара и тригонометрической системе", *Матем. заметки*, **46**:2 (1989), 104–113; англ. пер.: V. A. Skvortsov, A. A. Talalyan, "Some uniqueness questions of multiple Haar and trigonometric series", *Math. Notes*, **46**:2 (1989), 646–653.

21. Я. Б. Песин, *Теория размерности и динамические системы: современный взгляд и приложения*, Институт компьютерных исследований, М.–Ижевск, 2002.
22. K. Falconer, *Fractal geometry: mathematical foundations and applications*, Wiley, Chichester, 1990.
23. А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, 7-е изд., Физматлит, М., 2004; англ. пер. 2-го изд.: A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, *Introductory real analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1970.
24. М. Г. Плотников, “О кратных рядах Уолша, сходящихся по кубам”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **71**:1 (2007), 61–78; англ. пер.: M. G. Plotnikov, “On multiple Walsh series convergent over cubes”, *Izv. Math.*, **71**:1 (2007), 57–73.
25. М. Г. Плотников, “О множествах единственности для кратных рядов Уолша”, *Матем. заметки*, **81**:2 (2007), 265–279; англ. пер.: M. G. Plotnikov, “On uniqueness sets for multiple Walsh series”, *Math. Notes*, **81**:1–2 (2007), 234–246.
26. Ф. Хаусдорф, *Теория множеств*, ОНТИ, М., 1937; пер. с нем.: F. Hausdorff, *Mengenlehre*, de Gruyter, Berlin–Leipzig, 1927.
27. N. K. Bari, “Sur l’unicité du développement trigonometrique”, *Fundamenta Mathematicae (Warszawa)*, **9** (1927), 62–118.
28. Н. К. Бари, “Проблема единственности разложения функции в тригонометрический ряд”, *УМН*, **4**:3 (1949), 3–68.
29. W. R. Wade, “Summing closed U -set for Walsh series”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **29**:1 (1971), 123–125.
30. Н. Н. Холщевникова, “Объединение множеств единственности кратных рядов – Уолша и тригонометрических”, *Матем. сб.*, **193**:4 (2002), 135–160; англ. пер.: N. N. Kholshchevnikova, “Union of sets of uniqueness for multiple Walsh and multiple trigonometric series”, *Sb. Math.*, **193**:4 (2002), 609–633.
31. S. F. Lukomskii, “On a U -set for multiple Walsh series”, *Anal. Math.*, **18**:2 (1992), 127–138.
32. М. Г. Плотников, “О нарушении единственности для двумерных рядов Хаара”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2003, №4, 20–24; англ. пер.: M. G. Plotnikov, “Violation of the uniqueness for two-dimensional Haar series”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **58**:4 (2003), 16–19.
33. В. А. Скворцов, “Вычисление коэффициентов всюду сходящегося ряда Хаара”, *Матем. сб.*, **75(117)**:3 (1968), 349–360; англ. пер.: V. A. Skvorcov, “Calculation of the coefficients of an everywhere convergent Haar series”, *Math. USSR-Sb.*, **4**:3 (1968), 317–327.
34. Б. С. Кашин, А. А. Саакян, *Ортогональные ряды*, 2-е изд., Изд-во АФП, М., 1999; англ. пер. 1-го изд.: B. S. Kashin, A. A. Saakyan, *Orthogonal series*, Transl. Math. Monogr., **75**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989.
35. П. Л. Ульянов, “О рядах по системе Хаара”, *Матем. сб.*, **63(105)**:3 (1964), 356–391.
36. В. А. Скворцов, “Дифференцирование относительно сетей и ряды Хаара”, *Матем. заметки*, **4**:1 (1968), 33–40; англ. пер.: V. A. Skvorcov, “Differentiation with respect to nets and the Haar series”, *Math. Notes*, **4**:1 (1968), 509–513.
37. А. А. Шнейдер, “О единственности разложений по системе функций Уолша”, *Матем. сб.*, **24(66)**:2 (1949), 279–300.
38. V. Skvortsov, “Henstock–Kurzweil type integrals in P -adic harmonic analysis”, *Acta Math. Acad. Paedagog. Nyházi. (N.S.)*, **20**:2 (2004), 207–224.

М. Г. Плотников (M. G. Plotnikov)

Вологодская государственная молочнохозяйственная
академия им. Н. В. Верещагина
E-mail: mgplotnikov@mail.ru

Поступило в редакцию

21.10.2008