Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Смирнов, A_∞ -структуры и дифференциалы спектральной последовательности Адамса, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2002, том 66, выпуск 5, 193–224

DOI: <https://doi.org/10.4213/im406>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 10:41:07

УДК 513.83

В. А. Смирнов

A_∞ -структуры и дифференциалы спектральной последовательности Адамса

Используя операдные методы и функциональные гомологические операции, получены индуктивные формулы для дифференциалов спектральной последовательности Адамса стабильных гомотопических групп сфер.

Библиография: 16 наименований.

Спектральная последовательность Адамса была придумана Адамсом [1] почти пятьдесят лет назад для вычисления стабильных гомотопических групп топологических пространств и, в частности, сфер. Вычисление дифференциалов спектральной последовательности Адамса гомотопических групп сфер является одной из наиболее трудных проблем современной алгебраической топологии. Здесь мы рассмотрим подход к решению этой проблемы, основанный на использовании A_∞ -структур, введенных Сташеффом [2], операдных методов [3]–[6] и функциональных гомологических операций [7]–[9]. В качестве приложения будет рассмотрена проблема Арф инварианта [10], [11].

§ 1. Спектральные последовательности Адамса и Боусфилда–Кана

Напомним, что член E^1 спектральной последовательности Адамса стабильных гомотопических групп топологического пространства Y с коэффициентами в $\mathbb{Z}/2$ представляет собой комплекс

$$F(\mathcal{K}, Y_*): Y_* \rightarrow \mathcal{K} \otimes Y_* \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{K}^{\otimes n} \otimes Y_* \rightarrow \dots,$$

где Y_* – гомологии пространства Y , $\mathcal{K}$ – коалгебра Милнора (двойственная алгебре Стинрода), являющаяся алгеброй многочленов от образующих ξ_i размерности $2^i - 1$. Коумножение

$$\nabla: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K} \otimes \mathcal{K}$$

на образующих ξ_i задается формулой

$$\nabla(\xi_i) = \sum_k \xi_{i-k}^{2^k} \otimes \xi_k.$$

На остальных элементах коумножение задается с помощью соотношений Хопфа.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 01-01-00482).

В случае стабильных гомотопических групп сфер, т.е. $Z = S^0$, член E^1 спектральной последовательности Адамса можно переписать в виде

$$F(\mathcal{K}): \mathbb{Z}/2 \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{K}^{\otimes n} \rightarrow \dots$$

Рассмотрим наиболее общий случай спектральной последовательности гомотопических групп топологического пространства – спектральную последовательность Боусфилда–Кана [12].

Пусть R – поле. Для симплициального множества Z обозначим через RZ свободный симплициальный R -модуль, порожденный Z . Имеет место косимплициальная резольвента

$$R^*Z: RZ \xrightarrow{\delta^0, \delta^1} R^2Z \rightarrow \dots \rightarrow R^nZ \xrightarrow{\delta^0, \dots, \delta^n} R^{n+1}Z \rightarrow \dots,$$

использованная Боусфилдом и Каном для построения спектральной последовательности гомотопических групп симплициального множества Z с коэффициентами в R .

Член E^1 этой спектральной последовательности представляет собой комплекс

$$H_*(Z; R) \rightarrow H_*(RZ; R) \rightarrow \dots \rightarrow H_*(R^{n-1}Z; R) \rightarrow H_*(R^nZ; R) \rightarrow \dots$$

Высшие дифференциалы представляют собой гомологические операции

$$d_m: H_*(R^{n-1}Z; R) \rightarrow H_*(R^{n+m-1}Z; R).$$

В работах [7], [8] гомологические операции определялись как частичные и многозначные отображения. Однако существует общий метод, позволяющий выбрать их всюду определенными и однозначными. Соответствующая теория была развита в работе [9]. Напомним основные определения.

Для цепного комплекса X обозначим через X_* его гомологии, $X_* = H_*(X)$. Зафиксируем цепные отображения $\xi: X_* \rightarrow X$, $\eta: X \rightarrow X_*$ и цепную гомотопию $h: X \rightarrow X$, удовлетворяющие соотношениям

$$\eta \circ \xi = \text{Id}, \quad d(h) = \xi \circ \eta - \text{Id}, \quad h \circ \xi = 0, \quad \eta \circ h = 0, \quad h \circ h = 0.$$

Для последовательности $f^1: X^1 \rightarrow X^2, \dots, f^n: X^n \rightarrow X^{n+1}$ отображений цепных комплексов определим функциональные гомологические операции

$$H_*(f^n, \dots, f^1): X_*^1 \rightarrow X_*^{n+1},$$

положив

$$H_*(f^n, \dots, f^1) = \eta \circ f^n \circ h \circ \dots \circ f^1 \circ \xi.$$

Непосредственные вычисления показывают, что выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{n-i+1} H_*(f^n, \dots, f^{i+1} \circ f^i, \dots, f^1) = \\ = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{n-i} H_*(f^n, \dots, f^{i+1}) \circ H_*(f^i, \dots, f^1). \end{aligned}$$

Функциональные гомологические операции можно определить не только для категории цепных комплексов, но, например, и для категории симплициальных модулей.

Непосредственно из определения высших дифференциалов спектральной последовательности Боусфилда–Кана следует, что они выражаются через функциональные гомологические операции

$$H_*(\delta, \dots, \delta): H_*(R^{n-1}Z; R) \rightarrow H_*(R^{n+m-1}Z; R),$$

т.е. имеет место

ТЕОРЕМА 1. *Дифференциалы спектральной последовательности Боусфилда–Кана задаются функциональными гомологическими операциями*

$$H_*(\delta, \dots, \delta): H_*(R^{n-1}Z, R) \rightarrow H_*(R^{n+m-1}Z, R).$$

Эти операции определяют на члене E^1 новый дифференциал, превращающий E^1 в комплекс, гомологии которого изоморфны члену E^∞ спектральной последовательности.

Как показано в работе [5], вместо косимплициальной резольвенты Боусфилда–Кана можно взять косимплициальный объект

$$F^*(C, RZ): RZ \xrightarrow{\delta^0, \delta^1} CRZ \rightarrow \dots \rightarrow C^{n-1}RZ \xrightarrow{\delta^0, \dots, \delta^n} C^n RZ \rightarrow \dots,$$

где CRZ – свободная коммутативная симплициальная коалгебра, порожденная симплициальным модулем RZ .

Член E^1 соответствующей спектральной последовательности представляет собой комплекс

$$H_*(Z; R) = \pi_*(RZ) \rightarrow \pi_*(CRZ) \rightarrow \dots \rightarrow \pi_*(C^{n-1}RZ) \rightarrow \pi_*(C^n RZ) \rightarrow \dots.$$

Непосредственно из определения высших дифференциалов этой спектральной последовательности следует, что они выражаются через функциональные гомологические операции

$$H_*[\delta, \dots, \delta]: \pi_*(C^n RZ) \rightarrow \pi_*(C^{n+m} RZ).$$

При этом имеет место отображение косимплициальных объектов

$$\begin{array}{ccccccc} RZ & \longrightarrow & R^2Z & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & R^{n+1}Z & \longrightarrow & \dots \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\ RZ & \longrightarrow & CRZ & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & C^n RZ & \longrightarrow & \dots, \end{array}$$

индуцирующее изоморфизм соответствующих спектральных последовательностей. Следовательно, имеет место

ТЕОРЕМА 2. Дифференциалы спектральной последовательности Боусфилда–Кана косимплициального объекта

$$F^*(C, RZ): RZ \xrightarrow{\delta^0, \delta^1} CRZ \rightarrow \dots \rightarrow C^{n-1}RZ \xrightarrow{\delta^0, \dots, \delta^n} C^n RZ \rightarrow \dots$$

задаются функциональными гомологическими операциями

$$H_*(\delta, \dots, \delta): \pi_*(C^n RZ) \rightarrow \pi_*(C^{n+m} RZ).$$

Эти операции определяют на члене E^1 новый дифференциал, превращающий E^1 в комплекс, гомологии которого изоморфны члену E^∞ спектральной последовательности.

§ 2. E_∞ -алгебры и E_∞ -коалгебры

Напомним, что *операдой* в категории цепных комплексов называется семейство $E = \{E(j)\}_{j \geq 1}$ цепных комплексов $E(j)$, на которых действуют симметрические группы Σ_j и заданы отображения

$$\gamma: E(k) \otimes E(j_1) \otimes \dots \otimes E(j_k) \rightarrow E(j_1 + \dots + j_k),$$

удовлетворяющие некоторым условиям ассоциативности и согласованности с действием симметрических групп [3], [4].

Операда $E = \{E(j)\}$, для которой комплексы $E(j)$ ациклически и симметрические группы действуют на них свободно, называется E_∞ -операдой.

Цепной комплекс X называется *алгеброй* (*коалгеброй*) *над операдой* E , если заданы отображения

$$\mu: E(k) \otimes_{\Sigma_k} X^{\otimes k} \rightarrow X \quad (\tau: X \rightarrow \text{Hom}_{\Sigma_k}(E(k); X^{\otimes k})),$$

удовлетворяющие некоторым соотношениям ассоциативности.

Алгебры (коалгебры) над E_∞ -операдой называются E_∞ -алгебрами (E_∞ -коалгебрами).

Каждая операда в категории цепных комплексов определяет монаду $\underline{E}$ и комонаду $\overline{E}$ по формулам

$$\begin{aligned} \underline{E}(X) &= \sum_j \underline{E}(j, X), & \underline{E}(j, X) &= E(j) \otimes_{\Sigma_j} X^{\otimes j}, \\ \overline{E}(X) &= \prod_j \overline{E}(j, X), & \overline{E}(j, X) &= \text{Hom}_{\Sigma_j}(E(j), X^{\otimes j}). \end{aligned}$$

Структура операд γ индуцирует преобразования

$$\underline{\gamma}: \underline{E} \circ \underline{E} \rightarrow \underline{E}, \quad \overline{\gamma}: \overline{E} \rightarrow \overline{E} \circ \overline{E}.$$

Структура алгебры (коалгебры) над операдой E на комплексе X индуцирует отображение

$$\mu: \underline{E}(X) \rightarrow X \quad (\tau: X \rightarrow \overline{E}(X)).$$

Поэтому задание на цепном комплексе X структуры алгебры (коалгебры) над операцией E равносильно заданию на нем структуры алгебры (коалгебры) над монадой $\underline{E}$ (комонадой $\overline{E}$).

Одним из основных примеров E_∞ -алгебр является сингулярный коцепной комплекс $C^*(Y; R)$ топологического пространства Y .

Двойственным образом, сингулярный цепной комплекс $C_*(Y; R)$ топологического пространства Y и цепной комплекс $N(RZ)$ симплициального множества Z являются примерами E_∞ -коалгебр.

Для E_∞ -коалгебр построена гомотопическая теория [5] и определены гомотопические группы. Для цепного комплекса $N(RZ)$ симплициального множества Z эти гомотопические группы изоморфны гомотопическим группам Z с коэффициентами в R .

Для E -коалгебры X , используя косимплициальную резольвенту

$$F^*(\overline{E}, \overline{E}, X): X \xrightarrow{\tau} \overline{E}(X) \rightarrow \cdots \rightarrow \overline{E}^{n-1}(X) \rightarrow \overline{E}^n(X) \rightarrow \cdots,$$

строится спектральная последовательность гомотопических групп E -коалгебры X (см. [5]).

Обозначим X_* гомологии комплекса X и $\overline{E}_*$ – гомологии комонады $\overline{E}$. Имеет место косимплициальная резольвента

$$F^*(\overline{E}_*, \overline{E}_*, X_*) : \overline{E}_*(X_*) \rightarrow \overline{E}_*^2(X_*) \rightarrow \cdots \rightarrow \overline{E}_*^n(X_*) \rightarrow \overline{E}_*^{n+1}(X_*) \rightarrow \cdots.$$

Член E^1 спектральной последовательности получается из этой резольвенты выбором примитивных элементов и представляет собой комплекс

$$F(\overline{E}_*, X_*): X_* \rightarrow \overline{E}_*(X_*) \rightarrow \cdots \rightarrow \overline{E}_*^n(X_*) \rightarrow \overline{E}_*^{n+1}(X_*) \rightarrow \cdots.$$

Функциональные гомологические операции

$$H_*(\delta, \dots, \delta): \overline{E}_*^n(X_*) \rightarrow \overline{E}_*^{n+m}(X_*)$$

задают высшие дифференциалы этой спектральной последовательности. Соответствующие комплексы обозначим $\tilde{F}(\overline{E}_*, \overline{E}_*, X_*)$ и $\tilde{F}(\overline{E}_*, X_*)$.

Таким образом, имеет место

ТЕОРЕМА 3. *Дифференциалы спектральной последовательности гомотопических групп E -коалгебры X определяются функциональными гомологическими операциями*

$$H_*(\delta, \dots, \delta): \overline{E}_*^n(X_*) \rightarrow \overline{E}_*^{n+m}(X_*).$$

При этом гомологии соответствующего комплекса $\tilde{F}(\overline{E}_, X_*)$ изоморфны члену E^∞ спектральной последовательности.*

Если X является нормализованным цепным комплексом симплициального множества Z , т.е. $X = N(RZ)$, то имеет место отображение косимплициальных объектов

$$\begin{array}{ccccccc} N(RZ) & \longrightarrow & N(CRZ) & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & N(C^n RZ) \longrightarrow \cdots \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & \overline{E}(X) & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \overline{E}^n(X) \longrightarrow \cdots, \end{array}$$

индуцирующее изоморфизм соответствующих спектральных последовательностей. Таким образом, имеет место

ТЕОРЕМА 4. Дифференциалы спектральной последовательности Боусфилда–Кана гомотопических групп симплицального множества Z определяются функциональными гомологическими операциями

$$H_*(\delta, \dots, \delta): \overline{E}_*^n(Z_*) \rightarrow \overline{E}_*^{n+m}(Z_*).$$

При этом гомологии соответствующего комплекса $\tilde{F}(\overline{E}_*, Z_*)$ изоморфны члену E^∞ спектральной последовательности.

Заметим, что надстройка SX над E -коалгеброй X является SE -коалгеброй и имеют место коммутативные диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \overline{E} & \xrightarrow{\overline{\gamma}} & \overline{E} \circ \overline{E} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \overline{SE} & \xrightarrow{\overline{S\gamma}} & \overline{SE} \circ \overline{SE} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} SX & \xrightarrow{\tau} & \overline{SE}(SX) \\ \downarrow & & \downarrow \\ SX & \xrightarrow{S\tau} & S(\overline{E}(X)) \end{array}$$

Кроме того, из выражения гомологий $\overline{E}_*$ комонады $\overline{E}$ следует, что отображения $\xi: \overline{E}_* \rightarrow \overline{E}$, $\eta: \overline{E} \rightarrow \overline{E}_*$, $h: \overline{E} \rightarrow \overline{E}$ можно выбрать перестановочными с надстроечным гомоморфизмом $\overline{SE} \rightarrow \overline{E}$. Поэтому построенные функциональные гомологические операции будут перестановочны с надстроечным гомоморфизмом.

Стабилизация спектральной последовательности Боусфилда–Кана приводит к спектральной последовательности Адамса стабильных гомотопических групп топологического пространства. Таким образом, имеет место

ТЕОРЕМА 5. Функциональные гомологические операции, задающие высшие дифференциалы спектральной последовательности Боусфилда–Кана, перестановочны с надстроечным гомоморфизмом и индуцируют дифференциалы спектральной последовательности Адамса стабильных гомотопических групп топологического пространства.

§ 3. A_∞ -косимплициальные объекты

Уточним характер высших дифференциалов спектральной последовательности Боусфилда–Кана, используя понятия A_∞ -косимплициального объекта.

Семейство объектов $X^* = \{X^n\}_{n \geq 0}$ какой-либо категории будем называть *предкосимплициальным объектом*, если заданы операторы кограней и ковырождения

$$\begin{aligned} \delta^i: X^n &\rightarrow X^{n+1}, & 1 \leq i \leq n+1, \\ \sigma^i: X^n &\rightarrow X^{n-1}, & 0 \leq i \leq n-1, \end{aligned}$$

удовлетворяющие следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} \delta^j \delta^i &= \delta^i \delta^{j-1}, & i < j, \\ \sigma^j \sigma^i &= \sigma^i \sigma^{j+1}, & i \leq j, \\ \sigma^j \delta^i &= \begin{cases} \delta^i \sigma^{j-1}, & i < j, \\ \text{Id}, & i = j, \quad i = j+1, \\ \delta^{i-1} \sigma^j, & i > j+1. \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом, предкосимплициальный объект отличается от косимплициального только оператором кограней δ^0 . Косимплициальный объект имеет такой оператор, а предкосимплициальный объект не имеет.

Отображением $f^*: X \rightarrow Y$ предкосимплициальных объектов будем называть семейство $f^* = \{f^n\}_{n \geq 0}$ отображений $f^n: X^n \rightarrow Y^n$, которые коммутируют с операторами кограней и ковырождения, т.е.

$$\delta^i f_n = f_{n+1} \delta^i, \quad \sigma^i f^n = f_{n-1} \sigma^i.$$

Определим теперь понятие A_∞ -косимплициального объекта в категории топологических пространств, или, просто, A_∞ -косимплициального пространства.

Пусть I^n – единичный куб, $I^n = \{(t_1, \dots, t_n) \mid 0 \leq t_i \leq 1\}$. Обозначим

$$\begin{aligned} u_i^\varepsilon: I^n &\rightarrow I^{n+1}, & \varepsilon = 0, 1, & \quad 1 \leq i \leq n+1, \\ v_i: I^n &\rightarrow I^{n-1}, & & \quad 0 \leq i \leq n, \end{aligned}$$

отображения, определенные формулами

$$\begin{aligned} u_i^\varepsilon(t_1, \dots, t_n) &= (t_1, \dots, t_{i-1}, \varepsilon, t_i, \dots, t_n); \\ v_i(t_1, \dots, t_n) &= \begin{cases} (t_2, \dots, t_n), & i = 0, \\ (t_1, \dots, t_i * t_{i+1}, \dots, t_n), & 1 \leq i \leq n-1, \\ (t_1, \dots, t_{n-1}), & i = n, \end{cases} \end{aligned}$$

где $t_i * t_{i+1} = t_i + t_{i+1} - t_i \cdot t_{i+1}$.

Предкосимплициальный объект $X^* = \{X^n\}$ в категории топологических пространств будем называть A_∞ -косимплициальным объектом, или, просто, A_∞ -косимплициальным пространством, если заданы операторы кограней

$$\delta_m^0: X^n \times I^m \rightarrow X^{n+m+1},$$

удовлетворяющие следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} \sigma^0 \delta_0^0 &= \text{Id}; \\ \delta_m^0(1 \times u_i^0) &= \delta^i \delta_{m-1}^0, & 1 \leq i \leq m; \\ \delta_m^0(1 \times u_i^1) &= \delta_{i-1}^0(\delta_{m-1}^0 \times 1), & 1 \leq i \leq m; \\ \delta_{m-1}^0(1 \times v_i) &= \sigma^i \delta_m^0, & 0 \leq i \leq m, \quad m \geq 1; \\ \delta_m^0(\delta^i \times 1) &= \delta^{i+m+1} \delta_m^0, & i \geq 1; \\ \delta_m^0(\sigma^i \times 1) &= \sigma^{i+m+1} \delta_m^0, & i \geq 0. \end{aligned}$$

Ясно, что косимплициальный объект $X^* = \{X^n\}$ в категории топологических пространств можно рассматривать как A_∞ -косимплициальный объект с тривиальными операторами $\delta_m^0: X^n \times I^m \rightarrow X^{n+m+1}$ при $m \geq 1$.

Заметим, что семейство $I^* = \{I^n\}$ можно рассматривать как A_∞ -косимплициальный объект в категории топологических пространств, для которого

$$\begin{aligned}\delta^i &= u_i^0: I^n \rightarrow I^{n+1}, \quad 1 \leq i \leq n+1; \\ \delta_m^0 &= u_{n+1}^1: I^n \times I^m = I^{n+m} \rightarrow I^{n+m+1}; \\ \sigma^i &= v_i: I^n \rightarrow I^{n-1}, \quad 0 \leq i \leq n.\end{aligned}$$

A_∞ -косимплициальные объекты образуют категорию, морфизмами которой являются отображения $f^*: X^* \rightarrow Y^*$, сохраняющие A_∞ -структуру.

Определим также понятие A_∞ -отображения.

Пусть $X^* = \{X^n\}$ – A_∞ -косимплициальное пространство, $Y^* = \{Y^n\}$ – косимплициальное пространство. A_∞ -отображением из X^* в Y^* будем называть отображение $f^* = \{f^n\}$, $f^n: X^n \rightarrow Y^n$, предсимплициальных объектов вместе с семейством отображений

$$f_m^n: X^n \times I^m \rightarrow Y^{n+m}, \quad 0 \leq m \leq n,$$

удовлетворяющих следующим соотношениям:

$$\begin{aligned}f_0^n &= f^n; \\ f_m^n(1 \times u_i^0) &= \delta^{i-1} f_{m-1}^n, & 1 \leq i \leq m; \\ f_m^n(1 \times u_i^1) &= f_i^{n+m-i-1}(\delta_{m-i}^0 \times 1), & 1 \leq i \leq m; \\ f_{n-1}^m(d_i \times 1) &= d_{i-m} f_n^m, & i > m; \\ f_{m-1}^n(1 \times v_i) &= \sigma^i f_m^n, & 0 \leq i < m; \\ f_m^n(\delta^i \times 1) &= \delta^{i+m} f_m^{n-1}, & i \geq 1; \\ f_{m-1}^n(\sigma^i \times 1) &= \sigma^{i+m} f_n^m, & i \geq 0.\end{aligned}$$

A_∞ -отображение будем называть A_∞ -гомотопической эквивалентностью, если соответствующие отображения f_n являются гомотопическими эквивалентностями.

Конечно, понятие A_∞ -косимплициального объекта может быть определено не только для категории топологических пространств, но и для некоторых других категорий. Например, для категорий симплициальных множеств, цепных комплексов и т.д. Для этого нужно использовать аналог n -мерного куба I^n в этих категориях.

Рассмотрим более подробно A_∞ -косимплициальные объекты в категории цепных комплексов. В этом случае в качестве объектов I^n нужно рассмотреть нормализованные цепные комплексы n -мерных кубов.

Определение A_∞ -косимплициального объекта и A_∞ -отображения можно переформулировать в следующем виде.

Предкосимплициальный объект $X^* = \{X^n\}$ в категории цепных комплексов является A_∞ -косимплициальным объектом, если заданы отображения

$$\delta_m^0: X^n \rightarrow X^{n+m+1},$$

повышающие размерность на m и удовлетворяющие следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} d(\delta_m^0) &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} (\delta^i \delta_{m-1}^0 - \delta_{i-1}^0 \delta_{m-i}^0); \\ \delta_m^0 \delta^i &= \delta^{i+m+1} \delta_m^0, \quad i \geq 1; \\ \sigma^i \delta_m^0 &= \begin{cases} 0, & 0 \leq i \leq m, \quad m \geq 1, \\ \text{Id}, & i = m = 0, \\ \delta_m^0 \sigma_{i-m-1}, & i > m. \end{cases} \end{aligned}$$

A_∞ -отображением A_∞ -косимплициального объекта X^* в косимплициальный объект Y^* в категории цепных комплексов является отображение предкосимплициальных объектов $f^* = \{f^n\}$, $f^n: X^n \rightarrow Y^n$, вместе с семейством отображений $f_m^n: X^n \rightarrow Y^{n+m}$, повышающих размерность на m и удовлетворяющих следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} f_0^n &= f^n; \\ d(f_m^n) &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} (\delta^{i-1} f_{m-1}^n - f_i^{n+m-i-1} \delta_{m-i}^0); \\ f_m^{n+1} \delta^i &= \delta^{i+m} f_m^n, \quad i \geq 1; \\ \sigma^i f_m^n &= \begin{cases} 0, & i < m; \\ f_m^{n+1} \sigma^{i-m}, & i \geq m. \end{cases} \end{aligned}$$

Ясно, что косимплициальный объект $X^* = \{X^n\}$ в категории цепных комплексов можно рассматривать как A_∞ -косимплициальный объект с тривиальными операторами $\delta_m^0: X^n \otimes I^m \rightarrow X^{n+m+1}$ при $m \geq 1$.

Так же, как и для категории топологических пространств, семейство цепных комплексов $I^* = \{I^n\}$ можно рассматривать как A_∞ -косимплициальный объект в категории цепных комплексов.

Если X'^* , X''^* — A_∞ -косимплициальные объекты, то их тензорное произведение $X'^* \otimes X''^*$ будет A_∞ -косимплициальным объектом X^* , для которого

$$\begin{aligned} X^n &= X'^n \otimes X''^n, \\ \delta^i &= \delta'^i \otimes \delta''^i, \quad i \geq 1, \\ \sigma^i &= \sigma'^i \otimes \sigma''^i, \quad i \geq 0, \end{aligned}$$

и операции $\delta_m^0: X^n \rightarrow X^{n+m+1}$ являются композициями

$$\begin{aligned} X'^n \otimes X''^n \otimes I^m &\xrightarrow{1 \otimes 1 \otimes \nabla} X'^n \otimes X''^n \otimes I^m \otimes I^m \xrightarrow{T} \\ &\xrightarrow{T} X'^n \otimes I^m \otimes X''^n \otimes I^m \xrightarrow{\delta_m'^0 \otimes \delta_m''^0} X'^{n+m+1} \otimes X''^{n+m+1}, \end{aligned}$$

где $\nabla: I^m \rightarrow I^m \otimes I^m$ — коумножение в коалгебре I^m .

Для A_∞ -косимплициального объекта X^* в категории цепных комплексов определим реализацию $|X^*|$, положив

$$|X^*| = \text{Hom}(I^*; X^*),$$

где Hom рассматривается в категории A_∞ -косимплициальных объектов.

Для A_∞ -косимплициальных объектов X'^* , X''^* имеет место цепная эквивалентность

$$|X'^* \otimes X''^*| \simeq |X'^*| \otimes |X''^*|.$$

Перенесем теорию возмущений цепных комплексов [13] на A_∞ -косимплициальные объекты.

Будем говорить, что цепной комплекс $\tilde{X}$ является деформационным ретрактом цепного комплекса X , если существуют цепные отображения $\xi: \tilde{X} \rightarrow X$, $\eta: X \rightarrow \tilde{X}$ и цепная гомотопия $h: X \rightarrow X$ такие, что

$$\eta \circ \xi = \text{Id}, \quad d(h) = \text{Id} - \xi \circ \eta.$$

Оказывается, что в этом случае можно дополнительно предположить, что выполняются соотношения $h \circ \xi = 0$, $\eta \circ h = 0$, $h \circ h = 0$ [13].

Предкосимплициальный объект $\tilde{X}^*$ в категории цепных комплексов будем называть *деформационным ретрактом предкосимплициального объекта X^** , если для каждого n цепной комплекс $\tilde{X}^n$ является деформационным ретрактом цепного комплекса X^n и соответствующие цепные отображения и цепные гомотопии перестановочны с предкосимплициальной структурой.

Следующая теорема является косимплициальным аналогом основной леммы теории возмущений цепных комплексов [13].

ТЕОРЕМА 6. Пусть $X^* = \{X^n\}$ – косимплициальный объект в категории цепных комплексов и предкосимплициальный объект $\tilde{X}^* = \{\tilde{X}^n\}$ является деформационным ретрактом X^* . Тогда на $\tilde{X}^*$ существуют структура A_∞ -косимплициального объекта и A_∞ -косимплициальная гомотопическая эквивалентность между X^* и $\tilde{X}^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\xi^*: \tilde{X}^* \rightarrow X^*$, $\eta^*: X^* \rightarrow \tilde{X}^*$ и $h^*: X^* \rightarrow X^*$ – соответствующие отображения. Определим операторы $\delta_m^0: \tilde{X}^n \rightarrow \tilde{X}^{n+m+1}$, полагая

$$\delta_m^0 = \eta \delta^0 h^{n+m} \dots \delta^0 h^{n+1} \delta_0 \xi.$$

Прямыми вычислениями можно показать, что требуемые соотношения выполняются.

Определим также отображения $\xi_m^n: \tilde{X}^n \rightarrow X^{n+m}$, полагая

$$\xi_m^n = h^{n+m} \delta^0 \dots h^{n+1} \delta^0 \xi.$$

Они задают A_∞ -косимплициальную гомотопическую эквивалентность между $\tilde{X}^*$ и X^* .

ТЕОРЕМА 7. Пусть $f^*: X^* \rightarrow Y^*$ – отображение косимплициальных объектов в категории цепных комплексов и предкосимплициальные объекты $\tilde{X}^*, \tilde{Y}^*$ являются деформационными ретрактами X^*, Y^* соответственно. Тогда для определенных выше структур A_∞ -косимплициальных объектов на $\tilde{X}^*, \tilde{Y}^*$ имеется A_∞ -отображение $\tilde{f}^*: \tilde{X}^* \rightarrow \tilde{Y}^*$, для которого гомотопически коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X^* & \xrightarrow{f^*} & Y^* \\ \xi^* \uparrow & & \uparrow \xi^* \\ \tilde{X}^* & \xrightarrow{\tilde{f}^*} & \tilde{Y}^* \end{array}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству предыдущей теоремы.

Так как член E^1 спектральной последовательности Боусфилда–Кана, рассматриваемый как предкосимплициальный объект, является деформационным ретрактом исходного косимплициального объекта, то в качестве следствия из теоремы 6 получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 8. Функциональные гомологические операции, задающие высшие дифференциалы спектральной последовательности Боусфилда–Кана пространства Y , можно выбрать таким образом, чтобы они образовывали на комплексе $F^*(\bar{E}_*, Y_*)$ структуру A_∞ -косимплициального объекта.

Переходя к стабильному случаю, получим теорему.

ТЕОРЕМА 9. Функциональные гомологические операции, определяющие высшие дифференциалы спектральной последовательности Адамса стабильных гомотопических групп топологического пространства Y , можно выбрать так, чтобы они образовывали структуру A_∞ -косимплициального объекта.

§ 4. E_∞ -структура на спектральной последовательности Боусфилда–Кана

Нашей целью является определение E_∞ -структуры на спектральной последовательности Боусфилда–Кана. Для этого рассмотрим следующее дополнительное свойство E_∞ -операды E .

ТЕОРЕМА 10. Для E_∞ -операды E имеет место перестановочное отображение

$$T: \underline{E} \circ \bar{E} \rightarrow \bar{E} \circ \underline{E},$$

для которого коммутативны диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \underline{E}^2 \circ \bar{E} & \xrightarrow{T \underline{E} \circ \bar{E} T} & \bar{E} \circ \underline{E}^2 \\ \gamma \bar{E} \downarrow & & \downarrow \bar{E} \gamma \\ \underline{E} \circ \bar{E} & \xrightarrow{T} & \bar{E} \circ \underline{E} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \underline{E} \circ \bar{E} & \xrightarrow{T} & \bar{E} \circ \underline{E} \\ \underline{E} \bar{\gamma} \downarrow & & \downarrow \bar{\gamma} \underline{E} \\ \underline{E} \circ \bar{E}^2 & \xrightarrow{\bar{E} T \circ T \bar{E}} & \bar{E}^2 \circ \underline{E} \end{array}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для E_∞ -операты E в силу ее ацикличности и свободности можно построить отображение операд $\nabla: E \rightarrow E \otimes E$, представляющее собой семейство отображений $\nabla(j): E(j) \rightarrow E(j) \otimes E(j)$, задающее на E структуру операты Хопфа. Обозначим

$$\nabla(j, i): E(j) \rightarrow E(j)^{\otimes i}$$

итерации этих отображений, $\nabla(j, 2) = \nabla(j)$. Они являются Σ_j -отображениями, т.е. $\nabla(j)(x\sigma) = \nabla(j)(x)\sigma^{\otimes j}$, $\sigma \in \Sigma_j$, но не коммутируют с перестановками сомножителей в $E(j)^{\otimes i}$. Однако в силу ацикличности и Σ -свободности операты E их можно продолжить до отображений

$$\nabla(j, i): E(i) \otimes E(j) \rightarrow E(j)^{\otimes i},$$

согласованных с действиями симметрических групп Σ_i и Σ_j .

Перепишем эти отображения в виде

$$\nabla(j, i): E(j) \rightarrow \overline{E}(i) \otimes E(j)^{\otimes i}.$$

Если операта E выбрана свободной, то их можно считать согласованными с оператной структурой.

Переходя к двойственным отображениям, получим отображения

$$\overline{\nabla}(j, i): E(i) \otimes \overline{E}(j)^{\otimes i} \rightarrow \overline{E}(j).$$

Определим теперь отображения

$$T(j, i): E(j) \otimes \overline{E}(i)^{\otimes j} \rightarrow E(i) \otimes \overline{E}(j)^{\otimes i}$$

как композиции

$$\begin{aligned} E(j) \otimes \overline{E}(i)^{\otimes j} &\xrightarrow{\nabla(j) \otimes 1^{\otimes j}} E(j) \otimes E(j) \otimes \overline{E}(i)^{\otimes j} \rightarrow E(j) \otimes \overline{E}(i)^{\otimes j} \otimes E(j) \rightarrow \\ &\xrightarrow{\overline{\nabla}(j, i) \otimes 1} \overline{E}(i) \otimes E(j) \xrightarrow{1 \otimes \nabla(j, i)} \overline{E}(i) \otimes \overline{E}(i) \otimes E(j)^{\otimes i} \rightarrow \\ &\xrightarrow{\overline{\nabla}(i) \otimes 1^{\otimes i}} \overline{E}(i) \otimes E(j)^{\otimes i}. \end{aligned}$$

Это семейство отображений $T(j, i)$ определяет искомое перестановочное отображение $T: \underline{E} \circ \overline{E} \rightarrow \overline{E} \circ \underline{E}$.

Цепной комплекс X называется E_∞ -алгеброй Хопфа, если на нем заданы структуры E_∞ -алгебры $\mu: \underline{E}(X) \rightarrow X$ и E_∞ -коалгебры $\tau: X \rightarrow \overline{E}(X)$, согласованные в смысле коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} \underline{E}(X) & \xrightarrow{\mu} & X & \xrightarrow{\tau} & \overline{E}(X) \\ \underline{E}(\tau) \downarrow & & & & \downarrow = \\ \underline{E}\overline{E}(X) & \xrightarrow{T} & \overline{E}\underline{E}(X) & \xrightarrow{\overline{E}(\mu)} & \overline{E}(X) \end{array}$$

В случае, если топологическое пространство Y является E_∞ -пространством, его сингулярный цепной комплекс $C_*(Y; R)$ будет E_∞ -алгеброй Хопфа. Например, E_∞ -алгеброй Хопфа является сингулярный цепной комплекс бесконечнократного пространства петель.

Если X – E_∞ -алгебра Хопфа, то имеет место отображение аугментированных косимплициальных объектов

$$\begin{array}{ccccccc} \underline{E}(X) & \longrightarrow & \underline{E}\overline{E}(X) & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \underline{E}\overline{E}^n(X) \longrightarrow \cdots \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & \overline{E}(X) & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \overline{E}^n(X) \longrightarrow \cdots \end{array}$$

т.е. $F^*(\overline{E}, \overline{E}, X)$ – косимплициальный объект в категории E_∞ -алгебр. Поэтому его реализация $F(\overline{E}, \overline{E}, X)$ является E_∞ -алгеброй. Переходя к гомологиям, получим следующую теорему.

ТЕОРЕМА 11. Если X – E_∞ -алгебра Хопфа, то на комплексе $\tilde{F}(\overline{E}_*, \overline{E}_*, X_*)$ имеется структура E_∞ -алгебры.

Эта структура будет в дальнейшем использована для вычисления высших дифференциалов спектральной последовательности Адамса.

Заметим, что на комплексе $\widetilde{F}(\overline{E}_*, X_*)$ естественной структуры E_∞ -алгебры не существует.

§ 5. Гомологии E_∞ -оперადы и коалгебра Милнора

Как известно (см., например, [6]), для E_∞ -операды E и градуированного модуля M (над полем $\mathbb{Z}/2$) гомологии $\underline{E}_*(M)$ комплекса $\underline{E}(M)$ являются алгеброй многочленов от образующих вида $e_{i_1} \dots e_{i_k} x_m$, $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k$, $x_m \in M$, размерности $i_1 + 2i_2 + \dots + 2^{k-1}i_k + 2^k m$.

Элементы $e_{i_1} \dots e_{i_k} x_m$ из $\underline{E}_*(M)$ могут быть переписаны в виде

$$Q^{j_1} \dots Q^{j_k} \otimes x_m, \quad j_1 \leq 2j_2, \dots, j_{k-1} \leq 2j_k, \quad m \leq j_k,$$

где

$$\begin{aligned} j_k &= i_k + m, \\ j_{k-1} &= i_{k-1} + i_k + 2m, \\ &\dots \\ j_1 &= i_1 + i_2 + 2i_3 + \dots + 2^{k-2}i_k + 2^{k-1}m. \end{aligned}$$

Последовательности $Q^{j_1} \dots Q^{j_k}$ представляют собой элементы алгебры Дайера–Лашофа $\mathcal{R}$, [14], [15].

Для градуированного модуля M обозначим через $\mathcal{R} \times M$ фактормодуль тензорного произведения $\mathcal{R} \otimes M$ по подмодулю, порожденному элементами вида $Q^{j_1} \dots Q^{j_k} \otimes x_m$, для которых $j_k < m$. Соответствие $M \mapsto \mathcal{R} \times M$ определяет монаду в категории градуированных модулей.

Градуированный модуль M называется *нестабильным модулем над алгеброй Дайера–Лашофа*, если он является алгеброй над соответствующей монадой.

Двойственным образом, гомологии $\overline{E}_*(M)$ комплекса $\overline{E}(M)$ являются свободной коммутативной коалгеброй от образующих вида

$$e_{i_1} \dots e_{i_k} x^m, \quad 1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k, \quad x^m \in M,$$

размерности $2^k m - (i_1 + 2i_2 + \dots + 2^{k-1}i_k)$.

Переградуировка элементов в $\overline{E}_*(M)$ приводит к коалгебре Милнора $\mathcal{K}$.

Определим в $\mathcal{K}$ градуировку $\deg(x)$ элементов $x \in \mathcal{K}$, считая $\deg(\xi_i) = 1$ и градуировку произведения равной сумме градуировок сомножителей.

Для градуированного модуля M обозначим через $\mathcal{K} \times M$ подмодуль тензорного произведения $\mathcal{K} \otimes M$, порожденный элементами $x \otimes y$, для которых $\deg(x) = \dim(y)$. Соответствие $M \mapsto \mathcal{K} \times M$ определяет комонаду $\mathcal{K}$ в категории градуированных модулей.

Градуированный модуль M называется *нестабильным комодулем над коалгеброй Милнора*, если он является коалгеброй над соответствующей комонадой.

Для нестабильного комодуля M над коалгеброй Милнора имеет место косимплициальная резольвента

$$F^*(\mathcal{K}, \mathcal{K}, M): M \rightarrow \mathcal{K} \times M \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{K}^{\times n-1} \times M \rightarrow \mathcal{K}^{\times n} \times M \rightarrow \dots.$$

Если Y – “хорошее” (в смысле Масси–Петерсона) пространство, то спектральная последовательность Боусфилда–Кана превращается в спектральную последовательность Масси–Петерсона и член E^1 этой спектральной последовательности может быть записан в виде

$$F^*(\mathcal{K}, Y_*): Y_* \rightarrow \mathcal{K} \times Y_* \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{K}^{\times n} \times Y_* \rightarrow \dots,$$

где $Y_* = H_*(Y; \mathbb{Z}/2)$. Поэтому имеют место

ТЕОРЕМА 12. *Если Y – хорошее пространство, то функциональные гомологические операции, задающие высшие дифференциалы спектральной последовательности Боусфилда–Кана, можно выбрать так, чтобы они задавали на $F^*(\mathcal{K}, \mathcal{K}, Y_*)$ структуру A_∞ -косимплициального объекта. Гомологии соответствующего комплекса $\tilde{F}(\mathcal{K}, Y_*)$ изоморфны члену E^∞ спектральной последовательности Масси–Петерсона.*

ТЕОРЕМА 13. *Если Y – E_∞ -пространство, то $\tilde{F}(\mathcal{K}, \mathcal{K}, Y_*)$ является E_∞ -алгеброй.*

Заметим, что на комплексе $\tilde{F}(\mathcal{K}, Y_*)$ нет естественной структуры E_∞ -алгебры.

Наряду с коалгеброй Милнора $\mathcal{K}$ будем рассматривать стабильную коалгебру Милнора $\mathcal{K}_s$, для которой $\xi_0 = 1$.

Для комодуля M над стабильной коалгеброй Милнора имеет место косимплициальная резольвента

$$F^*(\mathcal{K}_s, \mathcal{K}_s, M): \mathcal{K}_s \otimes M \rightarrow \mathcal{K}_s^{\otimes 2} \otimes M \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{K}_s^{\otimes n} \otimes M \rightarrow \dots.$$

Стабилизация спектральной последовательности Боусфилда–Кана приводит к спектральной последовательности Адамса стабильных гомотопических групп топологического пространства. Член E^1 этой спектральной последовательности записывается в виде косимплициального объекта

$$F^*(\mathcal{K}_s, Y_*): Y_* \rightarrow \mathcal{K}_s^{\otimes} Y_* \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{K}_s^{\otimes n} \otimes Y_* \rightarrow \dots.$$

Таким образом, имеет место

ТЕОРЕМА 14. *Функциональные гомологические операции, определяющие высшие дифференциалы спектральной последовательности Адамса стабильных гомотопических групп топологического пространства Y , могут быть выбраны так, чтобы они образовывали на $F^*(\mathcal{K}_s, \mathcal{K}_s, Y_*)$ структуру A_∞ -косимплициального объекта. Гомологии соответствующего комплекса $\hat{F}(\mathcal{K}_s, Y_*)$ будут изоморфны члену E^∞ спектральной последовательности Адамса.*

Вычислим структуру E_∞ -алгебры на коалгебре Милнора. Как было сказано выше, для E_∞ -операты E имеет место перестановочное отображение

$$T: \underline{E} \circ \overline{E} \rightarrow \overline{E} \circ \underline{E}.$$

Оно индуцирует перестановочное отображение

$$T_*: \underline{E}_* \circ \overline{E}_* \rightarrow \overline{E}_* \circ \underline{E}_*,$$

для которого коммутативны диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \underline{E}_*^2 \circ \overline{E}_* & \xrightarrow{T_* \underline{E}_* \circ \overline{E}_* T_*} & \overline{E}_* \circ \underline{E}_*^2 & \quad \underline{E}_* \circ \overline{E}_* & \xrightarrow{T_*} & \overline{E}_* \circ \underline{E}_* \\ \gamma_* \overline{E}_* \downarrow & & \downarrow \overline{E}_* \gamma_* & \quad \underline{E}_* \gamma_* \downarrow & & \downarrow \overline{\gamma}_* \underline{E}_* \\ \underline{E}_* \circ \overline{E}_* & \xrightarrow{T_*} & \overline{E}_* \circ \underline{E}_* & \quad \underline{E}_* \circ \overline{E}_*^2 & \xrightarrow{\overline{E}_* T_* \circ T_* \overline{E}_*} & \overline{E}_*^2 \circ \underline{E}_* \end{array}$$

Перестановочное отображение T_* индуцирует действие $\mu_*: \underline{E}_* \circ \overline{E}_* \rightarrow \overline{E}_*$ и двойственное кодействие $\tau_*: \underline{E}_* \rightarrow \overline{E}_* \circ \underline{E}_*$.

Обозначим $e_i: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ операции на коалгебре Милнора, индуцированные действием μ_* на элементах e_i . Из соотношений для перестановочного отображения T_* следует

ТЕОРЕМА 15. *Для операций $e_i: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ выполняются соотношения:*

- 1) $e_0(x) = x^2$;
- 2) $e_i(xy) = \sum e_k(x) e_{i-k}(y)$;
- 3) $\nabla e_i(x) = \sum \xi_0^{-k} e_{i-k}(\xi_0^k x') \otimes e_k(x'')$, где $\sum x' \otimes x'' = \nabla(x)$.

Используя эти соотношения, для вычисления операций e_i достаточно вычислить только $e_1(\xi_0)$, что выполняется непосредственно, $e_1(\xi_0) = \xi_1 \xi_0$. С помощью соотношения 3) получаем следующую теорему.

Для цепного функтора F можно рассматривать отображения

$$F(f): F(X) \rightarrow F(Y),$$

индуцированные не только цепными отображениями $f: X \rightarrow Y$ размерности нуль, но и размерности n , для чего отображение $f: X \rightarrow Y$ размерности n нужно представлять в виде ограничения цепного отображения $\tilde{f}: \Delta^n \otimes X \rightarrow Y$ на n -мерную образующую $u_n \in \Delta^n$. Тогда искомое отображение

$$F(f): F(X) \rightarrow F(Y)$$

размерности n будет ограничением композиции

$$\Delta^n \otimes F(X) \rightarrow F(\Delta^n \otimes X) \xrightarrow{F(\tilde{f})} F(Y)$$

на n -мерную образующую $u_n \in \Delta^n$.

Для цепного функтора F обозначим через F_* функтор, сопоставляющий цепному комплексу X градуированный модуль гомологий $F_*(X) = H_*(F(X))$. Тогда F_* является не просто функтором, а A_∞ -функтором, т.е. имеют место операции, сопоставляющие последовательностям отображений цепных комплексов $f^1: X^1 \rightarrow X^2, \dots, f^n: X^n \rightarrow X^{n+1}$ отображения

$$F_*(f^n, \dots, f^1) = H_*(F(f^n), \dots, F(f^1)): F_*(X^1) \rightarrow F_*(X^{n+1})$$

размерности $n - 1$.

ТЕОРЕМА 17. *Для цепного функтора F и последовательности $f^1: X^1 \rightarrow X^2, \dots, f^n: X^n \rightarrow X^{n+1}$ отображений цепных комплексов имеет место формула*

$$H_*(F(f^n), \dots, F(f^1)) = \sum (-1)^\varepsilon F_*(H_*(f^n, \dots, f^{n_m+1}), \dots, H_*(f^{n_1}, \dots, f^1)),$$

где сумма берется по всем t и $n_1, \dots, n_m$ таким, что $1 \leq n_1 < \dots < n_m < n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, для цепного комплекса X отображение выбора представителей $F_*(X_*) \rightarrow F(X)$ можно задать как композицию отображений

$$\xi(F): F_*(X_*) \rightarrow F(X_*), \quad F(\xi): F(X_*) \rightarrow F(X).$$

Проекцию $F(X) \rightarrow F_*(X_*)$ можно выбрать как композицию отображений

$$F(\eta): F(X) \rightarrow F(X_*), \quad \eta(F): F(X_*) \rightarrow F_*(X_*).$$

Гомотопию $H: F(X) \rightarrow F(X)$ можно выбрать как сумму

$$F(\xi) \circ h(F) \circ F(\eta) + F(h).$$

Подставляя эти отображения в формулу для функциональных гомологических операций, получаем требуемые тождества.

Преобразование $\alpha: F' \rightarrow F''$ цепных функторов индуцирует A_∞ -преобразование A_∞ -функтора F'_* в A_∞ -функтор F''_* , т.е. имеют место операции, сопоставляющие последовательностям отображений цепных комплексов

$$f^1: X^1 \rightarrow X^2, \dots, f^n: X^n \rightarrow X^{n+1}$$

отображения

$$\alpha_*(f^n, \dots, f^1): F'_*(X^1) \rightarrow F''_*(X^{n+1})$$

размерности n .

Аналогично предыдущей теореме показывается, что имеет место

ТЕОРЕМА 18. Для преобразования $\alpha: F' \rightarrow F''$ цепных функторов и последовательности $f^1: X^1 \rightarrow X^2, \dots, f^n: X^n \rightarrow X^{n+1}$ отображений цепных комплексов справедлива формула

$$\alpha_*(f^n, \dots, f^1) = \sum (-1)^\varepsilon \alpha_*(H_*(f^n, \dots, f^{n_m+1}), \dots, H_*(f^{n_1}, \dots, f^1)),$$

где сумма берется по всем t и $n_1, \dots, n_m$ таким, что $1 \leq n_1 < \dots < n_m < n$.

Функтор F будем называть *формальным*, если гомотопии $h(F)$ можно выбрать таким образом, чтобы для любого отображения $f: M' \rightarrow M''$ градуированных модулей выполнялось соотношение $h''(F) \circ F(f) = F(f) \circ h'(F)$.

Заметим, что из этого соотношения, в частности, следует, что выполняются соотношения

$$\eta''(F) \circ F(f) = F_*(f) \circ \eta'(F), \quad F(f) \circ \xi'(F) = \xi''(F) \circ F_*(f).$$

Из определения функториальных гомологических операций непосредственно следует, что для формального функтора F , ограниченного на категорию градуированных модулей, структура A_∞ -функтора на F_* вырождается. Для отображений цепных комплексов $f^1, \dots, f^n$ в этом случае имеет место формула

$$F_*(f^n, \dots, f^1) = F_*(H_*(f^n, \dots, f^1)).$$

Преобразование $\alpha: F' \rightarrow F''$ цепных функторов будем называть *формальным*, если гомотопии $h(F')$ и $h(F'')$ можно выбрать таким образом, чтобы выполнялось соотношение

$$h''(F) \circ \alpha = \alpha \circ h'(F).$$

Для формального преобразования $\alpha: F' \rightarrow F''$ структура A_∞ -преобразования из F'_* в F''_* вырождается. Для отображений цепных комплексов $f^1, \dots, f^n$ в этом случае имеет место формула

$$\alpha_*(f^n, \dots, f^1) = \alpha_*(H_*(f^n, \dots, f^1)).$$

§ 7. Гомологические операции для E_∞ -опералы

Покажем, что функторы $\underline{E}$ и $\overline{E}$, соответствующие E_∞ -операле E , являются цепными. Для этого определим семейство отображений

$$\Delta^n \otimes \underline{E}(j, X) \rightarrow \underline{E}(j, \Delta^n \otimes X)$$

как композицию

$$\begin{aligned} \Delta^n \otimes \underline{E}(j, X) &= \Delta^n \otimes E(j) \otimes_{\Sigma_j} X^{\otimes j} \xrightarrow{1 \otimes \nabla \otimes 1} \Delta^n \otimes E(j) \otimes E(j) \otimes_{\Sigma_j} X^{\otimes j} \\ &\xrightarrow{\tau \otimes 1 \otimes 1} \Delta^n \otimes j \otimes E(j) \otimes_{\Sigma_j} X^{\otimes j} \rightarrow E(j) \otimes_{\Sigma_j} (\Delta^n \otimes X)^{\otimes j} = \underline{E}(j, \Delta^n \otimes X), \end{aligned}$$

где $\tau: \Delta^n \otimes E(j) \rightarrow \Delta^n \otimes j$ – структура E -коалгебры на комплексе Δ^n .

Непосредственной проверкой можно показать, что выполняются требуемые соотношения.

Аналогичным образом, определим отображения

$$\Delta^n \otimes \overline{E}(j, X) \rightarrow \overline{E}(j, \Delta^n \otimes X),$$

или, что то же самое, отображения

$$E(j) \otimes \Delta^n \otimes \text{Hom}_{\Sigma_j}(E(j), X^{\otimes j}) \rightarrow (\Delta^n \otimes X)^{\otimes j}$$

как композицию

$$\begin{aligned} E(j) \otimes \Delta^n \otimes \text{Hom}_{\Sigma_j}(E(j), X^{\otimes j}) &\xrightarrow{\nabla \otimes 1 \otimes 1} E(j) \otimes E(j) \otimes \Delta^n \otimes \text{Hom}_{\Sigma_j}(E(j), X^{\otimes j}) \\ &\rightarrow E(j) \otimes \Delta^{n \otimes j} \otimes \text{Hom}_{\Sigma_j}(E(j), X^{\otimes j}) \rightarrow (\Delta^n \otimes X)^{\otimes j}. \end{aligned}$$

Непосредственной проверкой можно показать, что выполняются требуемые соотношения. Следовательно, имеет место

ТЕОРЕМА 19. *Функторы $\underline{E}_*$ и $\overline{E}_*$ являются A_∞ -функторами.*

Нашей задачей является вычисление функциональных гомологических операций для функторов $\underline{E}_*$ и $\overline{E}_*$. Это означает, что для каждой последовательности

$$f^1: X^1 \rightarrow X^2, \quad \dots, \quad f^n: X^n \rightarrow X^{n+1}$$

отображений цепных комплексов требуется вычислить отображения

$$\underline{E}_*(f^n, \dots, f^1): \underline{E}_*(X^1) \rightarrow \underline{E}_*(X^{n+1}), \quad \overline{E}_*(f^n, \dots, f^1): \overline{E}_*(X^1) \rightarrow \overline{E}_*(X^{n+1}).$$

Рассмотрим сначала функтор $\underline{E}(2, -)$, сопоставляющий комплексу X комплекс

$$\underline{E}(2, X) = E(2) \otimes_{\Sigma_2} X \otimes X,$$

где $E(2)$ – Σ_2 -свободный и ациклический комплекс с образующими e_i размерности i и дифференциал определен формулой

$$d(e_i) = e_{i-1} + e_{i-1}T, \quad T \in \Sigma_2.$$

Основное кольцо – поле $\mathbb{Z}/2$.

Гомологии $\underline{E}_*(2, -)$ этого функтора, как было сказано выше, являются не только функтором, но и A_∞ -функтором, т.е. каждой последовательности

$$f^1: X^1 \rightarrow X^2, \quad \dots, \quad f^n: X^n \rightarrow X^{n+1}$$

отображений цепных комплексов сопоставляется отображение

$$\underline{E}_*(2, f^n, \dots, f^1): \underline{E}_*(2, X^1) \rightarrow \underline{E}_*(2, X^{n+1}).$$

Вычислим эти функциональные операции.

Заметим, что для цепного комплекса X имеет место изоморфизм

$$\underline{E}_*(2, X) \cong \underline{E}_*(2, X_*).$$

Причем если X_* – градуированный модуль, то $\underline{E}_*(2, X_*)$ является прямой суммой фактормодуля $X_* \cdot X_*$ тензорного произведения $X_* \otimes X_*$ относительно перестановок сомножителей элементов и модуля, порожденного элементами вида $e_i \times y_n$, $i \geq 1$, размерности $i + 2n$. Элементы $y_n \cdot y_n \in X_* \cdot X_*$ будем обозначать также $e_0 \times y_n$.

Пусть $\xi: X_* \rightarrow X$, $\eta: X \rightarrow X_*$, $h: X \rightarrow X$ – отображения, осуществляющие цепную эквивалентность между X и X_* . Обозначим через

$$\begin{aligned} E(\xi): E(2, X_*) &\rightarrow E(2, X), & E(\eta): E(2, X) &\rightarrow E(2, X_*), \\ E(h): E(2, X) &\rightarrow E(2, X) \end{aligned}$$

отображения, определенные формулами

$$\begin{aligned} E(\xi)(e_i \otimes y_1 \otimes y_2) &= e_i \otimes \xi(y_1) \otimes \xi(y_2), \\ E(\eta)(e_i \otimes x_1 \otimes x_2) &= e_i \otimes \eta(x_1) \otimes \eta(x_2), \\ E(h)(e_i \otimes x_1 \otimes x_2) &= e_i \otimes (x_1 \otimes h(x_2) + h(x_1) \otimes \xi \eta(x_2)) + e_{i-1} \otimes h(x_1) \otimes h(x_2). \end{aligned}$$

Ясно, что они осуществляют цепную эквивалентность $\underline{E}(2, X) \simeq \underline{E}(2, X_*)$.

Определим отображения

$$\begin{aligned} \xi(E): \underline{E}_*(2, X_*) &\rightarrow \underline{E}(2, X_*), & \eta(E): \underline{E}(2, X_*) &\rightarrow \underline{E}_*(2, X_*), \\ h(E): \underline{E}(2, X_*) &\rightarrow \underline{E}(2, X_*). \end{aligned}$$

Для этого выберем в X_* базис $\{y\}$, упорядоченный каким-либо образом (имеется в виду, что для каждого n в модуле $H_n(X)$ выбирается базис).

Определим отображение $\xi(E)$, положив

$$\xi(E)(e_i \times y) = e_i \otimes y \otimes y, \quad \xi(E)(y_1 \cdot y_2) = e_0 \otimes (y_1 \otimes y_2), \quad y_1 \leq y_2.$$

Определим отображение $\eta(E)$, положив

$$\eta(E)(e_i \otimes y_1 \otimes y_2) = \begin{cases} e_i \times y_1, & y_1 = y_2, \\ y_1 \cdot y_2, & y_1 < y_2, \quad i = 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Определим отображение $h(E)$, положив

$$h(E)(e_i \otimes y_1 \otimes y_2) = \begin{cases} e_{i+1} \otimes y_2 \otimes y_1, & y_1 > y_2, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Непосредственными вычислениями можно показать, что имеют место требуемые соотношения.

Отображения

$$\begin{aligned} E(\xi) \circ \xi(E): E_*(2, X_*) &\rightarrow E(2, X), & \eta(E) \circ E(\eta): E(2, X) &\rightarrow E_*(2, X_*), \\ E(\xi) \circ h(E) \circ E(\eta) + E(h): E(2, X) &\rightarrow E(2, X) \end{aligned}$$

будут задавать цепную эквивалентность между $E(2, X)$ и $E_*(2, X_*)$.

Из общей формулы для функциональных гомологических операций для цепного функтора следует, что для функтора $\underline{E}(2, -)$ имеет место формула

$$\underline{E}_*(2, f^n, \dots, f^1) = \sum \underline{E}_*(2, H_*(f^n, \dots, f^{n_m+1}), \dots, H_*(f^{n_1}, \dots, f^1)),$$

где сумма берется по всем m и $n_1, \dots, n_m$ таким, что $1 \leq n_1 < \dots < n_m < n$.

Для градуированного модуля X с фиксированным упорядоченным базисом $\{x_i\}$ определим отображения $p: X \otimes X \rightarrow X$, $q: X \rightarrow X \otimes X$, $r: X \otimes X \rightarrow X \otimes X$, положив $q(x_i) = x_i \otimes x_i$ и

$$p(x_i \otimes x_j) = \begin{cases} x_i, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad r(x_i \otimes x_j) = \begin{cases} x_j \otimes x_i, & i > j, \\ 0, & i \geq j. \end{cases}$$

Для последовательности отображений $f^1: X^1 \rightarrow X^2, \dots, f^n: X^n \rightarrow X^{n+1}$ градуированных модулей с фиксированными упорядоченными базисами определим отображение $(f^n, \dots, f^1): X^1 \rightarrow X^{n+1}$, положив

$$(f^n, \dots, f^1) = p \circ (f^n)^{\otimes 2} \circ r \circ (f^{n-1})^{\otimes 2} \circ \dots \circ r \circ (f^1)^{\otimes 2} \circ q.$$

Непосредственно из определения гомологических операций следует, что имеет место

ТЕОРЕМА 20. *Для последовательностей отображений градуированных модулей $f^1: X^1 \rightarrow X^2, \dots, f^n: X^n \rightarrow X^{n+1}$ имеет место формула*

$$\underline{E}_*(2, f^n, \dots, f^1)(e_i \times x) = e_{i+n-1} \times (f^n, \dots, f^1)(x).$$

Для вычисления функциональных гомологических операций для всего функтора $\underline{E}_*$ можно воспользоваться структурой монады $\underline{\gamma}_*: \underline{E}_* \circ \underline{E}_* \rightarrow \underline{E}_*$ и формулой

$$\underline{E}_*(f^n, \dots, f^1) \circ \gamma_* = \sum \underline{\gamma}_* \circ \underline{E}_*(\underline{E}_*(f^n, \dots, f^{n_m+1}), \dots, \underline{E}_*(f^{n_1}, \dots, f^1)),$$

где сумма берется по всем m и $n_1, \dots, n_m$ таким, что $1 \leq n_1 < \dots < n_m < n$.

Переходя к алгебре Дайера–Лашофа $\mathcal{R}$, получим операции

$$\mathcal{R}(f^n, \dots, f^1): \mathcal{R} \times X^1 \rightarrow \mathcal{R} \times X^{n+1},$$

которые на образующих Q^i вычисляются по формулам

$$\mathcal{R}(f^n, \dots, f^1)(Q^i \otimes x) = Q^{i+n-1} \otimes (f^n, \dots, f^1)(x).$$

Двойственным образом, для функтора $\overline{E}_*(2, -)$ имеет место

ТЕОРЕМА 21. Для последовательностей отображений градуированных модулей $f^1: X^1 \rightarrow X^2, \dots, f^n: X^n \rightarrow X^{n+1}$ имеет место формула

$$\bar{E}_*(2, f^n, \dots, f^1)(\bar{e}_i \times x) = \bar{e}_{i-n+1} \times (f^n, \dots, f^1)(x).$$

Для вычисления функциональных гомологических операций для всего функтора $\bar{E}_*$ можно воспользоваться структурой комонады $\bar{\gamma}_*: \bar{E}_* \rightarrow \bar{E}_* \circ \bar{E}_*$ и формулой

$$\bar{\gamma}_* \circ \bar{E}_*(f^n, \dots, f^1) = \sum \bar{E}_*(\bar{E}_*(f^n, \dots, f^{n_m+1}), \dots, \bar{E}_*(f^{n_1}, \dots, f^1)) \circ \bar{\gamma}_*,$$

где сумма берется по всем m и $n_1, \dots, n_m$ таким, что $1 \leq n_1 < \dots < n_m < n$.

Переходя к коалгебре Милнора $\mathcal{K}$, получим операции

$$\mathcal{K}(f^n, \dots, f^1): \mathcal{K} \times X^1 \rightarrow \mathcal{K} \times X^{n+1},$$

которые вычисляются по формулам

$$\mathcal{K}(f^n, \dots, f^1)(y \otimes x) = y \cdot \xi_1^{n-1} \otimes (f^n, \dots, f^1)(x).$$

Аналогичным образом, для перестановочного преобразования

$$T(X): \underline{E}\bar{E}(X) \rightarrow \bar{E}\underline{E}(X)$$

имеют место гомологические операции, сопоставляющие последовательностям отображений цепных комплексов $f^1: X^1 \rightarrow X^2, \dots, f^n: X^n \rightarrow X^{n+1}$ отображения

$$T_*(f^n, \dots, f^1): \underline{E}_* \bar{E}_*(X_*^1) \rightarrow \bar{E}_* \underline{E}_*(X_*^{n+1}).$$

В качестве примера рассмотрим операции, связанные с коумножением в коалгебре Милнора $\mathcal{K}$. Обозначим

$$\nabla(n) = \nabla \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1 - \dots + (-1)^{n-1} 1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes \nabla: \mathcal{K}^{\times n} \rightarrow \mathcal{K}^{\times(n+1)}.$$

Непосредственными вычислениями можно показать, что операции

$$(\nabla(n), \dots, \nabla): \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}^{\times(n+1)}, \quad n \geq 2,$$

на элементах $\xi_i^{2^k}$ тривиальны. Однако на других элементах эти операции могут быть нетривиальны. Например, имеет место формула

$$(\nabla(2), \nabla)(\xi_i \xi_j) = \xi_{j-i}^{2^i} \xi_0^{2^i} \otimes \xi_i \xi_0^{2^i} \otimes \xi_i, \quad i < j.$$

Обозначим через $\tilde{\nabla}$ коумножение в тензорном произведении $\mathcal{K} \otimes \mathcal{K}$,

$$\tilde{\nabla} = (1 \otimes T \otimes 1)(\nabla \otimes \nabla),$$

и положим

$$\tilde{\nabla}(n) = \tilde{\nabla} \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 - \cdots + (-1)^{n-1} 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes \tilde{\nabla}: (\mathcal{K} \otimes \mathcal{K})^{\times n} \rightarrow (\mathcal{K} \otimes \mathcal{K})^{\times (n+1)}.$$

Рассмотрим операцию $(\pi^{\times(n+1)}, \tilde{\nabla}(n), \dots, \tilde{\nabla}): \mathcal{K}^{\otimes 2} \rightarrow \mathcal{K}^{\times(n+1)}$. Ее ограничение на элементы $x \otimes x \in \mathcal{K} \otimes \mathcal{K}$ обозначим через $\Psi^n: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}^{\times(n+1)}$.

Из формулы для коумножения в коалгебре Милнора непосредственно следует формула

$$\Psi^1(\xi_n) = \sum_{i < j} \xi_{n-i}^{2^i} \xi_{n-j}^{2^j} \otimes \xi_i \xi_j,$$

или, в более общем случае,

$$\Psi^1(\xi_n^{2^m}) = \sum_{i < j} \xi_{n-i}^{2^{i+m}} \xi_{n-j}^{2^{j+m}} \otimes \xi_i^{2^m} \xi_j^{2^m}.$$

В частности, для примитивных элементов $\xi_1^{2^m} \in \mathcal{K}$ имеет место формула

$$\Psi^1(\xi_1^{2^m}) = \xi_1^{2^m} \xi_0^{2^m} \otimes \xi_1^{2^m}.$$

Аналогичным образом, для операции Ψ^2 имеет место формула

$$\Psi^2(\xi_n^{2^m}) = \sum_{\substack{i < j \\ k > l}} \xi_{n-i}^{2^{i+m}} \xi_{n-j}^{2^{j+m}} \otimes \xi_{i-k}^{2^{k+m}} \xi_{j-l}^{2^{l+m}} \otimes \xi_k^{2^m} \xi_l^{2^m}.$$

В частности, для примитивных элементов $\xi_1^{2^m} \in \mathcal{K}$ имеет место формула

$$\Psi^2(\xi_1^{2^m}) = 0.$$

§ 8. $\cup_\infty$ - A_∞ -алгебры Хопфа

Для вычисления высших дифференциалов спектральной последовательности Адамса нам потребуется не только действие алгебры Дайера–Лашофа, но и E_∞ -структура. Однако эта структура является слишком большой и сложной. Поэтому мы воспользуемся только ее частью, состоящей из $\cup_i$ -произведений.

Цепной комплекс A будем называть $\cup_\infty$ -алгеброй, если заданы операции $\cup_i: A \otimes A \rightarrow A$, $i \geq 0$, называемые $\cup_i$ -произведениями, повышающие размерность на i и удовлетворяющие соотношениям

$$d(x \cup_i y) = d(x) \cup_i y + x \cup_i d(y) + x \cup_{i-1} y + y \cup_{i-1} x.$$

Дифференциальную коалгебру K будем называть $\cup_\infty$ -алгеброй Хопфа, если заданы $\cup_i$ -произведения $\cup_i: K \otimes K \rightarrow K$, удовлетворяющие следующему соотношению дистрибутивности:

$$\nabla(x \cup_i y) = \sum_k (x' \cup_{i-k} T^k y') \otimes (x'' \cup_k y''),$$

где $\nabla(x) = \sum x' \otimes x''$, $\nabla(y) = \sum y' \otimes y''$, $T: K \otimes K \rightarrow K \otimes K$ – перестановочное отображение, T^k – его k -я итерация.

ТЕОРЕМА 22. Кобар-конструкция FK над $\cup_\infty$ -алгеброй Хопфа K является $\cup_\infty$ -алгеброй. Более того, $\cup_i$ -произведения $\cup_i: FK \otimes FK \rightarrow FK$ однозначно определяются формулой

$$[x] \cup_i [y] = \begin{cases} [x \cup_{i-1} y], & i \geq 1, \\ [x, y], & i = 0, \end{cases}$$

и двумя соотношениями

$$\begin{aligned} (x_1 x_2) \cup_i [y] &= (x_1 \cup_i [y]) x_2 + x_1 (x_2 \cup_i [y]), \\ (x_1 x_2) \cup_i (y_1 y_2) &= \sum_k (x_1 \cup_{i-k} T^k y_1) (x_2 \cup_k y_2) \\ &\quad + (x_1 \cup_i (y_1 y_2)) x_2 + x_1 (x_2 \cup_i (y_1 y_2)) \\ &\quad + ((x_1 x_2) \cup_i y_1) y_2 + y_1 ((x_1 x_2) \cup_i y_2) \\ &\quad + x_1 (x_2 \cup_i y_1) y_2 + y_1 (x_1 \cup_i y_2) x_2, \end{aligned}$$

где $x_1, x_2, y_1, y_2 \in FK$, $y \in K$, $i \geq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, произведения $[x_1, \dots, x_n] \cup_i [y]$ определяются первым соотношением. А именно,

$$[x_1, \dots, x_n] \cup_i [y] = \sum_{k=1}^n [x_1, \dots, x_k \cup_i y, \dots, x_n].$$

Из второго соотношения теоремы следует, что для определения $\cup_i$ -произведений в общем случае

$$[x_1, \dots, x_n] \cup_i [y_1, \dots, y_m]$$

достаточно определить только $\cup_i$ -произведения $[x] \cup_i [y_1, \dots, y_m]$.

Имеем

$$\begin{aligned} d([y_1, \dots, y_m] \cup_{i+1} [x]) &= \sum_{k=1}^m [y_1, \dots, d(y_k), \dots, y_m] \cup_{i+1} [x] \\ &\quad + \sum_{k=1}^m [y_1, \dots, y'_k, y''_k, \dots, y_m] \cup_{i+1} [x] \\ &\quad + [y_1, \dots, y_m] \cup_{i+1} ([d(x)] + [x', x'']) \\ &\quad + [y_1, \dots, y_m] \cup_i [x] + [x] \cup_i [y_1, \dots, y_m]. \end{aligned}$$

Таким образом, произведение $[x] \cup_i [y_1, \dots, y_m]$ выражается через уже определенные произведения и произведения элементов меньшей размерности. Следовательно, $\cup_i$ -произведения определяются индуктивным образом.

Эта теорема дает формулы для $\cup_i$ -произведений в кобар-конструкциях. Однако они носят индуктивный характер и не являются простыми даже в случае, когда высшие $\cup_i$ -произведения ($i \geq 1$) на K тривиальны, т.е. когда K – коммутативная алгебра Хопфа.

$\cup_\infty$ -алгебру Хопфа K будем называть *коммутативной*, если коумножение $\nabla: K \rightarrow K \otimes K$ коммутативно.

ТЕОРЕМА 23. *Кобар-конструкция FK над коммутативной $\cup_\infty$ -алгеброй Хопфа K является коммутативной $\cup_\infty$ -алгеброй Хопфа. Таким образом, кобар-конструкцию в этом случае можно итерировать.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим коумножение $\nabla: FK \rightarrow FK \otimes FK$, положив

$$\nabla[x_1, \dots, x_n] = \sum [x_{i_1}, \dots, x_{i_p}] \otimes [x_{j_1}, \dots, x_{j_q}],$$

где сумма берется по всем (p, q) -перетасовкам набора $1, 2, \dots, n$. Непосредственная проверка показывает, что при этом будут выполняться требуемые соотношения.

Рассмотрим вопрос о том, какая структура имеется на гомологиях $\cup_\infty$ -алгебры Хопфа. Ясно, что на гомологиях $\cup_\infty$ -алгебры Хопфа K имеются структура $\cup_\infty$ -алгебры, состоящая из операций $\cup_i: K_* \otimes K_* \rightarrow K_*$, и структура A_∞ -коалгебры, состоящая из операций $\nabla_n: K_* \rightarrow K_*^{\otimes n+2}$. Но кроме этого имеются и другие операции вида

$$\Psi_{i,n}: K_* \otimes K_* \rightarrow K_*^{\otimes n+2}.$$

Для описания всех этих операций мы введем понятие $\cup_\infty$ - A_∞ -алгебры Хопфа.

A_∞ -коалгебру K будем называть $\cup_\infty$ - A_∞ -алгеброй Хопфа, если на кобар-конструкции $\tilde{F}K$ задана структура $\cup_\infty$ -алгебры, удовлетворяющая соотношениям

$$\begin{aligned} (x_1 x_2) \cup_i [y] &= (x_1 \cup_i [y]) x_2 + x_1 (x_2 \cup_i [y]), \\ (x_1 x_2) \cup_i (y_1 y_2) &= \sum_k (x_1 \cup_{i-k} T^k y_1) (x_2 \cup_k y_2) \\ &\quad + (x_1 \cup_i (y_1 y_2)) x_2 + x_1 (x_2 \cup_i (y_1 y_2)) \\ &\quad + ((x_1 x_2) \cup_i y_1) y_2 + y_1 ((x_1 x_2) \cup_i y_2) \\ &\quad + x_1 (x_2 \cup_i y_1) y_2 + y_1 (x_1 \cup_i y_2) x_2, \end{aligned}$$

где $x_1, x_2, y_1, y_2 \in FK$, $y \in K$, $i \geq 1$.

ТЕОРЕМА 24. *Если K — $\cup_\infty$ -алгебра Хопфа, то на ее гомологиях $K_* = H_*(K)$ имеются структура $\cup_\infty$ - A_∞ -алгебры Хопфа и цепная эквивалентность $\cup_\infty$ -алгебр $\tilde{F}K_* \simeq FK$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно [16], что гомологии K_* дифференциальной коалгебры K являются A_∞ -коалгеброй, причем имеют место отображения алгебр $\xi: \tilde{F}K_* \rightarrow FK$, $\eta: FK \rightarrow \tilde{F}K_*$ и алгебраическая цепная гомотопия $h: FK \rightarrow FK$, удовлетворяющие соотношениям $\eta \circ \xi = \text{Id}$, $d(h) = \xi \circ \eta - \text{Id}$. Остается только определить $\cup_i$ -произведения. Положим на образующих

$$[x] \cup_i [y] = \eta(\xi[x] \cup_i \xi[y]).$$

На остальных элементах $\cup_i$ -произведения определяются указанными выше соотношениями.

Применяя эту теорему к нестабильной коалгебре Милнора, получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 25. *На коалгебре Милнора $\mathcal{K}$ имеется структура $\cup_\infty$ - A_∞ -алгебры Хопфа.*

§ 9. Дифференциалы спектральной последовательности Адамса

Применим разработанные методы для вычисления высших дифференциалов спектральной последовательности Адамса стабильных гомотопических групп сфер. Для этого нужно вычислить дифференциал в комплексе $\tilde{F}\mathcal{K}$.

Поскольку каждый элемент в $\mathcal{K}$ может быть получен применением $\cup_i$ -произведений к элементу ξ_0 , то имеет место

ТЕОРЕМА 26. *Формулы для $\cup_i$ -произведений в коалгебре Милнора и структура $\cup_\infty$ -алгебры в кобар-конструкции $\tilde{F}\mathcal{K}$ полностью определяют дифференциал в $\tilde{F}\mathcal{K}$.*

Однако эти формулы для дифференциала носят индуктивный характер и очень сложны. Для их упрощения заменим коалгебру Милнора $\mathcal{K}$ и кобар-конструкцию $\tilde{F}\mathcal{K}$ на более простые объекты.

Отметим, что $\tilde{F}\mathcal{K}$ является неприведенной кобар-конструкцией. Для того чтобы получить из нее приведенную кобар-конструкцию, гомологии которой изоморфны члену E_∞ спектральной последовательности Адамса гомотопических групп сфер, нужно профакторизовать коалгебру Милнора $\mathcal{K}$ по ξ_0 .

Определим фильтрацию в $\tilde{F}\mathcal{K}$, считая фильтрацию элементов $\xi_{i_1} \dots \xi_{i_n} \in K$ равной n . Тогда первый член соответствующей спектральной последовательности будет изоморфен алгебре многочленов $PS^{-1}X$ над деkadстройкой над модулем X , порожденным элементами $\xi_m^{2^n}$. Будем обозначать элементы в $PS^{-1}X$ так же, как и элементы в кобар-конструкции, т.е. $[x_1, \dots, x_n]$, $x_i \in X$.

Имеет место отображение алгебр $\eta: F\mathcal{K} \rightarrow PS^{-1}X$, задаваемое формулой

$$\eta[x] = \begin{cases} [\xi_m^{2^n}], & x = \xi_m^{2^n}, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Обратное отображение $\xi: PS^{-1}X \rightarrow \mathcal{F}K$ может быть задано формулой

$$\xi([x_1, \dots, x_n]) = [x_1, \dots, x_n], \quad x_1 \leq \dots \leq x_n.$$

Из теории возмущений следует

ТЕОРЕМА 27. *На алгебре многочленов $PS^{-1}X$ имеется структура $\cup_\infty$ -алгебры, определенная на образующих формулами*

$$[x] \cup_i [y] = \begin{cases} 0, & i \geq 1, \quad x < y, \\ [x \cup_{i-1} x], & i \geq 1, \quad x = y, \\ [x, y], & i = 0, \quad x \leq y, \end{cases}$$

и удовлетворяющая соотношениям

$$\begin{aligned} (x_1 x_2) \cup_i [y] &= (x_1 \cup_i [y]) x_2 + x_1 (x_2 \cup_i [y]), \\ (x_1 x_2) \cup_i (y_1 y_2) &= \sum_k (x_1 \cup_{i-k} T^k y_1) (x_2 \cup_k y_2) \\ &\quad + (x_1 \cup_i (y_1 y_2)) x_2 + x_1 (x_2 \cup_i (y_1 y_2)) \\ &\quad + ((x_1 x_2) \cup_i y_1) y_2 + y_1 ((x_1 x_2) \cup_i y_2) \\ &\quad + x_1 (x_2 \cup_i y_1) y_2 + y_1 (x_1 \cup_i y_2) x_2, \end{aligned}$$

где $x_1, x_2, y_1, y_2 \in PS^{-1}X$, $y \in X$, $i \geq 1$.

Поскольку каждый элемент в $\tilde{PS}^{-1}X$ может быть получен из $[\xi_0]$ применением к нему $\cup_i$ -произведений, то имеет место

ТЕОРЕМА 28. *Формулы для $\cup_i$ -произведений в модуле X и соотношения для $\cup_i$ -произведений в $\tilde{PS}^{-1}X$ полностью определяют дифференциал в $\tilde{PS}^{-1}X$.*

Так же, как и раньше, эти формулы носят индуктивный характер.

Следуя обозначениям Адамса, положим $h_n = [\xi_1^{2^n}]$.

По индукции, используя формулу $h_n \cup_1 h_n = h_{n+1}$, покажем, что имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 29. *Дифференциал в $\tilde{PS}^{-1}X$ на элементе h_n выражается формулой*

$$d(h_n) = \sum_{i=0}^{n-1} [\xi_i] h_{n-i}^{2^i}.$$

Действительно, ясно, что $d(h_1) = h_{-1}h_1$. Для элемента h_2 имеем

$$\begin{aligned} d(h_2) &= d(h_1 \cup_1 h_1) = (h_{-1}h_1 \cup_1 h_1 + h_1 \cup_1 (h_{-1}h_1)) \\ &= (h_{-1}h_1) \cup_2 (h_{-1}h_1) = h_{-1}h_2 + h_0h_1^2. \end{aligned}$$

Предположим, что формула верна для n , и докажем ее справедливость для $n+1$. Имеем

$$\begin{aligned} d(h_{n+1}) &= d(h_n \cup_1 h_n) = d(h_n) \cup_1 h_n + h_n \cup_1 d(h_n) \\ &= \left(\sum_{i=0}^{n-1} [\xi_i] h_{n-i}^{2^i} \right) \cup_2 \left(\sum_{i=0}^{n-1} [\xi_i] h_{n-i}^{2^i} \right) \\ &= \sum_{i=0}^n [\xi_i] h_{n+1-i}^{2^i}. \end{aligned}$$

§ 10. Операции Дайера–Лашофа и арф-инвариант

Пусть Y – E_∞ -пространство. Тогда на его гомологиях действует алгебра Дайера–Лашофа R . Это действие вместе с функциональными гомологическими операциями индуцирует на кобар-конструкции $\tilde{F}(K, K, Y_*)$ перестановочное с дифференциалом действие алгебры Дайера–Лашофа

$$\mu: R \otimes \tilde{F}(K, K, Y_*) \rightarrow \tilde{F}(K, K, Y_*).$$

Соответствующее действие $\mu: R \otimes \tilde{F}(K, Y_*) \rightarrow \tilde{F}(K, Y_*)$ не является перестановочным с дифференциалом.

Таким образом, на гомологиях комплекса $\tilde{F}(K, Y_*)$, которые изоморфны члену E^∞ спектральной последовательности Адамса гомотопических групп пространства Y , нет естественного действия алгебры Дайера–Лашофа. Тем не менее, действие алгебры Дайера–Лашофа на $\tilde{F}(K, Y_*)$ продолжается до действия

$$\mu: \tilde{F}(K, R) \otimes \tilde{F}(K, Y_*) \rightarrow \tilde{F}(K, Y_*),$$

которое уже будет перестановочно с дифференциалом.

Это действие индуцирует действие на гомологиях

$$\mu_*: H_*(\tilde{F}(K, R)) \otimes H_*(\tilde{F}(K, Y_*)) \rightarrow H_*(\tilde{F}(K, Y_*)).$$

Таким образом, на члене E^∞ спектральной последовательности Адамса гомотопических групп E_∞ -пространства Y действует алгебра $H_*(\tilde{F}(K, R))$, которая представляет собой член E^∞ спектральной последовательности Адамса стабильных гомотопических групп сфер. Однако использование этой алгебры ограничено в силу того, что ее вычисление весьма затруднительно.

Будем использовать действие алгебры Дайера–Лашофа на комплексе $\tilde{P}S^{-1}X$, гомологии которого изоморфны члену E^∞ спектральной последовательности Адамса.

Для краткости комплекс $\tilde{P}S^{-1}X$ будем обозначать через H , а его n -мерные гомологии – через H_n .

Ясно, что если u_n является циклом в H , то $e_0(u_n) = u_n \cup_0 u_n$ также является циклом. Поэтому имеет место операция возведения в квадрат

$$e_0 = Q^n: H_n \rightarrow H_{2n}.$$

Рассмотрим $\cup_1$ -произведение $e_1(u_n) = u_n \cup_1 u_n$. Если u_n является циклом, то $e_1(u_n)$, вообще говоря, не является циклом. А именно, для цикла u_n имеет место формула

$$d(e_1(u_n)) = \binom{n}{1} h_0 e_0(u_n).$$

Если n четно, т.е. $n = 2k$, то $e_1(u_n)$ является циклом и, следовательно, соответствие $u_n \mapsto e_1(u_n)$ определяет операцию

$$e_1 = Q^{2k+1}: H_{2k} \rightarrow H_{4k+1}.$$

Если n нечетно, т.е. $n = 2k + 1$, то $d(e_1(u_n)) = h_0 e_0(u_n)$. Потребуем, чтобы элемент $e_0(u_n)$ был гомологичен нулю, т.е. существовал элемент y_{2n+1} , для которого $d(y_{2n+1}) = e_0(u_n)$. Тогда элемент $\tilde{e}_1(u_n) = e_1(u_n) + h_0 y_{2n+1}$ будет циклом и, следовательно, соответствие $u_n \mapsto \tilde{e}_1(u_n)$ определит операцию

$$\tilde{e}_1 = \tilde{Q}^{2k+2}: \text{Ker}(e_0) \subset H_{2k+1} \rightarrow H_{4k+3}.$$

Значения этой операции могут не попадать в $\text{Ker}(e_0)$, и поэтому ее, вообще говоря, нельзя итерировать. Выясним, в каком случае значения операции $\tilde{e}_1$ попадают в $\text{Ker}(e_0)$.

Рассмотрим элемент $e_0(y_{2n+1})$. Он является циклом, так как $d(e_0(y_{2n+1})) = e_1(e_0(u_n)) = 0$. Его класс гомологий определяет значение вторичной операции по отношению к операции e_0 на элементе u_n . Обозначим эту операцию $e_0^{(2)}: H_n \rightarrow H_{4n+2}$.

Вычислим, например, $e_0^{(2)}(h_1^2)$. Имеем $h_1^4 = d(h_1[\xi_2]^2 + h_0^2[\xi_2^2])$. Класс гомологий элемента $(h_1[\xi_2]^2 + h_0^2[\xi_2^2])^2$ равен элементу $h_1P_1(h_1)$ и, следовательно,

$$e_0^{(2)}(h_1^2) = h_1P_1(h_1) \neq 0.$$

Покажем, что операция $e_0^{(2)}$ дает препятствия для существования двукратной композиции операции $\tilde{e}_1$. Пусть $e_0^{(2)}(u_n) = 0$. Это означает, что элемент $e_0(y_{2n+1})$ гомологичен нулю, т.е. существует элемент z_{4n+3} , для которого $d(z_{4n+3}) = e_0(y_{2n+1})$. В этом случае будем иметь

$$\begin{aligned} e_0(\tilde{e}_1(u_n)) &= e_0(e_1(u_n) + h_0y_{2n+1}) = e_2(e_0(u_n)) + h_0^2e_0(y_{2n+1}) \\ &= d(e_1(y_{2n+1}) + h_0z_{4n+3} + h_0^2z_{4n+3}). \end{aligned}$$

Обозначим $\tilde{y}_{4n+3} = e_1(y_{2n+1}) + h_0z_{4n+3} + h_0^2z_{4n+3}$. Тогда элемент

$$\tilde{e}_1\tilde{e}_1(u_n) = e_1(\tilde{e}_1(u_n)) + h_0\tilde{y}_{4n+3}$$

будет циклом и, значит, определена двукратная композиция операции $\tilde{e}_1$.

Аналогичным образом определяются препятствия и композиции высших порядков операции $\tilde{e}_1$.

Рассмотрим теперь $\cup_2$ -произведение $e_2(u_n) = u_n \cup_2 u_n$. Если u_n является циклом, то $e_2(u_n)$, вообще говоря, не является циклом. А именно, для цикла u_n имеет место формула

$$d(e_2(u_n)) = \binom{n+1}{1}h_0e_1(u_n) + \binom{n}{2}h_1e_0(u_n).$$

Если $n = 4k + 1$, то $e_2(u_n)$ является циклом и, следовательно, соответствие $u_n \mapsto e_2(u_n)$ определяет операцию

$$e_2 = Q^{4k+3}: H_{4k+1} \rightarrow H_{8k+4}.$$

Если $n = 4k + 3$, то $d(e_2(u_n)) = h_1e_0(u_n)$. Потребуем, чтобы элемент $e_0(u_n)$ был гомологичен нулю, т.е. существовал элемент y_{2n+1} , для которого $d(y_{2n+1}) = e_0(u_n)$. Тогда элемент $\tilde{e}_2(u_n) = e_2(u_n) + h_1y_{2n+1}$ будет циклом и, следовательно, соответствие $u_n \mapsto \tilde{e}_2(u_n)$ будет определять операцию

$$\tilde{e}_2 = \tilde{Q}^{4k+5}: \text{Ker}(e_0) \subset H_{4k+3} \rightarrow H_{8k+8}.$$

Так же, как и раньше, определяют итерация этой операции и препятствие для ее существования.

Если $n = 4k$, то $d(e_2(u_n)) = h_0e_1(u_n)$. Потребуем, чтобы элемент $e_1(u_n)$ был гомологичен нулю, т.е. существовал элемент y_{2n+2} , для которого $d(y_{2n+2}) =$

$e_1(u_n)$. Тогда элемент $\tilde{e}_2(u_n) = e_2(u_n) + h_0 y_{2n+2}$ будет циклом и, следовательно, соответствие $u_n \mapsto \tilde{e}_2(u_n)$ будет определять операцию

$$e_2 = Q^{4k+2}: \text{Ker}(e_1) \subset H_{4k} \rightarrow H_{8k+2}.$$

Так же, как и раньше, определяются итерация этой операции и препятствие для ее существования.

Нас в основном будет интересовать случай, когда $n = 4k + 2$. В этом случае имеет место формула $d(e_2(u_n)) = h_0 e_1(u_n) + h_1 e_0(u_n)$. Потребуем, чтобы элементы $e_0(u_n), e_1(u_n)$ были гомологичны нулю, т.е. существовали элементы y_{2n+1}, y_{2n+2} , для которых $d(y_{2n+1}) = e_0(u_n)$, $d(y_{2n+2}) = e_1(u_n)$.

Тогда элемент $\tilde{e}_2(u_n) = e_2(u_n) + h_0 y_{2n+2} + h_1 y_{2n+1}$ будет циклом и, следовательно, соответствие $u_n \mapsto \tilde{e}_2(u_n)$ определит операцию

$$\tilde{e}_2 = \tilde{Q}^{4k+4}: \text{Ker}(e_0) \cap \text{Ker}(e_1) \subset H_{4k+2} \rightarrow H_{8k+6}.$$

Применим полученные формулы для вычисления высших дифференциалов на элементах h_n^2 .

ТЕОРЕМА 30. *Для дифференциалов d_i спектральной последовательности Адамса имеют место равенства $d_i(h_n^2) = 0$, $1 \leq i \leq 6$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу сказанного выше полный дифференциал на элементах h_n^2 выражается формулой

$$d(h_n^2) = e_1(d(h_n)) = e_1(h_0 h_{n-1}^2 + [\xi_2] h_{n-2}^4 + \dots) = h_1 h_{n-1}^4 + F^9,$$

где F^9 обозначает элементы фильтрации 9.

Из этого, в частности, следует, что $d_2(h_n^2) = 0$.

Обозначим $x_n = h_n^2$, $y_{n-1} = e_1(h_{n-2}[\xi_2^{2^{n-2}}]) = h_{n-1}[\xi_2^{2^{n-2}}]^2 + h_{n-2}^2[\xi_2^{2^{n-1}}]$. Имеем

$$d(y_{n-1}) = e_2(h_{n-2}^2 h_{n-1} + F^4) = h_{n-1}^4 + F^6.$$

Следовательно, $d(x_n + h_1 y_{n-1}) \in F^7$. Таким образом, на элементах h_n^2 спектральной последовательности Адамса дифференциалы d_2, d_3, d_4 равны нулю.

Для вычисления дифференциалов более высоких размерностей рассмотрим элементы $\tilde{x}_{n-1} = x_{n-1} + h_1 y_{n-2}$. Тогда

$$\begin{aligned} e_2(x_{n-1}) &= h_n^2 + h_2 e_1(y_{n-2}) + h_1^2 e_2(y_{n-2}), \\ d(e_2(\tilde{x}_{n-1})) &= e_3(d(\tilde{x}_{n-1})) + h_0 e_1(\tilde{x}_{n-1}) + h_1 e_0(\tilde{x}_{n-1}) \\ &= e_3(F^7) + h_0(h_2 e_0(y_{n-2}) + h_1^2 e_1(y_{n-2})) + h_1(h_n^4 + h_1^2 e_0(y_{n-2})). \end{aligned}$$

Добавим к элементу $e_2(\tilde{x}_{n-1})$ элементы $h_1 e_3(y_{n-2}), h_2 e_1(y_{n-2})$ и рассмотрим элемент

$$z_n = e_2(x_{n-1}) + h_1 e_3(y_{n-2}) + h_2 e_1(y_{n-2}).$$

Имеем

$$\begin{aligned} d(h_1 e_3(y_{n-2})) &= h_1 h_n^4 + h_1^2 e_1(y_{n-2}) + h_1[\xi_2]e_0(y_{n-2}) + F^9, \\ d(h_2 e_1(y_{n-2})) &= h_2 h_0 e_0(y_{n-2}) + h_0 h_1^2 e_1(y_{n-2}) + F^{11}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$d(z_n) = h_1^2 e_1(y_{n-2}) + h_1[\xi_2]e_0(y_{n-2}) + F^9.$$

Обозначим g_{n-4} класс гомологий, представимый циклом

$$[\xi_2^{2^{n-3}}]^4 + h_{n-3}[\xi_2^{2^{n-4}}]^2 h_n + h_{n-4}^2[\xi_2^{2^{n-3}}]h_n + h_{n-2}^3[\xi_2^{2^n}].$$

Тогда

$$e_1(y_{n-2}) = h_{n-1}[\xi_2^{2^{n-3}}]^4 + h_{n-3}^4[\xi_2^{2^{n-1}}] + h_{n-2}^3 h_{n-1}[\xi_2^{2^{n-2}}] = g_{n-4} h_{n-1}.$$

Известно, что в члене E^1 спектральной последовательности Адамса $g_0 h_3 \sim 0$ и, следовательно, $e_1(y_{n-2}) = g_{n-4} h_{n-1} \sim 0$, т.е. существуют элементы u_{n-1} , для которых $d_1(u_{n-1}) = e_1(y_{n-2})$. Из формулы для дифференциала d_2 на элементах $[\xi_i^{2^n}]$ следует, что $d_2(u_{n-1})$ представляется в виде $d_2(u_{n-1}) = h_0 v_{n-1}$.

Поскольку $d(e_1(y_{n-2})) = h_0 e_0(y_{n-2})$, то $d_1(v_{n-1}) = e_0(y_{n-2})$ и, следовательно, $d(h_1^2 u_{n-1} + h_1[\xi_2]v_{n-1}) = h_1^2 e_1(y_{n-2}) + h_1[\xi_2]e_0(y_{n-2}) + F^9$.

Таким образом, для элемента $t_n = z_n + h_1^2 u_{n-1} + h_1[\xi_2]v_{n-1}$ имеем $d(t_n) \in F^9$ и, следовательно, $d_i(h_n^2) = 0$, если $1 \leq i \leq 6$.

Из этой теоремы, в частности, следует результат М. Маховальда о том, что элементы h_4^2, h_5^2 доживают до члена E^∞ спектральной последовательности Адамса.

Действительно, элемент h_3^4 гомологичен нулю, т.е. существует элемент y , для которого $d(y) = h_3^4$. Значит, элемент $h_4^2 + h_1 y$ является циклом и, следовательно, элемент h_4^2 доживает до члена E^∞ .

Повторяя доказательство теоремы 30 для элемента $x_4 = h_4^2$, получим, что элемент $t_5 = z_5 + h_1^2 u_4 + h_1[\xi_2]v_4$ является циклом и, следовательно, элемент h_5^2 доживает до члена E^∞ спектральной последовательности Адамса.

В заключение автор выражает благодарность профессорам М. Маховальду и Р. Брунеру за помощь в вычислении дифференциалов спектральной последовательности Адамса.

Список литературы

1. *Adams J. F.* On the structure and applications of the Steenrod algebra // *Comm. Math. Helv.* 1958. V. 32. P. 180–214.
2. *Stasheff J. D.* Homotopy associativity of H -spaces // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1963. V. 108. № 2. P. 275–312.
3. *May J. P.* The geometry of iterated loop spaces // *Lect. Notes in Math.* 1972. V. 271.
4. *Смирнов В. А.* О коцепном комплексе топологического пространства // *Матем. сб.* 1981. Т. 115. № 1. С. 146–158.
5. *Смирнов В. А.* Гомотопическая теория коалгебр // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1985. Т. 49. № 6. С. 1302–1321.
6. *Смирнов В. А.* Вторичные гомологические операции в гомология операды E // *Изв. РАН. Сер. матем.* 1992. Т. 56. № 2. С. 449–468.
7. *Steenrod N. E.* Cohomology invariants of mappings // *Ann. of Math.* 1949. V. 50. P. 954–988.
8. *Peterson F. P.* Functional cohomology operations // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1957. V. 86. P. 187–197.
9. *Смирнов В. А.* Функциональные гомологические операции и слабый гомотопический тип // *Матем. заметки.* 1989. Т. 45. № 5. С. 76–86.
10. *Browder W.* The Kervaire invariant of framed manifolds and its generalizations // *Annals of Math.* 1969. V. 90. P. 157–186.
11. *Barrat M. G., Jones J. D. S., Mahowald M. E.* The Kervaire invariant and the Hopf invariant // *Lecture Notes in Math.* 1987. V. 1286. P. 135–173.
12. *Bousfield A. K., Kan D. M.* The homotopy spectral sequence of a spaces with coefficients in a ring // *Topology.* 1972. V. 11. P. 79–106.
13. *Gugenheim V. K., Lamb L. A., Stasheff J. D.* Perturbation theory in Differential Homological Algebra // *Ill. J. of Math.* 1991. V. 35. № 3. P. 357–373.
14. *Araki S., Kudo T.* Topology of H_n -spaces and H_n -squaring operations // *Mem. Fac. Sci. Kyusyu Univ. Ser. A.* 1956. V. 10. № 2. P. 85–120.
15. *Dyer E., Lashof R. K.* Homology of iterated loop spaces // *Amer. J. of Math.* 1962. V. 84. № 1. P. 35–88.
16. *Кадешивили Т. В.* К теории гомологий расслоенных пространств // *УМН.* 1980. Т. 35. № 3. С. 183–188.

E-mail: V.Smirnov@ru.net

Поступило в редакцию
31.X.2000
9.VI.2001