Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Краснов, О вещественных квадратичных комплексах прямых, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2010, том 74, выпуск 6, 157–182

DOI: <https://doi.org/10.4213/im4060>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 12:44:15

УДК 512.7

В. А. Краснов

О вещественных квадратичных комплексах прямых

Найдены топологические типы вещественной части куммеровой поверхности, ассоциированной с вещественным трехмерным квадратичным комплексом прямых. Показано, что топологический тип вещественной части этой поверхности зависит от количества вещественных особых точек, причем он определяется их количеством, если они существуют, в противном случае вещественная часть куммеровой поверхности может быть пустым множеством или состоять из одного либо двух торов.

Библиография: 11 наименований.

Ключевые слова: квадратичный комплекс, биквадрика, пучок квадрик, куммерова поверхность, индекс-функция.

Введение

Приведем несколько обозначений и определений. Пусть $V \subset \mathbb{P}^5$ – трехмерное комплексное проективное алгебраическое многообразие, заданное системой уравнений

$$q_1(X_0, \dots, X_5) = 0, \quad q_2(X_0, \dots, X_5) = 0, \quad (0.1)$$

где $q_1(X_0, \dots, X_5) = q_1(X)$, $q_2(X_0, \dots, X_5) = q_2(X)$ – ненулевые непропорциональные квадратичные формы с комплексными коэффициентами, $X_0, \dots, X_5$ – однородные координаты в $\mathbb{P}^5$. Такое многообразие будем называть *биквадрикой*. Биквадрике V однозначно соответствует пучок квадрик в $\mathbb{P}^5$

$$\lambda_1 q_1(X) + \lambda_2 q_2(X) = 0, \quad (0.2)$$

который определяет прямую в пространстве квадрик $\mathbb{P}^{20}$, где λ_1, λ_2 являются однородными координатами этой прямой. Таким образом, множество биквадрик содержится в многообразии Грассмана $\mathbb{G}(2, 21)$, которое обозначим через $\mathbb{G}$. Размерность многообразия Грассмана $\mathbb{G}$ есть $2 \cdot 19 = 38$. Заметим, что биквадрика V , заданная системой уравнений (0.1), неособая тогда и только тогда, когда уравнение

$$\det(\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2) = 0, \quad (0.3)$$

где M_1, M_2 – матрицы коэффициентов квадратичных форм $q_1(X), q_2(X)$, не имеет кратных корней на комплексной проективной прямой $\mathbb{P}^1$ (см., например, [1], [2]). Множество точек $p \in \mathbb{G}$, для которых это уравнение имеет кратные корни, образует дискриминантную гиперповерхность $\Delta \subset \mathbb{G}$.

Через $\mathbb{G}^*$ обозначим разность $\mathbb{G} \setminus \Delta$, это множество параметризует неособые биквадрики, а через $\mathbb{R}\mathbb{G}, \mathbb{R}\mathbb{G}^*$ обозначим множества вещественных точек из $\mathbb{G}, \mathbb{G}^*$ соответственно. Если $p \in \mathbb{G}^*$, то через V_p обозначим соответствующую биквадрику. Заметим, что если $p \in \mathbb{R}\mathbb{G}^*$, то комплексная биквадрика V_p может быть задана системой уравнений (0.1) с вещественными коэффициентами.

Тогда на комплексной биквадрике V_p определена инволюция комплексного сопряжения $\tau: V_p \rightarrow V_p$. Пара (V_p, τ) называется *вещественной биквадрикой*, мы будем ее также обозначать через V_p , так как инволюция $\tau: V_p \rightarrow V_p$ однозначно восстанавливается из инволюции комплексного сопряжения $\tau: \mathbb{P}^5 \rightarrow \mathbb{P}^5$ и вложения $V_p \hookrightarrow \mathbb{P}^5$. Множество вещественных точек биквадрики V_p обозначается через $\mathbb{R}V_p$ и называется *вещественной частью биквадрики V_p* . Заметим, что $\mathbb{R}V_p$ равно множеству неподвижных точек V_p^τ инволюции $\tau: V_p \rightarrow V_p$.

Множество $\mathbb{R}\mathbb{G}^*$ является несвязным в евклидовой топологии. Компоненты связности топологического пространства $\mathbb{R}\mathbb{G}^*$ называются *жесткими изотопическими классами* неособых вещественных биквадрик в $\mathbb{P}^5$ (см. аналогичное определение для кривых в [3]). Жесткие изотопические классы вещественных биквадрик описаны в [4]. Существует всего девять таких классов, которые в работе [5] обозначены через (см. подробности в § 1)

$$G_0, G_2, G(4), G(6), G(1, 1, 2), G(1, 1, 4), G(1, 2, 3), G(2, 2, 2), G(1, 1, 1, 1, 2).$$

Пусть квадратичная форма $q_1(X)$ имеет вид $X_0X_1 - X_2X_3 + X_4X_5$; тогда биквадрика V , определенная системой уравнений (0.1), называется *квадратичным комплексом прямых* (см. [6], [7]). Заметим, что квадрика

$$X_0X_1 - X_2X_3 + X_4X_5 = 0$$

называется *квадрикой Клейна* (см. [7]), она равна образу многообразия Грассмана $\mathbb{G}(2, 4)$ при отображении Плюккера

$$X_0 = p_{01}, \quad X_1 = p_{23}, \quad X_2 = p_{02}, \quad X_3 = p_{13}, \quad X_4 = p_{03}, \quad X_5 = p_{12},$$

где $p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{12}, p_{13}, p_{23}$ – плюккеровы координаты в $\mathbb{G}(2, 4)$. Далее многообразие Грассмана $\mathbb{G}(2, 4)$ обозначается через $\mathcal{G}$, а квадрика Клейна в $\mathbb{P}^5$ обозначается через $\mathcal{Q}$. Отображение Плюккера задает изоморфизм между многообразиями $\mathcal{G}$, $\mathcal{Q}$. Нетрудно показать, что в каждой компоненте связности $G_0, G_2, G(4), G(6), G(1, 1, 2), G(1, 1, 4), G(1, 2, 3), G(2, 2, 2), G(1, 1, 1, 1, 2)$ существует биквадрика, которая является квадратичным комплексом прямых.

С каждым квадратичным комплексом V ассоциирована куммерова поверхность S (см. [6, гл. 6], [7] и § 2 настоящей статьи). Пусть $\tilde{S} \rightarrow S$ – минимальное разрешение особенностей поверхности S . Тогда неособая поверхность $\tilde{S}$ является КЗ-поверхностью.

Если V – вещественный квадратичный комплекс прямых, то $S, \tilde{S}$ – вещественные поверхности, поэтому определены их вещественные части $\mathbb{R}S, \mathbb{R}\tilde{S}$. В настоящей работе мы вычисляем всевозможные топологические типы вещественной куммеровой поверхности $\mathbb{R}S$ и вещественной КЗ-поверхности $\mathbb{R}\tilde{S}$. Прежде чем сформулировать соответствующую теорему, введем несколько обозначений.

Мы рассмотрим три топологические поверхности Π_1, Π_2, Π_3 с особыми точками. Эти поверхности строятся следующим образом. Для построения поверхности Π_1 рассмотрим две двумерные сферы Σ, Σ' , на каждой из которых отметим четыре точки:

$$s_1, s_2, s_3, s_4 \in \Sigma, \quad s'_1, s'_2, s'_3, s'_4 \in \Sigma'.$$

Поверхность Π_1 получается из сфер Σ, Σ' отождествлением точек $s_i, s'_i, i = 1, 2, 3, 4$. Для построения поверхности Π_2 рассмотрим четыре двумерные сферы $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma'_1, \Sigma'_2$, на каждой из которых отметим четыре точки:

$$\begin{aligned} s_{11}, s_{12}, t_{11}, t_{12} &\in \Sigma_1, & s_{21}, s_{22}, t_{21}, t_{22} &\in \Sigma_2, \\ s'_{11}, s'_{12}, t'_{11}, t'_{12} &\in \Sigma'_1, & s'_{21}, s'_{22}, t'_{21}, t'_{22} &\in \Sigma'_2. \end{aligned}$$

Поверхность Π_2 получается из сфер $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma'_1, \Sigma'_2$ отождествлением точек s_{ij}, s'_{ij} , а также точек t_{1j}, t_{2j} с точками t'_{2j}, t'_{1j} соответственно, $i, j = 1, 2$. Для построения поверхности Π_3 возьмем восемь двумерных сфер $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4, \Sigma'_1, \Sigma'_2, \Sigma'_3, \Sigma'_4$, на каждой из которых отметим четыре точки:

$$\begin{aligned} s_{11}, s_{12}, s_{13}, s_{14} &\in \Sigma_1, & s_{21}, s_{22}, s_{23}, s_{24} &\in \Sigma_2, \\ s_{31}, s_{32}, s_{33}, s_{34} &\in \Sigma_3, & s_{41}, s_{42}, s_{43}, s_{44} &\in \Sigma_4, \\ s'_{11}, s'_{12}, s'_{13}, s'_{14} &\in \Sigma'_1, & s'_{21}, s'_{22}, s'_{23}, s'_{24} &\in \Sigma'_2, \\ s'_{31}, s'_{32}, s'_{33}, s'_{34} &\in \Sigma'_3, & s'_{41}, s'_{42}, s'_{43}, s'_{44} &\in \Sigma'_4. \end{aligned}$$

Поверхность Π_3 получается из сфер $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4, \Sigma'_1, \Sigma'_2, \Sigma'_3, \Sigma'_4$ отождествлением точек $s_{ij}, s'_{ji}, i, j = 1, 2, 3, 4$.

Через T обозначим двумерный тор $S^1 \times S^1$, через $2T, 4T$ – несвязные объединения двух и четырех таких торов, а через P_g – связную компактную ориентируемую топологическую поверхность рода g .

Если V_p – вещественный квадратичный комплекс прямых, то через A_p обозначим множество прямых на $V_p \subset \mathbb{P}^5$. Это множество является абелевой поверхностью, причем определено двулистное накрытие $A_p \rightarrow S_p$ с шестнадцатью точками ветвления, где S_p – вещественная куммерова поверхность, ассоциированная с вещественным квадратичным комплексом V_p . В настоящей статье будет доказана следующая

ТЕОРЕМА 0.1. Пусть V_p – вещественный квадратичный комплекс прямых, где $p \in \mathbb{R}\mathbb{G}^*$, S_p – куммерова поверхность, ассоциированная с квадратичным комплексом прямых V_p . Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если $p \in G_0 \cup G_2 \cup G(4) \cup G(1, 1, 2) \cup G(1, 1, 4) \cup G(2, 2, 2) \cup G(1, 1, 1, 2)$, то множества $\mathbb{R}S_p, \mathbb{R}\tilde{S}_p$ непустые; если $p \in G(6)$, то множества $\mathbb{R}S_p, \mathbb{R}\tilde{S}_p$ пустые; если $p \in G(1, 2, 3)$, то при некоторых p множества $\mathbb{R}S_p, \mathbb{R}\tilde{S}_p$ пустые, а при некоторых p они непустые;

2) если $p \in G_0 \cup G_2$, то двулистное накрытие $A_p \rightarrow S_p$ имеет вещественные точки ветвления, причем поверхность $\mathbb{R}S_p$ гомеоморфна поверхности Π_1 , а поверхность $\mathbb{R}\tilde{S}_p$ гомеоморфна P_3 ;

3) если $p \in G(4)$, то двулистное накрытие $A_p \rightarrow S_p$ не имеет вещественных точек ветвления, а поверхности $\mathbb{R}S_p, \mathbb{R}\tilde{S}_p$ гомеоморфны тору T ;

4) если $p \in G(1, 1, 2)$ и двулистное накрытие $A_p \rightarrow S_p$ имеет вещественные точки ветвления, то поверхность $\mathbb{R}S_p$ гомеоморфна поверхности Π_2 , а поверхность $\mathbb{R}\tilde{S}_p$ гомеоморфна P_5 ;

5) если $p \in G(1, 1, 2)$ и двулистное накрытие $A_p \rightarrow S_p$ не имеет вещественных точек ветвления, то поверхности $\mathbb{R}S_p, \mathbb{R}\tilde{S}_p$ гомеоморфны тору T ;

6) если $p \in G(1, 1, 4)$, то двулистное накрытие $A_p \rightarrow S_p$ не имеет вещественных точек ветвления, а поверхности $\mathbb{R}S_p, \mathbb{R}\tilde{S}_p$ гомеоморфны несвязному объединению двух торов $2T$;

7) если $p \in G(1, 2, 3)$ и множество $\mathbb{R}S_p$ непустое, то двулистное накрытие $A_p \rightarrow S_p$ не имеет вещественных точек ветвления, а поверхности $\mathbb{R}S_p, \mathbb{R}\tilde{S}_p$ гомеоморфны несвязному объединению двух торов $2T$;

8) если $p \in G(2, 2, 2)$, то двулистное накрытие $A_p \rightarrow S_p$ не имеет вещественных точек ветвления, а поверхности $\mathbb{R}S_p, \mathbb{R}\tilde{S}_p$ гомеоморфны несвязному объединению двух торов $2T$;

9) если $p \in G(1, 1, 1, 1, 2)$ и двулистное накрытие $A_p \rightarrow S_p$ имеет вещественные точки ветвления, то поверхность $\mathbb{R}S_p$ гомеоморфна поверхности Π_3 , а поверхность $\mathbb{R}\tilde{S}_p$ гомеоморфна P_9 ;

10) если $p \in G(1, 1, 1, 1, 2)$ и двулистное накрытие $A_p \rightarrow S_p$ не имеет вещественных точек ветвления, то поверхности $\mathbb{R}S_p, \mathbb{R}\tilde{S}_p$ гомеоморфны несвязному объединению двух торов $2T$.

Заметим, что мы проверяем реализуемость условий в утверждениях 4), 5), 7), 9), 10) теоремы 0.1. Однако эта теорема не указывает, когда эти условия реализуются. Заметим, что квадратичный комплекс прямых является биквадрикой с отмеченной квадрикой (квадрикой Клейна), проходящей через эту биквадрику.

Пусть $V \subset \mathbb{P}^5$ – неособая биквадрика; тогда она определяет линейный пучок квадрик Q_a , $a \in L \subset \mathbb{P}^{20}$, проходящих через эту биквадрику. Отметим среди этих квадрик одну неособую квадрику Q . Полученный пучок квадрик будем обозначать через (V, Q) и называть *отмеченным пучком квадрик*. Каждый такой пучок задается системой уравнений вида (0.1), где первое уравнение определяет неособую квадрику, которая считается отмеченной. Множество отмеченных комплексных пучков квадрик обозначим через $\mathbb{B}$. Рассмотрим комплексно-аналитическое отображение $\pi: \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{G}^*$, которое паре $(V_p, Q) \in \mathbb{B}$ сопоставляет точку $p \in \mathbb{G}^*$. Во множестве вещественных точек $\mathbb{RB}$, которое состоит из пар (V, Q) , где биквадрика V и квадрика Q вещественные, рассмотрим подмножество $\mathcal{B}$, состоящее из таких пар (V, Q) , что квадрика Q задается уравнением $q(X) = 0$, в котором квадратичная форма $q(X)$ имеет сигнатуру, равную нулю. Оказывается, что отображение $\pi: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{RG}^*$ сюръективно.

Прообразы компонент связности

$$G_0, G_2, G(4), G(6), G(1, 1, 2), G(1, 1, 4), G(1, 2, 3), G(2, 2, 2), G(1, 1, 1, 1, 2)$$

при отображении $\pi: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{RG}^*$ будем обозначать через

$$\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}(4), \mathcal{B}(6), \mathcal{B}(1, 1, 2), \mathcal{B}(1, 1, 4), \mathcal{B}(1, 2, 3), \mathcal{B}(2, 2, 2), \mathcal{B}(1, 1, 1, 1, 2)$$

соответственно. Оказывается, что множества $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}(4), \mathcal{B}(6), \mathcal{B}(1, 1, 4), \mathcal{B}(2, 2, 2)$ связные, а каждое из множеств $\mathcal{B}(1, 1, 2), \mathcal{B}(1, 2, 3), \mathcal{B}(1, 1, 1, 1, 2)$ состоит из двух компонент связности. Компоненты связности множеств $\mathcal{B}(1, 1, 2), \mathcal{B}(1, 2, 3), \mathcal{B}(1, 1, 1, 1, 2)$ обозначены в § 1 через

$$\mathcal{B}'(1, 1, 2), \mathcal{B}''(1, 1, 2), \mathcal{B}'(1, 2, 3), \mathcal{B}''(1, 2, 3), \mathcal{B}'(1, 1, 1, 1, 2), \mathcal{B}''(1, 1, 1, 1, 2)$$

соответственно. Заметим, что обозначение выбрано не произвольно, а указано правило, по которому разделяются компоненты в каждой паре (см. §1). Оказывается, что в каждой из этих компонент связности имеется отмеченный пучок квадрик (V, Q) , где V – квадратичный комплекс прямых, а Q – квадрика Клейна. В настоящей работе доказывается также

ТЕОРЕМА 0.2. Пусть V_p – вещественный квадратичный комплекс прямых, где $p \in \mathcal{B}$, S_p – куммерова поверхность, ассоциированная с квадратичным комплексом прямых V_p . Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если $p \in \mathcal{B}(4) \cup \mathcal{B}''(1, 1, 2)$, то поверхности $\mathbb{R}S_p, \mathbb{R}\tilde{S}_p$ гомеоморфны T ;
- 2) если $p \in \mathcal{B}'(1, 1, 2)$, то поверхность $\mathbb{R}S_p$ гомеоморфна Π_2 , а поверхность $\mathbb{R}\tilde{S}_p$ гомеоморфна P_5 ;
- 3) если $p \in \mathcal{B}(1, 1, 4) \cup \mathcal{B}'(1, 2, 3) \cup \mathcal{B}(2, 2, 2) \cup \mathcal{B}''(1, 1, 1, 1, 2)$, то поверхности $\mathbb{R}S_p, \mathbb{R}\tilde{S}_p$ гомеоморфны $2T$;
- 4) если $p \in \mathcal{B}''(1, 2, 3)$, то множества $\mathbb{R}S_p, \mathbb{R}\tilde{S}_p$ пустые;
- 5) если $p \in \mathcal{B}'(1, 1, 1, 1, 2)$, то поверхность $\mathbb{R}S_p$ гомеоморфна Π_3 , а поверхность $\mathbb{R}\tilde{S}_p$ гомеоморфна P_9 .

Сделаем несколько замечаний о содержании статьи. Кроме введения, она содержит три параграфа. В §1 излагается жесткая изотопическая классификация вещественных биквадрик, а также жесткая изотопическая классификация вещественных отмеченных пучков квадрик. В §2 рассматриваются куммеровы поверхности. Здесь приводятся определения, понятия и факты, относящиеся к комплексным квадратичным комплексам прямых, которые потребуются при доказательствах теорем 0.1, 0.2. При изложении этой темы мы следуем [6, гл. 6]. Кроме этого, мы рассмотрели данную тему в вещественной категории. Последний §3 посвящен доказательству теорем 0.1, 0.2.

§1. Жесткая изотопическая классификация

1.1. Жесткая изотопическая классификация вещественных биквадрик. Здесь мы опишем компоненты связности

$$G_0, G_2, G(4), G(6), G(1, 1, 2), G(1, 1, 4), G(1, 2, 3), G(2, 2, 2), G(1, 1, 1, 1, 2).$$

Пусть $p \in \mathbb{R}\mathbb{G}^*$; тогда через L_p обозначим соответствующую вещественную прямую в $\mathbb{P}^{20}$, а через $V_p \subset \mathbb{P}^5$ – соответствующую вещественную биквадрику, которая равна пересечению всех квадрик $Q_a \subset \mathbb{P}^5$, где $a \in L_p$. (Если точка a принадлежит пространству квадрик $\mathbb{P}^{20}$, то через Q_a обозначается соответствующая квадрика.) Пусть биквадрика V_p задается системой уравнений (0.1) с вещественными коэффициентами. Тогда на вещественной прямой L_p квадратичные формы $q_1(X), q_2(X)$ определяют вещественные однородные координаты λ_1, λ_2 . Следовательно, пучок квадрик, соответствующий точке $p \in \mathbb{R}\mathbb{G}^*$, будет иметь уравнение вида (0.2). Рассмотрим уравнение

$$\det(\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2) = 0, \quad (1.1)$$

где M_1, M_2 – матрицы коэффициентов квадратичных форм $q_1(X), q_2(X)$, а точка $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2]$ принадлежит $\mathbb{P}^1 = L_p$. Тогда уравнение (1.1) имеет только

шесть решений в $\mathbb{P}^1 = L_p$, так как биквадрика V_p неособая. Заметим, что эти решения совпадают с точками пересечения прямой L_p и дискриминантной гиперповерхности $\Lambda \subset \mathbb{P}^{20}$, которая равна множеству особых квадрик.

Далее рассмотрим окружность $S^1 \subset \mathbb{R}^2$, заданную уравнением $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1$. Тогда уравнение шестой степени (1.1) можно рассматривать на окружности S^1 . Оно может иметь на этой окружности $2n$ корней, где $n = 0, 2, 4, 6$. (Заметим, что число n равно числу точек пересечения прямой $\mathbb{R}L_p$ с дискриминантной гиперповерхностью $\mathbb{R}\Lambda$.) Обозначим эти корни через $R_1, \dots, R_{2n}$, порядок которых индуцируется движением по окружности S^1 в фиксированном направлении от одного из фиксированных корней уравнения (1.1). (Заметим, что на прямой $\mathbb{R}L_p$ нет канонической ориентации, поэтому ее нет также на двулистном накрытии $S^1 \rightarrow \mathbb{R}L_p$.) Через G_n обозначим множество точек $p \in \mathbb{R}G^*$, для которых уравнение (1.1) имеет $2n$ корней на окружности S^1 , т. е. число точек пересечения вещественной прямой $\mathbb{R}L_p$ с дискриминантной гиперповерхностью равно n . Тогда каждое из множеств $G_n \subset \mathbb{R}G^*$ состоит из целых компонент связности, но оказывается, что множества G_0, G_2 связные, поэтому далее рассматриваем случаи $n = 4, 6$.

Рассмотрим целочисленную функцию $I_p(\lambda)$, $\lambda \in S^1$, принимающую целочисленные значения в пределах от 0 до 6, равную отрицательному индексу инерции квадратичной формы

$$\lambda_1 q_1(X) + \lambda_2 q_2(X).$$

Если $n > 0$, то точки $R_1, \dots, R_{2n}$ являются точками разрыва функции $I_p(\lambda)$, причем при переходе через такие точки значения функции $I_p(\lambda)$ изменяются на ± 1 .

Справедливо следующее (см. [4, приложение А])

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. *Точки $p \in \mathbb{R}G^*$, $p' \in \mathbb{R}G^*$ принадлежат одной компоненте связности тогда и только тогда, когда существует эквивариантный (относительно антиподальной инволюции) гомеоморфизм окружности S^1 , переводящий индекс-функцию $I_p(\lambda)$ в индекс-функцию $I_{p'}(\lambda)$.*

С помощью предложения 1.1 доказывается (см. [4, приложение А]) рассмотренная далее жесткая изотопическая классификация трехмерных вещественных биквадрик.

Фиксированное направление на окружности S^1 назовем *положительным*. Тогда точку R_j назовем также *положительной*, если при переходе через нее в положительном направлении значения функции $I_p(\lambda)$ увеличиваются на 1, в противном случае точка R_j называется *отрицательной*. Можно так выбрать начальный корень R_1 уравнения (1.1) и направление на окружности S^1 , что возможны только следующие расположения знаков точек $R_1, \dots, R_{2n}$. (Вообще, расположение знаков может быть и другим, но мы выбирали одно из эквивалентных расположений.)

Если $n = 4$, то реализуются два (с точностью до эквивалентности) случая расположения знаков точек $R_1, \dots, R_8$:

$$++++----, \quad +- - + - + + -.$$

В этих случаях точка $p \in \mathbb{R}\mathbb{G}^*$ по определению принадлежит множествам $G(4)$, $G(1, 1, 2)$ соответственно. (В скобках указываются последовательные числа, каждое из которых равно количеству знаков в отдельной группе из плюсов.)

Если $n = 6$, то реализуются пять (с точностью до эквивалентности) случаев расположения знаков точек $R_1, \dots, R_{12}$:

$$\begin{aligned} &+++++-----, & +-----+-----, \\ &+-----++-++-+-, & ++--++--++--, \\ &+---+-+--+--+--+. \end{aligned}$$

В этих случаях точка $p \in \mathbb{R}\mathbb{G}^*$ принадлежит по определению множествам

$$G(6), G(1, 1, 4), G(1, 2, 3), G(2, 2, 2), G(1, 1, 1, 1, 2)$$

соответственно. (В скобках указываются количества знаков в группах из плюсов. Заметим, что циклическая перестановка этих чисел, а также изменение их порядка на противоположный приводят к эквивалентным обозначениям компонент связности множества неособых вещественных биквадрик и что число групп из плюсов всегда нечетно при $n = 4$ и $n = 6$.)

Заметим, что в статье [5] доказана теорема, которая описывает топологический тип многообразия $\mathbb{R}V_p$ в зависимости от принадлежности точки p компонентам

$$G_0, G_2, G(4), G(6), G(1, 1, 2), G(1, 1, 4), G(1, 2, 3), G(2, 2, 2), G(1, 1, 1, 1, 2)$$

соответственно.

1.2. Жесткая изотопическая классификация вещественных отмеченных пучков квадрик. Пусть $V \subset \mathbb{P}^5$ – неособая биквадрика; тогда она определяет линейный пучок квадрик Q_a , $a \in L \subset \mathbb{P}^{20}$, проходящих через эту биквадрику. Отметим среди этих квадрик одну неособую квадрику Q . Полученный пучок квадрик будем обозначать через (V, Q) и называть *отмеченным пучком квадрик*. Каждый такой пучок задается системой уравнений вида (0.1), где первое уравнение определяет неособую квадрику, которая считается отмеченной. Множество отмеченных комплексных пучков квадрик обозначим через $\mathbb{B}$. Рассмотрим комплексно-аналитическое отображение $\pi: \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{G}^*$, которое паре $(V_p, Q) \in \mathbb{B}$ сопоставляет точку $p \in \mathbb{G}^*$. Во множестве вещественных точек $\mathbb{R}\mathbb{B}$, которое состоит из пар (V, Q) , где биквадрика V и квадрика Q вещественные, рассмотрим подмножество $\mathcal{B}$, состоящее из таких пар (V, Q) , что квадрика Q задается уравнением $q(X) = 0$, в котором квадратичная форма $q(X)$ имеет сигнатуру, равную нулю. Покажем, что справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. *Отображение $\pi: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{G}^*$ сюръективно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть неособая вещественная биквадрика $V = V_p$ задана системой уравнений (0.1), а $I(\lambda)$ – соответствующая индекс-функция на окружности S^1 . Тогда существует точка $(\lambda_1^0, \lambda_2^0) = \lambda^0 \in S^1$, $\lambda^0 \neq R_j$, такая, что индекс $I(\lambda^0)$ квадратичной формы $\lambda_1^0 q_1(X) + \lambda_2^0 q_2(X)$ равен трем. Это утверждение вытекает из равенства $I(-\lambda) = 6 - I(\lambda)$ и следующего факта: при

переходе через точку $\lambda = R_j$ функция $I(\lambda)$ изменяется на ± 1 . Действительно, если $I(\lambda) > 3$, то на дуге окружности S^1 , соединяющей точки $\lambda, -\lambda$, должна найтись точка $\lambda^0 \neq R_j$ такая, что $I(\lambda^0) = 3$. В противном случае на этой дуге должна существовать точка R_j , при переходе через которую значение функции $I(\lambda)$ изменится по модулю на число, большее, чем 1. Обозначим через Q квадрику, заданную уравнением

$$\lambda_1^0 q_1(X) + \lambda_2^0 q_2(X) = 0.$$

Тогда при отображении $\pi: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{G}^*$ пара $(V, Q) \in \mathcal{B}$ отображается в точку $p \in \mathbb{R}\mathbb{G}^*$. Предложение доказано.

Прообразы компонент связности

$$G_0, G_2, G(4), G(6), G(1, 1, 2), G(1, 1, 4), G(1, 2, 3), G(2, 2, 2), G(1, 1, 1, 1, 2)$$

при отображении $\pi: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{G}^*$ будем обозначать через

$$\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}(4), \mathcal{B}(6), \mathcal{B}(1, 1, 2), \mathcal{B}(1, 1, 4), \mathcal{B}(1, 2, 3), \mathcal{B}(2, 2, 2), \mathcal{B}(1, 1, 1, 1, 2)$$

соответственно. Пусть имеются два вещественных отмеченных пучка квадрик $(V_p, Q), (V_{p'}, Q')$. Причем первый из них задается системой уравнений (0.1), где первое уравнение определяет квадрику Q , а второй пучок квадрик аналогично задается системой уравнений

$$q'_1(X_0, \dots, X_5) = 0, \quad q'_2(X_0, \dots, X_5) = 0,$$

где первое уравнение определяет квадрику Q' . Тогда аналогично доказательству предложения 1.1 строится доказательство следующего утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3. *Вещественные отмеченные пучки квадрик $(V_p, Q), (V_{p'}, Q')$ принадлежат одной компоненте связности многообразия $\mathcal{B}$ тогда и только тогда, когда существует эквивариантный (относительно антиподальной инволюции) гомеоморфизм окружности S^1 , переводящий индекс-функцию $I_p(\lambda)$ в индекс-функцию $I_{p'}(\lambda)$ и оставляющий точку $(1, 0) \in S^1$ неподвижной или переводящий ее в точку $(-1, 0) \in S^1$.*

Из предложения 1.3 вытекают следующие утверждения.

1) Множества $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}(4), \mathcal{B}(6), \mathcal{B}(1, 1, 4), \mathcal{B}(2, 2, 2)$ связные.

2) Каждое из множеств $\mathcal{B}(1, 1, 2), \mathcal{B}(1, 2, 3), \mathcal{B}(1, 1, 1, 1, 2)$ состоит из двух компонент связности. Для точек из этих компонент индекс-функция $I(\lambda)$ последовательно принимает следующие значения (начиная со значения в точке $(1, 0) \in S^1$ и кончая значением в точке $(-1, 0) \in S^1$):

(i) для компонент множества $\mathcal{B}(1, 1, 2)$

$$3, 2, 3, 2, 3 \quad \text{или} \quad 3, 2, 3, 4, 3; \quad (1.2)$$

(ii) для компонент множества $\mathcal{B}(1, 2, 3)$

$$3, 2, 1, 2, 3, 2, 3 \quad \text{или} \quad 3, 2, 1, 2, 3, 4, 3; \quad (1.3)$$

(iii) для компонент множества $\mathcal{B}(1, 1, 1, 1, 2)$

$$3, 2, 3, 2, 3, 2, 3 \text{ или } 3, 2, 3, 2, 3, 4, 3. \quad (1.4)$$

Заметим, что последовательности значений (1.2)–(1.4) определены неоднозначно, а с точностью до обращения порядка и замены всех значений на дополнительные к ним до 6. Компоненты связности, которые получаются из утверждения 2), мы будем обозначать через

$$\mathcal{B}'(1, 1, 2), \mathcal{B}'(1, 2, 3), \mathcal{B}'(1, 1, 1, 1, 2), \mathcal{B}''(1, 1, 2), \mathcal{B}''(1, 2, 3), \mathcal{B}''(1, 1, 1, 1, 2)$$

соответственно. Таким образом, многообразие $\mathcal{B}$ состоит из двенадцати компонент связности

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_0, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}(4), \mathcal{B}(6), \mathcal{B}(1, 1, 4), \mathcal{B}(2, 2, 2), \mathcal{B}'(1, 1, 2), \mathcal{B}''(1, 1, 2), \\ \mathcal{B}'(1, 2, 3), \mathcal{B}''(1, 2, 3), \mathcal{B}'(1, 1, 1, 1, 2), \mathcal{B}''(1, 1, 1, 1, 2). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Они называются *жесткими изотопическими классами* вещественных отмеченных пучков квадрик.

§ 2. Куммеровы поверхности

В этом параграфе мы построим и изучим куммеровы поверхности, ассоциированные с двумерным тором, квадратичным комплексом и отмеченным пучком квадрик.

2.1. Куммерова поверхность двумерного тора. Пусть $A = W/U$ – двумерный комплексный тор, где W – двумерное комплексное векторное пространство, $U \subset W$ – решетка. Введем на комплексном торе A отношение эквивалентности $a \sim b$ тогда и только тогда, когда $b = \pm a$. Комплексная факторповерхность $S = A/\sim$ называется *куммеровой поверхностью*, полученной из комплексного тора A . Эта поверхность с особенностями, на ней имеются шестнадцать простейших особых точек.

Пусть на векторном пространстве W задана антилинейная инволюция $\theta: W \rightarrow W$, для которой решетка U инвариантна. Тогда на торе $A = W/U$ индуцируется антиголоморфная инволюция $\theta: A \rightarrow A$, т. е. вещественная структура. Обозначим через $A^\pm$ подгруппы Ли группы A , состоящие из элементов $a \in A$ таких, что $\theta(a) = \pm a$.

Группы $A^\pm$ изоморфны группе

$$T \oplus (\mathbb{Z}/2)^d,$$

где

$$d = \dim_{\mathbb{F}_2} H^1(\Gamma, U) = \dim_{\mathbb{F}_2} H^2(\Gamma, U),$$

а $\Gamma = \{1, \theta\}$ – группа второго порядка, действующая на решетке U , $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ – поле из двух элементов (см. [8], [9]). Число d может принимать значения 0, 1, 2. Вещественная структура $\theta: A \rightarrow A$ спускается до вещественной структуры $\theta: S \rightarrow S$, множество неподвижных точек которой обозначим через S^θ .

ЛЕММА 2.1. Пусть имеют место предыдущие обозначения для числа d и поверхностей S , Π_1 , Π_2 , Π_3 ; тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если $d = 0$, то поверхность S^θ гомеоморфна поверхности Π_1 ;
- 2) если $d = 1$, то поверхность S^θ гомеоморфна поверхности Π_2 ;
- 3) если $d = 2$, то поверхность S^θ гомеоморфна поверхности Π_3 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество точек S^θ куммеровой поверхности S равно фактормножеству

$$(A^+ \cup A^-)/\sim = A^+/\sim \cup A^-/\sim.$$

Неподвижными точками инволюции $\nu(a) = -a$ на комплексном торе A являются элементы второго порядка группы A ; аналогичное утверждение справедливо для вещественного тора T . Поэтому факторповерхность $T/\sim$ гомеоморфна сфере. Таким образом, каждая из факторповерхностей $A^+/\sim$, $A^-/\sim$ гомеоморфна несвязному объединению сфер, число которых равно 2^d . Каждая компонента связности группы A^+ пересекается с каждой компонентой связности группы A^- по одинаковому числу точек, количество которых равно 2^{2-d} , все они являются элементами второго порядка. Осталось заметить, что по этим точкам пересекаются компоненты связности факторповерхности $A^+/\sim$ с компонентами связности факторповерхности $A^-/\sim$. Лемма доказана.

Далее нам потребуется следующая

ЛЕММА 2.2. Пусть $A = W/U$ – двумерный тор, на котором антиголоморфное отображение $\vartheta: A \rightarrow A$ определено равенством $\vartheta(a) = \theta(a) + a_0$, где $\theta: W \rightarrow W$ – антилинейная инволюция, $a_0 \in A$ – фиксированный элемент. Тогда справедливы утверждения:

- 1) отображение $\vartheta: A \rightarrow A$ будет инволюцией, если и только если выполняется соотношение $a_0 \in A^-$;
- 2) отображение $\vartheta: A \rightarrow A$ коммутирует с инволюцией $\nu: A \rightarrow A$, если и только если a_0 – элемент второго порядка группы A ;
- 3) если $a_0 \in A^-$, то множество неподвижных точек A^ϑ инволюции $\vartheta: A \rightarrow A$ непустое тогда и только тогда, когда $a_0 \in A_0^-$, где $A_0^\pm$ – связная компонента группы $A^\pm$, содержащая точку нуля;
- 4) если $a_0 \in A^-$, то множество точек $A^{-\vartheta} = \{a \in A \mid \vartheta(a) = -a\}$ непустое тогда и только тогда, когда $a_0 \in A_0^+$;
- 5) если $a_0 \in A_0^-$ и a_0 – элемент второго порядка, то выполняется равенство

$$A^\vartheta = A^+ + b_0,$$

где b_0 – элемент из группы A_0^- , который является половиной элемента a_0 , т. е. выполняется равенство $2b_0 = a_0$;

- 6) если $a_0 \in A^- \cap A_0^+$, то выполняется равенство

$$A^{-\vartheta} = A^- + c_0,$$

где c_0 – элемент из группы A_0^+ , который является половиной элемента a_0 , т. е. выполняется равенство $2c_0 = a_0$;

7) если множества A^ϑ , $A^{-\vartheta}$ непустые, то выполняется равенство

$$A^\vartheta \cap A^{-\vartheta} = A^+ \cap A^- + b_0 + c_0;$$

8) если $a_0 \in A_0^-$, $a_0 \notin A_0^+$ и a_0 – элемент второго порядка, то инволюция $\nu: A^\vartheta \rightarrow A^\vartheta$ переставляет связные компоненты множества A^ϑ ;

9) если $a_0 \in A^- \cap A_0^+$, $a_0 \notin A_0^-$, то инволюция $\nu: A^{-\vartheta} \rightarrow A^{-\vartheta}$ переставляет связные компоненты множества $A^{-\vartheta}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Равенство $\vartheta(\vartheta(a)) = a$ равносильно равенству

$$a + \theta(a_0) + a_0 = a,$$

которое выполняется тогда и только тогда, когда $a_0 \in A^-$.

2) Равенство $\vartheta(\nu(a)) = \nu(\vartheta(a))$ равносильно равенству

$$-\theta(a) + a_0 = -\theta(a) - a_0,$$

которое выполняется тогда и только тогда, когда $2a_0 = 0$.

3) Множество A^ϑ непусто тогда и только тогда, когда существует элемент $a \in A$ такой, что выполняется равенство $\theta(a) + a_0 = a$, т.е. $a_0 = a - \theta(a)$. Осталось заметить, что справедливо равенство $A_0^- = (1 - \theta)A$.

4) Необходимо заменить инволюцию ϑ на инволюцию $-\vartheta$ и применить утверждение 3).

5) Если $a \in A^+$, то $\vartheta(a + b_0) = a - b_0 + a_0 = a + b_0$. С другой стороны, если $a \in A^\vartheta$, то $\theta(a) + 2b_0 = a$. Тогда из равенства $a - b_0 = \theta(a) + b_0$ получаем равенство $\theta(a - b_0) = a - b_0$, т.е. элемент $a - b_0$ принадлежит группе A^+ .

6) Заменим ϑ на $-\vartheta$ и применим утверждение 5).

7) Это утверждение вытекает из утверждений 5), 6).

8) Если A_i^+ – связная компонента группы A^+ , то $A_i^+ + b_0$ – связная компонента множества A^ϑ . Предположим, что существует элемент $a \in A_i^+$ такой, что элемент $-a - b_0$ также принадлежит компоненте $A_i^+ + b_0$, т.е. выполняется равенство $-a - b_0 = c + b_0$, где $c \in A_i^+$. Следовательно, $a_0 = -a - c$. Осталось заметить, что элемент $-a - c$ принадлежит компоненте A_0^+ .

9) Заменим ϑ на $-\vartheta$ и применим утверждение 8).

Лемма доказана.

Далее мы предполагаем, что на комплексном торе $A = W/U$ задано антиголоморфное отображение $\vartheta: A \rightarrow A$, определенное равенством $\vartheta(a) = \theta(a) + a_0$, где $\theta: W \rightarrow W$ – антилинейная инволюция, $a_0 \in A$ – фиксированный элемент второго порядка. Тогда $\vartheta: A \rightarrow A$ является вещественной структурой на торе A , которая спускается до вещественной структуры на куммеровой поверхности $\vartheta: S \rightarrow S$. Множества неподвижных точек инволюций $\vartheta: A \rightarrow A$, $\vartheta: S \rightarrow S$ будем обозначать через $\mathbb{R}A$, $\mathbb{R}S$ и называть множествами *вещественных точек*. Множество $A^{-\vartheta}$ обозначаем через $\mathbb{I}A$ и называем множеством *мнимых точек*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. *Справедливы следующие утверждения:*

1) множество $\mathbb{R}S$ пустое тогда и только тогда, когда множества $\mathbb{R}A$, $\mathbb{I}A$ пустые;

- 2) двулистное накрытие $A \rightarrow S$ имеет вещественные точки ветвления тогда и только тогда, когда оба множества $\mathbb{R}A$, $\mathbb{I}A$ непустые;
- 3) если $d = 0$, то поверхность $\mathbb{R}S$ гомеоморфна поверхности Π_1 ;
- 4) если $d = 1$ и двулистное накрытие $A \rightarrow S$ имеет вещественные точки ветвления, то поверхность $\mathbb{R}S$ гомеоморфна поверхности Π_2 ;
- 5) если $d = 2$ и двулистное накрытие $A \rightarrow S$ имеет вещественные точки ветвления, то поверхность $\mathbb{R}S$ гомеоморфна поверхности Π_3 ;
- 6) если $d = 1$ и двулистное накрытие $A \rightarrow S$ не имеет вещественных точек ветвления, то или поверхность $\mathbb{R}S$ гомеоморфна тору T , или множество $\mathbb{R}S$ пустое;
- 7) если $d = 2$ и двулистное накрытие $A \rightarrow S$ не имеет вещественных точек ветвления, то или поверхность $\mathbb{R}S$ гомеоморфна несвязному объединению двух торов $2T$, или множество $\mathbb{R}S$ пустое.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1) вытекает из равенства

$$\mathbb{R}S = \mathbb{R}A/\sim \cup \mathbb{I}A/\sim.$$

Множество вещественных точек ветвления двулистного накрытия $A \rightarrow S$ равно пересечению $\mathbb{R}A \cap \mathbb{I}A$. Для доказательства утверждения 2) нужно применить утверждение 7) леммы 2.2.

Если $d = 0$, то $A^- = A_0^-$, $A^+ = A_0^+$. Поэтому из утверждений 3), 4) леммы 2.2 получаем, что множества $\mathbb{R}A$, $\mathbb{I}A$ непустые. Следовательно, пересечение $\mathbb{R}A \cap \mathbb{I}A$ непустое. Это пересечение состоит из вещественных точек ветвления двулистного накрытия $A \rightarrow S$. Таким образом, двулистное накрытие $A \rightarrow S$ имеет вещественные точки ветвления. Если $d > 0$, то будем сначала предполагать, что двулистное накрытие $A \rightarrow S$ имеет вещественные точки ветвления. Введем на комплексной поверхности A новую структуру комплексного тора. Для этого возьмем за ноль одну из вещественных точек ветвления. Тогда на комплексной поверхности A однозначно определится новая структура комплексного тора, причем новая инволюция $\nu: A \rightarrow A$ будет совпадать со старой. Новая решетка U совпадает со старой, а также новое действие группы второго порядка Γ совпадает со старым действием. Следовательно, утверждения 3)–5) данного предложения вытекают из леммы 2.1.

Пусть теперь $d > 0$, и предположим, что двулистное накрытие $A \rightarrow S$ не имеет вещественных точек ветвления. Тогда либо оба множества $\mathbb{R}A$, $\mathbb{I}A$ пустые, либо одно из них пустое, а другое непустое. Если множество $\mathbb{R}A$ непустое, то применяем утверждение 8) леммы 2.2. Если множество $\mathbb{I}A$ непустое, то применяем утверждение 9) леммы 2.2. Предложение доказано.

2.2. Куммеровы поверхности квадратичного комплекса и отмеченного пучка квадрик. В этом пункте мы приведем без доказательства некоторые свойства куммеровой поверхности трехмерного квадратичного комплекса (см. [6, гл. 6]). Затем обобщим эту теорию для отмеченного пучка квадрик.

Если $x \in \mathbb{P}^3$, то через $\sigma(x)$ обозначается множество прямых в $\mathbb{P}^3$, проходящих через точку x . Это множество образует один из циклов Шуберта на многообразии Грассмана $\mathcal{G}$, а соответствующее множество на квадрике Клейна $\mathcal{Q} \subset \mathbb{P}^5$ является плоскостью, которую мы обозначим через π_x .

Рассмотрим на квадрике Клейна $\mathcal{Q}$ какую-нибудь биквадрику $V \subset \mathcal{Q}$, которая по определению является квадратичным комплексом прямых. Обозначим через $S = S(V)$ множество точек $x \in \mathbb{P}^3$ таких, что плоскость $\pi_x \subset \mathbb{P}^5$ касается многообразия V . Множество $S \subset \mathbb{P}^3$ является особой поверхностью, которая называется *куммеровой поверхностью*, ассоциированной с квадратичным комплексом V . Все особенности поверхности S являются простыми двойными точками, число которых равно шестнадцати. Если точка $x \in S$ неособая, то пересечение $\pi_x \cap V$ состоит из двух разных прямых L'_x, L''_x в плоскости $\pi_x \subset \mathbb{P}^5$, в противном случае это пересечение является двойной прямой $2L_x$ в плоскости $\pi_x \subset \mathbb{P}^5$.

Пусть $\tilde{S} \rightarrow S$ – минимальное разрешение особенностей поверхности S . Тогда неособая поверхность $\tilde{S}$ является КЗ-поверхностью. Определено рациональное отображение $S \rightarrow V$, которое неособой точке $x \in S$ сопоставляет точку касания плоскости π_x квадратичного комплекса V , т. е. точку пересечения прямых L'_x, L''_x . Соответствующее рациональное отображение $\tilde{S} \rightarrow V$ продолжается до голоморфного отображения, которое вкладывает КЗ-поверхность $\tilde{S}$ в $V \subset \mathbb{P}^5$, причем образ является пересечением трех квадрик в $\mathbb{P}^5$. Обозначим этот образ через $\hat{S}$. Первая из этих квадрик – это квадрика Клейна $\mathcal{Q}$, матрицу соответствующей квадратичной формы обозначим через A . Вторая квадрика – это одна из квадрик, отличных от квадрики Клейна, из пучка квадрик, проходящих через биквадрику V ; зафиксируем такую квадрику, матрицу соответствующей квадратичной формы обозначим через B . Тогда матрица C квадратичной формы для третьей квадрики вычисляется по формуле

$$C = BA^{-1}B. \quad (2.1)$$

Множество прямых на биквадрике $V \subset \mathbb{P}^5$ образует поверхность в многообразии Грассмана $\mathbb{G}(2, 6)$, которая называется *поверхностью Фано* биквадрики V и обозначается через $A = A(V)$. Такое обозначение поверхности Фано связано с тем фактом, что она является абелевой поверхностью. Если на поверхности A зафиксировать точку $o \in A$, то на этой поверхности определится структура комплексного двумерного тора $A = W/U$, где W – двумерное комплексное векторное пространство, а $U \subset W$ – решетка в нем. Причем изоморфизм $A = W/U$ определяется однозначно, с точностью до изоморфизма тора, если потребовать, чтобы фиксированная точка $o \in A$ была нулем в торе W/U .

Определено двулистное накрытие $j: A \rightarrow S$, для которого особые точки поверхности S являются точками ветвления, причем не существует других точек ветвления. Это двулистное накрытие строится следующим образом. Если $L \subset V \subset \mathcal{Q} \subset \mathbb{P}^5$ – прямая, то на многообразии Грассмана $\mathcal{G}$ ей соответствует цикл Шуберта $\sigma(x, h)$, который состоит из прямых на плоскости $h \subset \mathbb{P}^3$, проходящих через точку $x \in h$. Множество таких прямых называется *пучком*, а точка $x \in h$ – *фокусом* этого пучка. По определению отображение $j: A \rightarrow S$ сопоставляет прямой L фокус $x = x_L$ пучка $\sigma(x, h)$. Заметим, что ранее рассмотренные прямые L'_x, L''_x при отображении $A \rightarrow S$ переходят в неособую точку $x \in S$; аналогично, двойная прямая L_x переходит в особую точку $x \in S$. Если в качестве фиксированной точки $o \in A$ взять одну из точек ветвления

двухлистного накрытия $A \rightarrow S$, то инволюция $A = W/U \rightarrow A = W/U$ двухлистного накрытия $A \rightarrow S$ совпадает с умножением на -1 на комплексном торе W/U .

Пусть теперь квадратичный комплекс прямых V является вещественной биквадрикой. Тогда ассоциированная куммерова поверхность $S \subset \mathbb{P}^3$ будет вещественной поверхностью. Вещественная структура $\tau: S \rightarrow S$ индуцирована инволюцией комплексного сопряжения в $\mathbb{P}^3$. Нужно только показать, что если $x \in S \subset \mathbb{P}^3$, то комплексно-сопряженная точка $\bar{x} \in \mathbb{P}^3$ также принадлежит поверхности S . Для этого заметим, что цикл Шуберта $\sigma(\bar{x}) \subset \mathcal{G}$ получается из цикла Шуберта $\sigma(x)$ с помощью комплексного сопряжения. Поскольку отображение Пюккера $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{Q}$ сохраняет вещественную структуру, то плоскость $\pi_{\bar{x}} \subset \mathbb{P}^5$ получается из плоскости $\pi_x \subset \mathbb{P}^5$ с помощью комплексного сопряжения в $\mathbb{P}^5$. Квадратичный комплекс прямых V – вещественная биквадрика, поэтому если плоскость π_x касается многообразия V , то комплексно-сопряженная плоскость $\bar{\pi}_x = \pi_{\bar{x}}$ также касается многообразия V . Следовательно, точка $\bar{x} \in \mathbb{P}^5$ принадлежит поверхности S . Заметим еще, что множество особых точек поверхности S инвариантно относительно инволюции комплексного сопряжения $\tau: S \rightarrow S$. Действительно, если пересечение $\pi_x \cap V$ является двойной прямой $2L$, то пересечение $\pi_{\bar{x}} \cap V$ будет двойной комплексно-сопряженной прямой $2\bar{L}$.

В случае, когда квадратичный комплекс прямых V является вещественной биквадрикой, поверхность Фано $A \subset \mathbb{G}(2, 6)$ также будет вещественной поверхностью, так как инволюция комплексного сопряжения на $\mathbb{P}^5$ переводит прямые в прямые. Кроме этого, двухлистное накрытие $j: A \rightarrow S$ будет вещественным отображением, т. е. коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\tau} & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \xrightarrow{\tau} & S \end{array}$$

Действительно, если $L, \bar{L}$ – пара комплексно-сопряженных прямых на квадратичном комплексе $V \subset \mathbb{P}^5$, то им соответствует пара комплексно-сопряженных пучков $\sigma(x, h), \sigma(\bar{x}, \bar{h})$. Поскольку множество особых точек поверхности S инвариантно относительно комплексного сопряжения, разрешение особенностей $\tilde{S} \rightarrow S$ также будет вещественным отображением.

Наконец, отметим, что изоморфизм $\tilde{S} \rightarrow \hat{S}$ будет вещественным, так как рациональное отображение $S \rightarrow V$ вещественное.

Рассмотрим другой способ построения куммеровой поверхности квадратичного комплекса V . Обозначим через $(\mathbb{P}^3)'$ множество плоскостей в проективном пространстве $\mathbb{P}^3$. Многообразие $(\mathbb{P}^3)'$ является двойственным проективным пространством. Пусть $h \subset \mathbb{P}^3$ – плоскость. Тогда через $\sigma(h) \subset \mathcal{G}$ обозначается цикл Шуберта, состоящий из прямых на плоскости h . На квадрике Клейна $\mathcal{Q}$ из этого цикла Шуберта получается плоскость $\pi_h \subset \mathcal{Q}$. Обозначим через S' множество точек $h \in (\mathbb{P}^3)'$ таких, что плоскость π_h касается квадратичного комплекса V . Множество $S' \subset (\mathbb{P}^3)'$ является особой поверхностью, на которой имеется шестнадцать простейших особых точек. Заметим, что точка

$h \in S' \subset (\mathbb{P}^3)'$ является особой тогда и только тогда, когда пересечение $\pi_h \cap V$ является двойной прямой.

Рассмотрим рациональное отображение Гаусса $S \rightarrow (\mathbb{P}^3)'$, которое неособой точке $x \in S$ сопоставляет касательную плоскость $T_x S \subset \mathbb{P}^3$. Это отображение индуцирует бирациональный изоморфизм $S \rightarrow S'$. Отображение $S \rightarrow S'$ неопределено в особых точках поверхности S , а обратное отображение $S' \rightarrow S$ неопределено в особых точках поверхности S' .

Пусть $\tilde{S}' \rightarrow S'$ – минимальное разрешение особенностей поверхности S' . Тогда неособая поверхность $\tilde{S}'$ является КЗ-поверхностью. Определено рациональное отображение $S' \rightarrow V$, которое неособой точке $h \in S'$ сопоставляет точку касания плоскости π_h квадратичного комплекса V . Соответствующее рациональное отображение $\tilde{S}' \rightarrow V$ продолжается до голоморфного отображения, которое вкладывает КЗ-поверхность $\tilde{S}'$ в $V \subset \mathbb{P}^5$, причем образ совпадает с поверхностью $\hat{S}$.

Определено двулистное накрытие $j': A \rightarrow S'$, для которого особые точки поверхности S' являются точками ветвления, причем не существует других точек ветвления. Это двулистное накрытие строится следующим образом. Если $L \subset V \subset \mathcal{Q} \subset \mathbb{P}^5$ – прямая, то на многообразии Грассмана $\mathcal{G}$ ей соответствует цикл Шуберта $\sigma(x, h)$, который состоит из прямых на плоскости $h \subset \mathbb{P}^3$, проходящих через точку $x \in h$. По определению отображение $j': A \rightarrow S'$ сопоставляет прямой L плоскость h .

Отображения $j: A \rightarrow \mathbb{P}^3$, $j': A \rightarrow (\mathbb{P}^3)'$ задаются полными линейными системами. Если H, H' – линейные расслоения на проективных пространствах $\mathbb{P}^3$, $(\mathbb{P}^3)'$, заданные плоскостями, то линейные расслоения $j^*(H)$, $(j')^*(H')$ на абелевой поверхности A изоморфны. Поэтому получаем, что существует изоморфизм проективных пространств $\mathbb{P}^3$, $(\mathbb{P}^3)'$, который индуцирует изоморфизм куммеровых поверхностей $S \xrightarrow{\sim} S'$.

Если квадратичный комплекс V вещественный, то куммерова поверхность S' , отображение $j': A \rightarrow S'$, изоморфизм $\tilde{S}' \rightarrow \hat{S}$ также вещественные, и будет вещественным изоморфизм $S \xrightarrow{\sim} S'$, так как линейные расслоения $j^*(H)$, $(j')^*(H')$ вещественные.

Если (V, Q) – отмеченный пучок квадрик, то можно построить две куммеровы поверхности S, S' . Действительно, на квадрике Q имеются два семейства плоскостей, которые мы обозначим через $\mathbb{P}, \mathbb{P}'$. Заметим, что оба многообразия $\mathbb{P}, \mathbb{P}'$ являются проективными пространствами. Поэтому поверхность $S \subset \mathbb{P}$ состоит из точек $x \in \mathbb{P}$, для которых соответствующая плоскость $\pi_x \subset Q$ касается биквадрики V . Аналогично определяется поверхность $S' \subset \mathbb{P}'$. Пусть A – поверхность, равная множеству прямых на биквадрике V . Тогда определены двулистные накрытия $j: A \rightarrow S$, $j': A \rightarrow S'$. Определения этих отображений, которые мы давали в случае квадратичного комплекса, в данном случае использовать нельзя, мы дадим другие определения, которые для квадратичного комплекса приводят к прежним отображениям. Пусть L – прямая на биквадрике V . Тогда существует единственная плоскость π_L на квадрике Q из первого семейства, которая содержит прямую L и касается V . Отображение $j: A \rightarrow S$ сопоставляет прямой L плоскость π_L . Аналогично определяется отображение $j': A \rightarrow S'$.

Сделаем проективное преобразование пространства $\mathbb{P}^5$, которое переводит квадрику Q в квадрику Клейна $\mathcal{Q}$. Это преобразование переведет биквадрику V в квадратичный комплекс $\mathcal{V}$, а также семейства плоскостей на квадрике Q – в семейства плоскостей $\mathbb{P}^3$, $(\mathbb{P}^3)'$ на квадрике Клейна $\mathcal{Q}$. Мы можем считать, что семейство $\mathbb{P}$ отображается на семейство $\mathbb{P}^3$. Тогда семейство $\mathbb{P}'$ отобразится на семейство $(\mathbb{P}^3)'$. Поверхности S , S' , $\hat{S}$, A отобразятся на поверхности $S(\mathcal{V})$, $S'(\mathcal{V})$, $\hat{S}(\mathcal{V})$, $A(\mathcal{V})$ квадратичного комплекса $\mathcal{V}$. Следовательно, вся построенная теория куммеровых поверхностей квадратичного комплекса будет справедливой для куммеровых поверхностей отмеченного пучка квадрики.

Пусть пучок квадрик (V, Q) задан системой уравнений (0.1), где первое уравнение определяет отмеченную квадрику Q . Покажем, что справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. *КЗ-поверхность $\hat{S} \subset V$ равна пересечению биквадрики V с квадрикой, матрица M_3 соответствующей квадратичной формы которой имеет вид $M_2 M_1^{-1} M_2$, где M_1 , M_2 – матрицы квадратичных форм $q_1(X)$, $q_2(X)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. КЗ-поверхность $\hat{S}(\mathcal{V})$ получается пересечением квадратичного комплекса $\mathcal{V}$ квадрикой, матрица C соответствующей квадратичной формы которой имеет вид (2.1). Поскольку квадрика Q переходит в квадрику $\mathcal{Q}$, можно считать, что выполняется равенство $A = M^t M_1 M$, где матрица M равна обратной матрице, задающей преобразование проективного пространства $\mathbb{P}^5$. Также мы можем считать, что выполняется равенство $B = M^t M_2 M$, в противном случае нужно заменить вторую квадрику, проходящую через квадратичный комплекс $\mathcal{V}$ (возможно, кроме того, придется умножить новую матрицу B на константу). Следовательно, выполняются равенства

$$C = B A^{-1} B = M^t M_2 M M^{-1} M_1^{-1} (M^{-1})^t M^t M_2 M = M^t M_3 M.$$

Осталось заметить, что равенство $C = M^t M_3 M$ означает, что КЗ-поверхность $\hat{S}$ получается пересечением биквадрики V квадрикой, матрица квадратичной формы которой равна M_3 . Предложение доказано.

§ 3. Доказательство теорем

Прежде всего мы докажем две леммы, из которых вытекают теоремы 0.1, 0.2.

ЛЕММА 3.1. *Пусть V_p – вещественный квадратичный комплекс прямых, где $p \in \mathbb{R}G^*$, S_p – куммерова поверхность, ассоциированная с квадратичным комплексом прямых V_p . Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если $p \in G_0 \cup G_2$, то двулистное накрытие $A_p \rightarrow S_p$ имеет вещественные точки ветвления, причем поверхность $\mathbb{R}S_p$ гомеоморфна поверхности Π_1 , а поверхность $\mathbb{R}\tilde{S}_p$ гомеоморфна P_3 ;*

2) *если $p \in G(4)$ и множество $\mathbb{R}S_p$ непусто, то двулистное накрытие $A_p \rightarrow S_p$ не имеет вещественных точек ветвления, а поверхности $\mathbb{R}S_p$, $\mathbb{R}\tilde{S}_p$ гомеоморфны тору T ;*

3) *если $p \in G(6)$, то множества $\mathbb{R}S_p$, $\mathbb{R}\tilde{S}_p$ пустые;*

4) если $p \in G(1, 1, 2)$ и двулистное накрытие $A_p \rightarrow S_p$ имеет вещественные точки ветвления, то поверхность $\mathbb{R}S_p$ гомеоморфна поверхности Π_2 , а поверхность $\mathbb{R}\tilde{S}_p$ гомеоморфна P_5 ;

5) если $p \in G(1, 1, 2)$ и двулистное накрытие $A_p \rightarrow S_p$ не имеет вещественных точек ветвления, то поверхности $\mathbb{R}S_p, \mathbb{R}\tilde{S}_p$ гомеоморфны тору T ;

6) если $p \in G(1, 1, 4) \cup G(1, 2, 3)$ и множество $\mathbb{R}S_p$ непустое, то двулистное накрытие $A_p \rightarrow S_p$ не имеет вещественных точек ветвления, а поверхности $\mathbb{R}S_p, \mathbb{R}\tilde{S}_p$ гомеоморфны несвязному объединению двух торов $2T$;

7) если $p \in G(2, 2, 2) \cup G(1, 1, 1, 1, 2)$ и двулистное накрытие $A_p \rightarrow S_p$ имеет вещественные точки ветвления, то поверхность $\mathbb{R}S_p$ гомеоморфна поверхности Π_3 , а поверхность $\mathbb{R}\tilde{S}_p$ гомеоморфна P_9 ;

8) если $p \in G(2, 2, 2) \cup G(1, 1, 1, 1, 2)$ и двулистное накрытие $A_p \rightarrow S_p$ не имеет вещественных точек ветвления, то поверхности $\mathbb{R}S_p, \mathbb{R}\tilde{S}_p$ гомеоморфны несвязному объединению двух торов $2T$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала будем предполагать, что среди точек ветвления двулистного накрытия $A_p \rightarrow S_p$ существуют вещественные точки. Пусть одна из них есть нуль. Тогда абелева поверхность A_p станет комплексным тором W/U , на котором вещественная структура $\theta: W/U \rightarrow W/U$ совпадает с вещественной структурой $\tau: A_p \rightarrow A_p$, а инволюция $\nu: W/U \rightarrow W/U$ совпадает с инволюцией двулистного накрытия $A_p \rightarrow S_p$. Следовательно, мы можем применить предложение 2.3. Для этого заметим, что справедливы следующие утверждения (см. [5]):

а) если $p \in G_0 \cup G_2$, то множество $\mathbb{R}A_p$ гомеоморфно двумерному тору;

б) если $p \in G(1, 1, 2)$, то множество $\mathbb{R}A_p$ гомеоморфно несвязному объединению двух двумерных торов;

с) если $p \in G(2, 2, 2) \cup G(1, 1, 1, 1, 2)$, то множество $\mathbb{R}A_p$ гомеоморфно несвязному объединению четырех двумерных торов.

Поэтому из предложения 2.3 вытекают утверждения 1), 4), 5), 7), 8) леммы.

Если $p \in G(4) \cup G(6) \cup G(1, 1, 4) \cup G(1, 2, 3)$, то множество $\mathbb{R}A_p$ пустое, причем при $p \in G(4)$ многообразие $\mathbb{R}V_p$ диффеоморфно сфере S^3 , при $p \in G(6)$ множество $\mathbb{R}V_p$ пустое, при $p \in G(1, 1, 4)$ многообразие $\mathbb{R}V_p$ диффеоморфно несвязному объединению двух сфер $S^3 \sqcup S^3$, при $p \in G(1, 2, 3)$ многообразие $\mathbb{R}V_p$ диффеоморфно произведению $S^1 \times S^2$ (см. [5]).

Прежде всего заметим, что рациональное отображение $S_p \rightarrow V_p$ вещественное, поэтому если $p \in G(6)$, то множество $\mathbb{R}S_p$ пустое, так как множество $\mathbb{R}V_p$ пустое. Тем самым доказано утверждение 3) леммы.

Для доказательства оставшихся утверждений нам нужно вычислить размерность $\mathbb{F}_2$ -пространства $H^1(\Gamma, H_1(A_p, \mathbb{Z}))$ (где $\Gamma = \{1, \tau\}$ – группа второго порядка) при $p \in G(4) \cup G(1, 1, 4) \cup G(1, 2, 3)$, а затем применить предложение 2.3. В действительности нужно показать, что размерность этого $\mathbb{F}_2$ -пространства равна 1 при $p \in G(4)$ и равна 2 при $p \in G(1, 1, 4) \cup G(1, 2, 3)$. Из описания вещественной части $\mathbb{R}V_p$ следует, что эти утверждения равносильны равенству

$$\dim H^1(\Gamma, H_1(A_p, \mathbb{Z})) = \frac{1}{2} \dim H_*(\mathbb{R}V_p, \mathbb{F}_2),$$

где

$$H_*(\mathbb{R}V_p, \mathbb{F}_2) = \bigoplus_q H_q(\mathbb{R}V_p, \mathbb{F}_2).$$

Применим отображение цилиндра $\Phi: H_1(A_p, \mathbb{Z}) \rightarrow H_3(V_p, \mathbb{Z})$, которое определяется с помощью равенства

$$\Phi([c]) = \left[\bigcup_{a \in c} L_a \right],$$

где c – контур на поверхности A_p , а L_a – прямая на биквадрике V_p , отвечающая точке $a \in A_p$. Это отображение является изоморфизмом (см., например, [2]). Отображение цилиндра Φ антикоммутирует с инволюцией τ_* , т.е. выполняется равенство $\Phi \circ \tau_* = -\tau_* \circ \Phi$. Из этого факта следует равенство размерностей $\mathbb{F}_2$ -пространств $H^1(\Gamma, H_1(A_p, \mathbb{Z}))$, $H^1(\Gamma, H_3(V_p, \mathbb{Z}))$. Следовательно, достаточно вычислить размерность пространства $H^1(\Gamma, H_3(V_p, \mathbb{Z}))$ при $p \in G(4) \cup G(1, 1, 4) \cup G(1, 2, 3)$. Однако размерность этого пространства равна половине размерности $\mathbb{F}_2$ -пространства $H^1(\Gamma, H_3(V_p, \mathbb{F}_2))$ или $\mathbb{F}_2$ -пространства $H^1(\Gamma, H^3(V_p, \mathbb{F}_2))$ (см. [5]). Поэтому достаточно вычислить размерность пространства $H^1(\Gamma, H^3(V_p, \mathbb{F}_2))$, а именно показать, что выполняется равенство

$$\dim H^1(\Gamma, H^3(V_p, \mathbb{F}_2)) = \dim H^*(\mathbb{R}V_p, \mathbb{F}_2), \quad (3.1)$$

где

$$H^*(\mathbb{R}V_p, \mathbb{F}_2) = \bigoplus_q H^q(\mathbb{R}V_p, \mathbb{F}_2).$$

Однако равенство (3.1) вытекает из [10, утверждение 2) теоремы 1.9]. Лемма доказана.

Каждый квадратичный комплекс V определяет отмеченный пучок квадрик $(V, \mathcal{Q})$. Поэтому мы можем считать, что множество вещественных квадратичных комплексов содержится во множестве вещественных отмеченных пучков квадрик $\mathcal{B}$. Покажем, что в каждой из двенадцати компонент связности множества $\mathcal{B}$ имеются вещественные квадратичные комплексы. Действительно, для произвольного вещественного отмеченного пучка квадрик (V, Q) существует вещественное проективное преобразование с положительным определителем пространства $\mathbb{P}^5$, переводящее отмеченную квадрику Q в квадрику Клейна $\mathcal{Q}$. Таким образом, это преобразование переводит отмеченный пучок квадрик (V, Q) в вещественный квадратичный комплекс. Осталось заметить, что множество вещественных проективных преобразований с положительным определителем пространства $\mathbb{P}^5$ образует связную группу.

Заметим, наконец, что если точки p, p' принадлежат одной компоненте связности многообразия $\mathcal{B}$, то вещественные КЗ-поверхности $\tilde{S}_p, \tilde{S}_{p'}$ эквивариантно диффеоморфны. Поэтому для окончания доказательства теорем 0.1, 0.2 достаточно установить, что справедлива

ЛЕММА 3.2. *Справедливы следующие утверждения:*

- 1) если $p \in \mathcal{B}(4)$, то поверхность $\mathbb{R}\tilde{S}_p$ гомеоморфна T ;
- 2) если $p \in \mathcal{B}'(1, 1, 2)$, то поверхность $\mathbb{R}\tilde{S}_p$ гомеоморфна P_5 ;
- 3) если $p \in \mathcal{B}''(1, 1, 2)$, то поверхность $\mathbb{R}\tilde{S}_p$ гомеоморфна T ;
- 4) если $p \in \mathcal{B}(1, 1, 4)$, то поверхность $\mathbb{R}\tilde{S}_p$ гомеоморфна $2T$;

- 5) если $p \in \mathcal{B}'(1, 2, 3)$, то поверхность $\mathbb{R}\tilde{S}_p$ гомеоморфна $2T$;
- 6) если $p \in \mathcal{B}''(1, 2, 3)$, то множество $\mathbb{R}\tilde{S}_p$ пустое;
- 7) если $p \in \mathcal{B}(2, 2, 2)$, то поверхность $\mathbb{R}\tilde{S}_p$ гомеоморфна $2T$;
- 8) если $p \in \mathcal{B}'(1, 1, 1, 1, 2)$, то поверхность $\mathbb{R}\tilde{S}_p$ гомеоморфна P_9 ;
- 9) если $p \in \mathcal{B}''(1, 1, 1, 1, 2)$, то поверхность $\mathbb{R}\tilde{S}_p$ гомеоморфна $2T$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку вещественные поверхности $\tilde{S}_p, \hat{S}_p$ изоморфны, достаточно доказать утверждения леммы для поверхностей $\hat{S}_p$. Поверхность $\hat{S}_p \subset \mathbb{P}^5$ определяется системой уравнений

$$q_1(X) = 0, \quad q_2(X) = 0, \quad q_3(X) = 0, \quad (3.2)$$

где $q_1(X), q_2(X), q_3(X)$ – квадратичные формы с вещественными коэффициентами. Первое уравнение из системы (3.2) определяет отмеченную квадратiku Q_p , система из двух первых уравнений определяет биквадрик V_p , а матрица M_3 третьей квадратичной формы $q_3(X)$ равна произведению $M_2 M_1^{-1} M_2$, где M_1, M_2 – матрицы квадратичных форм $q_1(X), q_2(X)$.

На проективной плоскости $\mathbb{P}^2$ с однородными координатами $(\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3)$ рассмотрим уравнение

$$\det(\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \lambda_3 M_3) = 0. \quad (3.3)$$

Это уравнение определяет множество особых квадратик в следующей связке квадратик:

$$\lambda_1 q_1(X) + \lambda_2 q_2(X) + \lambda_3 q_3(X) = 0.$$

Уравнение (3.3) определяет на плоскости $\mathbb{P}^2$ кривую шестой степени, она называется *кривой Гессе* данной связки квадратик (см. [2]). В нашем случае кривая Гессе распадается на шесть различных прямых, причем три прямые не могут пересекаться в одной точке (см. [7]). Рассмотрим теперь уравнение (3.3) на сфере S^2 , определенной уравнением

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1.$$

На этой сфере уравнение (3.3) задает несколько больших окружностей и несколько изолированных точек, может быть 0, 2, 4, 6 окружностей. Тогда количество изолированных точек равно соответственно 6, 4, 2, 0. Заметим, что изолированные точки входят в это множество парами: если какая-нибудь точка входит, то антиподальная точка также входит.

На сфере S^2 рассмотрим функцию $I(\lambda)$, равную отрицательному индексу инерции квадратичной формы

$$q_\lambda(X) = \lambda_1 q_1(X) + \lambda_2 q_2(X) + \lambda_3 q_3(X).$$

Эту функцию назовем *индекс-функцией*, она разрывна в точках, заданных уравнением (3.3), причем на больших окружностях она полунепрерывна снизу. Также для нее выполняется равенство

$$I(-\lambda) = \text{rk } q_\lambda(X) - I(\lambda).$$

В работе [11] построена спектральная последовательность

$$E_2^{i,j} = H^i(\Omega_{5-j}) \Rightarrow H^{i+j}(\mathbb{RP}^5 \setminus \mathbb{R}\hat{S}_p), \quad (3.4)$$

где $\Omega_j \subset S^2$ – замкнутое множество, заданное неравенством $I(\lambda) \leq j$, а когомологии рассматриваются с коэффициентами в поле $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$.

Для доказательства леммы рассмотрим следующие девять систем уравнений вида (3.2):

$$\begin{aligned} X_0^2 - X_1^2 + 2X_2^2 - 2X_3^2 + X_4^2 - X_5^2 &= 0, \\ X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + 2X_4X_5 &= 0, \\ X_0^2 - X_1^2 + \frac{1}{2}X_2^2 - \frac{1}{2}X_3^2 - X_4^2 + X_5^2 &= 0; \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} X_0^2 + X_1^2 - X_2^2 - X_3^2 + X_4^2 - X_5^2 &= 0, \\ X_0^2 - 2X_1^2 - 2X_2^2 + X_3^2 + 2X_4X_5 &= 0, \\ X_0^2 + 4X_1^2 - 4X_2^2 - X_3^2 - X_4^2 + X_5^2 &= 0; \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} X_0^2 - 2X_1^2 - 2X_2^2 + X_3^2 + 2X_4X_5 &= 0, \\ X_0^2 + X_1^2 - X_2^2 - X_3^2 + X_4^2 - X_5^2 &= 0, \\ X_0^2 - \frac{1}{2}X_1^2 - \frac{1}{2}X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 - X_5^2 &= 0; \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} X_0^2 + 2X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 - 2X_4^2 - X_5^2 &= 0, \\ -X_0^2 + 3X_1^2 + 3X_2^2 + 3X_3^2 + 3X_4^2 - X_5^2 &= 0, \\ X_0^2 + \frac{9}{2}X_1^2 + 9X_2^2 - 9X_3^2 - \frac{9}{2}X_4^2 - X_5^2 &= 0; \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} -X_0^2 + 2X_1^2 + 2X_2^2 + 4X_3^2 - 2X_4^2 - 2X_5^2 &= 0, \\ 2X_0^2 + 2X_1^2 - X_2^2 - X_3^2 - X_4^2 + X_5^2 &= 0, \\ -4X_0^2 + 2X_1^2 + \frac{1}{2}X_2^2 + \frac{1}{4}X_3^2 - \frac{1}{2}X_4^2 - \frac{1}{2}X_5^2 &= 0; \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} 2X_0^2 + 2X_1^2 - X_2^2 - X_3^2 - X_4^2 + 2X_5^2 &= 0, \\ -X_0^2 + 2X_1^2 + 2X_2^2 + 4X_3^2 - 2X_4^2 - 2X_5^2 &= 0, \\ \frac{1}{2}X_0^2 + 2X_1^2 - 4X_2^2 - 16X_3^2 - 4X_4^2 + 2X_5^2 &= 0; \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} X_0^2 - X_1^2 - 2X_2^2 - 2X_3^2 + 2X_4^2 + 2X_5^2 &= 0, \\ 2X_0^2 + 2X_1^2 - X_2^2 - 2X_3^2 - X_4^2 - 2X_5^2 &= 0, \\ 4X_0^2 - 4X_1^2 - \frac{1}{2}X_2^2 - 2X_3^2 + \frac{1}{2}X_4^2 - 2X_5^2 &= 0; \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 - X_4^2 - X_5^2 &= 0, \\ 2X_1^2 + 4X_2^2 + 4X_3^2 - X_4^2 - 3X_5^2 &= 0, \\ 4X_1^2 + 16X_2^2 - 16X_3^2 - X_4^2 - 9X_5^2 &= 0; \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} 2X_0^2 + 4X_1^2 + X_2^2 - 5X_3^2 - 2X_4^2 - 3X_5^2 &= 0, \\ X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 - X_4^2 - X_5^2 &= 0, \\ \frac{1}{4}X_1^2 + X_2^2 - \frac{1}{5}X_3^2 - \frac{1}{2}X_4^2 - \frac{1}{3}X_5^2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Непосредственно проверяется, что эти системы уравнений определяют поверхности $\widehat{S}_p$, полученные из отмеченных пучков квадрик, принадлежащих жестким изотопическим классам

$$\mathcal{B}(4), \mathcal{B}'(1, 1, 2), \mathcal{B}''(1, 1, 2), \mathcal{B}(1, 1, 4), \mathcal{B}'(1, 2, 3), \mathcal{B}''(1, 2, 3), \\ \mathcal{B}(2, 2, 2), \mathcal{B}'(1, 1, 1, 1, 2), \mathcal{B}''(1, 1, 1, 1, 2)$$

соответственно.

Чтобы доказать утверждение 1) леммы, рассмотрим рис. 1. На нем изоб-

Рис. 1. Индекс-функция для $B(4)$

ражена полусфера $\lambda_3 \geq 0$ (аналогично для следующих рисунков) и значения индекс-функции $I(\lambda)$ для системы уравнений (3.5). Область, в которой стоит цифра 3 в круге, содержит точку, отвечающую отмеченной квадрике (аналогично для следующих рисунков). Из утверждения 2) леммы 3.1 следует, что достаточно показать, что множество $\mathbb{R}\widehat{S}_p$ непустое. Это означает, что группа когомологий $H^5(\mathbb{RP}^5 \setminus \mathbb{R}\widehat{S}_p)$ равна нулю. Из рис. 1 видно, что выполняются равенства

$$E_2^{0,5} = H^0(\Omega_0) = 0, \quad E_2^{1,4} = H^1(\Omega_1) = 0, \quad E_2^{2,3} = H^2(\Omega_2) = 0,$$

поэтому из спектральной последовательности (3.4) следует, что группа когомологий $H^5(\mathbb{RP}^5 \setminus \mathbb{R}\widehat{S}_p)$ равна нулю. Утверждение 1) доказано.

Докажем утверждение 2). Из утверждений 4), 5) леммы 3.1 следует, что достаточно доказать неравенство

$$\dim H^1(\mathbb{R}\widehat{S}_p) > 2,$$

для чего рассмотрим рис. 2, на котором изображены значения индекс-функции $I(\lambda)$ для системы уравнений (3.6). Из рис. 2 видно, что выполняются равенства (нужно учитывать и вторую половину сферы)

$$\dim E_2^{0,3} = \dim H^0(\Omega_2) = 6, \quad E_2^{2,2} = H^2(\Omega_3) = 0.$$

Рис. 2. Индекс-функция для $B'(1, 1, 2)$ Рис. 3. Индекс-функция для $B''(1, 1, 2)$

Следовательно, выполняются неравенства

$$\dim H^3(\mathbb{RP}^5 \setminus \mathbb{R}\hat{S}_p) \geq 6, \quad \dim H^2(\mathbb{RP}^5, \mathbb{R}\hat{S}_p) \geq 6.$$

Рассмотрим теперь длинную точную последовательность

$$\cdots \rightarrow H^1(\mathbb{RP}^5) \rightarrow H^1(\mathbb{R}\hat{S}_p) \rightarrow H^2(\mathbb{RP}^5, \mathbb{R}\hat{S}_p) \rightarrow H^2(\mathbb{RP}^5) \rightarrow H^2(\mathbb{R}\hat{S}_p) \rightarrow \cdots \quad (3.14)$$

когомологий пары пространств $(\mathbb{RP}^5, \mathbb{R}\hat{S}_p)$. Из (3.14) следует, что выполняется неравенство

$$\dim H^1(\mathbb{R}\hat{S}_p) \geq 5.$$

Утверждение 2) леммы доказано.

Докажем утверждение 3). Из утверждений 4), 5) леммы 3.1 следует, что достаточно доказать неравенство

$$\dim H^1(\mathbb{R}\hat{S}_p) < 10,$$

для чего рассмотрим рис. 3. На нем изображены значения индекс-функции $I(\lambda)$ для системы уравнений (3.7).

Из рис. 3 видно, что выполняются равенства (нужно учитывать и вторую половину сферы)

$$\dim E_2^{0,3} = \dim H^0(\Omega_2) = 3, \quad \dim E_2^{1,2} = \dim H^1(\Omega_3) = 0, \\ E_2^{2,1} = H^2(\Omega_4) = 0.$$

Следовательно, выполняются неравенства

$$\dim H^3(\mathbb{RP}^5 \setminus \mathbb{R}\hat{S}_p) \leq 3, \quad \dim H^2(\mathbb{RP}^5, \mathbb{R}\hat{S}_p) \leq 3.$$

Из точной последовательности (3.14) получаем неравенство

$$\dim H^1(\mathbb{R}\hat{S}_p) \leq 5.$$

Утверждение 3) леммы доказано.

Докажем утверждения 4), 5). Для доказательства этих утверждений рассмотрим рис. 4, 5. На них изображены значения индекс-функции $I(\lambda)$ для систем уравнений (3.8), (3.9) соответственно.

Рис. 4. Индекс-функция для $B(1, 1, 4)$

Рис. 5. Индекс-функция для $B'(1, 2, 3)$

Из утверждения 6) леммы 3.1 следует, что достаточно показать, что множество $\mathbb{R}\hat{S}_p$ непустое. Это проверяется так же, как при доказательстве утверждения 1) данной леммы. Утверждения 4), 5) доказаны.

Докажем утверждение 6), для чего рассмотрим рис. 6.

Рис. 6. Индекс-функция для $B''(1, 2, 3)$

На нем изображены значения индекс-функции $I(\lambda)$ для системы уравнений (3.10). Нужно показать, что группа когомологий $H^5(\mathbb{RP}^5 \setminus \mathbb{R}\hat{S}_p)$ не равна нулю. Из рис. 6 видно (нужно учитывать противоположную часть сферы), что выполняются равенства

$$E_2^{0,5} = H^0(\Omega_0) = 1, \quad E_2^{2,4} = H^2(\Omega_1) = 0,$$

поэтому из спектральной последовательности (3.4) следует, что группа когомологий $H^5(\mathbb{RP}^5 \setminus \mathbb{R}\hat{S}_p)$ не равна нулю. Утверждение 6) доказано.

Рис. 7. Индекс-функция для $B(2, 2, 2)$

Рис. 8. Индекс-функция для $B''(1, 1, 1, 2)$

Докажем утверждения 7), 9). Из утверждений 7), 8) леммы 3.1 следует, что достаточно доказать несвязность поверхности $\mathbb{R}\hat{S}_p$. Для доказательства этого утверждения рассмотрим рис. 7, 8. На них изображены значения индекс-функции $I(\lambda)$ для систем уравнений (3.11), (3.13) соответственно. Из рис. 7, 8 видно, что выполняются равенства (нужно учитывать и вторую половину сферы)

$$\dim E_2^{0,4} = \dim H^0(\Omega_1) = 2, \quad E_2^{1,3} = H^1(\Omega_2) = 0, \quad E_2^{2,3} = H^2(\Omega_2) = 0.$$

Следовательно, выполняются равенства

$$\dim H^4(\mathbb{RP}^5 \setminus \mathbb{R}\hat{S}_p) = 2, \quad \dim H^1(\mathbb{RP}^5, \mathbb{R}\hat{S}_p) = 2.$$

Тогда из точной последовательности (3.14) получаем неравенство

$$\dim H^0(\mathbb{R}\hat{S}_p) \geq 2.$$

Утверждения 7), 9) доказаны.

Докажем утверждение 8). Из утверждений 7), 8) леммы 3.1 следует, что достаточно доказать связность поверхности $\mathbb{R}\hat{S}_p$, для чего рассмотрим рис. 9. На нем изображены значения индекс-функции $I(\lambda)$ для системы уравнений (3.12). Из рис. 9 видно, что выполняются равенства (нужно учитывать и вторую половину сферы)

$$\dim E_2^{0,4} = \dim H^0(\Omega_1) = 0, \quad E_2^{1,3} = H^1(\Omega_2) = 0.$$

Следовательно, имеют место равенства

$$\dim H^4(\mathbb{RP}^5 \setminus \mathbb{R}\hat{S}_p) = 0, \quad \dim H^1(\mathbb{RP}^5, \mathbb{R}\hat{S}_p) = 0.$$

Рис. 9. Индекс-функция для $B'(1, 1, 1, 1, 2)$

Тогда из точной последовательности (3.14) получаем равенство

$$\dim H^0(\mathbb{R}\widehat{S}_p) = 1.$$

Утверждение 8) доказано, поэтому лемма доказана полностью. Следовательно, доказаны теоремы 0.1, 0.2.

Список литературы

1. M. Reid, *The complete intersection of two or more quadrics*, Cambridge Ph. D. thesis, 1972.
2. А. Н. Тюрин, “О пересечении квадрик”, *УМН*, **30:6** (1975), 51–99; англ. пер.: A. N. Tyurin, “On intersections of quadrics”, *Russian Math. Surveys*, **30:6** (1975), 51–105.
3. В. А. Рохлин, “Комплексные топологические характеристики вещественных алгебраических кривых”, *УМН*, **33:5** (1978), 77–89; англ. пер.: V. A. Rokhlin, “Complex topological characteristics of real algebraic curves”, *Russian Math. Surveys*, **33:5** (1978), 85–98.
4. A. Degtyarev, I. Itenberg, V. Kharlamov, *Real Enriques surfaces*, Lecture Notes in Math., **1746**, Springer-Verlag, Berlin, 2000.
5. В. А. Краснов, “Вещественные трехмерные биквадрики”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **74:4** (2010), 119–144; англ. пер.: V. A. Krasnov, “Real three-dimensional biquadrics”, *Izv. Math.*, **74:4** (2010), 781–804.
6. Ф. Гриффитс, Дж. Харрис, *Принципы алгебраической геометрии*, Мир, М., 1982; пер. с англ.: Ph. Griffiths, J. Harris, *Principles of algebraic geometry*, Wiley, New York, 1978.
7. I. V. Dologachev, *Topics in classical algebraic geometry. I*, www.math.lsa.umich.edu/~topics.pdf.
8. A. Comessatti, “Sulle varietà abeliane reali”, *Ann. Mat. Pura Appl.*, **2:1** (1925), 67–106.
9. В. А. Краснов, “Отображение Альбанезе для вещественных алгебраических многообразий”, *Матем. заметки*, **32:3** (1982), 365–374; англ. пер.: V. A. Krasnov, “Albanese mapping for real algebraic varieties”, *Math. Notes*, **32:3** (1982), 661–666.

10. И. О. Калинин, “О когомологиях вещественных алгебраических многообразий”, *Геометрия и топология*. 8, Зап. научн. сем. ПОМИ, **299**, ПОМИ, СПб., 2003, 112–151; англ. пер.: I. O. Kalinin, “Cohomology of real algebraic varieties”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **131**:1 (2005), 5323–5344.
11. А. А. Аграчёв, “Гомологии пересечений вещественных квадрик”, *Докл. АН СССР*, **299**:5 (1988), 1033–1036; англ. пер.: A. A. Agrachev, “Homology of the intersections of real quadrics”, *Soviet Math. Dokl.*, **37**:2 (1988), 493–496.

В. А. КРАСНОВ (V. A. KRASNOV)
Ярославский государственный университет
им. П. Г. Демидова
E-mail: krasnov@uniyar.ac.ru

Поступило в редакцию
24.11.2008
28.04.2009