Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Р. Фаталов, Точные асимптотики вероятностей больших отклонений для цепей Маркова: метод Лапласа, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2011, том 75, выпуск 4, 189–223

DOI: <https://doi.org/10.4213/im4061>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 16:01:11

УДК 519.2

В. Р. Фаталов

Точные асимптотики вероятностей больших отклонений для цепей Маркова: метод Лапласа

Доказаны результаты о точных асимптотиках при $n \rightarrow \infty$ для средних $E_a \exp\{-\theta \sum_{k=0}^{n-1} g(X_k)\}$ и вероятностей $P_a\{\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g(X_k) < d\}$, где $X_n = X_0 + \sum_{k=1}^n \xi_k$, $n \geq 1$, – соответствующее случайное блуждание на $\mathbb{R}$, $\{\xi_k\}_{k=1}^\infty$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, имеющих распределение Лапласа, $g(x)$ – непрерывная положительная функция, удовлетворяющая некоторым условиям, и $d > 0$, $\theta > 0$, $a \in \mathbb{R}$ – заданные числа. Результаты получены на основе развитого в статье нового метода – метода Лапласа для времени пребывания марковских цепей с дискретным временем. В качестве функции $g(x)$ можно брать функции $|x|^p$, $\log(|x|^p + 1)$, $p > 0$, $|x| \log(|x| + 1)$, $e^{\alpha|x|} - 1$, $0 < \alpha < 1/2$, $x \in \mathbb{R}$, и другие. Подробно рассмотрен пример с функцией $g(x) = |x|$, в котором проведены явные вычисления с привлечением функций Бесселя.

Библиография: 44 наименования.

Ключевые слова: большие отклонения, марковские цепи, метод Лапласа, функционал действия, времена пребывания, функции Бесселя.

§ 1. Введение и формулировки основных результатов

1.1. Постановка задачи. Принцип больших отклонений Донскера–Варадана для времени пребывания однородных марковских процессов с непрерывным и дискретным временем представляет собой один из самых общих и эффективных методов получения предельных теорем о марковских процессах на *логарифмическом* уровне (см. [1]–[9], а также [10]–[14]).

Указанный принцип больших отклонений послужил также основой для построения варианта бесконечномерного метода Лапласа, предназначенного для вычисления *точных* асимптотик интегралов типа Лапласа от распределений времени пребывания марковских процессов [15]–[17] и асимптотик соответствующих вероятностей больших отклонений [18]–[21]. При этом оказалось, что вычисление точных асимптотик значительно проще проводить в случае марковских процессов с непрерывным временем. Это объясняется тем, что для однородных марковских процессов с непрерывным временем существует производящий оператор, вследствие этого так называемый функционал действия выражается через форму Дирихле и имеет более простой вид.

В настоящей работе мы рассмотрим случай марковских процессов с дискретным временем и изложим новый общий метод исследования вероятностей больших отклонений для функционалов от марковской цепи.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 07-01-00077).

Ради простоты мы ограничимся рассмотрением одного из самых простых и распространенных типов марковских цепей – случайным блужданием (см. [22]–[26]). Среди обширного класса случайных блужданий мы выделили симметричное случайное блуждание на оси $\mathbb{R}$, порожденное распределением Лапласа. В этом случае многие вычисления можно провести до конца. Отметим, что излагаемый ниже метод применим и ко многим иным типам марковских цепей.

Перейдем к точной формулировке полученных результатов.

Пусть $[\Omega, \mathcal{F}, P]$ – вероятностное пространство и $\{\xi_k\}_{k=1}^\infty$ – определенная на Ω последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, имеющих распределение Лапласа с симметричной плотностью

$$\psi(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (1.1)$$

(см., например, [24, п. 6.3.9]). Зададим случайное блуждание на $\mathbb{R}$, порожденное распределением Лапласа, следующим образом:

$$X_n = X_0 + \sum_{k=1}^n \xi_k, \quad n \geq 1; \quad (1.2)$$

здесь X_0 – случайная величина, не зависящая от последовательности $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ (см. [22, пример 1.2, (c)]).

Пусть $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ – борелевская σ -алгебра множеств из $\mathbb{R}$, а m – мера Лебега на $\mathbb{R}$. Как известно, случайное блуждание (1.2) является однородной цепью Маркова со значениями в $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ и вероятностью перехода

$$P_x(A) \equiv P(x, A) \equiv P\{X_n \in A \mid X_{n-1} = x\} = \int_A \psi(y - x) dy, \quad n \geq 1, \quad A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}. \quad (1.3)$$

Пусть $C_b \equiv C_b(\mathbb{R})$ – банахово пространство ограниченных непрерывных действительных функций $z(x)$ на $\mathbb{R}$ с нормой-супремум $\|z\|_{C_b} := \sup_{x \in \mathbb{R}} |z(x)|$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. *Цепь Маркова $\{X_n\}$, заданная в формуле (1.2), имеет в качестве инвариантной меры Лебега m . Переходная вероятность этой цепи абсолютно непрерывна относительно меры Лебега, переходная плотность является непрерывной положительной симметричной функцией и задается формулой*

$$p(x, y) := \frac{P(x, dy)}{dy} = \psi(x - y), \quad x, y \in \mathbb{R}. \quad (1.4)$$

Переходный оператор имеет вид оператора свертки

$$\begin{aligned} (Pu)(x) &:= \int_{-\infty}^{+\infty} u(y)P(x, dy) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} u(y)\psi(x - y) dy \equiv (u * \psi)(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad u \in C_b. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Кроме того, цепь $\{X_n\}$ является сильно феллеровской, топологически транзитивной, m -неприводимой и возвратной по Харрису.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение предложения вытекает из [22, пример 5.1, (с)]. Соотношения (1.4), (1.5) справедливы в силу равенства (1.3). Учитывая замечание к определению 5.7 из [23, гл. 1, с. 57] и формулу (1.5), заключаем, что цепь $\{X_n\}$ является сильно феллеровской. Топологическая транзитивность цепи вытекает непосредственно из [7, определение в п. 6.2], а m -неприводимость – из [22, § 2.2, определение 2.2]. Возвратность случайного блуждания $\{X_n\}$ получаем, используя известный результат Чжуна–Орнштейна (см. [23, гл. 3, упражнение 3.14]). Возвратность по Харрису следует теперь из [23, гл. 3, теорема 3.9]. Предложение доказано.

Напомним, что оператор свертки возникает в теории сумм независимых случайных величин [24, п. 5.1.1], [27, гл. 1, § 2, с. 16] и в теории линейных интегральных уравнений [28].

Обозначим через $\mathcal{M}$ метрическое пространство вероятностных мер на $\mathbb{R}$, снабженное метрикой Прохорова ρ и борелевской σ -алгеброй. Определим для нашей марковской цепи $\{X_n\}_{n=0}^\infty$ эмпирическую меру $L_n: \Omega \rightarrow \mathcal{M}$ следующим образом:

$$L_n(X, \omega) \equiv L_n(\omega) := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{X_k(\omega)}, \quad n \geq 1;$$

здесь δ_x – мера Дирака, сосредоточенная в точке x . Функционал L_n часто называют (нормированным) *временем пребывания* для цепи $\{X_n\}$. Имеет место следующее важное утверждение (ср. [26, гл. 1, формула (4.1)], [29, формула (4.2)]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. Пусть действительная функция $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ измерима по Борелю и интегрируема на любом компактном множестве из $\mathbb{R}$. Тогда для каждого $n \geq 1$ и всех $\omega \in \Omega$ выполнено равенство

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} q(X_k) = \int_{-\infty}^{+\infty} q(x) L_n(dx). \quad (1.6)$$

Заметим, что в равенстве (1.6) слева присутствует нелинейный функционал от цепи $\{X_k\}$, в то время как справа – линейный функционал от времени пребывания этой цепи.

Полагая $X = \{X_k\}$, ради краткости записи мы будем использовать следующие обозначения: $P_a\{X \in (\cdot)\} := P\{X \in (\cdot) \mid X_0 = a\}$, $P_{a,b}\{X \in (\cdot)\} := P\{X \in (\cdot) \mid X_0 = a, X_{n-1} = b\}$; здесь $a, b \in \mathbb{R}$. Ниже через E_a , $E_{a,b}$ обозначены усреднения по соответствующей вероятности.

В силу предложения 1.1 для нашей цепи $\{X_n\}$ выполнены условия (A2) и (A3) из [7, с. 286]. Поэтому, учитывая [7, лемма 6.2], мы можем задать функционал действия $I: \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ следующим образом:

$$I(\nu) = \begin{cases} \sup \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \log \frac{u(x)}{(Pu)(x)} \nu(dx) : u \in C_b(\mathbb{R}), u > 0 \right\}, & \text{если } \nu \ll m, \\ +\infty & \text{иначе.} \end{cases} \quad (1.7)$$

Как известно, функционал действия является выпуклым полунепрерывным снизу неотрицательным функционалом с компактными множествами уровня (см. [4, § 2]).

Введем следующий важный класс функций.

Пусть класс функций $\mathcal{G}$ состоит из непрерывных положительных функций (потенциалов) $g(x)$, $x \in \mathbb{R}$, для которых выполнены условия:

(i) функция $g(x)$ четная, т.е. $g(x) = g(-x)$, $x \in \mathbb{R}$, при $x > 0$ функция $g(x)$ дважды дифференцируема, строго монотонно возрастает и имеет положительную производную, $g'(x) > 0$, таким образом, $g(x)$ – растущий потенциал, т.е. $\lim_{|x| \rightarrow \infty} g(x) = \infty$;

(ii) функция $g(x)$ достигает на $\mathbb{R}$ своего минимума, равного нулю, в единственной точке 0 и $g(x) > 0$ при $x \neq 0$; в некоторой окрестности точки 0 для некоторых положительных чисел a_0 , α_0 выполнено соотношение $g(x) = a_0|x|^{\alpha_0}(1 + o(1))$ при $x \rightarrow 0$;

(iii) конечен второй момент, т.е. $Eg^2(\xi_1) < \infty$.

Несложно видеть, что классу $\mathcal{G}$ принадлежат функции $|x|^p$, $\log(|x|^p + 1)$, $p > 0$, $|x|\log(|x| + 1)$, $e^{\alpha|x|} - 1$, $0 < \alpha < 1/2$, $x \in \mathbb{R}$, и др. Ниже мы подробно рассмотрим случай, когда $g(x) = |x|$. Для $g \in \mathcal{G}$ введем линейный функционал

$$F_0(\nu) := \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\nu(dx), \quad \nu \in \mathcal{M}. \quad (1.8)$$

Очевидно, что $F_0(\nu) \geq 0$. Пусть L^p , $p \geq 1$, обозначает обычное банахово пространство функций, заданных на $\mathbb{R}$, интегрируемых в p -й степени по мере Лебега с нормой $\|v\|_p := [\int_{-\infty}^{+\infty} |v(x)|^p dx]^{1/p}$.

1.2. Точные асимптотики интегралов типа Лапласа. Справедливо следующее утверждение, доказательство которого дано ниже, в § 2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3. Пусть заданы число $\theta > 0$ и потенциал $g \in \mathcal{G}$. Тогда экстремальная задача

$$I(\nu) + \theta F_0(\nu) \rightarrow \inf, \quad \nu \in \mathcal{M}, \quad (1.9)$$

имеет единственное решение $\nu_0 \equiv \nu_0(\theta) \in \mathcal{M}$, при этом вероятностная мера ν_0 абсолютно непрерывна относительно меры Лебега и существует плотность

$$f_0(x) \equiv f_0(x, \theta) := \frac{\nu_0(dx)}{dx}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.10)$$

Обозначим значение минимума в задаче (1.9) через q :

$$q \equiv q(\theta) := \min_{\nu \in \mathcal{M}} [I(\nu) + \theta F_0(\nu)] = I(\nu_0) + \theta F_0(\nu_0) > 0. \quad (1.11)$$

Положительность числа q вытекает из неравенств $I(\nu_0) \geq 0$ и $F_0(\nu_0) > 0$, последнее верно в силу (1.10).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4. Пусть заданы число $\theta > 0$ и потенциал $g \in \mathcal{G}$. Тогда однородная граничная задача

$$\begin{aligned} z''(x) + (e^{q-\theta g(x)} - 1)z(x) &= 0, & x \geq 0, \\ z'(0) &= 0 \end{aligned} \quad (1.12)$$

в классе функций z таких, что

$$\int_0^{\infty} z(x) e^{-\theta g(x)} dx = \frac{1}{2}, \quad (1.13)$$

имеет единственное положительное решение $z_0(x) \equiv z_0(x, \theta)$.

Доказательство предложения 1.4 также дано ниже, в § 2. Отметим, что в силу приближения Лиувилля–Грина (см. [30, гл. 6, теорема 2.1]), как правило, имеет место асимптотика

$$\log z_0(x) = -x(1 + o(1)), \quad x \rightarrow \infty. \quad (1.14)$$

Учитывая предложение 1.4, введем функцию

$$h_0(x) = \begin{cases} h_0(x, \theta) = e^{-\theta g(x)} z_0(x), & \text{если } x \geq 0, \\ h_0(-x), & \text{если } x \leq 0. \end{cases} \quad (1.15)$$

Из формул (1.10), (1.13) и (1.15) вытекают равенства

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_0(x) dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} h_0(x) dx = 1. \quad (1.16)$$

Как доказано ниже, в § 2, между функциями f_0 и h_0 имеется следующая простая связь:

$$f_0(x) = K_0 e^{\theta g(x)} h_0^2(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad K_0 = K_0(\theta) = \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\theta g(x)} h_0^2(x) dx}. \quad (1.17)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Найти функцию h_0 значительно проще, чем f_0 , так как решить граничную задачу для однородного дифференциального уравнения второго порядка (1.12) намного легче, чем решить сложную минимаксную экстремальную задачу (1.9).

Основной результат статьи о точных асимптотиках интегралов типа Лапласа имеет следующий вид.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть заданы числа $\theta > 0$, $a, b \in \mathbb{R}$ и потенциал $g \in \mathcal{G}$. Тогда для случайного блуждания (1.2) при $n \rightarrow \infty$ справедливы асимптотические соотношения

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_a \exp \left\{ -\theta \sum_{k=0}^{n-1} g(X_k) \right\} &= \mathbb{E}_a \exp \left\{ -n\theta \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) L_n(dx) \right\} \\ &= K_0 \exp \{ -(n-1)q \} h_0(a)(1 + o(1)), \end{aligned} \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{a,b} \exp \left\{ -\theta \sum_{k=0}^{n-1} g(X_k) \right\} &= \mathbb{E}_{a,b} \exp \left\{ -n\theta \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) L_n(dx) \right\} \\ &= 2K_0 \exp \{ -(n-1)q \} \sqrt{\pi n} h_0(a) h_0(b) (1 + o(1)), \end{aligned} \quad (1.19)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_a \left[\exp \left\{ -\theta \sum_{k=0}^{n-1} g(X_k) \right\} \mid X_n = b \right] &= \mathbb{E}_a \left[\exp \left\{ -n\theta \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) L_n(dx) \right\} \mid X_n = b \right] \\ &= 2K_0 \exp \{ -nq \} \sqrt{\pi n} h_0(a) h_0(b) e^{\theta g(b)} (1 + o(1)). \end{aligned} \quad (1.20)$$

Здесь числа q и K_0 заданы формулами (1.11), (1.17), функция h_0 – формулой (1.15).

Отметим, что первые равенства в формулах (1.18)–(1.20) выполнены в силу предложения 1.2.

ПРИМЕР 1.1. Рассмотрим частный случай теоремы 1.1, когда $g(x) = |x|$. Пусть $J_\nu(x)$ – функция Бесселя первого рода (см. [31, гл. 9], [32, гл. 7]), $J'_\nu(x)$ – ее производная по x , $j'_{\nu,1}$ – первый положительный нуль функции $J'_\nu(x)$ (см. [31, § 9.5]). Известно, что $j'_{\nu,1} > \nu$ при $\nu > 0$ (см. [32, § 7.9, с. 71], [30, гл. 7, п. 6.3, с. 241]).

Вычисления по формулам (1.10)–(1.17) дают следующие значения для величин, входящих в соотношения (1.18)–(1.20):

$$q = 2 \log \frac{\theta \tau}{2} > 0, \quad \tau := j'_{2/\theta,1} > \frac{2}{\theta}, \quad (1.21)$$

$$h_0(x) = C_1 e^{-\theta|x|} J_{2/\theta}(\tau e^{-\theta|x|/2}), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.22)$$

$$K_0 = \frac{C_2}{C_1^2}, \quad C_1 = C_1(\theta) = \frac{\theta}{4 \int_0^1 x J_{2/\theta}(\tau x) dx} > 0, \quad (1.23)$$

$$C_2 = C_2(\theta) = \frac{\theta \tau^2}{2(\tau^2 - \frac{4}{\theta^2}) J_{2/\theta}^2(\tau)} > 0.$$

Применяя теорему 1.1, получаем следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 1.1. Пусть заданы числа $\theta > 0$, $a, b \in \mathbb{R}$. Тогда для случайного блуждания (1.2) при $n \rightarrow \infty$ справедливы асимптотические соотношения

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_a \exp \left\{ -\theta \sum_{k=0}^{n-1} |X_k| \right\} &= \mathbb{E}_a \exp \left\{ -n\theta \int_{-\infty}^{+\infty} |x| L_n(dx) \right\} \\ &= K_0 \exp \{ -(n-1)q \} h_0(a) (1 + o(1)), \end{aligned} \quad (1.24)$$

$$\mathbb{E}_{a,b} \exp \left\{ -\theta \sum_{k=0}^{n-1} |X_k| \right\} = 2K_0 \exp \{ -(n-1)q \} \sqrt{\pi n} h_0(a) h_0(b) (1 + o(1)),$$

$$\mathbb{E}_a \left[\exp \left\{ -\theta \sum_{k=0}^{n-1} |X_k| \right\} \middle| X_n = b \right] = 2K_0 \exp \{ -nq \} \sqrt{\pi n} h_0(a) h_0(b) e^{\theta|b|} (1 + o(1)).$$

Здесь числа q , K_0 и функция h_0 заданы формулами (1.21)–(1.23).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Существует связь формулы (1.24) при $a = 0$ с одним результатом М. Каца из [33]. Пусть $0 < \tau \equiv \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_k < \dots$ – последовательность положительных нулей функции $J'_{2/\theta}(x)$ (см. [29, § 9.5]). Для случайных величин $\{\xi_k\}_{k=1}^\infty$ с плотностью (1.1) получена [33, с. 407] неасимптотическая формула (17), которая в наших обозначениях имеет следующий вид:

$$\mathbb{E} \exp \left\{ -\theta \sum_{k=1}^n \left| \sum_{j=1}^k \xi_j \right| \right\} = \sum_{j=1}^\infty \frac{2 \int_0^1 x J_{2/\theta}(\tau_j x) dx}{\left(\frac{\theta}{2} \tau_j \right)^{2n} \left(1 - \frac{4}{\theta^2 \tau_j^2} \right) J_{2/\theta}(\tau_j)}. \quad (1.25)$$

Из формулы (1.25) непосредственно вытекает следующее асимптотическое соотношение при $n \rightarrow \infty$:

$$\mathbb{E} \exp \left\{ -\theta \sum_{k=1}^n \left| \sum_{j=1}^k \xi_j \right| \right\} = \exp \left\{ -2n \log \frac{\theta \tau}{2} \right\} \frac{2 \int_0^1 x J_{2/\theta}(\tau x) dx}{\left(1 - \frac{4}{\theta^2 \tau^2}\right) J_{2/\theta}(\tau)}. \quad (1.26)$$

Несложно убедиться в том, что соотношение (1.26) также можно получить из формулы (1.24), положив в нем $a = 0$ и заменив $n - 1$ на n . Таким образом, соотношение (1.24) согласуется с формулой М. Каца (17) из [33].

1.3. Точные асимптотики вероятностей больших уклонений. Используя результаты из п. 1.1 и некоторые утверждения из [17], мы докажем теоремы о точных асимптотиках вероятностей типа $\mathbb{P}_a \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g(X_k) < d \right\}$ при $n \rightarrow \infty$, где $a \in \mathbb{R}$, $d > 0$ – некоторые фиксированные числа и $g \in \mathcal{G}$.

Согласно предложению 1.3 каждому $\theta > 0$ соответствует единственная функция $f_0(x, \theta)$, заданная в (1.10). Ниже, в § 4 при доказательстве предложения 4.2, доказано следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.5. Пусть заданы число $d > 0$ и функция $g \in \mathcal{G}$. Тогда уравнение относительно $\theta > 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_0(x, \theta) g(x) dx = d, \quad \theta > 0, \quad (1.27)$$

имеет единственное решение $\theta_0 = \theta_0(d) > 0$.

Для величин, заданных в (1.10)–(1.17), при $\theta = \theta_0$ введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} q_1 &:= q(\theta_0), & f_1(x) &:= f_0(x, \theta_0), & \nu_1 &:= \nu_0(\theta_0), \\ h_1(x) &:= h_0(x, \theta_0), & K_1 &:= K_0(\theta_0). \end{aligned} \quad (1.28)$$

Отсюда и из (1.17), в частности, получаем равенство

$$f_1(x) = K_1 e^{\theta_0 g(x)} h_1^2(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad K_1 = \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\theta_0 g(x)} h_1^2(x) dx}. \quad (1.29)$$

Для $\nu \in \mathcal{M}$ обозначим через $L^2(\nu)$ обычное гильбертово пространство интегрируемых в квадрате функций на $\mathbb{R}$ со скалярным произведением $\langle u, v \rangle_\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)v(x)\nu(dx)$, $u, v \in L^2(\nu)$, и нормой $\| \cdot \|_\nu$. Очевидно вложение $C_b \subset L^2(\nu)$ для любой меры $\nu \in \mathcal{M}$. Определим симметричную марковскую переходную плотность (относительно вероятностной меры ν_1)

$$\mathbf{q}_1(x, y) = e^{q_1} e^{-\theta_0(g(x)+g(y))} \frac{\psi(y-x)}{K_1 h_1(x) h_1(y)}, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad (1.30)$$

и соответствующий оператор перехода $Q_1: L^2(\nu_1) \rightarrow L^2(\nu_1)$ по формуле

$$(Q_1 u)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{q}_1(x, y) u(y) f_1(y) dy \quad (1.31)$$

(пояснения см. ниже, в § 3 (замечание 3.3) и в § 4). Введем следующее линейное подпространство пространства $L^2(\nu_1)$:

$$L_0^2(\nu_1) = \left\{ u \in L^2(\nu_1) : \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) \nu_1(dx) = 0 \right\}. \quad (1.32)$$

Ниже, в § 4, доказано, что оператор $I - Q_1$ взаимно однозначно отображает $L_0^2(\nu_1)$ на $L_0^2(\nu_1)$, поэтому однозначно определена функция

$$v_0 := (I - Q_1)^{-1}(g - d) \in L_0^2(\nu_1). \quad (1.33)$$

Положим теперь

$$\sigma^2 := 2\langle g, v_0 \rangle_{\nu_1} - \langle g, g \rangle_{\nu_1} + d^2 > 0. \quad (1.34)$$

Положительность числа σ^2 будет доказана ниже, в § 4 при доказательстве леммы 4.1.

Сформулируем основной результат настоящей статьи о точных асимптотиках вероятностей больших отклонений.

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть заданы числа $d > 0$, $a, b \in \mathbb{R}$ и потенциал $g \in \mathcal{G}$. Тогда для случайного блуждания (1.2) при $n \rightarrow \infty$ справедливы асимптотические соотношения

$$\begin{aligned} P_a \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g(X_k) < d \right\} &= P_a \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) L_n(dx) < d \right\} \\ &= K_1 \exp\{-n(q_1 - \theta_0 d)\} \frac{e^{q_1} h_1(a)}{\sigma \theta_0 \sqrt{2\pi n}} (1 + o(1)), \end{aligned} \quad (1.35)$$

$$\begin{aligned} P_{a,b} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g(X_k) < d \right\} &= P_{a,b} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) L_n(dx) < d \right\} \\ &= K_1 \exp\{-n(q_1 - \theta_0 d)\} \frac{\sqrt{2} e^{q_1} h_1(a) h_1(b)}{\sigma \theta_0} (1 + o(1)), \end{aligned} \quad (1.36)$$

$$\begin{aligned} P_a \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g(X_k) < d \mid X_n = b \right\} &= P_a \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) L_n(dx) < d \mid X_n = b \right\} \\ &= K_1 \exp\{-n(q_1 - \theta_0 d)\} \frac{\sqrt{2} e^{\theta_0 g(b)} h_1(a) h_1(b)}{\sigma \theta_0} (1 + o(1)). \end{aligned} \quad (1.37)$$

Отметим, что при выполнении условия теоремы 1.2 справедливо неравенство $q_1 - \theta_0 d > 0$. Как видим, в формулировке теоремы 1.2 участвуют объекты, введенные в теореме 1.1 и зависящие от значения $\theta_0 > 0$ параметра θ .

ПРИМЕР 1.2 (продолжение примера 1.1). Рассмотрим частный случай теоремы 1.2, когда $g(x) = |x|$. Будем использовать обозначения, введенные в примере 1.1. Зададим функцию $T_0 = T_0(\theta) := -4 \int_0^1 x(\log x) J_{2/\theta}^2(\tau x) dx$, $\theta > 0$. В силу формул (1.22), (1.23) предложение 1.5 в случае функции $g(x) = |x|$ принимает следующий вид.

Для заданного $d > 0$ уравнение относительно $\theta > 0$

$$\frac{2C_2(\theta)T_0(\theta)}{\theta^2} = d$$

имеет единственное решение $\theta_0 = \theta_0(d) > 0$.

Далее, в силу формул (1.21)–(1.23) и (1.28), (1.29) получаем следующие выражения для основных объектов из формулировки теоремы 1.2:

$$q_1 = q(\theta_0) = 2 \log \frac{\theta_0 \tau}{2} > 0, \quad \tau := j'_{2/\theta_0, 1} > \frac{2}{\theta_0}, \quad (1.38)$$

$$h_1(x) = h_0(x, \theta_0) = C_1(\theta_0) e^{-\theta_0 |x|} J_{2/\theta_0}(\tau e^{-\theta_0 |x|/2}), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.39)$$

$$C_1(\theta_0) = \frac{\theta_0}{4 \int_0^1 x J_{2/\theta_0}(\tau x) dx} > 0, \quad K_1 = K_0(\theta_0) = \frac{C_2(\theta_0)}{C_1^2(\theta_0)}. \quad (1.40)$$

В формуле (1.38) надо было бы использовать τ_1 , но ради простоты записи мы не стали выписывать индекс 1 у τ . Вычисления по формулам (1.30)–(1.34) дают значение постоянной σ^2 :

$$\begin{aligned} \sigma^2 = & \frac{\mu^2}{2} - d\mu + \frac{1}{\tau^2 - \mu^2} \left(d^2 \tau^2 - \frac{\mu^4}{\tau} \right) + \left(\frac{\mu}{\tau} - d \right) \frac{\mu^2}{J_\mu(\tau)} \left[\frac{\partial}{\partial \nu} J_\nu(\tau) \right] \Big|_{\nu=\mu} \\ & - \frac{\mu^4}{2(\tau^2 - \mu^2) J_\mu(\tau)} \left[\frac{\partial^2}{\partial \nu^2} J'_\nu(\tau) \right] \Big|_{\nu=\mu} > 0; \end{aligned} \quad (1.41)$$

здесь ради краткости записи мы положили $\mu = 2/\theta_0$.

Применяя теорему 1.2, получаем следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 1.2. Пусть заданы числа $d > 0$, $a, b \in \mathbb{R}$. Тогда для случайного блуждания (1.2) при $n \rightarrow \infty$ справедливы асимптотические соотношения

$$\begin{aligned} P_a \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |X_k| < d \right\} &= K_1 \exp\{-n(q_1 - \theta_0 d)\} \frac{e^{q_1} h_1(a)}{\sigma \theta_0 \sqrt{2\pi n}} (1 + o(1)), \\ P_{a,b} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |X_k| < d \right\} &= K_1 \exp\{-n(q_1 - \theta_0 d)\} \frac{\sqrt{2} e^{q_1} h_1(a) h_1(b)}{\sigma \theta_0} (1 + o(1)), \\ P_a \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |X_k| < d \mid X_n = b \right\} \\ &= K_1 \exp\{-n(q_1 - \theta_0 d)\} \frac{\sqrt{2} e^{\theta_0 g(b)} h_1(a) h_1(b)}{\sigma \theta_0} (1 + o(1)). \end{aligned}$$

Здесь числа q_1 , K_1 , σ^2 и функция h_1 заданы формулами (1.38)–(1.41).

Имеющиеся у автора доказательства следствий 1.1, 1.2 довольно длинны и в настоящей статье не приводятся. Нетривиальный аналог теорем 1.1, 1.2 для простейшей марковской цепи, представляющей собой последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, доказан в [34].

§ 2. Метод Лапласа для интегралов от марковской цепи. Логарифмическая асимптотика

В настоящем параграфе мы, модернизируя подход из статьи [17], изложим метод для вычисления точных асимптотик интегралов типа Лапласа (математических ожиданий) из формул (1.18)–(1.20). При этом существенно будет использоваться *линейная* зависимость стоящего в показателе экспоненты интегрального функционала от времени пребывания L_n .

Рассматриваемая марковская цепь $\{X_n\}_{n=0}^\infty$, заданная в (1.2), обладает рядом хороших свойств, перечисленных в предложении 1.1. Однако эта цепь имеет всего лишь σ -конечную инвариантную меру, поэтому в данном случае не выполнено известное условие, необходимое для справедливости принципа больших уклонений для времени пребывания L_n (см. [7, замечание (6.i)]). Тем не менее, благодаря линейности и положительности функционала F_0 на средние из формул (1.18)–(1.20) распространяются многие важные результаты теории больших уклонений, что позволяет вычислить точную асимптотику указанных средних при $n \rightarrow \infty$.

Так, имеет место следующее важное утверждение о логарифмической асимптотике, представляющее собой по существу формулировку известной интегральной теоремы Варадана (см. [35, теорема 3.4], [4, теорема 2.1]).

Пусть фиксированы числа $\theta > 0$, $a, b \in \mathbb{R}$ и потенциал $g \in \mathcal{G}$. Ниже мы неоднократно будем использовать очевидное тождество $F_0(L_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) L_n(dx)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1 (логарифмическая асимптотика для средних). *Для случайного блуждания (1.2) и линейного функционала (1.8) при $n \rightarrow \infty$ справедливы асимптотические соотношения*

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{E}_a \{ \exp[-n\theta F_0(L_n)] \} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{E}_{a,b} \{ \exp[-n\theta F_0(L_n)] \} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{E}_a \{ \exp[-n\theta F_0(L_n)] \mid X_n = b \} = - \inf_{\nu \in \mathcal{M}} [I(\nu) + \theta F_0(\nu)] = -q. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Число q задано формулой (1.11).

Утверждение предложения 2.1 будет вытекать из результатов, доказанных в § 3. Точные асимптотики трех интегралов из формулы (2.1) различны и вычислены ниже. Соотношение (2.1) поясняет, каким образом возникает экстремальная задача (1.9).

Рассмотрим экстремальную задачу (1.9). Введем множество

$$\mathcal{H} := \{f \in L^1: \|f\|_1 = 1, f > 0\} \quad (2.2)$$

и определим функционал $J: L^1 \rightarrow [0, \infty]$ следующим образом:

$$J(f) := \begin{cases} \sup \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \log \frac{u(x)}{(Pu)(x)} f(x) dx : u \in C_b, u > 0 \right\}, & \text{если } f \in \mathcal{H}, \\ +\infty & \text{иначе.} \end{cases} \quad (2.3)$$

Определим также линейный функционал U на L^1 :

$$Uf := \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x) dx, \quad f \in L^1. \quad (2.4)$$

Из формул (1.7), (1.8), (2.3), (2.4) вытекают соотношения

$$F_0(\nu) \equiv Uf, \quad \text{если } \nu(dx) = f(x) dx, \quad (2.5)$$

$$I(\nu) \equiv J(f), \quad \text{если } \nu(dx) = f(x) dx, \quad f \in \mathcal{H}. \quad (2.6)$$

Учитывая формулы (2.5), (2.6), заключаем, что экстремальная задача (1.9) эквивалентна следующей задаче:

$$J(f) + \theta Uf \rightarrow \inf, \quad f \in L^1, \quad \|f\|_1 = 1, \quad f > 0. \quad (2.7)$$

Далее мы используем некоторые результаты, доказанные в статье [17], где исследована точная асимптотика средних типа (2.1) в случае марковской цепи с компактным фазовым пространством E и вероятностной инвариантной мерой. Укажем на следующую связь некоторых наших обозначений и обозначений из работы [17]:

$$\mu = m, \quad \Pi(x, dy) = P(x, dy), \quad \pi(x, y) = p(x, y), \quad \Pi = P, \quad b_\Phi = -q. \quad (2.8)$$

В качестве функционала Φ из [17] мы возьмем следующий *линейный* функционал (см. (1.8)):

$$\Phi(\nu) := -\theta F_0(\nu) \equiv -\theta \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\nu(dx), \quad \nu \in \mathcal{M}. \quad (2.9)$$

Тогда роль единственной экстремальной меры ν_0 из условия А.3 работы [17, с. 423] будет играть мера ν_0 из предложения 1.2. Напомним, что в [17] изучен случай общего нелинейного функционала Φ . Для рассматриваемого нами случайного блуждания (1.2) и линейного функционала (2.8) некоторые вычисления из [17] можно провести в явном виде. Так, важная функция V , введенная в [17, с. 424, 425], в нашем случае имеет следующий вид:

$$V(x) = -\theta g(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.10)$$

Формула (2.10) доказывается просто. Согласно определению в [17, с. 425] имеем

$$V(x) = \Phi(\nu_0) + \Phi'(\nu_0)[\delta_x - \nu_0], \quad x \in \mathbb{R}; \quad (2.11)$$

здесь $\Phi'(\nu_0)$ – первая производная по Фреше функционала Φ в точке ν_0 и δ_x , как и выше, мера Дирака, сосредоточенная в точке x . Используя (2.11) для линейного функционала (2.9), получаем равенства

$$V(x) = \Phi'(\nu_0)[\delta_x] = -\theta \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\delta_x(dy) = -\theta g(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

и формула (2.10) доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЙ 1.3, 1.4. Докажем предложение 1.3, при этом в процессе доказательства мы попутно докажем и предложение 1.4. Очевидно, достаточно доказать, что экстремальная задача (2.7) имеет единственное решение $f_0(x) \equiv f_0(x, \theta)$. Полагая $f(x) = \phi^2(x)$, убеждаемся в том, что задача (2.7) эквивалентна следующей экстремальной задаче:

$$M(\phi) + \theta \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \phi^2(x) dx \rightarrow \inf, \quad \phi \in L^2, \quad \|\phi\|_2 = 1, \quad \phi > 0, \quad (2.12)$$

где $M(\phi) := J(\phi^2)$, $\phi \in L^2$. Поскольку $J(f)$, $f \in L^1$, является полунепрерывным снизу неотрицательным функционалом, функционал $M(\phi)$, $\phi \in L^2$, также полунепрерывен снизу и неотрицателен. Следовательно, согласно первой обобщенной теореме Вейерштрасса (см. [36, теорема 9.2]) минимум в задаче (2.12) достигается.

Из изложенного выше следует, что минимум в задаче (2.7) достигается в некоторой точке f_0 и равен числу $q > 0$, которое определяется первыми двумя равенствами в формуле (1.11). Далее мы покажем, что для f_0 выполнено равенство (1.17) и других точек минимума в задаче (2.7) не существует. Доказательство этого факта достаточно длинное, и мы разобьем его на части.

1. Охарактеризуем точку минимума f_0 . Согласно формулам (2.3), (2.4) задачу (2.7) можно записать в следующей минимаксной форме:

$$\inf_{f \in \mathcal{H}} [J(f) + \theta Uf] = \inf_{f \in \mathcal{H}} \sup_{u \in C_b, u > 0} \int_{-\infty}^{+\infty} [\log u(x) - \log(Pu)(x) + \theta g(x)] f(x) dx. \quad (2.13)$$

Применяя теорию Перрона–Фробениуса для марковских цепей (см. [22, § 5.1, 5.2] и [22, с. 173]) и рассуждая так же, как в [17, с. 424, 425] с учетом формул (2.8) и (2.10), убеждаемся в том, что линейное интегральное уравнение

$$u(x) = e^{q-\theta g(x)}(Pu)(x), \quad u \in C_b, \quad (2.14)$$

имеет с точностью до константы единственное положительное решение $u_0(x) \in C_b$. (В замечании 3.3 из § 3 показано, что при $u \in L^2(\nu_0)$ уравнение (2.14) не имеет других, возможно знакопеременных, решений.) Здесь переходный оператор Pu определен формулой (1.5). Ниже мы докажем, что $u_0 \in L^1$. Кроме того, мы покажем, что для этой L^1 -нормированной функции (т. е. когда $\|u_0\|_1 = 1$) выполнено равенство $u_0 \equiv h_0$, где функция h_0 задана формулой (1.15).

2. Итак, положительная функция $u_0(x) \in C_b$ удовлетворяет тождеству

$$u_0(x) \equiv e^{q-\theta g(x)}(Pu_0)(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.15)$$

Покажем, что пара (u_0, f_0) дает решение минимаксной задачи (2.13). В самом деле, в силу (1.11), (2.13), (2.15) имеем следующую цепочку соотношений:

$$\begin{aligned} q &= \min_{\nu \in \mathcal{M}} [I(\nu) + \theta F_0(\nu)] = J(f_0) + \theta Uf_0 \\ &= \sup_{u \in C_b, u > 0} \int_{-\infty}^{+\infty} [\log u(x) - \log(Pu)(x) + \theta g(x)] f_0(x) dx \\ &\geq \int_{-\infty}^{+\infty} [\log u_0(x) - \log(Pu_0)(x) + \theta g(x)] f_0(x) dx = q. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Отсюда следует, что пара (u_0, f_0) дает решение минимаксной задачи (2.13).

3. Опишем единственное положительное решение $u_0(x) \in C_b$ линейного интегрального уравнения (2.14), устанавливая при этом связь с граничной задачей (1.12). Используя формулы (1.1) и (1.5), убеждаемся в том, что уравнение (2.14) можно записать в следующем виде:

$$u(x) = \frac{e^{q-\theta g(x)}}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-y|} u(y) dy, \quad u \in C_b, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.17)$$

Уравнение (2.17) представляет собой линейное интегральное уравнение Фредгольма второго рода с ядром, зависящим от модуля разности аргументов. Уравнение типа (2.17) относительно легко сводится к граничной задаче для дифференциального уравнения второго порядка (см., например, решение уравнения 37 в справочнике [37, § 4.9, с. 311]).

Вследствие свойства симметрии (i) функции g уравнение (2.17) имеет четное положительное решение $u_0(x)$, поэтому мы будем решать это уравнение в классе положительных функций $u \in C_b$, для которых

$$u(x) = u(-x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.18)$$

В силу (2.18) уравнение (2.17) достаточно решить в области $x \geq 0$. Раскрывая модуль в подынтегральном выражении, запишем уравнение (2.17) в следующем виде:

$$2e^{-q} e^{\theta g(x)} u(x) = e^{-x} \int_{-\infty}^x e^y u(y) dy + e^x \int_x^{+\infty} e^{-y} u(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.19)$$

Дважды дифференцируя обе части уравнения (2.19) по x , получаем уравнение

$$2e^{-q} [e^{\theta g(x)} u(x)]'' = -2u(x) + e^{-x} \int_{-\infty}^x e^y u(y) dy + e^x \int_x^{+\infty} e^{-y} u(y) dy, \quad x \geq 0. \quad (2.20)$$

Используя (2.19), исключим из (2.20) интегральные члены, в результате приходим к следующему дифференциальному уравнению второго порядка для функции $u(x)$:

$$[e^{\theta g(x)} u(x)]'' + (e^q - e^{\theta g(x)}) u(x) = 0, \quad x \geq 0. \quad (2.21)$$

В результате замены переменной

$$z(x) = e^{\theta g(x)} u(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.22)$$

уравнение (2.21) принимает следующий вид: $z''(x) + (e^{q-\theta g(x)} - 1)z(x) = 0$, $x \geq 0$. Мы получили дифференциальное уравнение из формулы (1.12).

В силу (2.18) функция $z(x)$ из (2.22) является четной функцией, следовательно, $z(x) = z(-x)$, $x \in \mathbb{R}$. Кроме того, правая часть уравнения (2.19) дифференцируема по x в нуле, поэтому существует производная $z'(0)$. В силу четности z отсюда вытекает равенство $z'(0) = 0$, и мы получили граничное условие из формулы (1.12).

Итак, мы доказали, что линейное интегральное уравнение Фредгольма (2.17) в классе положительных четных функций $u \in C_b$ сводится в результате замены (2.22) к эквивалентной граничной задаче (1.12) в классе положительных функций z таких, что функция $e^{-\theta g(x)} z(x)$ ограничена при $x \geq 0$. Согласно теории приближения Лиувилля–Грина (см. [30, гл. 6]) дифференциальное уравнение из формулы (1.12) имеет два линейно независимых решения, из которых одно убывает на бесконечности, а второе возрастает. В силу теории Перрона–Фробениуса для марковских цепей из указанных двух решений только одно, скажем z_0 , является положительной функцией, для которой конечен интеграл из (1.13). Как правило, в качестве z_0 выступает убывающее на бесконечности решение. Нормируем решение z_0 так, чтобы выполнялось равенство $\int_0^\infty z_0(x) e^{-\theta g(x)} dx = \frac{1}{2}$. Учитывая изложенное в пп. 1–3, заключаем, что функция

$$u_0(x) = \begin{cases} u_0(x, \theta) = e^{-\theta g(x)} z_0(x), & \text{если } x \geq 0, \\ u_0(-x), & \text{если } x \leq 0, \end{cases} \quad (2.23)$$

является единственным положительным решением линейного интегрального уравнения (2.14) в классе функций C_b . Из формул (1.15) и (2.23) вытекает равенство

$$u_0(x) \equiv h_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.24)$$

Из приближения Лиувилля–Грина следует, что $u_0 \in L^1 \cap L^2$, кроме того, $\|u_0\|_1 = 1$.

Отметим, что мы попутно доказали предложение 1.4.

4. Итак, мы установили, что пара (u_0, f_0) дает решение минимаксной задачи (2.13). Докажем, что между функциями $u_0 \equiv h_0$ и f_0 существует простое взаимно однозначное соответствие, задаваемое формулой (1.17). В соответствии с (2.13) введем интегральный функционал $S: L^2 \cap C_b \rightarrow \mathbb{R}$ следующим образом:

$$S(u) := \int_{-\infty}^{+\infty} [\log u(x) - \log(Pu)(x) + \theta g(x)] f_0(x) dx, \quad u > 0.$$

Применяя методы вариационного исчисления (см. [38, п. 3.1.1]), решим внутреннюю экстремальную задачу в (2.13) при $f = f_0$, зная, что супремум достигается в точке u_0 . Для этого решим эквивалентную гладкую экстремальную задачу

$$S(u) \rightarrow \sup, \quad u \in L^2 \cap C_b, \quad u > 0.$$

Найдем необходимое условие стационарности для точки максимума u , состоящее в том, что $S'(u) = 0$. Используя формулу производной по Фреше для интегрального функционала (см. [38, п. 2.4.2]), теорему о суперпозиции дифференцируемых отображений (см. [38, п. 2.2.2]) и соотношение (1.5), получаем

$$S'(u)[q] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{q(x)}{u(x)} - \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} q(y) \psi(x-y) dy}{(Pu)(x)} \right] f_0(x) dx, \quad q \in L^2. \quad (2.25)$$

Применяя теорему Фубини ко второму интегралу в (2.25), находим

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [q(y)\psi(x-y)dy] \frac{f_0(x)dx}{(Pu)(x)} \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_0(x)\psi(x-y)dx}{(Pu)(x)} \right] q(y)dy, \quad q \in L^2. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Учитывая (2.25) и (2.26), получаем

$$S'(u)[q] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{f_0(x)}{u(x)} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_0(y)\psi(x-y)dy}{(Pu)(y)} \right] q(x)dx, \quad q \in L^2. \quad (2.27)$$

Таким образом, из (2.27) вытекает, что условие стационарности для точки максимума u_0 принимает вид тождества

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_0(y)\psi(x-y)dy}{(Pu_0)(y)} = \frac{f_0(x)}{u_0(x)}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.28)$$

Используя определение (1.5), запишем тождество (2.28) в следующем виде:

$$P\left(\frac{f_0}{Pu_0}\right)(x) = \left(\frac{f_0}{u_0}\right)(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.29)$$

Учитывая формулу (2.15), убеждаемся в том, что тождество (2.29) можно записать в следующем виде:

$$e^q P\left(e^{-\theta g} \frac{f_0}{u_0}\right)(x) = \left(\frac{f_0}{u_0}\right)(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.30)$$

Введем положительную функцию

$$r(x) := e^{-\theta g(x)} \frac{f_0(x)}{u_0(x)}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.31)$$

При помощи функции $r(x)$ тождество (2.30) записывается в следующем виде:

$$r(x) = e^{q-\theta g(x)} (Pr)(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Таким образом, положительная функция (2.31) также удовлетворяет интегральному уравнению (2.14) теории Перрона–Фробениуса для марковских цепей. Как уже отмечалось выше, это уравнение имеет с точностью до константы единственное положительное решение $u_0(x)$, следовательно, для некоторой постоянной $K_0 > 0$ выполнено равенство

$$r(x) = K_0 u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.32)$$

Из формул (2.31) и (2.32) получаем равенство $f_0(x) = K_0 e^{\theta g(x)} u_0^2(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Отсюда вытекает в силу (2.24) справедливость первого соотношения в (1.17). Формула для постоянной K_0 в (1.17) следует из условия нормировки $\|f_0\|_1 = 1$.

5. Докажем теперь, что пара (u_0, f_0) является единственным решением минимаксной задачи (2.13). Предположим противное, а именно, что существует иная пара $(u_1, f_1) \neq (u_0, f_0)$, дающая решение задачи (2.13) и такая, что $u_1 \in C_b$, $u_1 > 0$ и $f_1 \in \mathcal{H}$. Учитывая формулу (1.17) и ее доказательство, мы можем полагать, что $f_1 \neq f_0$ и для любой постоянной $C > 0$ выполнено $u_1 \neq Cu_0$. В соответствии с (2.13) введем линейный интегральный функционал $T: L^1 \rightarrow \mathbb{R}$ следующим образом:

$$T(f) := \int_{-\infty}^{+\infty} [\log u_1(x) - \log(Pu_1)(x) + \theta g(x)] f(x) dx.$$

Применяя методы вариационного исчисления (см. [38, п. 3.2.1]), решим внешнюю экстремальную задачу в (2.13) при $u = u_1$, зная, что супремум достигается в точке f_1 . Для этого решим методом множителей Лагранжа гладкую линейную экстремальную задачу

$$T(f) \rightarrow \inf, \quad f \in L^1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1, \quad f > 0, \quad (2.33)$$

с линейным ограничением типа равенства. Функция Лагранжа имеет вид

$$\mathcal{L}(f) = \lambda_1 T(f) + \lambda_2 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx - 1 \right), \quad f \in L^1, \quad f > 0,$$

где $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 > 0$, – множители Лагранжа. Дифференцируя линейные функционалы, получаем, что для того, чтобы точка f доставляла минимум в задаче (2.33), необходимо выполнение условия стационарности

$$\mathcal{L}'(f) \equiv \lambda_1 [\log u_1(x) - \log(Pu_1)(x) + \theta g(x)] + \lambda_2 = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.34)$$

и условия дополняющей нежесткости $\lambda_2 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx - 1 \right) = 0$. Легко проверить, что в нашей задаче $\lambda_1 > 0$ и $\lambda_2 \neq 0$. Обозначим $\lambda = -\lambda_2/\lambda_1 \in \mathbb{R}$; тогда условие (2.34) примет вид

$$\log u_1(x) - \log(Pu_1)(x) + \theta g(x) \equiv \lambda, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.35)$$

Учитывая рассуждения, проведенные в п. 2 (в частности, формулу (2.16)), и тот факт, что пара (u_1, f_1) дает решение минимаксной задачи (2.13), несложно получить, что $\lambda = q$ в (2.35). Но тогда тождество (2.35) принимает вид

$$\log u_1(x) - \log(Pu_1)(x) + \theta g(x) - q \equiv 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Отсюда следует, что функция $u_1 > 0$ также удовлетворяет интегральному уравнению (2.14) теории Перрона–Фробениуса для марковских цепей. Поскольку это уравнение имеет с точностью до константы единственное положительное решение $u_0(x)$, выполнено равенство $u_1 \equiv Cu_0$ при некоторой постоянной $C > 0$. Противоречие. Таким образом, мы доказали, что пара (u_0, f_0) является единственным решением минимаксной задачи (2.13). Предложение 1.3 доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Минимаксная задача, аналогичная задаче (2.13), возникает также в теории больших уклонений для сумм независимых случайных векторов (см. [39], [40]); здесь также единственной точке минимума в экстремальной задаче для функционала действия соответствует единственная точка, доставляющая максимум для преобразования Лежандра–Фенхеля. В работе [39, с. 306] единственной парой точек, доставляющей экстремум в минимаксной задаче, является пара $(x^*, D\Phi(x^*))$, в [40, с. 513, 525] – пара (x^0, y^0) .

Из результатов данного параграфа следует справедливость следующего утверждения.

ЛЕММА 2.1. *Для марковской цепи $\{X_k\}$, заданной в (1.2), и линейного функционала (2.9) выполнены условия А.1–А.5 из статьи [17], за исключением условия компактности фазового пространства и условия, состоящего в том, что единственная инвариантная мера является вероятностной. При этом роль единственной экстремальной меры ν_0 из [17, условие А.3] играет мера ν_0 из предложения 1.2, а роль функции h из [17, с. 424] играет функция h_0 , заданная формулой (1.15).*

Связь некоторых наших обозначений и обозначений в работе [17] отражена в формулах (2.8)–(2.10). Отметим, что в статье [17] не установлена связь между ν_0 и h , в частности отсутствует формула типа (1.17).

§ 3. Метод Лапласа для интегралов от марковской цепи: точная асимптотика. Доказательство теоремы 1.1

В статье [17] разработан метод для вычисления точных асимптотик взятых по всему пространству интегралов типа Лапласа от распределений времени пребывания марковской цепи. При этом в показателе экспоненты рассматривался общий *нелинейный* гладкий функционал Φ . Аналоги этого метода в случае марковского процесса с непрерывным временем ранее были развиты в работах [15], [16]. Отметим, что в формулировке основной теоремы 1.2 из статьи [17, с. 426] допущена легко устранимая неточность. А именно, в правой части предельного равенства из этой теоремы вместо частного $\frac{h(x)}{h(y)}$ должно стоять произведение $h(x)h(y)$.

Ниже, основываясь на лемме 2.1, мы изложим аналоги некоторых результатов из статьи [17], справедливые для частного случая нашей марковской цепи $\{X_k\}$, заданной в (1.2), и линейного функционала Φ , заданного в (2.9).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. В статье [17] в качестве пространства элементарных событий взято произведение $\Omega = E^{\mathbb{N}}$, при этом $X_n: \Omega \rightarrow E$ являются координатными отображениями $X_n(\omega) = \omega(n)$, $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, $\mathcal{F}$ – σ -алгебра, порожденная случайными величинами $\{X_k, k \geq 0\}$, и $\mathcal{F}_n = \sigma(X_k, k \leq n)$ – σ -алгебра, порожденная случайными величинами $(X_k, k \leq n)$. Это отличие от нашей формы записи не должно привести к недоразумению. Ниже мы будем использовать и общепринятый координатный подход из статьи [17].

3.1. Переход к новой марковской цепи. Итак, пусть $\{P_x\}$ – семейство марковских ядер, заданное в (1.3). Учитывая замечание 3.1, лемму 2.1, формулы (2.8)–(2.10) и следуя работе [17, с. 424], введем новое семейство марковских ядер Q_x на $[\Omega, \mathcal{F}]$:

$$Q_x(A) \equiv Q_x(A, \theta) \equiv Q(x, A) := \frac{e^{nq}}{h_0(x)} \int_A h_0(X_n) \exp \left\{ -\theta \sum_{k=0}^{n-1} g(X_k) \right\} P_x(d\omega) \quad (3.1)$$

для всех $x \in \mathbb{R}$, $n \geq 0$, $A \in \mathcal{F}_n$. Напомним, что функция $h_0(x) \equiv h_0(x, \theta)$, заданная формулой (1.15), зависит от параметра $\theta > 0$. Введем функцию, тождественно равную 1 на $\mathbb{R}$:

$$\mathbf{1} = \mathbf{1}(x) \equiv 1, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.2)$$

Легко видеть, что $\mathbf{1} \in C_b$ и $\|\mathbf{1}\|_\nu = 1$ для любой меры $\nu \in \mathcal{M}$. Напомним, что определение гармонической функции для марковской цепи имеется, например, в [23, гл. 2, § 1, с. 60], [24, п. 8.2.5, с. 179]. (В [22, § 3.1] для определения гармонической функции требуется также ее неотрицательность.)

ЛЕММА 3.1. (i) *Марковская цепь, порожденная семейством ядер Q_x , является эргодической и возвратной по Харрису. Она имеет единственную инвариантную вероятностную меру $\nu_0(dx) = f_0(x)dx$, заданную в предложении 1.3. Переходная плотность цепи Q_x относительно инвариантной меры ν_0 является непрерывной симметричной функцией и задается формулой*

$$\mathbf{q}(x, y) \equiv \mathbf{q}(x, y; \theta) := \frac{Q(x, dy)}{\nu_0(dy)} = e^q e^{-\theta(g(x)+g(y))} \frac{\psi(y-x)}{K_0 h_0(x) h_0(y)}, \quad x, y \in \mathbb{R}. \quad (3.3)$$

(ii) *Марковская цепь Q_x имеет с точностью до константы единственную гармоническую функцию $\mathbf{1}$. А именно, для переходного оператора $Q \equiv Q(\theta): L^2(\nu_0) \rightarrow L^2(\nu_0)$,*

$$(Qv)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{q}(x, y)v(y) \nu_0(dy), \quad v \in L^2(\nu_0), \quad (3.4)$$

уравнение типа Пуассона

$$v(x) = (Qv)(x), \quad v \in L^2(\nu_0), \quad (3.5)$$

имеет с точностью до константы единственное решение $\mathbf{1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Тот факт, что цепь Q_x имеет единственную инвариантную вероятностную меру $\nu_0(dx)$, следует непосредственно из определения (3.1) и очевидного аналога леммы 2.5 из статьи [17, с. 434]. Несложно видеть, что утверждение леммы 2.5 из [17] почти дословно переносится на случай рассматриваемой нами цепи (1.2). Эргодичность и возвратность по Харрису цепи Q_x вытекает из известных результатов (см. [23, гл. 6, определение 2.5], [24, п. 8.2.9, теорема 6] и [22, § 6.6, с. 232].

Докажем равенство (3.3). Используя последнюю выносную формулу в [17, с. 424] и соотношения (2.8)–(2.10), получаем цепочку равенств

$$\frac{Q(x, dy)}{\nu_0(dy)} = \frac{Q(x, dy)}{dy} \left[\frac{\nu_0(dy)}{dy} \right]^{-1} = \frac{e^q}{h_0(x)} e^{-\theta g(x)} p(x, y) \frac{h_0(y)}{f_0(y)}, \quad x, y \in \mathbb{R}. \quad (3.6)$$

Отсюда в силу (1.4) и (1.17) вытекает равенство (3.3). Утверждение (i) доказано.

Докажем утверждение (ii). Согласно предложению 2.10 из [23, гл. 3, § 2, с. 119] для харрисовской цепи Q_x ограниченные гармонические функции являются постоянными. Таким образом, уравнение типа Пуассона (3.5) при $v \in C_b$ имеет с точностью до константы единственное решение 1. Можно показать, что при $v \in L^2(\nu_0)$ уравнение (3.5) также имеет с точностью до константы единственное решение 1 (см. [41, лемма 3.1, (a)]). Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Укажем на связь уравнений (2.14) и (3.5). Используя формулы (3.4) и (3.6), запишем уравнение (3.5) в виде

$$v(x) = \frac{e^{q-\theta g(x)}}{h_0(x)} \int_{-\infty}^{+\infty} h_0(y) v(y) \psi(x-y) dy, \quad v \in L^2(\nu_0). \quad (3.7)$$

Сделав замену переменной $u(x) = h_0(x)v(x)$, $x \in \mathbb{R}$, убеждаемся в том, что уравнение (3.7) переходит в следующее эквивалентное уравнение:

$$u(x) = e^{q-\theta g(x)} \int_{-\infty}^{+\infty} u(y) \psi(x-y) dy, \quad u \in L^2(\nu_0). \quad (3.8)$$

В силу формулы (1.5) уравнение (3.8) при $u \in C_b$ совпадает с (2.14). Как было указано в § 2, уравнение (2.14) имеет с точностью до константы единственное положительное решение $u_0 \equiv h_0$ (см. (2.24)).

Отсюда следует, что при $u \in C_b$ уравнение Пуассона (3.5) имеет с точностью до константы единственное решение $v_0 = \frac{u_0}{h_0} \equiv 1$. Это согласуется с утверждением (ii) леммы 3.1, которое было получено в результате применения общего результата из теории харрисовских цепей.

Кроме того, из указанной связи уравнений (2.14) и (3.5) вытекает тот факт, что уравнение (2.14) при $u \in L^2(\nu_0)$ имеет с точностью до константы единственное положительное решение $u_0 \equiv h_0$ и не имеет других, возможно знакопеременных, решений.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Между плотностями (3.3) и (1.30) существует следующая связь:

$$\mathbf{q}_1(x, y) \equiv \mathbf{q}(x, y; \theta_0), \quad x, y \in \mathbb{R}. \quad (3.9)$$

Обозначим через $P(n, x, A)$, $Q(n, x, A) \equiv Q(n, x, A; \theta)$ вероятности перехода соответственно цепей P_x и Q_x за n шагов [24, с. 173]. Тогда плотности перехода $p(n, x, y)$, $q(n, x, y) \equiv q(n, x, y; \theta)$ за n шагов являются непрерывными симметричными функциями относительно переменных x, y и имеют следующий вид:

$$p(n, x, y) = \frac{P(n, x, dy)}{dy}, \quad q(n, x, y) = \frac{Q(n, x, dy)}{\nu_0(dy)}, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad n \geq 1. \quad (3.10)$$

Далее в настоящем параграфе мы, как правило, не будем указывать явно зависимость рассматриваемых величин от параметра $\theta > 0$.

ЛЕММА 3.2. *Справедливо соотношение*

$$\begin{aligned} Q_x(A \mid X_n = y) &\equiv Q_{x,\theta}(A \mid X_n = y) \\ &= \frac{e^{nq} e^{-\theta g(x)} p(n, x, y)}{K_0 h_0(x) h_0(y) q(n, x, y)} \int_A \exp \left\{ -\theta \sum_{k=0}^{n-1} g(X_k) \right\} P_x(d\omega \mid X_n = y) \end{aligned} \quad (3.11)$$

для всех $x, y \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$, $A \in \mathcal{F}_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя дважды формулу полной вероятности и соотношения (3.10), получаем равенства

$$P_x(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_x(A \mid X_n = y) p(n, x, y) dy, \quad (3.12)$$

$$Q_x(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} Q_x(A \mid X_n = y) q(n, x, y) f_0(y) dy \quad (3.13)$$

для всех $x \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$, $A \in \mathcal{F}_n$. Используя равенство (3.12) и теорему Фубини, приходим к следующей формуле для интеграла в (3.1):

$$\begin{aligned} &\int_A h_0(X_n) \exp \left\{ -\theta \sum_{k=0}^{n-1} g(X_k) \right\} P_x(d\omega) \\ &= \int_A h_0(X_n) \exp \left\{ -\theta \sum_{k=0}^{n-1} g(X_k) \right\} \int_{-\infty}^{+\infty} P_x(d\omega \mid X_n = y) p(n, x, y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_A \exp \left\{ -\theta \sum_{k=0}^{n-1} g(X_k) \right\} P_x(d\omega \mid X_n = y) p(n, x, y) h_0(y) dy \end{aligned} \quad (3.14)$$

для всех $x \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$, $A \in \mathcal{F}_n$. Из соотношений (3.1), (3.13), (3.14) вытекает равенство

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} Q_x(A \mid X_n = y) q(n, x, y) f_0(y) dy \\ &= \frac{e^{nq}}{h_0(x)} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_A \exp \left\{ -\theta \sum_{k=0}^{n-1} g(X_k) \right\} P_x(d\omega \mid X_n = y) p(n, x, y) h_0(y) dy \end{aligned} \quad (3.15)$$

для всех $x \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$, $A \in \mathcal{F}_n$. Аналогично (3.15) можно показать, что справедливо равенство

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} Q_x(A \mid X_n = y) q(n, x, y) f_0(y) f(y) dy \\ &= \frac{e^{nq}}{h_0(x)} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_A \exp \left\{ -\theta \sum_{k=0}^{n-1} g(X_k) \right\} P_x(d\omega \mid X_n = y) p(n, x, y) h_0(y) f(y) dy \end{aligned} \quad (3.16)$$

для всех $x \in \mathbb{R}$, $f \in C_b$, $n \geq 1$, $A \in \mathcal{F}_n$. Из равенства (3.16), очевидно, следует формула

$$\begin{aligned} Q_x(A \mid X_n = y) q(n, x, y) f_0(y) \\ = \frac{e^{nq}}{h_0(x)} h_0(y) p(n, x, y) \int_A \exp \left\{ -\theta \sum_{k=0}^{n-1} g(X_k) \right\} P_x(d\omega \mid X_n = y) \end{aligned}$$

для всех $x, y \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$, $A \in \mathcal{F}_n$. Отсюда в силу равенства (1.17) вытекает формула (3.11). Лемма доказана.

ЛЕММА 3.3. Для всех $x, y \in \mathbb{R}$ и $n \geq 1$ имеет место равенство

$$E_x \left[\exp \left\{ -\theta \sum_{k=0}^{n-1} g(X_k) \right\} \mid X_n = y \right] = K_0 \exp \{ -nq \} h_0(x) h_0(y) e^{\theta g(y)} \frac{q(n, x, y)}{p(n, x, y)}. \quad (3.17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу формулы (3.11) при $A = \Omega$ для всех $x, y \in \mathbb{R}$ и $n \geq 1$ имеем

$$\begin{aligned} E_x \left[\exp \left\{ -\theta \sum_{k=0}^{n-1} g(X_k) \right\} \mid X_n = y \right] &= \int_{\Omega} \exp \left\{ -\theta \sum_{k=0}^{n-1} g(X_k) \right\} P_x(d\omega \mid X_n = y) \\ &= K_0 \exp \{ -nq \} h_0(x) h_0(y) e^{\theta g(y)} \frac{q(n, x, y)}{p(n, x, y)}, \end{aligned}$$

так как $Q_x(\Omega \mid X_n = y) = 1$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.4. (i) Для любых фиксированных $x, y \in \mathbb{R}$ при $n \rightarrow \infty$ справедливо соотношение

$$p(n, x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi n}} (1 + o(1)). \quad (3.18)$$

(ii) Найдутся числа $n_0 > 0$ и $r = r(n_0) > 0$ такие, что выполнено неравенство $\sup_{x, y \in \mathbb{R}} q(n, x, y) \leq r$ для всех $n \geq n_0$. Кроме того, для любых фиксированных $x, y \in \mathbb{R}$ справедливо соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q(n, x, y) = 1. \quad (3.19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем соотношение (3.19), используя известную равномерную локальную предельную теорему из [27, гл. 7, § 2]. Напомним, что согласно определению

$$p(1, x, y) \equiv p(x, y), \quad p(n, x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, z) p(n-1, z, y) dz, \quad n \geq 2, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Отсюда, учитывая определение свертки и формулу (1.4), получаем

$$p(n, x, y) = \psi^{*n}(x - y), \quad n \geq 1, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad (3.20)$$

где через ψ^{*n} обозначена n -я степень операции свертки функции ψ с собой.

Известно, что случайная величина ξ_1 с плотностью (1.1) имеет среднее нуль и дисперсию 2 (см. [24, п. 6.3.9]). Учитывая этот факт, рассмотрим нормированную сумму

$$S_n := \frac{1}{\sqrt{2n}} \sum_{k=1}^n \xi_k, \quad n \geq 1. \quad (3.21)$$

Очевидно, что случайная величина S_n имеет плотность, которую мы обозначим через $p_n(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Поскольку сумме независимых одинаково распределенных случайных величин соответствует n -я степень свертки плотности одного слагаемого, из формул (3.20), (3.21) мы получаем соотношения

$$p(n, x, y) = \psi^{*n}(x - y) = \frac{1}{\sqrt{2n}} p_n\left(\frac{x - y}{\sqrt{2n}}\right), \quad n \geq 1, \quad x, y \in \mathbb{R}. \quad (3.22)$$

Далее, для стандартной гауссовской плотности $\varphi(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{t^2}{2}\}$, $t \in \mathbb{R}$, имеет место оценка

$$\left| p_n\left(\frac{x - y}{\sqrt{2n}}\right) - \varphi(0) \right| \leq \sup_{t \in \mathbb{R}} |p_n(t) - \varphi(t)| + \left| \varphi\left(\frac{x - y}{\sqrt{2n}}\right) - \varphi(0) \right| \quad (3.23)$$

для всех $x, y \in \mathbb{R}$ и $n \geq 1$. Поскольку плотность $\psi(x)$ ограничена числом $1/2$, применима теорема 7 из [27, гл. 7, § 2, с. 244], согласно которой

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |p_n(t) - \varphi(t)| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (3.24)$$

Из формул (3.22)–(3.24) с учетом непрерывности гауссовской плотности вытекает соотношение (3.18). Утверждение (i) доказано.

Утверждение (ii) получается аналогично соответствующему утверждению из статьи [17, с. 425], где вместо $q(n, x, y)$ использовано обозначение $q_n(x, y)$ (см. также [23, § 6.6] и [24, гл. 6, предложения 2.6, 3.4, упражнение 2.15]). Лемма доказана.

Отметим, что, в отличие от [17], наша функция $q(n, x, y)$ симметрична относительно переменных x и y . Укажем также, что аналогом утверждения (ii) леммы 3.4 для однородных марковских процессов с непрерывным временем является предложение 2.18 в статье [15, с. 555].

3.2. Доказательство теоремы 1.1. Соотношение (1.20) вытекает непосредственно из формул (3.17)–(3.19), если положить в них $x = a$, $y = b$.

Докажем формулу (1.19). Для любых чисел $a, b \in \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$\mathbb{E}_{a,b} \exp\left\{-\theta \sum_{k=0}^{n-1} g(X_k)\right\} = e^{-\theta g(b)} \mathbb{E}_a \left[\exp\left\{-\theta \sum_{k=0}^{n-2} g(X_k)\right\} \mid X_{n-1} = b \right]. \quad (3.25)$$

Применяя к правой части равенства (3.25) формулу (1.20), взяв в последней $n - 1$ вместо n , получаем соотношение (1.19).

Теперь докажем формулу (1.18). Используя формулу полной вероятности (3.12) и соотношение (3.17), получаем для всех $a \in \mathbb{R}$ и $n \geq 1$ равенства

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_a \exp \left\{ -\theta \sum_{k=0}^{n-1} g(X_k) \right\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}_a \left[\exp \left\{ -\theta \sum_{k=0}^{n-1} g(X_k) \right\} \mid X_n = y \right] p(n, a, y) dy \\ &= K_0 \exp \{ -nq \} h_0(a) \int_{-\infty}^{+\infty} h_0(y) e^{\theta g(y)} q(n, a, y) dy. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Учитывая утверждение (ii) леммы 3.4, применим к последнему интегралу в (3.26) теорему Лебега о мажорированной сходимости, в результате получим равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_0(y) e^{\theta g(y)} q(n, a, y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} h_0(y) e^{\theta g(y)} dy. \quad (3.27)$$

Используя формулы (1.5), (1.16), (2.15), (2.24) и теорему Фубини, имеем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} h_0(y) e^{\theta g(y)} dy &= e^q \int_{-\infty}^{+\infty} (Ph_0)(y) dy = e^q \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h_0(z) \psi(y-z) dz \right] dy \\ &= e^q \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(y-z) dy \right] h_0(z) dz = e^q \int_{-\infty}^{+\infty} h_0(z) dz = e^q. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Из формул (3.26)–(3.28) вытекает соотношение (1.18). Теорема 1.1 полностью доказана.

Отметим, что из доказанной теоремы 1.1, очевидно, следует справедливость предложения 2.1.

3.3. Центральная предельная теорема. Для доказательства теоремы 1.2 нам понадобится один результат, представляющий собой центральную предельную теорему. Этот результат является аналогом соответствующего результата из статьи [17], и нам удобно изложить его в данном параграфе. Как и в [17, с. 451], ради краткости обозначим

$$Q_{0,x}^{n,y}(A) \equiv Q_{0,x}^{n,y}(A, \theta) := Q_{x,\theta}(A \mid X_n = y) \equiv Q_x(A \mid X_n = y),$$

где $x, y \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$, $A \in \mathcal{F}_n$ и для $Q_x(A \mid X_n = y)$ выполнено (3.1). Следуя работе [17, с. 425] и учитывая утверждение (ii) леммы 3.4, определим симметричную функцию двух переменных

$$\mathbf{g}(x, y) := \sum_{n=1}^{\infty} [q(n, x, y) - 1], \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad (3.29)$$

где функция $q(n, x, y)$ задана формулой (3.10). Определим также линейный интегральный оператор $G \equiv G(\theta)$, действующий в гильбертовом пространстве $L^2(\nu_0)$, следующим образом:

$$(Gu)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}(x, y) u(y) \nu_0(dy). \quad (3.30)$$

Поскольку ядро $\mathbf{g}(x, y)$ – симметричная функция, оператор G является самосопряженным, $G^* = G$. Зададим, наконец, линейный оператор $\overline{G} \equiv \overline{G}(\theta)$, действующий в $L^2(\nu_0)$ по формуле

$$\overline{G}u(x) = 2(Gu)(x) + (\Pi u)(x), \quad (3.31)$$

где

$$(\Pi u)(x) := u(x) - \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) \nu_0(dx). \quad (3.32)$$

Оператор $\Pi \equiv \Pi(\theta)$ является оператором проектирования в $L^2(\nu_0)$ на подпространство, ортогональное вектору $\mathbf{1}$ из (3.2), так как $\langle \Pi u, \mathbf{1} \rangle_{\nu_0} = 0$, $u \in L^2(\nu_0)$. Необходимые сведения о случайных мерах можно найти в [42], [43].

ЛЕММА 3.5 (центральная предельная теорема). *Для фиксированных $x, y \in \mathbb{R}$ случайная мера $\sqrt{n}(L_n - \nu_0)$ при $n \rightarrow \infty$ слабо сходится относительно меры $Q_{0,x}^{n,y}$ к гауссовской случайной мере γ на $\mathbb{R}$ со средним нуль и характеристическим функционалом*

$$\mathbb{E} \exp \left\{ i \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) \gamma(dx) \right\} = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \langle u, \overline{G}u \rangle_{\nu_0} \right\},$$

где $i = \sqrt{-1}$. При этом выполнено неравенство

$$\left\{ -\frac{1}{2} \langle u, \overline{G}u \rangle_{\nu_0} \right\} \geq 0, \quad u \in L^2(\nu_0). \quad (3.33)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО можно провести аналогично доказательству соответствующего результата из статьи [17, с. 451, 452] с учетом того, что у нас $G = G^*$. Неравенство (3.33) вытекает из утверждения, приведенного в [17, начало с. 426] (см. также [17, предложение 2.6]). Аналог леммы в случае марковских процессов с непрерывным временем доказан в статье [15, лемма 2.12].

§ 4. Метод Лапласа для вероятностей больших отклонений в случае марковской цепи. Доказательство теоремы 1.2

Покажем, как от асимптотик интегралов можно перейти к вычислению точных асимптотик вероятностей больших отклонений для марковской цепи. Этот переход основан частично на результатах из § 2, 3 и частично на приведенной ниже центральной предельной теореме для одномерных проекций.

4.1. Логарифмическая асимптотика. Пусть фиксированы числа $d > 0$, $a, b \in \mathbb{R}$ и потенциал $g \in \mathcal{G}$. Напомним, что для линейного функционала F_0 выполнено тождество $F_0(L_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) L_n(dx)$, а число θ_0 определено в предложении 1.5.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1 (логарифмическая асимптотика для вероятностей). *Для случайного блуждания (1.2) и линейного функционала (1.8) при $n \rightarrow \infty$ справедливы асимптотические соотношения*

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P_a \{F_0(L_n) < d\} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P_{a,b} \{F_0(L_n) < d\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P_a \{F_0(L_n) < d \mid X_n = b\} = -\inf \{I(\nu) : \nu \in \mathcal{M}, F_0(\nu) < d\} \\ &= -\inf \{I(\nu) : \nu \in \mathcal{M}, F_0(\nu) \leq d\} = -(q_1 - \theta_0 d). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Число q_1 задано формулой (1.28).

Утверждение предложения 4.1 будет вытекать из результатов, доказанных ниже. Соотношение (4.1) является аналогом известного результата, справедливого при выполнении принципа больших уклонений (см. [4, § 2, формула (2.2)] и [20, § 2, формула (2.14)]). Кроме того, соотношение (4.1) поясняет, какую экстремальную задачу мы будем рассматривать при вычислении асимптотик вероятностей больших уклонений.

4.2. Решение экстремальной задачи из формулы (4.1). Указанная экстремальная задача имеет связь с уже решенной задачей (1.9), где присутствует параметр $\theta > 0$. Справедливо следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. *Условная экстремальная задача*

$$I(\nu) \rightarrow \inf, \quad \nu \in \mathcal{M}, \quad F_0(\nu) \leq d, \quad (4.2)$$

имеет единственное решение $\nu_1 = \nu_0(\theta_0) \in \mathcal{M}$, при этом вероятностная мера ν_1 абсолютно непрерывна относительно меры Лебега и существует плотность

$$\frac{\nu_1(dx)}{dx} \equiv f_1(x) = f_0(x, \theta_0), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (4.3)$$

для которой выполнено равенство (1.29). Для точки минимума ν_1 справедливы соотношения

$$F_0(\nu_1) = d, \quad (4.4)$$

$$\min \{I(\nu) : \nu \in \mathcal{M}, F_0(\nu) \leq d\} = I(\nu_1) = q_1 - \theta_0 d > 0. \quad (4.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя теорему Куна–Таккера (см. [38, п. 1.3.3]), мы установим связь задачи (4.2) с уже решенной параметрической задачей (1.9), где $\theta > 0$ играет роль параметра – множителя Лагранжа. Ниже мы используем обозначения (2.2)–(2.4). Введем множество

$$\mathcal{H}_1 := \mathcal{H} \cap \{f \in L^1 : Uf \leq d\} \equiv \{f \in L^1 : \|f\|_1 = 1, Uf \leq d, f > 0\}.$$

Учитывая формулы (2.5), (2.6), заключаем, что экстремальная задача (4.2) эквивалентна следующей задаче:

$$J(f) \rightarrow \inf, \quad f \in L^1, \quad \|f\|_1 = 1, \quad Uf \leq d, \quad f > 0. \quad (4.6)$$

Рассуждая так же, как в начале доказательства предложения 1.3, покажем, что минимум в задаче (4.6) достигается. В самом деле, полагая $f(x) = \phi^2(x)$, убеждаемся в том, что задача (4.6) эквивалентна следующей экстремальной задаче:

$$M(\phi) \rightarrow \inf, \quad \phi \in L^2, \quad \|\phi\|_2 = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\phi^2(x) dx \leq d, \quad \phi > 0, \quad (4.7)$$

где $M(\phi) = J(\phi^2)$, $\phi \in L^2$, – полунепрерывный снизу неотрицательный функционал. Согласно первой обобщенной теореме Вейерштрасса (см. [36, теорема 9.2]) минимум в задаче (4.7) достигается, следовательно, достигается минимум и в задаче (4.6).

Итак, минимум в задаче (4.6) достигается в некоторой точке $f_1 \in \mathcal{H}_1$. Покажем, что для f_1 выполнено характеризующее равенство (4.3) и других точек минимума в задаче (4.6) не существует.

Согласно принципу Лагранжа (см. теорему Куна–Таккера в [38, п. 1.3.3]), если точка f_1 является решением экстремальной задачи (4.6), найдется множитель Лагранжа $\theta_0 > 0$ такой, что

$$\begin{aligned} \min_{f \in \mathcal{H}} [J(f) + \theta_0(Uf - d)] &= J(f_1) + \theta_0(Uf_1 - d) = \min_{f \in \mathcal{H}_1} J(f), \\ Uf_1 &= d. \end{aligned} \quad (4.8)$$

В § 2 мы доказали, что при фиксированном $\theta_0 > 0$ экстремальная задача

$$J(f) + \theta_0(Uf - d) \rightarrow \inf, \quad f \in \mathcal{H},$$

имеет единственное решение $f_0(x, \theta_0) \in \mathcal{H}$. Таким образом, отсюда вытекает равенство $f_1(x) \equiv f_0(x, \theta_0)$, $x \in \mathbb{R}$, кроме того, ясно, что множитель Лагранжа $\theta_0 > 0$ удовлетворяет уравнению (4.8), которое в силу (2.4) имеет вид

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_0(x, \theta)g(x) dx = d. \quad (4.9)$$

Таким образом, мы фактически доказали выполнение равенств (4.3), (4.4). Отметим, что уравнение (4.9) совпадает с уравнением (1.27).

Учитывая изложенное выше и доказательство теоремы Куна–Таккера в [38, с. 52–56], заключаем, что в нашей ситуации уравнение (1.27) имеет единственное решение $\theta_0 = \theta_0(d) > 0$.

В самом деле, предположим противное, т. е. что уравнение (1.27) имеет по крайней мере два решения $\theta_0 > 0$ и $\theta_1 > 0$, $\theta_0 \neq \theta_1$. Этим двум числам соответствуют две различные экстремали $f_1(x) \equiv f_0(x, \theta_0)$ и $f_2(x) \equiv f_0(x, \theta_1)$ такие, что пары (θ_0, f_1) , (θ_1, f_2) доставляют минимум в задаче

$$J(f) + \theta(Uf - d) \rightarrow \inf, \quad f \in \mathcal{H}, \quad Uf_1 = d. \quad (4.10)$$

Однако из доказательства теоремы Куна–Таккера в [38] следует, что в нашей ситуации двум различным точкам минимума задачи (4.10) можно подобрать

один и тот же множитель Лагранжа $\theta_2 > 0$; эта возможность вытекает, в частности, из пункта В) доказательства конечномерной теоремы отделимости в [38, с. 57]. Следовательно, $\theta_0 = \theta_1 = \theta_2$. Противоречие.

Итак, мы доказали, что экстремальная задача (4.6) имеет единственную точку минимума $f_1(x) \equiv f_0(x, \theta_0)$ и при этом выполнено равенство (4.8). Очевидно, что отсюда вытекают все утверждения предложения; в частности, последнее равенство в (4.5) следует из формул (4.4) и (1.11) при $\theta = \theta_0$. Предложение доказано.

Отметим, что мы попутно доказали и предложение 1.5.

4.3. Центральная предельная теорема для одномерных проекций.

Во всех объектах, рассмотренных в § 3 и зависящих от параметра θ , положим $\theta = \theta_0$ и снабдим эти объекты индексом 1, как это уже было сделано в формулах (1.28), (3.9). А именно, положим

$$\begin{aligned} Q_x^1(A) &= Q_x(A, \theta_0), & Q_x^1(A \mid X_n = y) &= Q_{x, \theta_0}(A \mid X_n = y), \\ Q_{0, x}^{n, y; 1}(A) &\equiv Q_{0, x}^{n, y}(A, \theta_0), & Q_1(n, x, A) &= Q(n, x, A; \theta_0), \\ & & q_1(n, x, y) &= q(n, x, y; \theta_0), \\ Q_1 &= Q(\theta_0), & G_1 &= G(\theta_0), & \Pi_1 &= \Pi(\theta_0). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Пусть

$$H(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (4.12)$$

обозначает стандартную нормальную функцию распределения. Из леммы 3.5 при $\theta = \theta_0$ мы получаем следующее утверждение для одномерных проекций типа центральной предельной теоремы.

ЛЕММА 4.1. *Для фиксированных $x, y \in \mathbb{R}$ и любого $s \in \mathbb{R}$ выполнено соотношение*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_{0, x}^{n, y; 1} \left\{ \omega : \sqrt{n} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) [L_n(dx) - \nu_1(dx)] < s \right\} = H\left(\frac{s}{\sigma}\right), \quad (4.13)$$

где число $\sigma > 0$ определено формулой (1.34).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая обозначения (4.11), убеждаемся в том, что соотношение (4.13) вытекает непосредственно из леммы 3.5 при

$$\sigma^2 = \langle g, \overline{G}_1 g \rangle_{\nu_1} \geq 0. \quad (4.14)$$

Покажем, что число (4.14) строго положительно и совпадает с (1.34). Согласно формулам (3.29)–(3.32) при $\theta = \theta_0$ получаем равенство

$$\overline{G}_1 g = [2G_1 + \Pi_1]g. \quad (4.15)$$

В силу соотношений (3.32), (4.4) приходим к равенству

$$\Pi_1 g = g - d. \quad (4.16)$$

Обозначим n -ю степень переходного оператора Q_1 через Q_1^n :

$$(Q_1^n u)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} q_1(n, x, y) u(y) \nu_1(dy), \quad u \in L^2(\nu_1).$$

Тогда согласно формулам (3.29), (3.30) при $\theta = \theta_0$ справедливо равенство

$$(G_1 g)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} [Q_1^n(g-d)](x) - [g(x) - d], \quad x \in \mathbb{R}. \quad (4.17)$$

Учитывая утверждение (ii) леммы 3.1 при $\theta = \theta_0$, заключаем, что сужение $[I - Q_1]|_{L_0^2(\nu_1)}$ оператора $I - Q_1$ на подпространство $L_0^2(\nu_1)$ является инъективным оператором; здесь, напомним, $L_0^2(\nu_1)$ задано формулой (1.32). Можно показать, что в наших условиях операторная норма сужения $Q_1|_{L_0^2(\nu_1)}$ интегрального оператора Q_1 на $L_0^2(\nu_1)$ строго меньше 1, т. е. $\|Q_1|_{L_0^2(\nu_1)}\| < 1$. Таким образом, существует ряд Неймана и справедлива формула (см. [44, гл. 5, п. 5.5, с. 222])

$$(I - Q_1)^{-1} u = \sum_{n=0}^{\infty} Q_1^n u, \quad u \in L_0^2(\nu_1); \quad (4.18)$$

здесь и ниже сужения $Q_1|_{L_0^2(\nu_1)}$ и $[I - Q_1]|_{L_0^2(\nu_1)}$ мы ради простоты записи обозначаем соответственно через Q_1 и $I - Q_1$.

Легко видеть, что в силу (4.4) функция $g(x) - d$, $x \in \mathbb{R}$, принадлежит подпространству $L_0^2(\nu_1)$. Следовательно, однозначно определена функция v_0 из формулы (1.33) и при этом в силу (4.17), (4.18) выполнены равенства

$$(G_1 g)(x) = (I - Q_1)^{-1}(g-d)(x) - [g(x) - d] = v_0(x) - [g(x) - d], \quad x \in \mathbb{R}. \quad (4.19)$$

Используя формулы (4.15), (4.16) и (4.19), находим

$$(\overline{G}_1 g)(x) = 2v_0(x) - [g(x) - d], \quad x \in \mathbb{R}. \quad (4.20)$$

Таким образом, в силу формул (4.4), (4.20) получаем соотношения

$$\langle g, \overline{G}_1 g \rangle_{\nu_1} = 2\langle g, v_0 \rangle_{\nu_1} - \langle g, g \rangle_{\nu_1} + d^2 \geq 0.$$

Итак, мы доказали, что формулы (4.14) и (1.34) определяют одно и то же число $\sigma \geq 0$. Покажем теперь, что $\sigma > 0$. Имеем очевидное равенство

$$\langle g, \overline{G}_1 g \rangle_{\nu_1} = \langle g - d, \overline{G}_1 g \rangle_{\nu_1} + \langle d, \overline{G}_1 g \rangle_{\nu_1}. \quad (4.21)$$

Поскольку функции $v_0(x)$ и $g(x) - d$ принадлежат подпространству $L_0^2(\nu_1)$, то в силу (1.32) выполнены равенства $\langle g, v_0 \rangle_{\nu_1} = 0$ и $\langle g, g - d \rangle_{\nu_1} = 0$. Отсюда согласно формуле (4.19) получаем равенство $\langle d, \overline{G}_1 g \rangle_{\nu_1} = 0$. Таким образом, в силу (4.14), (4.21) справедливы соотношения

$$\sigma^2 = \langle g, \overline{G}_1 g \rangle_{\nu_1} = \langle g - d, \overline{G}_1 g \rangle_{\nu_1} = 2\langle g - d, v_0 \rangle_{\nu_1} - \langle g - d, g - d \rangle_{\nu_1}. \quad (4.22)$$

Используя формулу (1.33), получаем $g - d = (I - Q_1)v_0$. Учитывая это равенство и формулу (4.22), заключаем, что неравенство $\sigma^2 > 0$ эквивалентно неравенству

$$2\langle (I - Q_1)v_0, v_0 \rangle_{\nu_1} > \langle (I - Q_1)v_0, (I - Q_1)v_0 \rangle_{\nu_1}. \quad (4.23)$$

Приводя подобные члены, убеждаемся в том, что неравенство (4.23) эквивалентно неравенству $\langle v_0, v_0 \rangle_{\nu_1} > \langle Q_1 v_0, Q_1 v_0 \rangle_{\nu_1}$. Но последнее неравенство имеет место в силу оценок

$$\langle Q_1 v_0, Q_1 v_0 \rangle_{\nu_1} \leq \|Q_1|_{L_0^2(\nu_1)}\|^2 \|v_0\|_{\nu_1}^2 < \|v_0\|_{\nu_1}^2,$$

поскольку, как уже было указано выше, $\|Q_1|_{L_0^2(\nu_1)}\| < 1$. Итак, мы доказали соотношение (4.13) и неравенство $\sigma > 0$. Лемма доказана.

4.4. Доказательство теоремы 1.2. Сначала докажем формулу (1.37). Найдем точную асимптотику вероятности, которая присутствует в третьем члене формулы (4.1). Имеет место следующее утверждение.

ЛЕММА 4.2. *Для фиксированных $a, b \in \mathbb{R}$ и $n \geq 1$ справедливо соотношение*

$$\begin{aligned} P_a\{F_0(L_n) < d \mid X_n = b\} \\ = K_1 h_1(a) h_1(b) e^{-nq_1} e^{\theta_0 g(b)} \frac{q(n, a, b)}{p(n, a, b)} \int_{D_n} \exp\{n\theta_0 F_0(L_n)\} Q_a^1(d\omega \mid X_n = b), \end{aligned} \quad (4.24)$$

где $D_n := \{\omega : F_0(L_n) < d\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соотношение (4.24) вытекает непосредственно из формулы (3.11) при $\theta = \theta_0$.

ЛЕММА 4.3. *Для фиксированных $a, b \in \mathbb{R}$ при $n \rightarrow \infty$ выполнено соотношение*

$$\int_{D_n} \exp\{n\theta_0 F_0(L_n)\} Q_a^1(d\omega \mid X_n = b) = \exp\{n\theta_0 d\} \frac{1}{\sigma\theta_0\sqrt{2\pi n}} (1 + o(1)). \quad (4.25)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу формул (1.8) и (4.4) справедливо равенство

$$\begin{aligned} \int_{D_n} \exp\{n\theta_0 F_0(L_n)\} Q_a^1(d\omega \mid X_n = b) \\ = \exp\{n\theta_0 d\} \int_{D_n} \exp\left\{n\theta_0 \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)[L_n(dx) - \nu_1(dx)]\right\} Q_a^1(d\omega \mid X_n = b), \end{aligned} \quad (4.26)$$

где множество D_n можно записать в следующем виде:

$$D_n = \left\{ \omega : \sqrt{n} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)[L_n(dx) - \nu_1(dx)] < 0 \right\}.$$

Используя формулу (4.13), получаем асимптотическое соотношение при $n \rightarrow \infty$ для последнего интеграла в (4.26):

$$\begin{aligned} \int_{D_n} \exp \left\{ n\theta_0 \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)[L_n(dx) - \nu_1(dx)] \right\} Q_a^1(d\omega \mid X_n = b) \\ = \int_{-\infty}^0 e^{\theta_0 \sqrt{n} s} dH\left(\frac{s}{\sigma}\right) (1 + o(1)). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Найдем асимптотику последнего интеграла в (4.27). Используя (4.12), получаем

$$dH\left(\frac{s}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{s^2}{2\sigma^2}\right\} ds, \quad s \in \mathbb{R}. \quad (4.28)$$

Введем большой параметр $T = \sigma\theta_0\sqrt{n}$. Используя (4.28) и выделяя полный квадрат в показателе экспоненты, убеждаемся в том, что для фиксированного $n \geq 1$ выполнено равенство

$$\int_{-\infty}^0 e^{\theta_0 \sqrt{n} s} dH\left(\frac{s}{\sigma}\right) = e^{-T^2/2} [1 - H(T)]. \quad (4.29)$$

Учитывая известную асимптотику $1 - H(T) = \frac{1}{T\sqrt{2\pi}} e^{-T^2/2} (1 + o(1))$, $T \rightarrow \infty$, в силу (4.29) получаем следующее асимптотическое соотношение:

$$\int_{-\infty}^0 e^{\theta_0 \sqrt{n} s} dH\left(\frac{s}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma\theta_0\sqrt{2\pi n}} (1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty.$$

Отсюда и из формул (4.26), (4.27) следует соотношение (4.25). Лемма доказана.

Теперь перейдем непосредственно к доказательству формулы (1.37). Учитывая равенство $F_0(L_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) L_n(dx)$ и используя соотношения (3.17), леммы 3.4, 4.2, 4.3, получаем асимптотическую формулу (1.37).

Теперь докажем формулу (1.35). Применяя формулу полной вероятности и учитывая соотношение (4.24), для фиксированных $a, b \in \mathbb{R}$ и $n \geq 1$ получаем равенства

$$\begin{aligned} P_a\{F_0(L_n) < d\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} P_a\{F_0(L_n) < d \mid X_n = y\} p(n, a, y) dy \\ &= K_1 h_1(a) e^{-nq_1} \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(y) e^{\theta_0 g(y)} \\ &\quad \times \left[\int_{D_n} \exp\{n\theta_0 F_0(L_n)\} Q_a^1(d\omega \mid X_n = y) \right] q(n, a, y) dy. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Используя утверждение (ii) леммы 3.4, формулу (4.25) и теорему Лебега о мажорированной сходимости, получаем соотношение

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \exp\{-n\theta_0 d\} \sigma \theta_0 \sqrt{2\pi n} \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(y) e^{\theta_0 g(y)} \\ \times \left[\int_{D_n} \exp\{n\theta_0 F_0(L_n)\} Q_a^1(d\omega \mid X_n = y) \right] q(n, a, y) dy \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(y) e^{\theta_0 g(y)} dy = e^{q_1}; \end{aligned} \quad (4.31)$$

здесь последнее равенство верно в силу (3.28) при $\theta = \theta_0$. Учитывая равенство $F_0(L_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) L_n(dx)$ и используя соотношения (4.30), (4.31), получаем асимптотическую формулу (1.35).

Докажем формулу (1.36). Для фиксированных $a, b \in \mathbb{R}$ и $n \geq 1$ справедливо тождество

$$P_{a,b}\{F_0(L_n) < d\} = P_a\{F_0(L_{n-1}) < d_n \mid X_{n-1} = b\}, \quad (4.32)$$

где $d_n = (nd - g(b))/(n-1)$. Применяя формулу (3.11) при $\theta = \theta_0$ и подставляя $n-1$ вместо n , получаем равенство

$$\begin{aligned} P_a\{F_0(L_{n-1}) < d_n \mid X_{n-1} = b\} = K_1 h_1(a) h_1(b) e^{-(n-1)q_1} e^{\theta_0 g(b)} \frac{q(n-1, a, b)}{p(n-1, a, b)} \\ \times \int_{\tilde{D}_{n-1}} \exp\{(n-1)\theta_0 F_0(L_{n-1})\} Q_a^1(d\omega \mid X_{n-1} = b), \end{aligned} \quad (4.33)$$

где $\tilde{D}_{n-1} := \{\omega : F_0(L_{n-1}) < d_n\}$. В силу формул (1.8) и (4.4) справедливо равенство

$$\int_{\tilde{D}_{n-1}} \exp\{(n-1)\theta_0 F_0(L_{n-1})\} Q_a^1(d\omega \mid X_{n-1} = b) = \exp\{(n-1)\theta_0 d\} B_{n-1}, \quad (4.34)$$

где

$$B_n := \int_{\tilde{D}_n} \exp\left\{n\theta_0 \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)[L_n(dx) - \nu_1(dx)]\right\} Q_a^1(d\omega \mid X_n = b), \quad (4.35)$$

и множество $\tilde{D}_n$ можно записать в следующем виде:

$$\tilde{D}_n = \left\{ \omega : \sqrt{n} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)[L_n(dx) - \nu_1(dx)] < \frac{d - g(b)}{n} \right\}.$$

Асимптотика интеграла B_n найдена в следующей лемме.

ЛЕММА 4.4. *При $n \rightarrow \infty$ выполнено соотношение*

$$B_n = \frac{\exp\{\theta_0(d - g(b))\}}{\sigma \theta_0 \sqrt{2\pi n}} (1 + o(1)). \quad (4.36)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для краткости записи для $n \geq 1$ положим

$$\eta_n := \sqrt{n} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)[L_n(dx) - \nu_1(dx)], \quad \tilde{P}_n(d\omega) := Q_a^1(d\omega \mid X_n = b).$$

Тогда интеграл (4.35) записывается в следующем виде:

$$B_n = \int_{\{\omega: \eta_n < (d-g(b))/n\}} \exp\{\sqrt{n} \theta_0 \eta_n\} \tilde{P}_n(d\omega). \quad (4.37)$$

Используя формулу (4.10), можно доказать справедливость соотношения

$$B_n = G_n(1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty, \quad (4.38)$$

где

$$G_n = \int_{-\infty}^{(d-g(b))/n} \exp\{\sqrt{n} \theta_0 s\} dH\left(\frac{s}{\sigma}\right), \quad (4.39)$$

число $\sigma > 0$ определено в (1.34). Доказательство соотношения (4.38) основано на следующем факте.

В силу свойства сильного перемешивания, которым обладает мера $Q_{0,x}^{n,y;1}$, случайные величины X_n и $\sqrt{n}(L_n - \nu_1)$ асимптотически независимы при $n \rightarrow \infty$ относительно меры $Q_{0,x}^{n,y;1}$ для любых $x, y \in \mathbb{R}$ (см. [17, с. 451]).

Найдем теперь асимптотику гауссовского интеграла G_n из (4.39). Учтывая формулу (4.28) и делая в (4.39) замену переменной $x = \sqrt{n} s$, получаем равенство

$$G_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi n}} \int_{-\infty}^{d-g(b)} e^{\theta_0 x} \exp\left\{-\frac{x^2}{2n\sigma^2}\right\} dx. \quad (4.40)$$

Применяя теорему Лебега о мажорированной сходимости с мажорантой $e^{\theta_0 x}$, находим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{d-g(b)} e^{\theta_0 x} \exp\left\{-\frac{x^2}{2n\sigma^2}\right\} dx = \int_{-\infty}^{d-g(b)} e^{\theta_0 x} dx = \frac{\exp\{\theta_0(d-g(b))\}}{\theta_0}. \quad (4.41)$$

Из соотношений (4.38), (4.40), (4.41) вытекает формула (4.36). Лемма доказана.

Формула (1.36) теперь следует из соотношений (4.32)–(4.34) и (4.36). Теорема 1.2 полностью доказана.

Список литературы

1. M. D. Donsker, S. R. S. Varadhan, "Asymptotic evaluation of certain Markov process expectations for large time. III", *Comm. Pure Appl. Math.*, **29**:4 (1976), 389–461.
2. J.-D. Deuschel, D. W. Stroock, *Large deviations*, Pure Appl. Math., **137**, Academic Press, Boston, MA, 1989.
3. P. Dupuis, R. S. Ellis, *A weak convergence approach to the theory of large deviations*, Wiley Ser. Probab. Statist., Wiley, New York, 1997.
4. В. И. Питербарг, В. Р. Фаталов, "Метод Лапласа для вероятностных мер в банаховых пространствах", *УМН*, **50**:6 (1995), 57–150; англ. пер.: V. I. Piterbarg, V. R. Fatalov, "The Laplace method for probability measures in Banach spaces", *Russian Math. Surveys*, **50**:6 (1995), 1151–1239.

5. L. M. Wu, “Grandes déviations pour les processus de Markov essentiellement irréductibles. I. Temps discret”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **312**:8 (1991), 609–614; “II. Temps continu”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **314**:12 (1992), 941–946; “III. Quelques applications”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **316**:8 (1993), 853–858.
6. L. Wu, “Moderate deviations of dependent random variables related to CLT”, *Ann. Probab.*, **23**:1 (1995), 420–445.
7. L. Wu, “Essential spectral radius for Markov semigroups (I): discrete time case”, *Probab. Theory Related Fields*, **128**:2 (2004), 255–321.
8. A. de Acosta, “Moderate deviations for empirical measures of Markov chains: lower bounds”, *Ann. Probab.*, **25**:1 (1997), 259–284.
9. A. de Acosta, X. Chen, “Moderate deviations for empirical measures of Markov chains: upper bounds”, *J. Theoret. Probab.*, **11**:4 (1998), 1075–1110.
10. J. L. Jensen, “Saddlepoint expansions for sums of Markov dependent variables on a continuous state space”, *Probab. Theory Related Fields*, **89**:2 (1991), 181–199.
11. G. Lerman, Z. Schuss, “Asymptotic theory of large deviations for Markov chains”, *SIAM J. Appl. Math.*, **58**:6 (1998), 1862–1877.
12. H. Djellout, A. Guillin, “Principe de déviations modérées pour le processus empirique fonctionnel d’une chaîne de Markov”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **330**:5 (2000), 377–380.
13. А. А. Боровков, К. А. Боровков, “О вероятностях больших отклонений для случайных блужданий. I. Распределения с правильно изменяющимися хвостами”, *ТВП*, **46**:2 (2001), 209–232; англ. пер.: A. A. Borovkov, K. A. Borovkov, “On probabilities of large deviations for random walks. I. regularly varying distribution tails”, *Theory Probab. Appl.*, **46**:2 (2002), 193–213.
14. А. А. Боровков, А. А. Могульский, “Большие отклонения для цепей Маркова в положительном квадранте”, *УМН*, **56**:5 (2001), 3–116; англ. пер.: A. A. Borovkov, A. A. Mogul’skii, “Large deviations for Markov chains in the positive quadrant”, *Russian Math. Surveys*, **56**:5 (2001), 803–916.
15. Sh. Kusuoka, Y. Tamura, “Precise estimate for large deviation of Donsker–Varadhan type”, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, **38**:3 (1991), 533–565.
16. E. Bolthausen, J.-D. Deuschel, Y. Tamura, “Laplace approximations for large deviations of nonreversible Markov processes. The nondegenerate case”, *Ann. Probab.*, **23**:1 (1995), 236–267.
17. S. Liang, J. Liu, “On the precise Laplace approximation for large deviations of Markov chain. The nondegenerate case”, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo*, **10**:2 (2003), 421–454.
18. В. Р. Фаталов, “Метод Лапласа для малых отклонений гауссовских процессов типа винеровского”, *Матем. сб.*, **196**:4 (2005), 135–160; англ. пер.: V. R. Fatalov, “The Laplace method for small deviations of Gaussian processes of Wiener type”, *Sb. Math.*, **196**:4 (2005), 595–620.
19. В. Р. Фаталов, “Времена пребывания и точные асимптотики малых отклонений бесселевских процессов для L^p -норм, $p > 0$ ”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **71**:4 (2007), 69–102; англ. пер.: V. R. Fatalov, “Occupation times and exact asymptotics of small deviations of Bessel processes for L^p -norms with $p > 0$ ”, *Izv. Math.*, **71**:4 (2007), 721–752.
20. В. Р. Фаталов, “Времена пребывания и точные асимптотики распределений L^p -функционалов от процессов Орнштейна–Уленбека, $p > 0$ ”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **53**:1 (2008), 72–99; англ. пер.: V. R. Fatalov, “Occupation time and exact asymptotics of distributions of L^p -functionals of the Ornstein–Uhlenbeck processes, $p > 0$ ”, *Probl. Inf. Transm.*, **53**:1 (2009), 13–36.

21. S. Albeverio, V. Fatalov, V. Piterbarg, "Asymptotic behavior of the sample mean of a function of the Wiener process and the MacDonald function", *J. Math. Sci. Univ. Tokyo*, **16**:1 (2009), 55–93.
22. Э. Нуммелин, *Общие неприводимые цепи Маркова и неотрицательные операторы*, Мир, М., 1989; пер. с англ.: E. Nummelin, *General irreducible Markov chains and nonnegative operators*, Cambridge Tracts in Math., **83**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1984.
23. Д. Ревюз, *Цепи Маркова*, РФФИ, М., 1997.
24. В. С. Королюк, Н. И. Портенко, А. В. Скороход, А. Ф. Турбин, *Справочник по теории вероятностей и математической статистике*, 2-е изд., Наука, М., 1985; фр. пер. 1-го изд.: V. Koroliouk, N. Portenko, A. Skorokhod, A. Tourbine, *Aide-mémoire de théorie des probabilités et de statistique mathématique*, Mir, Moscow, 1983.
25. Ф. Спизер, *Принципы случайного блуждания*, Наука, М., 1994; пер. с англ.: F. Spitzer, *Principles of random walks*, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1976.
26. А. Н. Бородин, И. А. Ибрагимов, *Предельные теоремы для функционалов от случайных блужданий*, Тр. МИАН, **195**, Наука, М., 1994; англ. пер.: A. N. Borodin, I. A. Ibragimov, "Limit theorems for functionals of random walks", *Proc. Steklov Inst. Math.*, **195** (1995), 1–259.
27. В. В. Петров, *Суммы независимых случайных величин*, Наука, М., 1972; англ. пер.: V. V. Petrov, *Sums of independent random variables*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1975.
28. Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский, *Уравнения типа свертки*, Наука, М., 1978.
29. N. C. Jain, "An introduction to large deviations", *Probability in Banach spaces*, v. V (Medford, MA, 1984), Lect. Notes Math., **1153**, Springer-Verlag, Berlin, 1985, 273–296.
30. Ф. Олвер, *Асимптотики и специальные функции*, Наука, М., 1990; пер. с англ.: F. W. J. Olver, *Asymptotics and special functions*, Academic Press, New York–London, 1974.
31. М. Абрамовиц, М. Стиган, *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами*, Наука, М., 1979; пер. с англ.: M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, U.S. Government Printing Office, Washington, 1964.
32. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, т. 1, 2, Наука, М., 1973–1974; пер. с англ.: A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi, *Higher transcendental functions*, vols. I, II, McGraw-Hill, New York–Toronto–London, 1953.
33. М. Кас, "On the average of a certain Wiener functional and a related limit theorem in calculus of probability", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **59**:3 (1946), 401–414.
34. В. Р. Фаталов, "Большие отклонения для распределений сумм случайных величин: метод цепей Маркова", *Пробл. передачи информ.*, **46**:2 (2010), 66–90; англ. пер.: V. R. Fatalov, "Large deviations for distributions of sums of random variables: Markov chain method", *Probl. Inf. Transm.*, **46**:2 (2010), 160–183.
35. S. R. S. Varadhan, "Asymptotic probabilities and differential equations", *Comm. Pure Appl. Math.*, **19** (1966), 261–286.
36. М. М. Вайнберг, *Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений*, Наука, М., 1972; англ. пер.: M. M. Vainberg, *Variational method and method of monotone operators in the theory of nonlinear equations*, Halsted Press, New York–Toronto, 1973.
37. А. Д. Полянин, А. В. Манжиров, *Справочник по интегральным уравнениям. Точные решения*, Факториал, М., 1998; англ. пер.: A. D. Polyanin, A. V. Manzhirov, *Handbook of integral equations*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1998.

38. В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин, *Оптимальное управление*, Наука, М., 1979; англ. пер.: V. M. Alekseev, V. M. Tikhomirov, S. V. Fomin, *Optimal control*, Contemp. Soviet Math., Consultants Bureau, New York, 1987.
39. E. Bolthausen, “Laplace approximations for sums of independent random vectors”, *Probab. Theory Relat. Fields*, **72**:2 (1986), 305–318.
40. V. R. Fatalov, “The Laplace method for computing exact asymptotics of distributions of integral statistics”, *Math. Methods Statist.*, **8**:4 (1999), 510–535.
41. Б. А. Севастьянов, *Ветвящиеся процессы*, Наука, М., 1971.
42. L. Lei, “Large deviations of kernel density estimator in $L^1(\mathbb{R}^d)$ for reversible Markov processes”, *Bernoulli*, **12**:1 (2006), 65–83.
43. Й. Керстан, К. Маттес, Й. Мекке, *Безгранично делимые точечные процессы*, Наука, М., 1982; пер. с нем.: J. Kerstan, K. Matthes, J. Mecke, *Unbegrenzt teilbare Punktprozesse*, Akademie-Verlag, Berlin, 1974.
44. Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ*, Наука, М., 1977; англ. пер.: L. V. Kantorovich, G. P. Akilov, *Functional analysis*, Pergamon Press, Oxford, 1982.

В. Р. ФАТАЛОВ (V. R. FATALOV)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет
E-mail: vrfatalov@yandex.ru

Поступило в редакцию
25.11.2008