Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. П. Рочев, О линейной независимости значений некоторых q -рядов, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2011, том 75, выпуск 1, 181–224

DOI: <https://doi.org/10.4213/im4062>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 10:12:01

УДК 511

И. П. Рочев

О линейной независимости значений некоторых q -рядов

Получены качественные и количественные результаты о линейной независимости значений функций из одного достаточно широкого класса, обобщающего q -гипергеометрические ряды, и их производных в алгебраических точках. Результаты доказываются как для архимедова, так и для p -адического случая.

Библиография: 18 наименований.

Ключевые слова: алгебраическое числовое поле, абсолютная высота алгебраического числа, q -ряд, q -экспоненциальная функция, q -логарифм, линейная независимость, мера линейной независимости, определитель Ганкеля, круговой многочлен.

§ 1. Обозначения и основные результаты

Пусть $\mathbb{K}$ – конечное расширение поля $\mathbb{Q}$ степени $\varkappa = [\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$, $\mathcal{M}$ – множество всех нормирований поля $\mathbb{K}$. Для $v \in \mathcal{M}$ нормируем абсолютное значение $|\cdot|_v$ следующим образом:

- 1) $|p|_v = p^{-1}$, если $v|p$,
- 2) $|x|_v = |x|$ при $x \in \mathbb{Q}$, если $v|\infty$,

где $|x|$ – модуль числа x . Тогда для любого $\alpha \in \mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}$ имеет место формула произведения

$$\prod_v |\alpha|_v^{\varkappa_v} = 1,$$

где $\varkappa_v = [\mathbb{K}_v : \mathbb{Q}_v]$ – соответствующие локальные степени.

Для $\alpha \in \mathbb{K}$ обозначим через $H(\alpha)$ абсолютную (мультипликативную) высоту числа α ,

$$H(\alpha) = \prod_v \max\{|\alpha|_v^{\varkappa_v/\varkappa}; 1\}.$$

Отметим равенство $H(\alpha) = (M(\alpha))^{1/\deg \alpha}$, где $M(\alpha)$ – мера Малера числа α . В частности, если $\alpha = a/b \in \mathbb{Q}$, где $a, b \in \mathbb{Z}$, $(a, b) = 1$, то $H(\alpha) = \max\{|a|; |b|\}$.

Если $\alpha \in \mathbb{K}^*$, то при любом $v \in \mathcal{M}$ справедливо фундаментальное неравенство

$$(H(\alpha))^{-1} \leq |\alpha|_v^{\varkappa_v/\varkappa} \leq H(\alpha).$$

Далее, для произвольного вектора $\bar{\alpha} = (\alpha_0, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{K}^{1+k}$ будем обозначать

$$|\bar{\alpha}|_v = \max\{|\alpha_0|_v; \dots; |\alpha_k|_v\}, \quad v \in \mathcal{M}, \quad H(\bar{\alpha}) = \prod_v |\bar{\alpha}|_v^{\varkappa_v/\varkappa}$$

(в частности, $H((1, \alpha)) = H(\alpha)$).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 09-01-00371а).

Пусть $q \in \mathbb{K}$ и $w \in \mathcal{M}$ таковы, что $|q|_w > 1$. Положим

$$\lambda = \frac{\varkappa \log H(q)}{\varkappa_w \log |q|_w}. \quad (1.1)$$

Заметим, что $\lambda \geq 1$, причем $\lambda = 1$ тогда и только тогда, когда для всех $v \in \mathcal{M} \setminus \{w\}$ выполняется неравенство $|q|_v \leq 1$.

Пусть многочлены $P(x, y) \in \mathbb{K}[x, y]$ и $Q(x) \in \mathbb{K}[x]$ удовлетворяют условиям $d := \deg_y P \geq 1$ и $P(n, q^n)Q(n) \neq 0$ при $n = 1, 2, 3, \dots$. Положим

$$\Pi_n(z) = \prod_{k=1}^n \frac{P(k, z^k)}{Q(k)}, \quad n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad (1.2)$$

и рассмотрим функцию

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Pi_n(q)}, \quad z \in \mathbb{C}_w, \quad (1.3)$$

где $\mathbb{C}_w$ – пополнение алгебраического замыкания $\mathbb{K}_w$.

Функция $f(z)$ является целой. Действительно, в обозначении

$$P(x, y) = \sum_{\nu=0}^d p_{\nu}(x)y^{\nu} \quad (1.4)$$

при всех достаточно больших $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ выполнено

$$|p_d(n)|_w \geq H(p_d(n))^{-\varkappa/\varkappa_w} \geq n^{-c}$$

с некоторой постоянной c ; следовательно, при больших n имеем

$$|P(n, q^n)|_w \geq 0.5n^{-c}|q|_w^{dn},$$

откуда получаем требуемое.

Существует много работ, посвященных изучению арифметических свойств значений функций вида (1.3). Так, полагая $Q(x) = 1$ и $P(x, y) = P(y) \in \mathbb{K}[y]$, получаем достаточно широкий класс так называемых q -гипергеометрических рядов (см. [1]), частными случаями которых являются q -экспоненциальная функция

$$E_q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\prod_{k=1}^n (q^k - 1)} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{q^n}\right) \quad (1.5)$$

и функция Чакалова

$$T_q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{q^{n(n+1)/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\prod_{k=1}^n q^k}. \quad (1.6)$$

Если $P(x, y) = p(x)y$, то функция (1.3) является частным случаем так называемых обобщенных рядов Чакалова (см. [2]).

Ж.-П. Безиван [3] предложил в 1988 г. новый метод для доказательства линейной независимости значений весьма широкого класса функций; хотя этот

подход до сих пор не позволял получать оценки для меры линейной независимости, с его помощью удалось получить ряд результатов, недоступных при использовании других методов. Так, с помощью определенной модификации своего первоначального метода в [4] Безивану удалось доказать, что при $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0; \pm 1\}$ и $\alpha \in \mathbb{Q}^*$ число $T_q(\alpha)$ не является ни рациональным числом, ни квадратичной иррациональностью (в работе [4] доказывается более общее утверждение). Р. Шуле [5] в 2001 г., используя аналитические соображения, распространил метод Безивана на случай q -экспоненциальной функции $E_q(z)$ (отметим, что метод Шуле можно использовать и для функций более общего вида (1.3)). В недавней статье [6] был предложен элементарный аналог метода Шуле, близкий по духу к оригинальной работе [4], однако содержащий дополнительные соображения, отсутствующие у Безивана и Шуле; в частности, результат Безивана о неквадратичности был распространен и на q -экспоненциальную функцию (см. также следствие 1.1 ниже). В настоящей работе мы даем количественное обобщение метода [6] и доказываем ряд утверждений о линейной независимости над $\mathbb{K}$ значений функции (1.3) и ее производных в точках поля $\mathbb{K}$ (с оценкой меры линейной независимости) при различных ограничениях, налагаемых на q , $P(x, y)$ и $Q(x)$. В качестве приложений мы уточняем ряд известных результатов.

Введем обозначение

$$Z(a, b) = \pi^{-2} \sum_{n \geq 0} [an + b]^{-2}, \quad (1.7)$$

где $[x]$ – целая часть числа x (в частности, если $a, b \in \mathbb{Z}_{>0}$, то $Z(a, b) = (a\pi)^{-2} \zeta(2, b/a)$; здесь $\zeta(s, a) = \sum_{n \geq 0} (n + a)^{-s}$ – дзета-функция Гурвица).

ТЕОРЕМА 1.1. *Допустим, что многочлены $P(x, y) = P(y)$ и $Q(x) = 1$ не зависят от x .*

Пусть числа $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{K}^$ удовлетворяют следующим двум условиям:*

- (i) $\alpha_j \alpha_k^{-1} \notin q^{\mathbb{Z}}$ при $1 \leq j, k \leq m, j \neq k$;
- (ii) $\alpha_j \notin P(0)q^{\mathbb{Z}_{>0}}$ при $1 \leq j \leq m$.

Пусть $s_1, \dots, s_m \in \mathbb{Z}_{>0}$. Положим

$$s = \sum_{j=1}^m s_j, \quad (1.8)$$

$$\alpha = \begin{cases} \frac{2s+1/d}{6s^2}, & \text{если } P(y) = py^d, p \in \mathbb{K}^*, \\ \frac{1}{3s} & \text{иначе,} \end{cases} \quad (1.9)$$

$$\beta = \begin{cases} \frac{1}{3(s+1)}, & \text{если } P(0) \neq 0, \\ \frac{2s+3/\delta_0}{6(s+1/\delta_0)^2}, & \text{если } \delta_0 := \text{ord}_{y=0} P(y) > 0. \end{cases} \quad (1.10)$$

Далее, если $P(1) \neq 0$, то обозначим

$$\gamma = \beta + \begin{cases} \frac{5}{32} - \frac{289}{900\pi^2} - Z(4, 1) & \text{при } m = 2, s_1 = s_2 = 2, \\ Z(m+2, s+1) + Z(m+2, s+2) & \text{иначе;} \end{cases} \quad (1.11)$$

если же $\delta_1 := \text{ord}_{y=1} P(y) > 0$, то положим

$$\gamma = \beta + \begin{cases} \frac{1}{6} - \frac{41}{36\pi^2} & \text{при } \delta_1 = 1, m = 1, s_1 = 2, \\ 2Z\left(m + \frac{1}{\delta_1}, s + 1\right) & \text{иначе.} \end{cases} \quad (1.12)$$

Если выполнено

$$\lambda < \frac{2d/3 + \alpha}{2d/3 - \gamma}, \quad (1.13)$$

где λ определено в (1.1), то числа $1, f^{(\sigma)}(\alpha_j q^k)$, $1 \leq j \leq m$, $0 \leq k < d$, $0 \leq \sigma < s_j$, линейно независимы над $\mathbb{K}$. Более того, для любого $\varepsilon > 0$ существует постоянная $H_0 = H_0(P, q, \lambda, m, \alpha_j, s_j, \varepsilon) > 0$ такая, что для любого вектора $\bar{\eta} = (\eta_0, \eta_{j,k,\sigma}) \in \mathbb{K}^{1+ds} \setminus \{\bar{0}\}$ выполнено

$$\left| \eta_0 + \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{d-1} \sum_{\sigma=0}^{s_j-1} \eta_{j,k,\sigma} f^{(\sigma)}(\alpha_j q^k) \right|_w \geq |\bar{\eta}|_w \exp(-(C_0 + \varepsilon)(\log H)^{3/2}),$$

где $H = \max\{H(\bar{\eta}); H_0\}$,

$$C_0 = \frac{d\lambda^{3/2}(2d/3 + \alpha + (d^2 - 1)(2d/3 - \gamma)\lambda) \log |q|_w}{((2d/3 + \alpha - (2d/3 - \gamma)\lambda) \log H(q))^{3/2}}.$$

В случае, когда $\lambda = 1$ и числа α_j удовлетворяют более сильному, чем в (ii), ограничению $\alpha_j \notin P(0)q^{\mathbb{Z}}$, качественная часть теоремы 1.1 (без оценки меры линейной независимости) содержится в [1, теорема 3]. В случае $\lambda > 1$ столь общий результат о линейной независимости, по-видимому, получен впервые. Также, судя по всему, новым является и количественный результат столь общего характера (даже в случае $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ и $q \in \mathbb{Z}$). Более сильные оценки линейных форм в различных частных случаях можно найти в [7]–[9].

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Метод доказательства теоремы 1.1, используемый в работе, позволяет во многих случаях немного ослабить условие (1.13), например, если среди корней многочлена $P(y)$ есть корни из единицы, отличные от 1 (см. п. 3.3). Кроме того, если для некоторого $t \in \mathbb{Z}_{>1}$ выполнено $P(y) = R(y^t)$, $R(y) \in \mathbb{K}[y]$, то можно применить теорему 1.1 к многочлену $R(y)$, числу q^t и точкам $\alpha_j q^r$, $1 \leq j \leq m$, $0 \leq r < t$, вместо $P(y)$, q и α_j и учесть, что для величины $\lambda = \lambda(q)$, определенной в (1.1), выполняется равенство $\lambda(q^t) = \lambda(q)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Условие (1.13) можно ослабить и в случае, когда отношение некоторых двух чисел из $\alpha_j q^k$, $1 \leq j \leq m$, $k \in \mathbb{Z}$, является корнем из единицы. Так, можно показать (см. замечание 3.1 ниже), что если $\lambda < 270/163$, то при любом $\alpha \in \mathbb{K}^*$, $\alpha \notin \pm q^{\mathbb{Z}_{>0}}$, числа 1 , $E_q(\alpha)$ и $E_q(-\alpha)$ (где $E_q(z) - q$ -экспоненциальная функция (1.5)) линейно независимы над $\mathbb{K}$ (условие теоремы 1.1 в этом случае имеет вид $\lambda < 45/28$).

Применяя теорему 1.1 к $E_q(z)$, получаем следующее утверждение, уточняющее основные результаты работы [6] (заметим, что подобное уточнение можно также дать, например, для функции $F_q(z; -1)$ в обозначениях [6]; см. замечание 1.1).

СЛЕДСТВИЕ 1.1. Пусть $q = \rho/\sigma \in \mathbb{Q}$, где $\rho, \sigma \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $(\rho, \sigma) = 1$, $|\rho| > |\sigma|$, $\alpha \in \mathbb{Q}^*$, $\alpha \notin -q^{\mathbb{Z}_{>0}}$. Обозначим $\gamma = \log |\sigma| / \log |\rho|$. Если $\gamma < 7/12$, то число $E_q(\alpha)$ иррационально. Более того, для любого $\varepsilon > 0$ существует положительная постоянная $S_0 = S_0(q, \alpha, \varepsilon)$ такая, что для любого рационального числа r/s , где $r \in \mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{Z}_{>0}$, справедливо неравенство

$$\left| E_q(\alpha) - \frac{r}{s} \right| \geq \exp(-(C_1 + \varepsilon)(\log S)^{3/2}),$$

где $S = \max\{s; S_0\}$,

$$C_1 = \frac{24\sqrt{3}(1-\gamma)}{(7-12\gamma)^{3/2}(\log |\rho|)^{1/2}}.$$

Кроме того, если $\gamma < 1/6$, то $E_q(\alpha)$ не является квадратичной иррациональностью и для любого $\varepsilon > 0$ существует положительная постоянная $L_0 = L_0(q, \alpha, \varepsilon)$ такая, что для любого многочлена $A(z) \in \mathbb{Z}[z]$ второй степени справедливо неравенство

$$|A(E_q(\alpha))| \geq \exp(-(C_2 + \varepsilon)(\log L)^{3/2}),$$

где $L = \max\{L(A); L_0\}$, $L(A)$ – длина многочлена A (сумма модулей коэффициентов),

$$C_2 = \frac{6\sqrt{6}(1-\gamma)}{(1-6\gamma)^{3/2}(\log |\rho|)^{1/2}}.$$

Следствие 1.1 улучшает условия $\gamma < 0.55301134\dots$ и $\gamma < 0.10602269\dots$ в результатах об иррациональности и неквадратичности соответственно, полученных в [6].

В качестве еще одного следствия теоремы 1.1 для $E_q(z)$ получаем следующий результат для q -логарифма (см. [10]):

$$L_q(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{q^n - z} = z \frac{E'_q(-z)}{E_q(-z)}.$$

СЛЕДСТВИЕ 1.2. Допустим, что

$$\lambda < \frac{30\pi^2}{14\pi^2 + 41} = 1.65251302\dots,$$

где λ определено в (1.1). Тогда при любом $\alpha \in \mathbb{K}^*$, $\alpha \notin q^{\mathbb{Z}_{>0}}$, имеем $L_q(\alpha) \notin \mathbb{K}$. Более того, для любого $\varepsilon > 0$ существует положительная постоянная $H_0 = H_0(q, \lambda, \alpha, \varepsilon)$ такая, что для любого числа $\theta \in \mathbb{K}$ справедливо неравенство

$$|L_q(\alpha) - \theta|_w \geq \exp(-(C_0 + \varepsilon)(\log H)^{3/2}),$$

где $H = \max\{H(\theta); H_0\}$,

$$C_0 = \frac{180\pi^3 \lambda^{3/2} \log |q|_w}{((30\pi^2 - (14\pi^2 + 41)\lambda) \log H(q))^{3/2}}.$$

Следствие 1.2 качественно усиливает теорему 3 работы [10], где соответствующий результат доказан при условии $\lambda < 1.33943985 \dots$ (в [10] оно не сформулировано явно; это область определения функции $m(-\lambda)$ в работе [10]) и дополнительном требовании, чтобы $|q|_v \neq 1$ при всех $v|_\infty$. Однако в количественном аспекте следствие 1.2 слабее, чем [10, теорема 3], где оценка для $|L_q(\alpha) - \theta|_w$ степенная по H .

С помощью следствия 1.2 получаем следующее усиление теоремы 5 работы [10].

СЛЕДСТВИЕ 1.3. Пусть $r, s \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ таковы, что $D = r^2 + 4s > 0$. Пусть последовательность u_n является решением рекуррентного соотношения

$$u_{n+2} = ru_{n+1} + su_n$$

с начальными условиями $u_0 = 0, u_1 = u \in \mathbb{Q}(\sqrt{D})^*$. Положим

$$d = \begin{cases} (r^2, s), & \text{если } \sqrt{D} \notin \mathbb{Z}, \\ \left(\frac{(|r| + \sqrt{D})^2}{4}, s \right), & \text{если } \sqrt{D} \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

здесь (a, b) – наибольший общий делитель чисел $a, b \in \mathbb{Z}$. Если для $r' := |r|/\sqrt{d}$, $s' := s/d$ выполнено неравенство

$$r' > |s'|^a - \frac{s'}{|s'|^a}, \quad \text{где } a := \frac{15\pi^2}{16\pi^2 - 41} = 1.26626822 \dots,$$

то при любых $k \in \mathbb{Z}_{>0}$, $b \in \mathbb{Q}(\sqrt{D})^*$, $|b| < ((|r| + \sqrt{D})/2)^k$, имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^n}{u_{kn}} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{D}).$$

Более того, для любого $\varepsilon > 0$ существуют положительные постоянные $C_0 = C_0(r, s)$ и $H_0 = H_0(r, s, k, u, b, \varepsilon)$ такие, что для любого числа $\theta \in \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ справедливо неравенство

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^n}{u_{kn}} - \theta \right| \geq \exp(-(C_0 k^{-1/2} + \varepsilon)(\log H)^{3/2}),$$

где $H = \max\{H(\theta); H_0\}$.

В работе [10] соответствующий качественный результат доказан при условии, что

$$|r| > |s|^{a_1} - \frac{s}{|s|^{a_1}}, \quad \text{где } a_1 := \frac{1}{3 - \sqrt{5 + 12/\pi^2}} = 1.97301502 \dots, \quad (1.14)$$

$\sqrt{D} \notin \mathbb{Z}$ и $b = 1$ (см. [10, доказательство теоремы 5]).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. Используя [10, следствие 1], в случае, когда неравенство (1.14) выполняется для величин r' и s' , определенных в следствии 1.3, вместо r и s соответственно, для $|\sum_{n=1}^{\infty} b^n/u_{kn} - \theta|$ можно получить степенную по H оценку. В частности, если $s|r^2$ (несложно показать, что в этом

случае выполнено $\sqrt{D} \notin \mathbb{Z}$, то существует положительная постоянная $H_0 = H_0(r, k, u, b)$ такая, что для всех $\theta \in \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ выполнено (см. [10, теорема 4] для случаев $s = \pm 1, \pm 2$ и $b = 1$)

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^n}{u_{kn}} - \theta \right| > H^{-7.8921},$$

где $H = \max\{H(\theta); H_0\}$.

В формулировке следующей теоремы используется представление (1.4). При этом мы будем предполагать, что $\max\{\deg_x P(x, y); \deg Q(x)\} > 0$. Заметим, что автору не известны какие-либо общие результаты, касающиеся подобных функций, за исключением упомянутых выше обобщенных рядов Чакалова.

Обозначим

$$h = \deg Q(x), \quad (1.15)$$

$$g_1 = \max \left\{ \max_{1 \leq \nu \leq d} \frac{\deg p_{d-\nu}(x)}{\nu}; \frac{h}{d} \right\}, \quad (1.16)$$

$$g_2 = \max_{1 \leq \nu \leq d} \frac{\deg p_{\nu}(x)}{\nu}, \quad (1.17)$$

$$\varepsilon_0 = \begin{cases} 0, & \text{если } p_0(x) = 0, \\ 1, & \text{если } p_0(x) \neq 0, \end{cases} \quad (1.18)$$

$$\mathfrak{D} = d + \max\{h; \deg p_0(x)\} + \sum_{\nu=1}^d \deg p_{\nu}(x) \quad (1.19)$$

(степень нулевого многочлена считаем равной нулю).

ТЕОРЕМА 1.2. Допустим, что $\lambda = 1$, где λ определено в (1.1), и многочлены $P(x, y)$ и $Q(x)$ удовлетворяют (по крайней мере) одному из следующих двух условий:

- (а) $p_d(x)$ не зависит от x ;
- (б) $Q(x)$ и $p_0(x)$ не зависят от x .

Пусть $m \in \mathbb{Z}_{>0}$, $d_0 \in \mathbb{Z}_{\geq d}$ и числа $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{K}^*$ и $s_{j,k} \in \mathbb{Z}_{>0}$, $1 \leq j \leq m$, $0 \leq k < d_0$, удовлетворяют следующим условиям:

- (i) $\alpha_j \alpha_k^{-1} \notin q^{\mathbb{Z}}$ при $1 \leq j, k \leq m$, $j \neq k$;
- (ii) при $1 \leq j \leq m$ и $d \leq k < d_0$ выполнено неравенство $s_{j,k} \leq \deg p_d(x)$;
- (iii) если $\deg p_0(x) = \deg Q(x)$, то $\alpha_j \notin (a/b)q^{\mathbb{Z}_{>0}}$ при $1 \leq j \leq m$, где a и b – старшие коэффициенты многочленов $p_0(x)$ и $Q(x)$ соответственно.

Тогда числа $1, f^{(\sigma)}(\alpha_j q^k)$, $1 \leq j \leq m$, $0 \leq k < d_0$, $0 \leq \sigma < s_{j,k}$, линейно независимы над $\mathbb{K}$. Более того, если обозначить

$$c_1 = \begin{cases} \frac{8}{15} \sqrt{\frac{2}{mg_1}}, & \text{если } p_d(x) \text{ не зависит от } x, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \quad (1.20)$$

$$c_2 = \begin{cases} \frac{8}{15} \sqrt{\frac{2}{(m + \varepsilon_0)g_2}}, & \text{если } p_0(x) \text{ и } Q(x) \text{ не зависят от } x, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \quad (1.21)$$

$$C_0 = \frac{2d\mathfrak{D}^3 \log |q|_w}{3((\mathfrak{c}_1 + \mathfrak{c}_2) \log H(q))^2},$$

то для любого $\varepsilon > 0$ существует положительная постоянная $H_0 = H_0(P, Q, q, m, d_0, \alpha_j, s_{j,k}, \varepsilon)$ такая, что для любого вектора

$$\bar{\eta} = (\eta_0, \eta_{j,k,\sigma}) \in \mathbb{K}^{1+\sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{d_0-1} s_{j,k}} \setminus \{\bar{0}\}$$

выполнено

$$\left| \eta_0 + \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{d_0-1} \sum_{\sigma=0}^{s_{j,k}-1} \eta_{j,k,\sigma} f^{(\sigma)}(\alpha_j q^k) \right|_w \geq |\bar{\eta}|_w \exp(-(C_0 + \varepsilon)(\log H)^2),$$

где $H = \max\{H(\bar{\eta}); H_0\}$.

В частности, для функции

$$H_q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n! q^{n(n+1)/2}}$$

получаем следующий результат (см. также [2], [11]).

СЛЕДСТВИЕ 1.4. Пусть q – целое число минимого квадратичного поля $\mathbb{K}$, $|q| > 1$, $d_0, s_0 \in \mathbb{Z}_{>0}$ и числа $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{K}^*$ удовлетворяют условию $\alpha_j \alpha_k^{-1} \notin q^{\mathbb{Z}}$ при $1 \leq j, k \leq m$, $j \neq k$. Тогда числа $1, H_q^{(\sigma)}(\alpha_j)$, $1 \leq j \leq m$, $0 \leq \sigma < s_0$, и $H_q(\alpha_j q^k)$, $1 \leq j \leq m$, $1 \leq k < d_0$, линейно независимы над $\mathbb{K}$. Более того, для любого $\varepsilon > 0$ существует положительная постоянная $H_0 = H_0(q, m, \alpha_j, d_0, s_0, \varepsilon)$ такая, что для любого вектора $\bar{\eta} = (\eta_0, \eta_{j,k,\sigma}) \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}^{1+(s_0+d_0-1)m} \setminus \{\bar{0}\}$ выполнено

$$\left| \eta_0 + \sum_{j=1}^m \left(\sum_{\sigma=0}^{s_0-1} \eta_{j,0,\sigma} H_q^{(\sigma)}(\alpha_j) + \sum_{k=1}^{d_0-1} \eta_{j,k,0} H_q(\alpha_j q^k) \right) \right| \geq \exp(-(C_0 + \varepsilon)(\log H)^2),$$

где $H = \max\{H(\bar{\eta}); H_0\}$, $C_0 = 75m/(8 \log |q|)$.

Следствие 1.4 уточняет следствие работы [2] для функции $H_q(z)$, где соответствующий качественный результат доказан для поля $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ рациональных чисел при условии $|\alpha_j \alpha_k^{-1}| \notin |q|^{\mathbb{Z}}$, $j \neq k$. Заметим, что в [2, следствие] вместо значений $H_q(\alpha_j q^k)$ используются значения первообразных $H_q^{(-k)}(\alpha_j)$, однако в силу функционального уравнения для функции $H_q(z)$:

$$qH'_q(qz) = H_q(z),$$

они легко выражаются друг через друга (так, $H_q^{(-1)}(z) = H_q(qz) - 1$). Пользуясь этим же уравнением, общий случай следствия 1.4 можно свести к случаю $d_0 = 1$ (при этом числа α_j заменяются на $\alpha_j q^{d_0-1}$); в этом случае чуть более сильный количественный результат доказан в работе [11] для $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, но при некоторых дополнительных ограничениях арифметического характера, налагаемых на числа α_j .

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4. Теорема 1.2 позволяет дать полное описание всех линейных соотношений (над полем $\mathbb{K}$) между значениями функции $f(z)$ и ее производных в точках поля $\mathbb{K}$ (в случае, когда $P(x, y)$, $Q(x)$ и q удовлетворяют условиям теоремы).

Действительно, функция $f(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\sum_{\nu=0}^d p_{\nu} \left(z \frac{d}{dz} \right) (f(q^{\nu} z)) = P(0, 1) + Q \left(z \frac{d}{dz} \right) (zf(z)), \quad (1.22)$$

из которого следует, что при любых $\alpha \in \mathbb{K}^*$ и $s \geq \deg p_d(x)$ число $f^{(s)}(\alpha)$ линейно выражается через 1 , $f^{(\sigma)}(\alpha)$, $0 \leq \sigma < \deg p_d(x)$, и $f^{(\sigma)}(q^{-\nu}\alpha)$, $1 \leq \nu \leq d$, $\sigma \geq 0$. Следовательно, каковы бы ни были числа $\beta_1, \dots, \beta_l \in \mathbb{K}^*$, $s \in \mathbb{Z}_{>0}$, найдутся числа α_j и $s_{j,k}$, для которых выполнены условия теоремы 1.2, такие, что $f^{(\sigma)}(\beta_j)$, $1 \leq j \leq l$, $0 \leq \sigma \leq s$, линейно выражаются через 1 , $f^{(\sigma)}(\alpha_j q^k)$, $1 \leq j \leq m$, $0 \leq k < d_0$, $0 \leq \sigma < s_{j,k}$. Тогда соотношение

$$\eta_0 + \sum_{j=1}^l \sum_{\sigma=0}^s \eta_{j,\sigma} f^{(\sigma)}(\beta_j) = 0$$

можно переписать в виде

$$\tilde{\eta}_0 + \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{d_0-1} \sum_{\sigma=0}^{s_{j,k}-1} \tilde{\eta}_{j,k,\sigma} f^{(\sigma)}(\alpha_j q^k) = 0,$$

где $\tilde{\eta}_0$, $\tilde{\eta}_{j,k,\sigma}$ являются определенными линейными комбинациями η_0 , $\eta_{j,\sigma}$. Поэтому из теоремы 1.2 следует, что коэффициенты η_0 , $\eta_{j,\sigma}$ должны удовлетворять системе линейных уравнений $\tilde{\eta}_0 = \tilde{\eta}_{j,k,\sigma} = 0$. Другими словами, все нетривиальные линейные соотношения между значениями функции $f(z)$ и ее производных в точках поля $\mathbb{K}$ являются следствиями уравнения (1.22).

Наконец, в следующей теореме мы обобщаем теорему 1 работы [12] в случае произвольного поля алгебраических чисел. Для этого рассмотрим целую функцию

$$h(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{q^n} \right) \left(1 + \frac{z}{q^n} + \frac{1}{q^{2n}} \right), \quad z \in \mathbb{C}_w.$$

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{K}$ – различные числа, удовлетворяющие следующим двум условиям:

- (i) $a_j \neq \pm 2$ при $1 \leq j \leq m$;
- (ii) $q^n(a_j q^n - a_k)(a_k q^n - a_j) \neq (q^{2n} - 1)^2$ при $1 \leq j, k \leq m$ и $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Пусть $s_1, \dots, s_m \in \mathbb{Z}_{>0}$. Положим

$$\alpha = \frac{4s+1}{24s^2}, \quad (1.23)$$

$$\gamma = \begin{cases} \frac{551}{2400} - \frac{289}{900\pi^2} - Z(4, 1) & \text{при } m = 1, s_1 = 2, \\ \frac{4s+3}{6(2s+1)^2} + Z(2m+2, 2s+1) + Z(2m+2, 2s+2) & \text{иначе;} \end{cases} \quad (1.24)$$

здесь $s = \sum_{j=1}^m s_j$. Если выполнено

$$\lambda < \frac{2/3 + \alpha}{2/3 - \gamma},$$

где λ определено в (1.1), то числа $1, h^{(\sigma)}(a_j)$, $1 \leq j \leq m$, $0 \leq \sigma < s_j$, линейно независимы над $\mathbb{K}$. Более того, для любого $\varepsilon > 0$ существует положительная постоянная $H_0 = H_0(q, \lambda, m, a_j, s_j, \varepsilon)$ такая, что для любого вектора $\bar{\eta} = (\eta_0, \eta_{j,\sigma}) \in \mathbb{K}^{1+s} \setminus \{\bar{0}\}$ выполнено

$$\left| \eta_0 + \sum_{j=1}^m \sum_{\sigma=0}^{s_j-1} \eta_{j,\sigma} h^{(\sigma)}(a_j) \right|_w \geq |\bar{\eta}|_w \exp(-(C_0 + \varepsilon)(\log H)^{3/2}),$$

где $H = \max\{H(\bar{\eta}); H_0\}$,

$$C_0 = \frac{(2/3 + \alpha)\lambda^{3/2} \log |q|_w}{((2/3 + \alpha - (2/3 - \gamma)\lambda) \log H(q))^{3/2}}.$$

В случае $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ и $q \in \mathbb{Z}$ качественная часть утверждения теоремы 1.3 доказана Безиваном [12]; однако, поскольку Безиван вместо $h(z)$ рассматривает функцию $h(z)/h(0)$, на числа a_j в [12] налагается дополнительное ограничение: $a_j \neq 0$.

В частности, для мероморфной функции

$$S(z) = \frac{h'(z)}{h(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{q^{2n} + q^n z + 1}$$

получаем следующий результат, частично обобщающий следствие 1 работы [12] (где выполнение неравенства (1.26) требуется лишь при $n \neq 0$).

СЛЕДСТВИЕ 1.5. Допустим, что выполнено неравенство

$$\lambda < \frac{5475\pi^2}{3147\pi^2 + 2312 + 7200\pi^2 Z(4, 1)} = 1.31441259\dots, \quad (1.25)$$

где λ определено в (1.1). Тогда для любого $a \in \mathbb{K}$ такого, что при $n \in \mathbb{Z}$ выполнено

$$q^n a^2 \neq (q^n + 1)^2, \quad (1.26)$$

имеем $S(a) \notin \mathbb{K}$. Более того, для любого $\varepsilon > 0$ существует положительная постоянная $H_0 = H_0(q, \lambda, a, \varepsilon)$ такая, что для любого числа $\theta \in \mathbb{K}$ справедливо неравенство

$$|S(a) - \theta|_w \geq \exp(-(C_0 + \varepsilon)(\log H)^{3/2}),$$

где $H = \max\{H(\theta); H_0\}$,

$$C_0 = \frac{1314(50\pi^2\lambda)^{3/2} \log |q|_w}{((5475\pi^2 - (3147\pi^2 + 2312 + 7200\pi^2 Z(4, 1))\lambda) \log H(q))^{3/2}}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.5. Функция $S(z)$ выражается через q -логарифм $L_q(z)$ с помощью формулы

$$S\left(-\left(z + \frac{1}{z}\right)\right) = \frac{z}{z^2 - 1} \left(L_q(z) - L_q\left(\frac{1}{z}\right) \right),$$

поэтому если q удовлетворяет условию (1.25), то при любом $\alpha \in \mathbb{K}^*$ таком, что $\alpha^2 \notin q^{\mathbb{Z}}$, имеем

$$L_q(\alpha) - L_q\left(\frac{1}{\alpha}\right) \notin \mathbb{K}.$$

Остальная часть настоящей работы устроена следующим образом. В § 2 доказывается некоторое тождество для разностных операторов, используемое в дальнейшем. В § 3 мы, следуя конструкции Безивана, определяем вспомогательные многочлены и доказываем ряд их свойств, которые используются для доказательства теорем 1.1–1.3. В § 4 мы доказываем результат о необнулении вспомогательных многочленов, который, наряду с аппроксимационной леммой, доказанной в § 5, позволяет получить количественные результаты (см. [6, замечание 8]). Поскольку все теоремы доказываются по одной схеме, мы будем проводить рассуждения для произвольных многочленов $P(x, y)$ и $Q(x)$; в том случае, когда используются специальные свойства этих многочленов, это указывается явно (в частности, для удобства эти условия включены в формулировки основных промежуточных результатов; см. предложения 3.1, 3.2, 3.6). Наконец, в § 6 мы доказываем теоремы 1.1–1.3, а также следствия 1.1, 1.3 (остальные следствия непосредственно следуют из соответствующих теорем).

§ 2. Разностные операторы

Обозначим через $\mathcal{B}$ оператор сдвига по n , действующий на произвольную функцию $\xi(n)$ целого аргумента n по правилу

$$\mathcal{B}(\xi(n)) = \xi(n - 1). \quad (2.1)$$

При этом если $\xi(n)$ определено при $n \geq n_0$, то $\mathcal{B}(\xi(n))$ определено при $n \geq n_0 + 1$. Отметим, что мы резервируем n как имя аргумента функции; если $\xi(n)$ зависит также от других аргументов, то они рассматриваются как параметры.

При $a \in \mathbb{F}$, где $\mathbb{F}$ – произвольное поле, определим разностный оператор

$$\mathcal{D}_a = \mathcal{I} - a\mathcal{B}, \quad (2.2)$$

где через $\mathcal{I}$ обозначен тождественный оператор, $\mathcal{I}(\xi(n)) = \xi(n)$. Заметим, что операторы (2.2) коммутируют между собой, а также с оператором $\mathcal{B}$, так что, например, справедливо тождество

$$\mathcal{B}(\mathcal{D}_a(\xi(n))) = \mathcal{D}_a(\xi(n - 1)).$$

В дальнейшем мы будем неоднократно пользоваться этим, не отмечая особо.

Известно, что для любого $a \neq 0$ и для произвольного многочлена $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ степени не выше $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ выполнено тождество

$$\mathcal{D}_a^{t+1}(p(n)a^n) = 0, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (2.3)$$

Легко видеть, что для произвольных a и $b \neq 0$ справедливо тождество

$$\mathcal{D}_a(b^n \xi(n)) = b^n \mathcal{D}_{ab^{-1}}(\xi(n)). \quad (2.4)$$

Следующее свойство операторов $\mathcal{D}_a$ является дискретным аналогом правила Лейбница дифференцирования произведения.

ЛЕММА 2.1. *При $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ имеет место тождество*

$$\mathcal{D}_a^k(\eta(n)\xi(n)) = \sum_{\nu=0}^k \binom{k}{\nu} a^\nu \mathcal{D}_1^\nu(\eta(n)) \mathcal{D}_a^{k-\nu}(\xi(n-\nu)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $k = 0$ утверждение тривиально. При $k = 1$ тождество имеет вид

$$\mathcal{D}_a(\eta(n)\xi(n)) = \eta(n)\mathcal{D}_a(\xi(n)) + a\mathcal{D}_1(\eta(n))\xi(n-1)$$

и проверяется непосредственно.

Если тождество доказано для $k-1$ вместо k , то имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_a^k(\eta(n)\xi(n)) &= \mathcal{D}_a\left(\sum_{\nu=0}^{k-1} \binom{k-1}{\nu} a^\nu \mathcal{D}_1^\nu(\eta(n)) \mathcal{D}_a^{k-1-\nu}(\xi(n-\nu))\right) \\ &= \sum_{\nu=0}^{k-1} \binom{k-1}{\nu} a^\nu \mathcal{D}_a\left(\mathcal{D}_1^\nu(\eta(n)) \mathcal{D}_a^{k-1-\nu}(\xi(n-\nu))\right) \\ &= \sum_{\nu=0}^{k-1} \binom{k-1}{\nu} a^\nu \left(\mathcal{D}_1^\nu(\eta(n)) \mathcal{D}_a^{k-\nu}(\xi(n-\nu))\right. \\ &\quad \left.+ a\mathcal{D}_1^{\nu+1}(\eta(n)) \mathcal{D}_a^{k-1-\nu}(\xi(n-1-\nu))\right) \\ &= \sum_{\nu=0}^k \binom{k}{\nu} a^\nu \mathcal{D}_1^\nu(\eta(n)) \mathcal{D}_a^{k-\nu}(\xi(n-\nu)). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Индукцией по ℓ из леммы 2.1 получаем следующее утверждение.

ЛЕММА 2.2. *При $k_1, \dots, k_\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ имеет место тождество*

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{a_1}^{k_1} \dots \mathcal{D}_{a_\ell}^{k_\ell}(\eta(n)\xi(n)) &= \sum_{\nu_1=0}^{k_1} \dots \sum_{\nu_\ell=0}^{k_\ell} \prod_{j=1}^{\ell} \binom{k_j}{\nu_j} a_j^{\nu_j} \cdot \mathcal{D}_1^{\nu_1+\dots+\nu_\ell}(\eta(n)) \\ &\quad \times \mathcal{D}_{a_1}^{k_1-\nu_1} \dots \mathcal{D}_{a_\ell}^{k_\ell-\nu_\ell}(\xi(n-\nu_1-\dots-\nu_\ell)). \end{aligned}$$

В частности, если $\eta(n)$ – многочлен степени не выше t , то суммирование достаточно проводить только по тем ν_j , которые удовлетворяют неравенству $\nu_1 + \dots + \nu_\ell \leq t$.

§ 3. Конструкция вспомогательных многочленов

Фиксируем числа $m \in \mathbb{Z}_{>0}$, $d_0 \in \mathbb{Z}_{\geq d}$, $\alpha_j \in \mathbb{C}_w^*$, $1 \leq j \leq m$, и $s_{j,k} \in \mathbb{Z}_{>0}$, $1 \leq j \leq m$, $0 \leq k < d_0$. Кроме того, при $1 \leq j \leq m$ положим

$$s_j = \max_{0 \leq k < d_0} s_{j,k}.$$

Через $\bar{x}$ обозначим вектор переменных: $\bar{x} = (x_0, \bar{x}_1) = (x_0, x_{j,k,\sigma})$, где индексы меняются в пределах $1 \leq j \leq m$, $0 \leq k < d_0$, $0 \leq \sigma < s_{j,k}$.

Определим последовательности многочленов

$$u_n = u_n(z, \bar{x}) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{d_0-1} \sum_{\sigma=0}^{s_{j,k}-1} \sigma! \binom{n}{\sigma} (\alpha_j z^k)^{n-\sigma} x_{j,k,\sigma} \in \mathbb{C}_w[z, \bar{x}], \quad n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad (3.1)$$

$$v_n = v_n(z, \bar{x}) = \Pi_n(z) \left(x_0 + \sum_{k=0}^n \frac{u_k(z, \bar{x})}{\Pi_k(z)} \right) \in \mathbb{C}_w[z, \bar{x}], \quad n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad (3.2)$$

где $\Pi_n(z)$ определены в (1.2). Легко видеть, что v_n удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$\begin{aligned} v_0(z, \bar{x}) &= x_0 + u_0(z, \bar{x}), \\ Q(n)v_n(z, \bar{x}) &= P(n, z^n)v_{n-1}(z, \bar{x}) + Q(n)u_n(z, \bar{x}), \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Наконец, при $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ рассмотрим определитель Ганкеля

$$V_n = V_n(z, \bar{x}) = \det(v_{i+j})_{i,j=0}^{n-1} \in \mathbb{C}_w[z, \bar{x}]. \quad (3.4)$$

Настоящий параграф посвящен доказательству некоторых свойств определителей V_n .

3.1. Оценка $|V_n(q, \bar{w})|_w$. В этом пункте мы будем предполагать, что многочлен $P(x, y)$ удовлетворяет условию (а) теоремы 1.2, т. е.

$$P(x, y) = p_d y^d + \sum_{\nu=0}^{d-1} p_\nu(x) y^\nu, \quad p_d \in \mathbb{K}^*.$$

Положим

$$s' = \begin{cases} s - 1/d, & \text{если } P(x, y) = p_d y^d, \\ s & \text{иначе,} \end{cases}$$

где s определено в (1.8).

При $1 \leq j \leq m$, $\nu \in \mathbb{Z}$ введем разностный оператор

$$\mathcal{A}_{\nu,j} = \mathcal{D}_{\alpha_j q^\nu},$$

где операторы $\mathcal{D}_a$ определены в (2.2). В силу (2.4) при $\sigma \in \mathbb{Z}$ справедливо тождество

$$\mathcal{A}_{\nu,j}(q^{\sigma n} \xi(n)) = q^{\sigma n} \mathcal{A}_{\nu-\sigma,j}(\xi(n)). \quad (3.5)$$

При $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $n \geq (s + mh)l + m \sum_{k=0}^{l-1} \lfloor kg_1 \rfloor$, где h и g_1 определены равенствами (1.15) и (1.16), положим

$$v_{l,n}(\bar{x}) = \prod_{k=0}^{l-1} \prod_{j=1}^m \mathcal{A}_{d_0-1-d-k,j}^{s_j+h+\lfloor kg_1 \rfloor} (v_n(q, \bar{x})).$$

Здесь и всюду далее под выражением вида $\prod_{j=1}^{\ell} \mathcal{R}_j(\xi(n))$, где $\mathcal{R}_j$ – разностные операторы, мы понимаем $(\prod_{j=1}^{\ell} \mathcal{R}_j)(\xi(n))$.

ЛЕММА 3.1. Пусть $l > d_0$, $\bar{\omega} = (\omega_0, \omega_{j,k,\sigma}) \in \mathbb{C}_w^{1+\sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{d_0-1} s_{j,k}}$. Допустим, что при $0 \leq \nu < l$, $n \geq (s + mh)\nu + m \sum_{k=0}^{\nu-1} \lfloor kg_1 \rfloor$ справедливо неравенство

$$|v_{\nu,n}(\bar{\omega})|_w \leq (n+1)^{\nu g_1} |q|_w^{-\nu n + s' \nu^2 / 2 + m g_1 \nu^3 / 6 + a n + b}$$

с некоторыми положительными постоянными a, b , не зависящими от ν, n . Тогда при $n \geq (s + mh)l + m \sum_{k=0}^{l-1} \lfloor kg_1 \rfloor$ выполнено

$$|v_{l,n}(\bar{\omega})|_w \leq (n+1)^{l g_1} |q|_w^{-l n + s' l^2 / 2 + m g_1 l^3 / 6 + a n + b + a' + c' + c' g_1 l}$$

с некоторой положительной постоянной c' , зависящей только от чисел $q, m, \alpha_j, d_0, s_{j,k}$ и многочленов $P(x, y), Q(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Через $c_1, c_2, \dots$ будем обозначать в доказательстве положительные постоянные, зависящие только от чисел $q, m, \alpha_j, d_0, s_{j,k}$ и многочленов $P(x, y), Q(x)$. Кроме того, для краткости мы будем записывать v_n и $v_{\nu,n}$ вместо $v_n(q, \bar{\omega})$ и $v_{\nu,n}(\bar{\omega})$.

Из (2.3), (3.1) и неравенства $l \geq d_0$ следует (полагаем, что u_n определены с помощью (3.1) при всех целых n) соотношение

$$\prod_{k=0}^{l-1} \prod_{j=1}^m \mathcal{A}_{d_0-1-k,j}^{s_j+h+\lfloor kg_1 \rfloor} (Q(n) u_n(q, \bar{\omega})) = 0, \quad n \in \mathbb{Z},$$

поэтому из (3.3) при $n \geq (s + mh)l + m \sum_{k=0}^{l-1} \lfloor kg_1 \rfloor$ получаем

$$\prod_{k=0}^{l-1} \prod_{j=1}^m \mathcal{A}_{d_0-1-k,j}^{s_j+h+\lfloor kg_1 \rfloor} (Q(n+1) v_{n+1} - P(n+1, q^{n+1}) v_n) = 0.$$

Учитывая (3.5), последнее соотношение можно переписать в виде

$$\begin{aligned} p_d v_{l,n} &= q^{-d(n+1)} \prod_{k=0}^{l-1} \prod_{j=1}^m \mathcal{A}_{d_0-1-k,j}^{s_j+h+\lfloor kg_1 \rfloor} (Q(n+1) v_{n+1}) \\ &\quad - \sum_{\nu=1}^d q^{-\nu(n+1)} \prod_{k=0}^{l-1} \prod_{j=1}^m \mathcal{A}_{d_0-1+\nu-d-k,j}^{s_j+h+\lfloor kg_1 \rfloor} (p_{d-\nu}(n+1) v_n). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Оценим каждое слагаемое правой части.

Пусть $1 \leq \nu \leq d$. Сначала оценим

$$\left| \prod_{k=\nu}^{l-1} \prod_{j=1}^m \mathcal{A}_{d_0-1+\nu-d-k,j}^{s_j+h+\lfloor kg_1 \rfloor} (p_{d-\nu}(n+1)v_n) \right|_w = \left| \prod_{k=0}^{l-\nu-1} \prod_{j=1}^m \mathcal{A}_{d_0-1-d-k,j}^{s_j+h+\lfloor (k+\nu)g_1 \rfloor} (p_{d-\nu}(n+1)v_n) \right|_w$$

при $n \geq (s+mh)(l-\nu) + m \sum_{k=\nu}^{l-1} \lfloor kg_1 \rfloor$, если $p_{d-\nu}(x) \neq 0$ (в этом случае $s' = s$). Поскольку $\deg p_{d-\nu}(x) \leq \lfloor \nu g_1 \rfloor$, то с помощью леммы 2.2 получаем

$$\begin{aligned} & \prod_{k=0}^{l-\nu-1} \prod_{j=1}^m \mathcal{A}_{d_0-1-d-k,j}^{s_j+h+\lfloor (k+\nu)g_1 \rfloor} (p_{d-\nu}(n+1)v_n) \\ &= \sum_{\nu_{k,j}} \prod_{k=0}^{l-\nu-1} \prod_{j=1}^m \binom{s_j+h+\lfloor (k+\nu)g_1 \rfloor}{\nu_{k,j}} (\alpha_j q^{d_0-1-d-k})^{\nu_{k,j}} \cdot \mathcal{D}_1^N(p_{d-\nu}(n+1)) \\ & \quad \times \prod_{k=0}^{l-\nu-1} \prod_{j=1}^m \mathcal{A}_{d_0-1-d-k,j}^{\lfloor (k+\nu)g_1 \rfloor - \lfloor kg_1 \rfloor - \nu_{k,j}} (v_{l-\nu, n-N}), \end{aligned} \quad (3.7)$$

где суммирование производится по всем наборам чисел $\nu_{k,j} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $0 \leq k \leq l-\nu-1$, $1 \leq j \leq m$, удовлетворяющих неравенству $N := \sum_{k,j} \nu_{k,j} \leq \lfloor \nu g_1 \rfloor$.

Заметим, что если для последовательности $\xi(n) \in \mathbb{C}_w$ при $n \geq n_0$ выполнено неравенство $|\xi(n)|_w \leq \eta(n)$, то для произвольного $a \in \mathbb{C}_w$ при $n \geq n_0 + 1$ справедливо

$$|\mathcal{D}_a(\xi(n))|_w \leq \mathcal{D}_{-|a|_w}(\eta(n)) \leq (1 + |a|_w) \max\{\eta(n); \eta(n-1)\}. \quad (3.8)$$

Учитывая условия леммы и соотношения (2.4), (3.8), имеем

$$\begin{aligned} & \left| \prod_{k=0}^{l-\nu-1} \prod_{j=1}^m \mathcal{A}_{d_0-1-d-k,j}^{\lfloor (k+\nu)g_1 \rfloor - \lfloor kg_1 \rfloor - \nu_{k,j}} (v_{l-\nu, n-N}) \right|_w \\ & \leq \prod_{k=0}^{l-\nu-1} \prod_{j=1}^m \mathcal{D}_{-|\alpha_j q^{d_0-1-d-k}|_w}^{\lfloor (k+\nu)g_1 \rfloor - \lfloor kg_1 \rfloor - \nu_{k,j}} ((n+1)^{(l-\nu)g_1} \\ & \quad \times |q|_w^{-(l-\nu)(n-N)+s(l-\nu)^2/2+mg_1(l-\nu)^3/6+an+b}) \\ & = |q|_w^{-(l-\nu)(n-N)+s(l-\nu)^2/2+mg_1(l-\nu)^3/6+an+b} \\ & \quad \times \prod_{k=0}^{l-\nu-1} \prod_{j=1}^m \mathcal{D}_{-|\alpha_j|_w |q|_w^{l-\nu-a+d_0-1-d-k}}^{\lfloor (k+\nu)g_1 \rfloor - \lfloor kg_1 \rfloor - \nu_{k,j}} ((n+1)^{(l-\nu)g_1}) \\ & \leq (n+1)^{(l-\nu)g_1} |q|_w^{-(l-\nu)(n-N)+s(l-\nu)^2/2+mg_1(l-\nu)^3/6+an+b} \\ & \quad \times \prod_{k=0}^{l-\nu-1} \prod_{j=1}^m (1 + |\alpha_j|_w |q|_w^{l-\nu-a+d_0-1-d-k})^{\lfloor (k+\nu)g_1 \rfloor - \lfloor kg_1 \rfloor}. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{l-\nu-1} (l-\nu-k)(\lfloor (k+\nu)g_1 \rfloor - \lfloor kg_1 \rfloor) &= \sum_{k=\nu}^{l-1} (l-k)\lfloor kg_1 \rfloor - \sum_{k=0}^{l-\nu-1} (l-\nu-k)\lfloor kg_1 \rfloor \\
 &= \nu \sum_{k=0}^{l-\nu-1} \lfloor kg_1 \rfloor + \sum_{k=l-\nu}^{l-1} (l-k)\lfloor kg_1 \rfloor - \sum_{k=0}^{\nu-1} (l-k)\lfloor kg_1 \rfloor \leq \nu g_1 \sum_{k=0}^{l-1} k \leq \frac{\nu g_1 l^2}{2}, \\
 \sum_{k=0}^{l-\nu-1} (\lfloor (k+\nu)g_1 \rfloor - \lfloor kg_1 \rfloor) &= \left(\sum_{k=l-\nu}^{l-1} - \sum_{k=0}^{\nu-1} \right) \lfloor kg_1 \rfloor \leq \nu l g_1,
 \end{aligned}$$

то выполнено неравенство

$$\prod_{k=0}^{l-\nu-1} \prod_{j=1}^m (1 + |\alpha_j|_w |q|_w^{l-\nu-a+d_0-1-d-k})^{\lfloor (k+\nu)g_1 \rfloor - \lfloor kg_1 \rfloor} \leq |q|_w^{m g_1 \nu l^2 / 2 + c_1 g_1 l},$$

поэтому имеем

$$\begin{aligned}
 &\left| \prod_{k=0}^{l-\nu-1} \prod_{j=1}^m \mathcal{A}_{d_0-1-d-k,j}^{\lfloor (k+\nu)g_1 \rfloor - \lfloor kg_1 \rfloor - \nu_{k,j}} (v_{l-\nu, n-N}) \right|_w \\
 &\leq (n+1)^{(l-\nu)g_1} |q|_w^{-(l-\nu)n + s(l-\nu)^2/2 + m g_1 l^3/6 + a n + b + c_2 g_1 l}.
 \end{aligned}$$

Учитывая неравенство

$$|\mathcal{D}_1^N(p_{d-\nu}(n+1))|_w \leq 2^N c_3 (n+1)^{\nu g_1},$$

из соотношения (3.7) получаем

$$\begin{aligned}
 &\left| \prod_{k=0}^{l-\nu-1} \prod_{j=1}^m \mathcal{A}_{d_0-1-d-k,j}^{s_j + h + \lfloor (k+\nu)g_1 \rfloor} (p_{d-\nu}(n+1)v_n) \right|_w \\
 &\leq c_3 (n+1)^{l g_1} |q|_w^{-(l-\nu)n + s(l-\nu)^2/2 + m g_1 l^3/6 + a n + b + c_2 g_1 l} \\
 &\quad \times \prod_{k=0}^{l-\nu-1} \prod_{j=1}^m (1 + 2|\alpha_j|_w |q|_w^{d_0-1-d-k})^{s_j + h + \lfloor (k+\nu)g_1 \rfloor} \\
 &\leq (n+1)^{l g_1} |q|_w^{-(l-\nu)n + s(l-\nu)^2/2 + m g_1 l^3/6 + a n + b + c_2 g_1 l + c_4}.
 \end{aligned}$$

Поэтому, учитывая (2.4) и (3.8), при $n \geq (s + m h)l + m \sum_{k=0}^{l-1} \lfloor kg_1 \rfloor$ окончательно имеем

$$\begin{aligned}
 &\left| q^{-\nu(n+1)} \prod_{k=0}^{l-1} \prod_{j=1}^m \mathcal{A}_{d_0-1+\nu-d-k,j}^{s_j + h + \lfloor kg_1 \rfloor} (p_{d-\nu}(n+1)v_n) \right|_w \\
 &\leq |q|_w^{-\nu n} \prod_{k=0}^{\nu-1} \prod_{j=1}^m \mathcal{D}_{-|\alpha_j|_w}^{s_j + h + \lfloor kg_1 \rfloor} |q|_w^{d_0-1+\nu-d-k} ((n+1)^{l g_1} \\
 &\quad \times |q|_w^{-(l-\nu)n + s(l-\nu)^2/2 + m g_1 l^3/6 + a n + b + c_2 g_1 l + c_4})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= |q|_w^{-ln+s(l-\nu)^2/2+mg_1l^3/6+an+b+c_2g_1l+c_4} \\
&\quad \times \prod_{k=0}^{\nu-1} \prod_{j=1}^m \mathcal{D}_{-|\alpha_j|_w |q|_w^{d_0-1+l-a-d-k}}^{s_j+h+\lfloor kg_1 \rfloor} ((n+1)^{lg_1}) \\
&\leq (n+1)^{lg_1} |q|_w^{-ln+sl^2/2+mg_1l^3/6+an+b+c_5g_1l+c_5}
\end{aligned}$$

(в последнем переходе мы учли, что $h \leq dg_1$).

Аналогично получаем

$$\begin{aligned}
&\left| q^{-d(n+1)} \prod_{k=0}^{l-1} \prod_{j=1}^m \mathcal{A}_{d_0-1-k,j}^{s_j+h+\lfloor kg_1 \rfloor} (Q(n+1)v_{n+1}) \right|_w \\
&\leq |q|_w^{-l(n+1)+s'(l-d)^2/2+mg_1l^3/6+a(n+1)+b+c_6g_1l+c_6} \\
&\quad \times \prod_{k=0}^{d-1} \prod_{j=1}^m \mathcal{D}_{-|\alpha_j|_w |q|_w^{d_0-1+l-a-d-k}}^{s_j+h+\lfloor kg_1 \rfloor} ((n+2)^{lg_1}) \\
&\leq (n+2)^{lg_1} |q|_w^{-ln+s'l^2/2+mg_1l^3/6+an+b+a+c_7g_1l+c_7} \\
&\leq (n+1)^{lg_1} |q|_w^{-ln+s'l^2/2+mg_1l^3/6+an+b+a+c_8g_1l+c_8}.
\end{aligned}$$

Учитывая (3.6), получаем требуемое. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.2. Пусть $\bar{\omega} = (\omega_0, \bar{\omega}_1) = (\omega_0, \omega_{j,k,\sigma}) \in \mathbb{C}_w^{1+\sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{d_0-1} s_{j,k}}$ удовлетворяет условию

$$\omega_0 + \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{d_0-1} \sum_{\sigma=0}^{s_{j,k}-1} \omega_{j,k,\sigma} f^{(\sigma)}(\alpha_j q^k) = 0.$$

Тогда при $l \geq 0$, $n \geq (s+mh)l + m \sum_{k=0}^{l-1} \lfloor kg_1 \rfloor$ справедливо неравенство

$$|v_{l,n}(\bar{\omega})|_w \leq |\bar{\omega}_1|_w |q|_w^{-ln+s'l^2/2+mg_1l^3/6+c(n+1)}$$

с некоторой положительной постоянной c , зависящей только от чисел $q, m, \alpha_j, d_0, s_{j,k}$ и многочленов $P(x, y), Q(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (3.1) следует, что

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{d_0-1} \sum_{\sigma=0}^{s_{j,k}-1} \omega_{j,k,\sigma} f^{(\sigma)}(\alpha_j q^k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n(q, \bar{\omega})}{\Pi_n(q)},$$

поэтому из (3.2) получаем

$$v_n(q, \bar{\omega}) = - \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{u_k(q, \bar{\omega})}{\prod_{j=n+1}^k P(j, q^j)/Q(j)}. \quad (3.9)$$

В силу (3.1) при всех $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ выполнено неравенство $|u_n(q, \bar{\omega})|_w \leq |\bar{\omega}_1|_w c_0^n$ с некоторой постоянной $c_0 > 1$, поэтому из (3.9) при $n \geq 0$ получаем

$$|v_n(q, \bar{\omega})|_w \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{c_1 |\bar{\omega}_1|_w c_0^k}{(2c_0)^{k-n}} = c_1 |\bar{\omega}_1|_w c_0^n$$

с некоторой постоянной $c_1 > 0$.

Используя (3.8), получаем, что при $0 \leq \nu \leq d_0$ и $n \geq (s+mh)\nu + m \sum_{k=0}^{\nu-1} \lfloor kg_1 \rfloor$ выполнено

$$|v_{\nu,n}(\bar{\omega})|_w \leq |\bar{\omega}_1|_w (n+1)^{\nu g_1} |q|_w^{-\nu n + s' \nu^2/2 + m g_1 \nu^3/6 + a n + a}$$

с некоторой положительной постоянной a . С помощью индукции по l из леммы 3.1 получаем

$$|v_{l,n}(\bar{\omega})|_w \leq |\bar{\omega}_1|_w (n+1)^{l g_1} |q|_w^{-l n + s' l^2/2 + m g_1 l^3/6 + a n + a + \sum_{k=1}^l (a + c' + c' g_1 k)},$$

где $c' > 0$ – постоянная леммы 3.1. Учитывая неравенство $(s+mh)l + m \sum_{k=0}^{l-1} \lfloor kg_1 \rfloor \leq n$, получаем требуемое. Лемма доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть $\bar{\omega} = (\omega_0, \bar{\omega}_1) = (\omega_0, \omega_{j,k,\sigma}) \in \mathbb{C}_w^{1 + \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{d_0-1} s_{j,k}}$ удовлетворяет условию

$$\omega_0 + \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{d_0-1} \sum_{\sigma=0}^{s_{j,k}-1} \omega_{j,k,\sigma} f^{(\sigma)}(\alpha_j q^k) = 0.$$

Если $p_d(x) = p_d \in \mathbb{K}^*$, то для определителя Ганкеля (3.4) при $n \rightarrow \infty$ справедлива асимптотическая оценка (равномерная по $\bar{\omega}$)

$$|V_n(q, \bar{\omega})|_w \leq \begin{cases} |\bar{\omega}_1|_w^n |q|_w^{-\alpha n^3 + O(n^2)}, & \text{если } g_1 = 0, \\ |\bar{\omega}_1|_w^n |q|_w^{-\mathbf{c}_1 n^{5/2} + O(n^2)}, & \text{если } g_1 > 0, \end{cases}$$

где α , g_1 и $\mathbf{c}_1$ определены в (1.9), (1.16) и (1.20) соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $0 \leq i \leq n-1$ положим

$$l_i = \max \left\{ l \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : (s+mh)l + m \sum_{k=0}^{l-1} \lfloor kg_1 \rfloor \leq i \right\}.$$

Тогда имеем

$$V_n(q, \bar{\omega}) = \det(v_{l_i, i+j}(\bar{\omega}))_{i,j=0}^{n-1},$$

поскольку последний определитель получается из $V_n(q, \bar{\omega})$ с помощью элементарных преобразований над строками. Учитывая лемму 3.2, получаем

$$\begin{aligned} |V_n(q, \bar{\omega})|_w &\leq n! \max_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{i=0}^{n-1} |v_{l_i, i+\sigma(i)}(\bar{\omega})|_w \\ &\leq |\bar{\omega}_1|_w^n |q|_w^{\max_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sum_{i=0}^{n-1} (-l_i(i+\sigma(i)) + s' l_i^2/2 + m g_1 l_i^3/6) + O(n^2)}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

где $\mathfrak{S}_n$ – группа подстановок множества $\{0, 1, \dots, n-1\}$.

Поскольку последовательность l_i неубывающая, то из перестановочного неравенства (см. [13, теорема 368]) следует, что максимум в правой части (3.10) достигается на подстановке $\sigma(i) = n-1-i$. Если $g_1 = 0$, то $l_i = i/s + O(1)$ и

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left(-(n-1)l_i + \frac{s' l_i^2}{2} \right) = -\alpha n^3 + O(n^2).$$

Если $g_1 > 0$, то $l_i = \sqrt{\frac{2i}{mg_1}} + O(1)$ и

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left(-(n-1)l_i + \frac{sl_i^2}{2} + \frac{mg_1 l_i^3}{6} \right) = -\frac{8}{15} \sqrt{\frac{2}{mg_1}} n^{5/2} + O(n^2).$$

С учетом (3.10) получаем требуемое. Предложение доказано.

3.2. Факторизация V_n . Часть I. В этом пункте мы предполагаем, что многочлены $p_0(x) = p_0$ и $Q(x)$ не зависят от x ; без потери общности будем считать, что $Q(x) = 1$. Положим

$$\delta_0 = \min\{1 \leq \nu \leq d \mid p_\nu(x) \neq 0\}, \quad s'' = s + \varepsilon_0 + \frac{1 - \varepsilon_0}{\delta_0},$$

где s и ε_0 определены в (1.8) и (1.18) соответственно.

Для $\nu \in \mathbb{Z}$, $0 \leq j \leq m$ определим разностный оператор

$$\mathcal{A}_{\nu,j} = \begin{cases} \mathcal{D}_{p_0 z^\nu} & \text{при } j = 0, \\ \mathcal{D}_{\alpha_j z^\nu} & \text{при } 1 \leq j \leq m, \end{cases}$$

где операторы $\mathcal{D}_a$ определены в (2.2). Заметим, что если $p_0 = 0$, то $\mathcal{A}_{\nu,0} = \mathcal{I}$. В силу тождества (2.4) при $\sigma \in \mathbb{Z}$ справедливо

$$\mathcal{A}_{\nu,j}(z^{\sigma n} \xi(n)) = z^{\sigma n} \mathcal{A}_{\nu-\sigma,j}(\xi(n)). \quad (3.11)$$

При $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $n \geq (s + \varepsilon_0)l + (m + \varepsilon_0) \sum_{k=0}^{l-1} \lfloor k g_2 \rfloor$, где g_2 определено равенством (1.17), положим

$$v_{l,n} = v_{l,n}(z, \bar{x}) = \prod_{k=0}^{l-1} \prod_{j=0}^m \mathcal{A}_{k,j}^{s_j + \lfloor k g_2 \rfloor}(v_n) \in \mathbb{C}_w[\bar{x}][z], \quad s_0 := 1.$$

Для формального ряда Лорана $\xi(z) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} a_\nu z^\nu \neq 0$ будем обозначать через $\text{ord}_z \xi$ его порядок (по z):

$$\text{ord}_z \xi = \min\{\nu \in \mathbb{Z} \mid a_\nu \neq 0\}.$$

Кроме того, положим $\text{ord}_z 0 = +\infty$.

ЛЕММА 3.3. *При $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $n \geq (s + \varepsilon_0)l + (m + \varepsilon_0) \sum_{k=0}^{l-1} \lfloor k g_2 \rfloor$ имеем*

$$\text{ord}_z v_{l,n} \geq ln - s'' \binom{l+1}{2} - (m + \varepsilon_0) \sum_{k=0}^{l-1} (l-k) \lfloor k g_2 \rfloor - c$$

с некоторой постоянной $c > 0$, зависящей только от чисел m , d_0 , $s_{j,k}$ и многочлена $P(x, y)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем индукцию по l . При $l = 0$ утверждение тривиально.

Пусть $l \geq 1$. Допустим сначала, что $n \geq (s + \varepsilon_0)l + (m + \varepsilon_0) \sum_{k=0}^{l-1} \lfloor k g_2 \rfloor + 1 - \varepsilon_0$. Соотношение (3.3) можно переписать в виде

$$\mathcal{A}_{0,0}(v_n) = \sum_{\nu=\delta_0}^d p_\nu(n) z^{\nu n} v_{n-1} + u_n, \quad n \geq 1,$$

откуда получаем (при $n \geq (s + \varepsilon_0)l + (m + \varepsilon_0) \sum_{k=0}^{l-1} \lfloor kg_2 \rfloor + 1 - \varepsilon_0$)

$$v_{l,n} = \sum_{\nu=\delta_0}^d \prod'_{k=0}^{l-1} \prod_{j=0}^m \mathcal{A}_{k,j}^{s_j + \lfloor kg_2 \rfloor} (p_\nu(n) z^{\nu n} v_{n-1}) + \prod'_{k=0}^{l-1} \prod_{j=0}^m \mathcal{A}_{k,j}^{s_j + \lfloor kg_2 \rfloor} (u_n),$$

где штрих означает, что при $k = 0$ мы полагаем $s_0 = 0$. Следовательно,

$$\text{ord}_z v_{l,n} \geq \min \left\{ \min_{\delta_0 \leq \nu \leq d} \text{ord}_z \prod'_{k=0}^{l-1} \prod_{j=0}^m \mathcal{A}_{k,j}^{s_j + \lfloor kg_2 \rfloor} (p_\nu(n) z^{\nu n} v_{n-1}); \right. \\ \left. \text{ord}_z \prod'_{k=0}^{l-1} \prod_{j=0}^m \mathcal{A}_{k,j}^{s_j + \lfloor kg_2 \rfloor} (u_n) \right\}. \quad (3.12)$$

В случае $p_0 = 0$ произведение по j достаточно рассматривать в пределах от 1 до m .

Заметим, что если для последовательности $\xi_n(z) \in \mathbb{F}((z))$, где $\mathbb{F}$ – некоторое поле, при $n \geq n_0$ выполнено неравенство $\text{ord}_z \xi_n \geq an + b$ с некоторыми $a, b \in \mathbb{R}$ (не зависящими от n), то для любых $c \in \mathbb{F}$ и $\nu \in \mathbb{Z}$, $\nu \leq a$, при $n \geq n_0 + 1$ справедливо

$$\text{ord}_z \mathcal{D}_{cz^\nu}(\xi_n) \geq \min\{an + b; a(n-1) + b + \nu\} = a(n-1) + b + \nu. \quad (3.13)$$

Обозначим

$$u_{l,n} = \sum_{j=1}^m \sum_{l \leq k < d_0} \sum_{\sigma=0}^{s_{j,k}-1} \sigma! \binom{n}{\sigma} (\alpha_j z^k)^{n-\sigma} x_{j,k,\sigma}.$$

Если $l \geq d_0$, то $u_{l,n} = 0$; кроме того, если $l < d_0$, то $\text{ord}_z u_{l,n} \geq ln + O(1)$. Поэтому с учетом (2.3), (3.1) и (3.13) получаем

$$\text{ord}_z \prod'_{k=0}^{l-1} \prod_{j=0}^m \mathcal{A}_{k,j}^{s_j + \lfloor kg_2 \rfloor} (u_n) = \text{ord}_z \prod'_{k=0}^{l-1} \prod_{j=0}^m \mathcal{A}_{k,j}^{s_j + \lfloor kg_2 \rfloor} (u_{l,n}) \geq ln - c.$$

Пусть $l \leq \nu \leq d$. Поскольку $\text{ord}_z (p_\nu(n) z^{\nu n} v_{n-1}) \geq \nu n \geq ln$ при $n \geq 1$, то с учетом (3.13) и неравенства $l \leq d$ имеем

$$\text{ord}_z \prod'_{k=0}^{l-1} \prod_{j=0}^m \mathcal{A}_{k,j}^{s_j + \lfloor kg_2 \rfloor} (p_\nu(n) z^{\nu n} v_{n-1}) \geq ln - c.$$

Пусть $\delta_0 \leq \nu < l$. Оценим сначала

$$\text{ord}_z \prod_{k=\nu}^{l-1} \prod_{j=0}^m \mathcal{A}_{k,j}^{s_j + \lfloor kg_2 \rfloor} (p_\nu(n) z^{\nu n} v_{n-1}) \\ = \nu n + \text{ord}_z \prod_{k=0}^{l-\nu-1} \prod_{j=0}^m \mathcal{A}_{k,j}^{s_j + \lfloor (k+\nu)g_2 \rfloor} (p_\nu(n) v_{n-1}) \quad (3.14)$$

при $n \geq 1 + (s + \varepsilon_0)(l - \nu) + (m + \varepsilon_0) \sum_{k=\nu}^{l-1} \lfloor kg_2 \rfloor$ (мы воспользовались равенством (3.11)). Учитывая лемму 2.2, получаем

$$\begin{aligned} \text{ord}_z \prod_{k=0}^{l-\nu-1} \prod_{j=0}^m \mathcal{A}_{k,j}^{s_j + \lfloor (k+\nu)g_2 \rfloor} (p_\nu(n)v_{n-1}) \\ \geq \min_{\nu_{k,j}} \left(\sum_{k,j} k\nu_{k,j} + \text{ord}_z \prod_{k,j} \mathcal{A}_{k,j}^{\lfloor (k+\nu)g_2 \rfloor - \lfloor kg_2 \rfloor - \nu_{k,j}} (v_{l-\nu, n-1-N}) \right), \end{aligned} \quad (3.15)$$

где минимум берется по всем наборам целых чисел $\nu_{k,j} \geq 0$, $0 \leq k \leq l - \nu - 1$, $0 \leq j \leq m$, удовлетворяющих неравенству $N := \sum_{k,j} \nu_{k,j} \leq \lfloor \nu g_2 \rfloor$; если $p_0 = 0$, то индекс j меняется в пределах $1 \leq j \leq m$.

Учитывая предположение индукции, повторным применением (3.13) получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k,j} k\nu_{k,j} + \text{ord}_z \prod_{k,j} \mathcal{A}_{k,j}^{\lfloor (k+\nu)g_2 \rfloor - \lfloor kg_2 \rfloor - \nu_{k,j}} (v_{l-\nu, n-1-N}) \\ \geq \sum_{k,j} k\nu_{k,j} + (l - \nu) \left(n - 1 - (m + \varepsilon_0) \sum_{k=0}^{l-\nu-1} (\lfloor (k + \nu)g_2 \rfloor - \lfloor kg_2 \rfloor) \right) \\ - s'' \binom{l - \nu + 1}{2} - (m + \varepsilon_0) \sum_{k=0}^{l-\nu-1} (l - \nu - k) \lfloor kg_2 \rfloor - c \\ + \sum_{k=0}^{l-\nu-1} \left((m + \varepsilon_0) (\lfloor (k + \nu)g_2 \rfloor - \lfloor kg_2 \rfloor) - \sum_j \nu_{k,j} \right) k \\ = (l - \nu)n - s'' \binom{l - \nu + 1}{2} - (l - \nu) - (m + \varepsilon_0) \sum_{k=\nu}^{l-1} (l - k) \lfloor kg_2 \rfloor - c. \end{aligned}$$

Поэтому с учетом (3.14) и (3.15) при

$$n \geq (s + \varepsilon_0)l + (m + \varepsilon_0) \sum_{k=0}^{l-1} \lfloor kg_2 \rfloor + 1 - \varepsilon_0$$

получаем

$$\begin{aligned} \text{ord}_z \prod_{k=0}^{l-1} \prod_{j=0}^m \mathcal{A}_{k,j}^{s_j + \lfloor kg_2 \rfloor} (p_\nu(n)z^{\nu n}v_{n-1}) \\ = \text{ord}_z \prod_{k=0}^{\nu-1} \prod_{j=0}^m \mathcal{A}_{k,j}^{s_j + \lfloor kg_2 \rfloor} \left(\prod_{k=\nu}^{l-1} \prod_{j=0}^m \mathcal{A}_{k,j}^{s_j + \lfloor kg_2 \rfloor} (p_\nu(n)z^{\nu n}v_{n-1}) \right) \\ \geq l \left(n + \varepsilon_0 - (s + \varepsilon_0)\nu - (m + \varepsilon_0) \sum_{k=0}^{\nu-1} \lfloor kg_2 \rfloor \right) - s'' \binom{l - \nu + 1}{2} - (l - \nu) \\ - (m + \varepsilon_0) \sum_{k=\nu}^{l-1} (l - k) \lfloor kg_2 \rfloor - c + \sum_{k=0}^{\nu-1} (s + \varepsilon_0 + (m + \varepsilon_0) \lfloor kg_2 \rfloor) k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= ln - s'' \binom{l+1}{2} - (m + \varepsilon_0) \sum_{k=0}^{l-1} (l-k) \lfloor kg_2 \rfloor - c \\
&\quad + \frac{(1 - \varepsilon_0)(2l - \nu)(\nu - \delta_0) + (\delta_0 + 1 + (\delta_0 - 1)\varepsilon_0)\nu}{2\delta_0} \\
&\geq ln - s'' \binom{l+1}{2} - (m + \varepsilon_0) \sum_{k=0}^{l-1} (l-k) \lfloor kg_2 \rfloor - c.
\end{aligned}$$

Таким образом, при $n \geq (s + \varepsilon_0)l + (m + \varepsilon_0) \sum_{k=0}^{l-1} \lfloor kg_2 \rfloor + 1 - \varepsilon_0$ (l фиксировано) требуемое неравенство доказано. Если $\varepsilon_0 = 0$ и $n = sl + m \sum_{k=0}^{l-1} \lfloor kg_2 \rfloor$, то с учетом (3.13) и предположения индукции получаем

$$\begin{aligned}
\text{ord}_z v_{l,n} &= \text{ord}_z \prod_{j=1}^m \mathcal{A}_{l-1,j}^{s_j + \lfloor (l-1)g_2 \rfloor} (v_{l-1,n}) \\
&\geq (l-1)n - s'' \binom{l}{2} - m \sum_{k=0}^{l-2} (l-1-k) \lfloor kg_2 \rfloor - c \\
&\geq ln - s'' \binom{l+1}{2} - m \sum_{k=0}^{l-1} (l-k) \lfloor kg_2 \rfloor - c.
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Если многочлены $p_0(x)$ и $Q(x)$ не зависят от x , то при $n \rightarrow \infty$ для порядка определителя Ганкеля (3.4) имеем асимптотическую оценку

$$\text{ord}_z V_n \geq \begin{cases} \beta n^3 + O(n^2), & \text{если } g_2 = 0, \\ c_2 n^{5/2} + O(n^2), & \text{если } g_2 > 0, \end{cases}$$

где β , g_2 и c_2 определены в (1.10), (1.17) и (1.21) соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $0 \leq i \leq n-1$ положим

$$l_i = \begin{cases} \min \left\{ \left\lfloor \frac{i}{s + \varepsilon_0} \right\rfloor; \left\lfloor \frac{n}{s''} \right\rfloor \right\}, & \text{если } g_2 = 0, \\ \max \left\{ l \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : (s + \varepsilon_0)l + (m + \varepsilon_0) \sum_{k=0}^{l-1} \lfloor kg_2 \rfloor \leq i \right\}, & \text{если } g_2 > 0. \end{cases}$$

Тогда имеем

$$V_n = \det(v_{l_i, i+j})_{i,j=0}^{n-1},$$

поскольку последний определитель получается из V_n с помощью элементарных преобразований над строками. С учетом леммы 3.3 и перестановочного неравенства получаем

$$\begin{aligned}
\text{ord}_z V_n &\geq \min_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sum_{i=0}^{n-1} \text{ord}_z v_{l_i, i+\sigma(i)} \\
&\geq \min_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(l_i(i + \sigma(i)) - \frac{s'' l_i^2}{2} - (m + \varepsilon_0) \frac{g_2 l_i^3}{6} \right) + O(n^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{n-1} \left(l_i(n-1) - \frac{s''l_i^2}{2} - (m + \varepsilon_0) \frac{g_2 l_i^3}{6} \right) + O(n^2) \\
&= \begin{cases} \beta n^3 + O(n^2), & \text{если } g_2 = 0, \\ c_2 n^{5/2} + O(n^2), & \text{если } g_2 > 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Предложение доказано.

3.3. Факторизация V_n . Часть II. В этом пункте мы будем предполагать, что $P(x, y) = P(y) \in \mathbb{K}[y]$, $Q(x) = 1$.

Фиксируем $l \in \mathbb{Z}_{>0}$ и произвольный примитивный корень степени l из единицы ζ . Положим

$$\delta = \delta_l = \text{ord}_{y=1} \prod_{k=0}^{l-1} P(\zeta^k y), \quad (3.16)$$

$$A = A_l = \prod_{k=0}^{l-1} P(\zeta^k); \quad (3.17)$$

δ также можно определить как число нулей (с учетом кратностей) многочлена $P(y)$, являющихся корнями l -й степени из единицы. Очевидно, что A и δ не зависят от выбора корня ζ .

При $0 \leq j \leq m$ определим разностный оператор

$$\mathcal{F}_j = \begin{cases} \mathcal{I} - A\mathcal{B}^l & \text{при } j = 0, \\ \mathcal{I} - \alpha_j^l \mathcal{B}^l & \text{при } 1 \leq j \leq m, \end{cases}$$

где $\mathcal{I}$ и $\mathcal{B}$ имеют прежний смысл. Заметим, что если $\delta > 0$ (т.е. $A = 0$), то $\mathcal{F}_0 = \mathcal{I}$.

При $t, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ положим

$$v_n^{(t)} = v_n^{(t)}(\bar{x}) = \frac{\partial^t v_n}{\partial z^t} \Big|_{z=\zeta} \in \mathbb{C}_w[\bar{x}].$$

ЛЕММА 3.4. Пусть $t, t_0, \dots, t_m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, причем выполняются неравенства

$$\begin{aligned}
t_0 &\geq 2t + 1, \\
t_j &\geq s_j + t, \quad 1 \leq j \leq m.
\end{aligned}$$

Тогда при $n \geq n_0 l$ имеем

$$\prod_{j=0}^m \mathcal{F}_j^{t_j}(v_n^{(t)}) = 0,$$

где

$$n_0 = \begin{cases} \sum_{j=0}^m t_j, & \text{если } \delta = 0, \\ \sum_{j=1}^m t_j + \lfloor t/\delta \rfloor + 1, & \text{если } \delta > 0. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $n \in \mathbb{Z}$ положим $P_j(n, z) = \prod_{k=0}^{j-1} P(z^{n-k})$. Заметим, что при любом $n \geq l$ справедливо

$$\text{ord}_{z=\zeta} P_l(n, z) = \delta, \quad (3.18)$$

где δ определено в (3.16). Из (3.3) следует, что при $n \geq l$ выполнено

$$v_n = P_l(n, z)v_{n-l} + \sum_{j=0}^{l-1} P_j(n, z)u_{n-j}. \quad (3.19)$$

Далее, для $j, t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $n \in \mathbb{Z}$ положим

$$u_n^{(t)} = u_n^{(t)}(\bar{x}) = \left. \frac{\partial^t u_n}{\partial z^t} \right|_{z=\zeta}, \quad P_j^{(t)}(n) = \left. \frac{d^t}{dz^t} P_j(n, z) \right|_{z=\zeta}.$$

Как было показано в [6, доказательство предложения 4], при произвольных $j, t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ последовательность $\{P_j^{(t)}(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ является квазимногочленом степени не выше t с квазипериодом l (см. [14, § 4.4]), т. е. имеет вид $\sum_{\nu=0}^t a_\nu(n)n^\nu$, где при каждом ν последовательность $\{a_\nu(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ является l -периодической.

Из (2.3) следует, что для произвольного квазимногочлена $R(n)$ степени не выше $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ с квазипериодом l выполнено

$$(\mathcal{I} - \mathcal{B}^l)^{t+1}(R(n)) = 0, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad (3.20)$$

кроме того, с учетом (3.1) при $\tau \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ имеем

$$\prod_{j=1}^m \mathcal{F}_j^{s_j+t+\tau}(R(n)u_n^{(\tau)}) = 0, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (3.21)$$

Заметим, что последовательность $\{P_l^{(0)}(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ постоянна, а именно справедливо

$$P_l^{(0)}(n) = A, \quad (3.22)$$

где A определено в (3.17). Дифференцируя t раз по z в (3.19) и подставляя $z = \zeta$, с учетом (3.18) и (3.22) получаем

$$\mathcal{F}_0(v_n^{(t)}) = \sum_{\max\{1; \delta\} \leq \tau \leq t} \binom{t}{\tau} P_l^{(\tau)}(n) v_{n-l}^{(t-\tau)} + \sum_{j=0}^{l-1} \sum_{\tau=0}^t \binom{t}{\tau} P_j^{(\tau)}(n) u_{n-j}^{(t-\tau)}, \quad n \geq l. \quad (3.23)$$

Перейдем к доказательству леммы. Используем индукцию по t .

При $t < \max\{1; \delta\}$ утверждение следует непосредственно из (3.21) и (3.23).

Пусть $t \geq \max\{1; \delta\}$. Тогда из (3.21) и (3.23) получаем при $n \geq n_0 l$

$$\prod_{j=0}^m \mathcal{F}_j^{t_j}(v_n^{(t)}) = \sum_{\max\{1; \delta\} \leq \tau \leq t} \binom{t}{\tau} \mathcal{F}_0^{t_0-1} \prod_{j=1}^m \mathcal{F}_j^{t_j}(P_l^{(\tau)}(n) v_{n-l}^{(t-\tau)}),$$

поэтому достаточно доказать, что при $\max\{1; \delta\} \leq \tau \leq t$ и $n \geq n_0 l$ выполнено

$$\mathcal{F}_0^{t_0-1} \prod_{j=1}^m \mathcal{F}_j^{t_j}(P_l^{(\tau)}(n) v_{n-l}^{(t-\tau)}) = 0.$$

Аналогично доказательству тождества леммы 2.2 получаем

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}_0^{t_0-1} \prod_{j=1}^m \mathcal{F}_j^{t_j} (P_l^{(\tau)}(n) v_{n-l}^{(t-\tau)}) \\ &= \sum_{\nu_0=0}^{t_0-1} \sum_{\nu_1=0}^{t_1} \dots \sum_{\nu_m=0}^{t_m} \binom{t_0-1}{\nu_0} A^{\nu_0} \prod_{j=1}^m \binom{t_j}{\nu_j} \alpha_j^{\nu_j} \cdot (\mathcal{I} - \mathcal{B}^l)^N (P_l^{(\tau)}(n)) \\ & \quad \times \mathcal{F}_0^{t_0-1-\nu_0} \prod_{j=1}^m \mathcal{F}_j^{t_j-\nu_j} (v_{n-(N+1)l}^{(t-\tau)}), \end{aligned}$$

где $N := \sum_{j=0}^m \nu_j$; в случае $\delta > 0$ в сумме по ν_0 оставляем только слагаемое с $\nu_0 = 0$. Из (3.20) следует, что слагаемые, для которых $N > \tau$, равны нулю. Поскольку при $N \leq \tau$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned} t_0 - 1 - \nu_0 &\geq 2t - \tau \geq 2(t - \tau) + 1, \\ t_j - \nu_j &\geq s_j + t - \tau, \quad 1 \leq j \leq m, \end{aligned}$$

то из индукционного предположения следует, что все слагаемые с $N \leq \tau$ также равны нулю (при этом в случае $\delta > 0$ используются равенство $\nu_0 = 0$ и неравенство $\tau \geq \delta$). Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Если $\alpha_{j_1}^l = \alpha_{j_2}^l$ при некоторых $j_1 \neq j_2$, то порядок рекуррентного соотношения для $v_n^{(t)}$ можно понизить. Действительно, если, скажем, $s_{j_1} \geq s_{j_2}$, то в произведении (3.21) можно опустить множитель $\mathcal{F}_{j_2}^{s_{j_2}+t+\tau}$; соответствующим образом меняется и формулировка леммы 3.4. Поэтому в следующем предложении в этом случае можно положить $m-1$ и $s-s_{j_2}$ вместо m и s соответственно (см. также предложения 3.4 и 3.5). Более общий случай, когда $(\alpha_{j_1} q^{k_1})^l = (\alpha_{j_2} q^{k_2})^l$, можно свести к рассмотренному, “поправив” определение многочленов (3.1). А именно, обозначив $\beta_\nu = \alpha_{j_\nu} q^{k_\nu - k_0}$, $\nu = 1, 2$, при $k_0 = \max\{k_1; k_2\}$, достаточно в определении (3.1) заменить α_{j_ν} на $\beta_\nu z^{k_0 - k_\nu}$. В частности, если $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ и $\alpha_2 = -\alpha_1$, то для многочлена $P(y) = y-1$ можно взять

$$e_l(n) = \begin{cases} 2 \sum_{i=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{i}{2l} \right\rfloor, & \text{если } l \equiv 0 \pmod{2}, \\ 2 \sum_{i=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{i}{3l} \right\rfloor, & \text{если } l \equiv 1 \pmod{2}. \end{cases}$$

Используя асимптотические формулы

$$\sum_{\substack{l \leq x \\ l \equiv a \pmod{2}}} \varphi(l) = \frac{cx^2}{\pi^2} + O(x \log x), \quad c = \begin{cases} 1, & \text{если } a = 0, \\ 2, & \text{если } a = 1, \end{cases}$$

можно показать, что тогда справедливо асимптотическое соотношение (см. лемму 3.5 ниже)

$$\sum_{l \geq 1} e_l(n) \varphi(l) \sim \frac{17n^3}{324} \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

откуда следует справедливость замечания 1.2 (см. далее предложение 3.6 и п. 6.1).

При $t_0, \dots, t_m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ положим

$$v_{t_0, \dots, t_m, n} = v_{t_0, \dots, t_m, n}(z, \bar{x}) = \prod_{j=0}^m \mathcal{F}_j^{t_j}(v_n), \quad n \geq \begin{cases} \sum_{j=0}^m t_j l, & \text{если } \delta = 0, \\ \sum_{j=1}^m t_j l, & \text{если } \delta > 0. \end{cases}$$

Если числа $t, t_0, \dots, t_m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$ удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} t_0 &\geq 2t - 1, \\ t_j &\geq s_j + t - 1, \quad 1 \leq j \leq m, \\ n &\geq \begin{cases} \sum_{j=0}^m t_j l, & \text{если } \delta = 0, \\ \left(\sum_{j=1}^m t_j + \left\lfloor \frac{t-1}{\delta} \right\rfloor + 1 \right) l, & \text{если } \delta > 0, \end{cases} \end{aligned}$$

то согласно лемме 3.4 имеем

$$\frac{\partial^\tau}{\partial z^\tau} v_{t_0, \dots, t_m, n} \Big|_{z=\zeta} = \prod_{j=0}^m \mathcal{F}_j^{t_j}(v_n^{(\tau)}) = 0, \quad 0 \leq \tau < t$$

(если $\delta > 0$, то условия, налагаемые на t_0 , не нужны). Поскольку это выполнено при любом выборе корня ζ , при этих условиях получаем

$$\Phi_l(z)^t | v_{t_0, \dots, t_m, n}, \quad (3.24)$$

где

$$\Phi_l(z) = \prod_{\zeta} (z - \zeta) = \prod_{n|l} (z^n - 1)^{\mu(l/n)} \in \mathbb{Z}[z]$$

– круговой многочлен. Кроме того, (3.24) тривиально выполнено при $t = 0$, произвольных $t_0, \dots, t_m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ и допустимых n .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Для вещественных чисел $a > 0, b, x$ обозначим

$$L(a, b, x) = \max \{ \max \{ n \in \mathbb{Z} \mid \lfloor a(n-1) + b \rfloor \leq x \}; 0 \}. \quad (3.25)$$

Тогда при $n \geq 1$ для определителя Ганкеля (3.4) выполнено $\Phi_l(z)^{e_l(n)} | V_n$, где

$$e_l(n) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{n-1} \left(L\left(m+2, s+1, \frac{i}{l}\right) + L\left(m+2, s+2, \frac{i}{l}\right) \right), & \text{если } \delta = 0, \\ 2 \sum_{i=0}^{n-1} L\left(m + \frac{1}{\delta}, s+1, \frac{i}{l}\right), & \text{если } \delta > 0, \end{cases} \quad (3.26)$$

и $\delta = \delta_l$ определено в (3.16).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $0 \leq i \leq n-1$ положим

$$l_i = \begin{cases} L\left(m+2, s+1, \frac{i}{l}\right), & \text{если } \delta = 0, \\ L\left(m+\frac{1}{\delta}, s+1, \frac{i}{l}\right), & \text{если } \delta > 0, \end{cases}$$

$$\ell_i = \begin{cases} L\left(m+2, s+2, \frac{i}{l}\right), & \text{если } \delta = 0, \\ L\left(m+\frac{1}{\delta}, s+1, \frac{i}{l}\right), & \text{если } \delta > 0. \end{cases}$$

Далее, при $1 \leq j \leq m$ обозначим

$$l_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{если } l_i = 0, \\ s_j + l_i - 1, & \text{если } l_i > 0, \end{cases}$$

$$\ell_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{если } \ell_i = 0, \\ s_j + \ell_i - 1, & \text{если } \ell_i > 0. \end{cases}$$

Кроме того, обозначим

$$l_{i,0} = \begin{cases} \max\{2l_i - 1; 0\}, & \text{если } \delta = 0, \\ 0, & \text{если } \delta > 0, \end{cases}$$

$$\ell_{i,0} = \begin{cases} 2\ell_i, & \text{если } \delta = 0, \\ 0, & \text{если } \delta > 0. \end{cases}$$

Легко проверить, что при любом i справедливы неравенства

$$\sum_{j=0}^m l_{i,j} \leq \frac{i}{l}, \quad \sum_{j=0}^m \ell_{i,j} \leq \frac{i}{l},$$

поэтому с помощью элементарных преобразований над строками и столбцами определитель V_n можно привести к виду

$$V_n = \det(a_{i,j})_{i,j=0}^{n-1} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sign } \sigma \prod_{i=0}^{n-1} a_{i,\sigma(i)} \quad (3.27)$$

с элементами

$$a_{i,j} = v_{l_{i,0}+\ell_{j,0}, \dots, l_{i,m}+\ell_{j,m}, i+j}.$$

Далее, если $\delta > 0$ (так что $l_i = \ell_i$) и $l_i + l_j > 0$, то выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^m (l_{i,k} + l_{j,k}) + \left\lfloor \frac{l_i + l_j - 1}{\delta} \right\rfloor + 1 \leq \sum_{k=1}^m (l_{i,k} + l_{j,k}) + \left\lfloor \frac{l_i - 1}{\delta} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{l_j - 1}{\delta} \right\rfloor + 2 \leq \frac{i+j}{l},$$

поэтому в силу (3.24) получаем, что при любых i, j выполняется $\Phi_l(z)^{l_i+\ell_j} |a_{i,j}$. Учитывая (3.27), получаем требуемое. Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Из предложения 3.3 следует справедливость гипотезы, высказанной в [6, замечание 7], поскольку, как легко показать, при любых $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$ справедливо равенство

$$\prod_{l \geq 1} \Phi_l(z)^{e_l} = \prod_{l \geq 1} (z^l - 1)^{\tilde{e}_l},$$

где

$$e_l = \sum_{i=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{i}{ml} \right\rfloor, \quad \tilde{e}_l = \max\{n - ml; 0\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. В случае, когда $\max\{\delta_l; \max_{1 \leq j \leq m} s_j\} > 1$, величины $e_l(n)$, определенные в (3.26), можно увеличить (за счет лучшего выбора параметров в доказательстве предложения 3.3). Мы рассмотрим два частных случая, которые используются для доказательства следствий 1.2, 1.5.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. Если $\delta_l = 1$, $m = 1$, $s_1 = 2$, то в условии предложения 3.3 можно положить

$$e_l(n) = \begin{cases} 0, & \text{если } n \leq 3l, \\ \sum_{i=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{i}{l} \right\rfloor - n, & \text{если } n \geq 3l. \end{cases} \quad (3.28)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что $n > 3l$. При $0 \leq i < n$ положим

$$l_i = \left\lfloor \frac{i}{l} \right\rfloor, \quad l_{i,1} = \left\lfloor \frac{l_i + 1}{2} \right\rfloor.$$

Поскольку при любом i выполнено $l_{i,1} \leq i/l$, с помощью элементарных преобразований над строками и столбцами определитель V_n можно привести к виду

$$V_n = \det(a_{i,j})_{i,j=0}^{n-1} \quad (3.29)$$

с элементами $a_{i,j} = v_{0, l_{i,1} + l_{j,1}, i+j}$. Далее, при $0 \leq i, j < n$ положим

$$t_{i,j} = \max \left\{ \left\lfloor \frac{l_i + l_j - 1}{2} \right\rfloor; 0 \right\}.$$

Несложно проверить, что если $t_{i,j} > 0$, то выполняются неравенства

$$\begin{aligned} l_{i,1} + l_{j,1} &\geq t_{i,j} + 1, \\ l_{i,1} + l_{j,1} + t_{i,j} &\leq l_i + l_j \leq \frac{i+j}{l}, \end{aligned}$$

поэтому из (3.24) следует, что при любых i, j выполнено

$$\Phi_l(z)^{t_{i,j}} |a_{i,j}.$$

Поскольку для любой подстановки $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ выполнено

$$\sum_{i=0}^{n-1} t_{i, \sigma(i)} \geq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{l_i + l_{\sigma(i)} - 2}{2} = \sum_{i=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{i}{l} \right\rfloor - n,$$

из (3.29) получаем требуемое. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5. Если $\delta_l = 0$, $m = 2$, $s_1 = s_2 = 2$, то в условии предложения 3.3 можно положить

$$e_l(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\left\lfloor \frac{i}{4l} \right\rfloor + \max \left\{ \left\lfloor \frac{i-l}{4l} \right\rfloor; 0 \right\} \right) + \begin{cases} 0, & \text{если } n \leq 4l, \\ 4l - n, & \text{если } 4l \leq n \leq 5l, \\ 4kl - n, & \text{если } (4k+1)l \leq n \leq (4k+2)l, \\ -2l, & \text{если } (4k+2)l \leq n \leq (4k+3)l, \\ n - (4k+5)l, & \text{если } (4k+3)l \leq n \leq (4k+4)l, \\ -l, & \text{если } (4k+4)l \leq n \leq (4k+5)l, \end{cases} \quad (3.30)$$

где $k \in \mathbb{Z}_{>0}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что $n > 5l$. При $0 \leq i < n$ положим

$$l_i = \left\lfloor \frac{i}{l} \right\rfloor, \\ l_{i,0} = 2 \left\lfloor \frac{l_i}{4} \right\rfloor + \begin{cases} -1, & \text{если } l_i \in 4\mathbb{Z}_{>0} \cup (1 + 4\mathbb{Z}_{>0}), \\ 1, & \text{если } l_i \equiv 3 \pmod{4}, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \\ l_{i,1} = \begin{cases} 0, & \text{если } l_i = 0, \\ \left\lfloor \frac{l_i}{4} \right\rfloor + 1, & \text{если } l_i > 0, \end{cases} \quad l_{i,2} = \left\lfloor \frac{l_i + 3}{4} \right\rfloor + \begin{cases} -1, & \text{если } l_i = 1, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \\ \ell_{i,0} = 2 \left\lfloor \frac{l_i}{4} \right\rfloor + \begin{cases} 1, & \text{если } l_i \equiv 3 \pmod{4}, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \\ \ell_{i,1} = \left\lfloor \frac{l_i + 2}{4} \right\rfloor, \quad \ell_{i,2} = \left\lfloor \frac{l_i + 3}{4} \right\rfloor.$$

Несложно проверить, что при любом i выполнено $l_{i,0} + l_{i,1} + l_{i,2} = \ell_{i,0} + \ell_{i,1} + \ell_{i,2} = l_i \leq i/l$, поэтому с помощью элементарных преобразований над строками и столбцами определитель V_n можно привести к виду

$$V_n = \det(a_{i,j})_{i,j=0}^{n-1} \quad (3.31)$$

с элементами $a_{i,j} = v_{l_{i,0} + \ell_{j,0}, l_{i,1} + \ell_{j,1}, l_{i,2} + \ell_{j,2}, i+j}$.

Далее, при $0 \leq i, j < n$ положим

$$t_{i,j} = \left\lfloor \frac{l_i}{4} \right\rfloor + \max \left\{ \left\lfloor \frac{l_j - 1}{4} \right\rfloor; 0 \right\} + \begin{cases} -1, & \text{если } (l_i, l_j) \in (\{0\} \times (1 + 4\mathbb{Z}_{>0})) \cup (4\mathbb{Z}_{>0} \times \{0\}), \\ 1, & \text{если } (l_i, l_j) \in (3 + 4\mathbb{Z}_{\geq 0}) \times (\mathbb{Z}_{>0} \setminus (1 + 4\mathbb{Z}_{\geq 0})), \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Можно проверить, что если $t_{i,j} > 0$, то выполняются неравенства

$$l_{i,0} + \ell_{j,0} \geq 2t_{i,j} - 1, \quad l_{i,1} + \ell_{j,1} \geq t_{i,j} + 1, \quad l_{i,2} + \ell_{j,2} \geq t_{i,j} + 1,$$

поэтому из (3.24) следует, что при любых i, j выполнено

$$\Phi_l(z)^{t_{i,j}} | a_{i,j}.$$

Для любой подстановки $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} t_{i, \sigma(i)} - \sum_{i=0}^{n-1} \left(\left\lfloor \frac{i}{4l} \right\rfloor + \max \left\{ \left\lfloor \frac{i-l}{4l} \right\rfloor; 0 \right\} \right) &= \#\{i \mid l_i \equiv 3 \pmod{4}\} \\ &\quad - \#\{i \mid l_i \equiv 3 \pmod{4}, l_{\sigma(i)} = 0\} \\ &\quad - \#\{i \mid l_i \equiv 3 \pmod{4}, l_{\sigma(i)} \equiv 1 \pmod{4}\} \\ &\quad - \#\{i \mid l_i = 0, l_{\sigma(i)} \in 1 + 4\mathbb{Z}_{>0}\} - \#\{i \mid l_i \in 4\mathbb{Z}_{>0}, l_{\sigma(i)} = 0\} \\ &\geq \#\{i \mid l_i \equiv 3 \pmod{4}\} - \#\{i \mid l_{\sigma(i)} \equiv 1 \pmod{4}\} - \#\{i \mid l_{\sigma(i)} = 0\} \\ &= \begin{cases} 4kl - n, & \text{если } (4k+1)l < n \leq (4k+2)l, \\ -2l, & \text{если } (4k+2)l < n \leq (4k+3)l, \\ n - (4k+5)l, & \text{если } (4k+3)l < n \leq (4k+4)l, \\ -l, & \text{если } (4k+4)l < n \leq (4k+5)l. \end{cases} \end{aligned}$$

Поэтому из (3.31) получаем требуемое. Предложение доказано.

Для дальнейшего нам потребуется следующее утверждение.

ЛЕММА 3.5. Пусть $a > 0, b \geq 1$. Тогда при $n \rightarrow \infty$ имеем

$$\sum_{l \geq 1} \varphi(l) \sum_{i=0}^{n-1} L\left(a, b, \frac{i}{l}\right) \sim Z(a, b) n^3,$$

где $\varphi(l) = \deg \Phi_l(z)$ – функция Эйлера, а $Z(a, b)$ и $L(a, b, x)$ определены формулами (1.7) и (3.25). Кроме того, справедливы асимптотические соотношения

$$\sum_{l \geq 1} e_l(n) \varphi(l) \sim \left(\frac{1}{6} - \frac{41}{36\pi^2} \right) n^3,$$

если $e_l(n)$ определены с помощью (3.28), и

$$\sum_{l \geq 1} e_l(n) \varphi(l) \sim \left(\frac{5}{32} - \frac{289}{900\pi^2} - Z(4, 1) \right) n^3,$$

если $e_l(n)$ определены с помощью (3.30).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $a \geq -1$ имеем

$$\begin{aligned} \sum_{l \leq x} l^a \varphi(l) &= \sum_{l \leq x} \sum_{d|l} \frac{\mu(d) l^{a+1}}{d} = \sum_{d \leq x} \mu(d) d^a \sum_{n \leq x/d} n^{a+1} \\ &= \sum_{d \leq x} \left(\frac{\mu(d) x^{a+2}}{(a+2)d^2} + O\left(\frac{x^{a+1}}{d}\right) \right) = \frac{x^{a+2}}{(a+2)} \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} + O(x^{a+1} \log x) \\ &= \frac{6x^{a+2}}{(a+2)\pi^2} + O(x^{a+1} \log x), \quad x \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Далее, если S – некоторое высказывание, то условимся обозначать через $[S]$ его истинностное значение (т. е. $[S] = 1$, если S истинно, и $[S] = 0$ в противном случае). Тогда $L(a, b, x)$ можно записать в виде

$$L(a, b, x) = \sum_{m=0}^{\infty} [am + b \leq x].$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{l \geq 1} \varphi(l) \sum_{i=0}^{n-1} L\left(a, b, \frac{i}{l}\right) &= \sum_{l \geq 1} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{m \geq 0} \varphi(l) [am + b \leq i] \\ &= \sum_{[b] \leq i \leq n-1} \sum_{0 \leq m \leq i/a} \sum_{1 \leq l \leq i/[am+b]} \varphi(l) \\ &= \sum_{[b] \leq i \leq n-1} \sum_{0 \leq m \leq i/a} \left(\frac{3i^2}{\pi^2 [am + b]^2} + O\left(\frac{i \log n}{m+1}\right) \right) \\ &= \sum_{[b] \leq i \leq n-1} \left(\frac{3i^2}{\pi^2} \sum_{m \geq 0} [am + b]^{-2} + O(i \log^2 n) \right) \\ &= Z(a, b)n^3 + O(n^2 \log^2 n). \end{aligned}$$

Далее, формулу (3.28) можно переписать в виде

$$e_l(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{i}{l} \right\rfloor + \begin{cases} 0, & \text{если } n \leq l, \\ l - n, & \text{если } l \leq n \leq 2l, \\ 3l - 2n, & \text{если } 2l \leq n \leq 3l, \\ -n, & \text{если } n \geq 3l. \end{cases}$$

Учитывая равенство $[i/l] = L(1, 1, i/l)$, в этом случае получаем

$$\begin{aligned} \sum_{l \geq 1} e_l(n) \varphi(l) &= \frac{n^3}{6} + O(n^2 \log^2 n) - \sum_{l \leq n/3} n \varphi(l) + \sum_{n/3 < l \leq n/2} (3l - 2n) \varphi(l) \\ &+ \sum_{n/2 < l \leq n} (l - n) \varphi(l) = \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{3\pi^2} + \frac{6}{\pi^2} \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{27} \right) - \frac{6}{\pi^2} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9} \right) \right. \\ &+ \frac{2}{\pi^2} \left(1 - \frac{1}{8} \right) - \frac{3}{\pi^2} \left(1 - \frac{1}{4} \right) \Big) n^3 \\ &+ O(n^2 \log^2 n) = \left(\frac{1}{6} - \frac{41}{36\pi^2} \right) n^3 + O(n^2 \log^2 n). \end{aligned}$$

Аналогично, для $e_l(n)$, определенных в (3.30), имеем

$$\begin{aligned} \sum_{l \geq 1} e_l(n) \varphi(l) &= \left(\frac{1}{96} + Z(4, 5) + \frac{8}{\pi^2} \left(\frac{1}{64} - \frac{1}{125} \right) - \frac{3}{\pi^2} \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{25} \right) \right) n^3 \\ &+ O(n^2 \log^2 n) + \sum_{1 \leq k \leq n/4} \left(C(k) n^3 + O\left(\frac{n^2 \log n}{k}\right) \right) \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{1}{96} - \frac{2013}{2000\pi^2} + Z(4, 1) + \sum_{k=1}^{\infty} C(k) \right) n^3 + O(n^2 \log^2 n),$$

где

$$\begin{aligned} C(k) &= -\frac{2}{\pi^2} \left(\frac{1}{(4k+4)^3} - \frac{1}{(4k+5)^3} \right) + \frac{3}{\pi^2} \left(\frac{1}{(4k+3)^2} - \frac{1}{(4k+4)^2} \right) \\ &\quad - \frac{2(4k+5)}{\pi^2} \left(\frac{1}{(4k+3)^3} - \frac{1}{(4k+4)^3} \right) - \frac{4}{\pi^2} \left(\frac{1}{(4k+2)^3} - \frac{1}{(4k+3)^3} \right) \\ &\quad + \frac{8k}{\pi^2} \left(\frac{1}{(4k+1)^3} - \frac{1}{(4k+2)^3} \right) - \frac{3}{\pi^2} \left(\frac{1}{(4k+1)^2} - \frac{1}{(4k+2)^2} \right) \\ &= \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{2}{(4k+5)^3} - \frac{2}{(4k+1)^3} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{(4k+4)^2} + \frac{1}{(4k+3)^2} + \frac{1}{(4k+2)^2} - \frac{1}{(4k+1)^2} \right). \end{aligned}$$

Имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} C(k) = \frac{7}{48} + \frac{12337}{18000\pi^2} - 2Z(4, 1),$$

откуда следует требуемое. Лемма доказана.

Учитывая, что при любом $l \geq 1$ выполнено $\delta_l \geq \delta_1$, с помощью предложений 3.2–3.5 и леммы 3.5 получаем следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.6. Пусть многочлены $P(x, y) = P(y)$ и $Q(x)$ не зависят от x . При $n \geq 1$ положим

$$\Delta_n = \Delta_n(z) = z^{e_0(n)} \prod_{l \geq 1} (\Phi_l(z))^{e_l(n)} \in \mathbb{Z}[z], \quad (3.32)$$

где $e_0(n) := \text{ord}_z V_n$, а $e_l(n)$ определены в (3.26), (3.28) и (3.30). Тогда выполнено $\Delta_n(z) | V_n(z, \bar{x})$. Кроме того, при $n \rightarrow \infty$ имеем

$$\deg \Delta_n \geq (\gamma + o(1))n^3,$$

где γ определено в (1.11), (1.12).

§ 4. Лемма о необнулении

Мы сохраняем обозначения из предыдущего параграфа. В следующем утверждении мы уточняем критерий рациональности Кронекера (см. [15, следствие 5.2.3]) для последовательности (3.2).

ЛЕММА 4.1. Пусть $\bar{\omega} = (\omega_0, \omega_{j,k}, \sigma) \in \mathbb{C}_w^{1+\sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{d_0-1} s_{j,k}}$. Допустим, что при некотором $n_0 \in \mathbb{Z}_{>0}$ выполнены равенства

$$V_{n_0}(q, \bar{\omega}) = V_{n_0+1}(q, \bar{\omega}) = \dots = V_{n_0+N(n_0)}(q, \bar{\omega}) = 0, \quad (4.1)$$

где обозначено

$$N(n) = (\mathfrak{D} - 1)(n - 1) + \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{d_0-1} (\deg Q(x) + s_{j,k}), \quad (4.2)$$

а $\mathfrak{D}$ определено в (1.19). Тогда производящая функция

$$F(z) = F_{\bar{\omega}}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(q, \bar{\omega}) z^n$$

последовательности $v_n(q, \bar{\omega})$ является рациональной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для краткости будем записывать v_n вместо $v_n(q, \bar{\omega})$. При $N, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ обозначим

$$V_{N,n} = \det(v_{N+i+j})_{i,j=0}^{n-1}$$

(пустой определитель считаем равным 1). Известно, что $V_{N,n}$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям (см. [15, § 5.2])

$$V_{N-1,n+1} V_{N+1,n-1} = V_{N-1,n} V_{N+1,n} - (V_{N,n})^2, \quad N, n \geq 1. \quad (4.3)$$

Отсюда следует, что если $V_{N-1,n} = V_{N-1,n+1} = 0$, то $V_{N,n} = 0$. Поэтому с помощью индукции по k из (4.1) получаем, что при $0 \leq k \leq N(n_0)$ выполнены равенства

$$V_{k,n_0} = V_{k,n_0+1} = \dots = V_{k,n_0+N(n_0)-k} = 0.$$

В частности, имеем

$$V_{0,n_0} = V_{1,n_0} = \dots = V_{N(n_0),n_0} = 0.$$

Пусть $n_1 \in \mathbb{Z}_{>0}$ – наименьшее число такое, что при некотором $N_1 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ выполнены равенства

$$V_{N_1,n_1} = V_{N_1+1,n_1} = \dots = V_{N_1+N(n_1),n_1} = 0. \quad (4.4)$$

Используя (4.3), легко показать, что тогда определители

$$V_{N_1+1,n_1-1}, V_{N_1+2,n_1-1}, \dots, V_{N_1+N(n_1)+1,n_1-1} \quad (4.5)$$

либо все равны нулю, либо все отличны от нуля (см. [16, ч. VII, задача 20]). В силу выбора n_1 имеет место второй случай.

Из (4.4) следует, что при каждом целом k из промежутка $0 \leq k \leq N(n_1)$ существует ненулевой набор чисел $a_{k,j} \in \mathbb{C}_w$, $0 \leq j \leq n_1 - 1$, такой, что выполнено

$$\sum_{j=0}^{n_1-1} a_{k,j} v_{N_1+k+l+j} = 0, \quad 0 \leq l \leq n_1 - 1. \quad (4.6)$$

Поскольку определители (4.5) отличны от нуля, то при каждом k выполнено $a_{k,n_1-1} \neq 0$, поэтому можно считать, что $a_{k,n_1-1} = 1$. Но тогда из (4.6) получаем, что $a_{k,j} = a_j$ не зависят от k (поскольку $a_{k,j}$ и $a_{k+1,j}$, $0 \leq j \leq n_1 - 2$, удовлетворяют одной и той же системе линейных уравнений с ненулевым определителем).

Рассмотрим последовательность $\{w_n\}_{n \geq 0}$, определенную с помощью формул

$$w_n = v_{N_1+n}, \quad 0 \leq n < n_1 - 1, \quad \sum_{j=0}^{n_1-1} a_j w_{n+j} = 0, \quad n \geq 0.$$

Тогда из (4.6) получаем, что

$$w_n = v_{N_1+n} \quad \text{при } 0 \leq n \leq N(n_1) + 2n_1 - 2. \quad (4.7)$$

Заметим, что если последовательность $\{r_n\}_{n \geq 0} \subset \mathbb{F}$, где $\mathbb{F}$ – некоторое поле, удовлетворяет рекуррентному соотношению вида

$$R(\mathcal{B})(r_n) = 0, \quad n \geq h,$$

где $R(x) \in \mathbb{F}[x]$ – многочлен степени не выше $h \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $R(0) \neq 0$, а оператор $\mathcal{B}$ определен в (2.1), то для любого $a \in \mathbb{F}^*$ и любого многочлена $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ степени не выше $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ выполнено

$$R(a\mathcal{B})^{t+1}(p(n)a^n r_n) = 0, \quad n \geq (t+1)h.$$

Для доказательства достаточно разложить $R(x)$ на линейные множители (в алгебраическом замыкании поля $\mathbb{F}$) и воспользоваться соотношением (2.4) и леммой 2.2.

Следовательно, последовательность

$$\begin{aligned} t_n &= Q(N_1 + n + 1)w_{n+1} - P(N_1 + n + 1, q^{N_1+n+1})w_n \\ &\quad - Q(N_1 + n + 1)u_{N_1+n+1}(q, \bar{\omega}), \quad n \geq 0, \end{aligned}$$

удовлетворяет при $n \geq N(n_1) + 2n_1 - 2$ линейному рекуррентному соотношению с постоянными коэффициентами порядка $N(n_1) + 2n_1 - 2$:

$$A(\mathcal{B})^{\max\{\deg Q(x); \deg p_0(x)\}+1} \prod_{\nu=1}^d A(q^\nu \mathcal{B})^{\deg p_\nu(x)+1} \prod_{j=1}^m \prod_{k=0}^{d_0-1} \mathcal{D}_{\alpha_j q^k}^{\deg Q(x)+s_{j,k}}(t_n) = 0,$$

где

$$A(x) = \sum_{j=0}^{n_1-1} a_j x^{n_1-1-j},$$

а операторы $\mathcal{D}_a$ определены в (2.2).

С другой стороны, в силу (3.3) и (4.7) имеем $t_n = 0$ при $0 \leq n < N(n_1) + 2n_1 - 2$, поэтому $t_n = 0$ при всех $n \geq 0$. Но это значит, что $v_{N_1+n} = w_n$ при $n \geq 0$, следовательно, функция

$$F(z) = \sum_{n \geq 0} v_n z^n$$

является рациональной. Лемма доказана.

ЛЕММА 4.2. Допустим, что многочлены $P(x, y)$, $Q(x)$ и числа α_j и $s_{j,k}$ удовлетворяют условиям теоремы 1.2 и $\bar{\omega} \in \mathbb{C}_w^{1+\sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{d_0-1} s_{j,k}} \setminus \{0\}$. Тогда функция

$$F(z) = F_{\bar{\omega}}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(q, \bar{\omega}) z^n$$

не является рациональной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что для некоторого $\bar{\omega} \neq \bar{0}$ функция $F(z)$ принадлежит $\mathbb{C}_w(z)$. Тогда для некоторой постоянной $C > 1$ выполнено равенство $|v_n(q, \bar{\omega})|_w = O(C^n)$, поэтому из (3.2) получаем

$$\omega_0 + \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{d_0-1} \sum_{\sigma=0}^{s_{j,k}-1} \omega_{j,k,\sigma} f^{(\sigma)}(\alpha_j q^k) = \omega_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n(q, \bar{\omega})}{\Pi_n(q)} = 0.$$

В частности, хотя бы одно из чисел $\omega_{j,k,\sigma}$ не равно нулю.

В силу (3.3) функция $F(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} Q\left(z \frac{d}{dz}\right)(F(z)) - p_0\left(z \frac{d}{dz}\right)(zF(z)) \\ = \sum_{\nu=1}^d p_{\nu}\left(z \frac{d}{dz}\right)(q^{\nu} z F(q^{\nu} z)) + Q\left(z \frac{d}{dz}\right)(R(z)), \end{aligned} \quad (4.8)$$

где

$$R(z) = \omega_0 + \sum_{n \geq 0} u_n(q, \bar{\omega}) z^n = \omega_0 + \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{d_0-1} \sum_{\sigma=0}^{s_{j,k}-1} \frac{\omega_{j,k,\sigma} \sigma! z^{\sigma}}{(1 - \alpha_j q^k z)^{\sigma+1}} \in \mathbb{C}_w(z). \quad (4.9)$$

Из условия (i) теоремы 1.2 следует, что все числа $\alpha_j q^k$ различны. Поскольку не все числа $\omega_{j,k,\sigma}$ равны нулю, то функция $R(z)$ имеет по крайней мере один полюс, поэтому из (4.8) получаем, что функция $F(z)$ также имеет полюс в $\mathbb{C}_w \setminus \{0\}$.

Покажем, что каждый полюс $F(z)$ имеет вид $\alpha_j^{-1} q^n$, где $1 \leq j \leq m$, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Допустим противное. Пусть β – полюс $F(z)$, не представимый в таком виде, с наименьшим значением $|\beta|_w$. Тогда из (4.9) и условия (ii) теоремы 1.2 следует, что порядок полюса функции $Q(z \frac{d}{dz})(R(z))$ в точке $q^{-d}\beta$ не превосходит $\deg p_d(x)$ (в противном случае β имело бы нужный вид; здесь мы используем предположение о многочленах $P(x, y)$ и $Q(x)$, а именно если $\deg Q(x) > 0$, то $\deg p_d(x) = 0$, поэтому из условия (ii) теоремы 1.2 следует, что в этом случае $d_0 = d$). Поскольку $q^{-d}\beta$ является полюсом функции $p_d(z \frac{d}{dz})(q^d z F(q^d z))$ порядка не ниже $\deg p_d(x) + 1$, то из (4.8) получаем, что $q^{-d}\beta$ является полюсом одной из функций $F(q^{\nu} z)$, $0 \leq \nu < d$. Следовательно, $\beta = q^{d-\nu} \beta'$, где β' – также полюс $F(z)$. Поскольку $|\beta'|_w < |\beta|_w$, то β' представимо в требуемом виде, но тогда и β также имеет такой вид. Полученное противоречие доказывает утверждение. В частности, из (4.9) и условия (i) теоремы 1.2 получаем, что функции $F(z)$ и $R(z)$ не имеют общих полюсов.

Пусть β – полюс $F(z)$ с наибольшим значением $|\beta|_w$. Тогда из (4.8) с учетом доказанного выше получаем, что функция $Q(z \frac{d}{dz})(F(z)) - p_0(z \frac{d}{dz})(zF(z))$ не имеет полюса в точке β . Это возможно только в случае $\deg p_0(x) = \deg Q(x)$.

Пусть

$$p_0(x) = \sum_{\nu=0}^h a_{\nu} x^{\nu}, \quad Q(x) = \sum_{\nu=0}^h b_{\nu} x^{\nu}.$$

Из условия (iii) теоремы 1.2 и доказанного выше следует, что $b_h - a_h\beta \neq 0$. Поэтому получаем, что функция

$$Q\left(z\frac{d}{dz}\right)(F(z)) - p_0\left(z\frac{d}{dz}\right)(zF(z)) = \sum_{\nu=0}^h \left(z\frac{d}{dz}\right)^{\nu} ((b_{\nu} - a_{\nu}z)F(z))$$

в точке β имеет полюс порядка $o + h$, где o – порядок полюса функции $F(z)$ в той же точке, что противоречит доказанному выше. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Из лемм 4.1, 4.2 получаем следующее утверждение.

ЛЕММА 4.3. *Допустим, что многочлены $P(x, y)$, $Q(x)$ и числа α_j , $s_{j,k}$ удовлетворяют условиям теоремы 1.2 и $\bar{\omega} \in \mathbb{C}_w^{1+\sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{d_0-1} s_{j,k}} \setminus \{\bar{0}\}$. Тогда при любом $n_0 \in \mathbb{Z}_{>0}$ найдется целое n из промежутка $n_0 \leq n \leq n_0 + N(n_0)$, для которого $V_n(q, \bar{\omega}) \neq 0$, где $N(n)$ определено в (4.2).*

§ 5. Аппроксимационная лемма

Для многочлена $A(\bar{x}) = A(x_0, \dots, x_k) = \sum_{\bar{v}} A_{\bar{v}} \bar{x}^{\bar{v}} \in \mathbb{K}[\bar{x}]$ и для нормирования $v \in \mathcal{M}$ будем обозначать

$$|A|_v = \begin{cases} \sum_{\bar{v}} |A_{\bar{v}}|_v & \text{при } v \mid \infty, \\ \max_{\bar{v}} |A_{\bar{v}}|_v & \text{при } v \nmid \infty, \end{cases}$$

$$H(A) = \prod_v |A|_v^{\varkappa_v/\varkappa}, \quad H_w(A) = \prod_{v \neq w} |A|_v^{\varkappa_v/\varkappa}.$$

ЛЕММА 5.1. *Пусть $k, n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $W(\bar{x}) = W(x_0, \dots, x_k) \in \mathbb{K}[\bar{x}]$ – однородный многочлен степени n , $\bar{\eta} = (\eta_0, \bar{\eta}') \in \mathbb{K}^{1+k}$, $W(\bar{\eta}) \neq 0$, $\omega_0 \in \mathbb{C}_w$. Допустим, что выполнены неравенства*

$$|W(\omega_0, \bar{\eta}')|_w \leq \frac{1}{2} |\bar{\eta}|_w^n (H_w(W)(H(\bar{\eta}))^n)^{-\varkappa/\varkappa_w}, \quad (5.1)$$

$$|\omega_0|_w \leq C |\bar{\eta}|_w, \quad (5.2)$$

где $C \geq 1$. Тогда имеем

$$|\eta_0 - \omega_0|_w \geq |\bar{\eta}|_w (2nC^{n-1})^{-1} (H(W)(H(\bar{\eta}))^n)^{-\varkappa/\varkappa_w}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $W(\bar{\eta}) \neq 0$, то

$$\begin{aligned} |W(\bar{\eta})|_w^{\varkappa_w/\varkappa} &= \prod_{v \neq w} |W(\bar{\eta})|_v^{-\varkappa_v/\varkappa} \geq \prod_{v \neq w} (|W|_v |\bar{\eta}|_v^n)^{-\varkappa_v/\varkappa} \\ &= |\bar{\eta}|_w^{\varkappa_w n/\varkappa} (H_w(W)(H(\bar{\eta}))^n)^{-1}. \end{aligned}$$

С другой стороны, в силу (5.1) имеем

$$\begin{aligned} |W(\bar{\eta})|_w &\leq |W(\omega_0, \bar{\eta}')|_w + |W(\bar{\eta}) - W(\omega_0, \bar{\eta}')|_w \\ &\leq \frac{1}{2} |\bar{\eta}|_w^n (H_w(W)(H(\bar{\eta}))^n)^{-\varkappa/\varkappa_w} + |W(\bar{\eta}) - W(\omega_0, \bar{\eta}')|_w, \end{aligned}$$

следовательно,

$$|W(\bar{\eta}) - W(\omega_0, \bar{\eta}')|_w \geq \frac{1}{2} |\bar{\eta}|_w^n (H_w(W)(H(\bar{\eta}))^n)^{-\varkappa/\varkappa_w}.$$

Обозначая

$$W(\bar{x}) = \sum_{l=0}^n A_l(\bar{x}') x_0^l,$$

имеем

$$\frac{W(\bar{\eta}) - W(\omega_0, \bar{\eta}')}{\eta_0 - \omega_0} = \sum_{l=1}^n A_l(\bar{\eta}') \sum_{j=0}^{l-1} \eta_0^j \omega_0^{l-1-j}.$$

С учетом (5.2) получаем

$$|W(\bar{\eta}) - W(\omega_0, \bar{\eta}')|_w \leq n |W|_w (C |\bar{\eta}|_w)^{n-1} |\eta_0 - \omega_0|_w,$$

откуда следует утверждение. Лемма доказана.

§ 6. Доказательства основных результатов

6.1. Доказательство теорем 1.1, 1.2. Пусть числа α_j и $s_{j,k}$ удовлетворяют условиям теоремы 1.2; при этом в условиях теоремы 1.1 считаем, что $d_0 = d$ и $s_{j,k} = s_j$. Рассмотрим многочлены V_n , определенные в § 3.

В условиях теоремы 1.1 определим многочлены $\Delta_n(z)$ с помощью соотношения (3.32). Кроме того, в условиях теоремы 1.2 положим $\Delta_n(z) = z^{\text{ord}_z V_n}$.

Определим многочлены $W_n(\bar{x}) \in \mathbb{K}[\bar{x}]$ с помощью формулы

$$W_n(\bar{x}) = V_n(q, \bar{x}) (\Delta_n(q))^{-1}. \quad (6.1)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. *Многочлен $W_n(\bar{x})$ либо равен нулю, либо является однородным многочленом степени n , причем при $n \rightarrow \infty$ справедливы асимптотические оценки*

$$H(W_n) \leq (H(q))^{(2d/3 - \gamma + o(1))n^3},$$

$$H_w(W_n) \leq \begin{cases} (H(q))^{((1-1/\lambda)(2d/3 - \gamma) + o(1))n^3} & \text{в условиях теоремы 1.1,} \\ \exp(o(n^{5/2})) & \text{в условиях теоремы 1.2,} \end{cases}$$

где λ определено в (1.1), γ определено в (1.11), (1.12) в условиях теоремы 1.1 и $\gamma = 0$ иначе. Далее, равномерно по $\bar{\omega} = (\omega_0, \bar{\omega}_1) = (\omega_0, \omega_{j,k,\sigma}) \in \mathbb{C}_w^{1+\sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{d_0-1} s_{j,k}}$, удовлетворяющим условию

$$\omega_0 + \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{d_0-1} \sum_{\sigma=0}^{s_{j,k}-1} \omega_{j,k,\sigma} f^{(\sigma)}(\alpha_j q^k) = 0,$$

выполнено неравенство

$$|W_n(\bar{\omega})|_w \leq \begin{cases} |\bar{\omega}_1|_w^n |q|_w^{-(\alpha + \gamma + o(1))n^3} & \text{в условиях теоремы 1.1,} \\ |\bar{\omega}_1|_w^n |q|_w^{-(c_1 + c_2 + o(1))n^{5/2}} & \text{в условиях теоремы 1.2,} \end{cases}$$

где α , c_1 и c_2 определены в (1.9), (1.20) и (1.21). Наконец, при любых $\bar{\omega} \neq \bar{0}$ и $n_0 \in \mathbb{Z}_{>0}$ найдется целое n из промежутка $n_0 \leq n \leq \mathfrak{D}n_0 + O(1)$, для которого $W_n(\bar{\omega}) \neq 0$, где $\mathfrak{D}$ определено в (1.19).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не теряя общности, можно считать, что $Q(x) \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}[x]$. Кроме того, обозначим через $D \in \mathbb{Z}_{>0}$ наименьший общий знаменатель чисел α_j и коэффициентов многочлена $P(x, y)$.

Из (3.1), (3.2) следует, что при $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ многочлен v_n является однородным по $\bar{x}$, $\deg_{\bar{x}} v_n = 1$, $\deg_z v_n \leq dn^2/2 + O(n+1)$, причем

$$D^n \prod_{k=1}^n Q(k) \cdot v_n \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}[z, \bar{x}].$$

Из (3.4) получаем, что многочлен V_n при $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ является однородным по $\bar{x}$ степени n (либо равен нулю); кроме того, с учетом перестановочного неравенства имеем

$$\deg_z V_n \leq \max_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{d(i + \sigma(i))^2}{2} + O(n^2) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{d(2i)^2}{2} + O(n^2) = \frac{2dn^3}{3} + O(n^2).$$

Далее, с учетом предложения 3.6 получаем, что

$$U_n V_n(z, \bar{x})(\Delta_n(z))^{-1} \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}[z, \bar{x}],$$

где обозначено

$$U_n = D^{2n^2} \prod_{k=1}^{2n} (Q(k))^n,$$

причем $\deg_z (V_n \Delta_n^{-1}) \leq (2d/3 - \gamma + o(1))n^3$.

Из (6.1) получаем, что для неархимедова нормирования v выполнено (равномерно по v)

$$|W_n|_v \leq |U_n|_v^{-1} \max\{1; |q|_v\}^{(2d/3 - \gamma + o(1))n^3}.$$

Для многочлена $A(z, \bar{x}) = \sum_{k, \bar{l}} A_{k, \bar{l}} z^k \bar{x}^{\bar{l}} \in \mathbb{K}[z, \bar{x}]$ будем обозначать

$$\mathcal{L}(A) = \sum_{k, \bar{l}} \overline{A_{k, \bar{l}}},$$

где $\overline{|\xi|} := \max_{v|\infty} |\xi|_v$ (т.е. $\overline{|\xi|}$ – максимум модулей сопряженных числа ξ).

Из (3.1), (3.2) следует, что $\log \mathcal{L}(v_n) = O(n \log n)$, поэтому из (3.4) получаем

$$\mathcal{L}(V_n) \leq \exp(O(n^2 \log n)).$$

Пусть $v \in \mathcal{M}$ – архимедово нормирование, $z_0 \in \mathbb{C}_v$, $|z_0|_v \geq 1 + 1/n$. Тогда при $l \geq 1$ имеем

$$\begin{aligned} |\log |\Phi_l(z_0)|_v - \varphi(l) \log |z_0|_v| &= \left| \sum_{t|l} \mu\left(\frac{l}{t}\right) \log |1 - z_0^{-t}|_v \right| \\ &\leq -\tau(l) \log(1 - |z_0|_v^{-1}) = O(\tau(l) \log n), \end{aligned}$$

где $\tau(l) = \sum_{t|l} 1$. Поэтому для $\Delta_n(z)$, определенного в (3.32), получаем

$$|\log |\Delta_n(z_0)|_v - \deg \Delta_n \cdot \log |z_0|_v| = O\left(\sum_{l \leq n} \frac{\tau(l) n^2 \log n}{l}\right) = O(n^2 \log^3 n).$$

Следовательно, если определить многочлены $A_{n,\bar{k}}(z)$ с помощью

$$V_n(z, \bar{x})(\Delta_n(z))^{-1} = \sum_{\bar{k}} A_{n,\bar{k}}(z) \bar{x}^{\bar{k}},$$

то получим

$$\begin{aligned} \sum_{\bar{k}} |A_{n,\bar{k}}(z_0)|_v &\leq \mathcal{L}(V_n) |z_0|_v^{\deg_z V_n} |\Delta_n(z_0)|_v^{-1} \\ &\leq \exp\left(\left(\frac{2d}{3} - \gamma + o(1)\right) n^3 \log |z_0|_v + O(n^2 \log^3 n)\right). \end{aligned}$$

Кроме того, в силу принципа максимума при $z_0 \in \mathbb{C}_v$ с $|z_0|_v \leq 1 + 1/n$ имеем

$$\begin{aligned} \sum_{\bar{k}} |A_{n,\bar{k}}(z_0)|_v &\leq \sum_{\bar{k}} \max_{|z|_v=1+n^{-1}} |A_{n,\bar{k}}(z)|_v \\ &\leq (n+1)^{1+\sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{d_0-1} s_{j,k}} \exp(O(n^2 \log^3 n)) \leq \exp(O(n^2 \log^3 n)). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$|W_n|_v \leq \max\{1, |q|_v\}^{(2d/3-\gamma+o(1))n^3} \cdot \exp(O(n^2 \log^3 n)).$$

Из полученных оценок и соотношения

$$\prod_{v \nmid \infty} |U_n|_v^{-\varkappa_v/\varkappa} = \prod_{v \mid \infty} |U_n|_v^{\varkappa_v/\varkappa} \leq \overline{|U_n|} \leq \exp(O(n^2 \log n))$$

получаем первую часть предложения.

Второе утверждение предложения следует из предложений 3.1, 3.2, при этом в случае $\deg_d(x) > 0$ используется оценка

$$|v_n(q, \bar{\omega})|_w \leq |\bar{\omega}_1|_w \exp(O(n))$$

(см. доказательство леммы 3.2), из которой получаем

$$|V_n(q, \bar{\omega})|_w \leq |\bar{\omega}_1|_w^n \exp(O(n^2)).$$

Последнее утверждение предложения следует из леммы 4.3.

Пусть $\bar{\eta} = (\eta_0, \bar{\eta}_1) = (\eta_0, \eta_{j,k,\sigma}) \in \mathbb{K}^{1+\sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{d_0-1} s_{j,k}} \setminus \{0\}$. Определим ω_0 с помощью равенства

$$\omega_0 = - \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{d_0-1} \sum_{\sigma=0}^{s_{j,k}-1} \eta_{j,k,\sigma} f^{(\sigma)}(\alpha_j q^k). \quad (6.2)$$

При этом выполнено

$$|\omega_0|_w \leq |\bar{\eta}|_w \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{d_0-1} \sum_{\sigma=0}^{s_{j,k}-1} |f^{(\sigma)}(\alpha_j q^k)|_w. \quad (6.3)$$

Учитывая равенство (1.1), из предложения 6.1 получаем, что

$$\begin{aligned} 2|W_n(\omega_0, \bar{\eta}_1)|_w (H_w(W)(H(\bar{\eta}))^n)^{\varkappa/\varkappa_w} \\ \leq |\bar{\eta}|_w^n (H(\bar{\eta}))^{\varkappa n/\varkappa_w} \times \begin{cases} |q|_w^{-(2d/3+\alpha-(2d/3-\gamma)\lambda+o(1))n^3} & \text{в условиях теоремы 1.1,} \\ |q|_w^{-(\epsilon_1+\epsilon_2+o(1))n^{5/2}} & \text{в условиях теоремы 1.2.} \end{cases} \end{aligned}$$

Учитывая неравенство (1.13) и последнее утверждение предложения 6.1, получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует n , удовлетворяющее неравенствам

$$n \leq \begin{cases} (d + \varepsilon) \left(\frac{\lambda \log H(\bar{\eta})}{(2d/3 + \alpha - (2d/3 - \gamma)\lambda) \log H(q)} \right)^{1/2} + O(1) & \text{в условиях теоремы 1.1,} \\ (\mathfrak{D} + \varepsilon) \left(\frac{\log H(\bar{\eta})}{(\mathfrak{c}_1 + \mathfrak{c}_2) \log H(q)} \right)^{2/3} + O(1) & \text{иначе,} \end{cases}$$

для которого $W_n(\bar{\eta}) \neq 0$ и

$$2|W_n(\omega_0, \bar{\eta}_1)|_w (H_w(W)H(\bar{\eta})^n)^{z/z_w} \leq |\bar{\eta}|_w^n.$$

Применяя лемму 5.1 и учитывая (6.2), (6.3), получаем требуемое.

6.2. Доказательство следствия 1.1. Для доказательства иррациональности и неквадратичности (в качественной форме) достаточно заметить, что величина (1.1) в рассматриваемом случае имеет вид

$$\lambda = \frac{a \log |\rho|}{\log |\rho| - \log |\sigma|} = \frac{a}{1 - \gamma},$$

где $a = 1$, если $\mathbb{K}$ – это $\mathbb{Q}$ или мнимое квадратичное поле, и $a = 2$, если $\mathbb{K}$ – вещественное квадратичное поле, а условие (1.13) имеет вид

$$\lambda < \frac{12}{5}.$$

Оценка для $|E_q(\alpha) - r/s|$ следует непосредственно из теоремы 1.1.

Пусть $\gamma < 1/6$. Из теоремы 1.1 получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует положительная постоянная $c = c(q, \alpha, \varepsilon)$ такая, что для любого числа θ , принадлежащего некоторому квадратичному расширению поля $\mathbb{Q}$, выполнено неравенство

$$|E_q(\alpha) - \theta| \geq \begin{cases} c \exp(-(C_1 + \varepsilon)(\log H(\theta))^{3/2}), & \text{если } \theta \in \mathbb{Q}, \\ c \exp(-(2\sqrt{2}C_2 + \varepsilon)(\log H(\theta))^{3/2}) & \text{иначе.} \end{cases}$$

Пусть

$$A(z) = a(z - \theta_1)(z - \theta_2) \in \mathbb{Z}[z] \setminus \{0\}.$$

Не теряя общности, можно считать, что A примитивный (т.е. его коэффициенты взаимно просты в совокупности).

Если $\theta_{1,2} \in \mathbb{Q}$, то с учетом

$$H(\theta_1)H(\theta_2) = M(A) \leq L(A)$$

(где $M(A)$ – мера Малера многочлена A) имеем

$$\begin{aligned} |A(E_q(\alpha))| &\geq |(E_q(\alpha) - \theta_1)(E_q(\alpha) - \theta_2)| \\ &\geq c^2 \exp(-(C_1 + \varepsilon)(\log H(\theta_1))^{3/2} - (C_1 + \varepsilon)(\log H(\theta_2))^{3/2}) \\ &\geq c^2 \exp(-(C_1 + \varepsilon)(\log H(\theta_1)H(\theta_2))^{3/2}) \\ &\geq c^2 \exp(-(C_2 + \varepsilon)(\log L(A))^{3/2}). \end{aligned}$$

Если многочлен A неприводим над $\mathbb{Q}$, то

$$H(\theta_1) = H(\theta_2) = (M(A))^{1/2},$$

$$\max\{|E_q(\alpha) - \theta_1|; |E_q(\alpha) - \theta_2|\} \geq \frac{1}{2}|\theta_1 - \theta_2| \geq \frac{1}{2|a|},$$

поэтому

$$|A(E_q(\alpha))| \geq \frac{1}{2}c \exp(-(2\sqrt{2}C_2 + \varepsilon) \log^{3/2}(L(A))^{1/2})$$

$$\geq \frac{1}{2}c \exp(-(C_2 + \varepsilon)(\log L(A))^{3/2}).$$

6.3. Доказательство следствия 1.3. Из условий следствия следует, что

$$u_n = \frac{u}{\sqrt{D}} \left(\left(\frac{r + \sqrt{D}}{2} \right)^n - \left(\frac{r - \sqrt{D}}{2} \right)^n \right).$$

Пусть $\varepsilon_0 = \text{sign } r$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^n}{u_{kn}} = \frac{\varepsilon_0 \sqrt{D}}{u} L_{q^k}(\alpha),$$

где

$$\alpha = b \left(\frac{2\varepsilon_0}{|r| - \sqrt{D}} \right)^k, \quad q = \frac{|r| + \sqrt{D}}{|r| - \sqrt{D}},$$

поскольку при $|z| < |q|$ справедливо равенство

$$L_q(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{q^n - 1}.$$

Если $\sqrt{D} \notin \mathbb{Z}$, то минимальный многочлен числа q равен $z^2 + (r^2/s + 2)z + 1$, поэтому

$$H(q) = (M(q))^{1/2} = |s'q|^{1/2}.$$

Если $\sqrt{D} \in \mathbb{Z}$, то

$$H(q) = \frac{|r| + \sqrt{D}}{(|r| + \sqrt{D}, |r| - \sqrt{D})} = \frac{(|r| + \sqrt{D})^2}{4d} = |s'q|.$$

Применим следствие 1.2 для $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$, $|\cdot|_w = |\cdot|$. Учитывая, что

$$\lambda(q^k) = \lambda(q) = 1 + \frac{\log |s'|}{\log |q|} = 1 + \frac{\log |s'|}{2 \log(r' + \sqrt{(r')^2 + 4s'}) - \log(4|s'|)},$$

получаем требуемое.

6.4. Доказательство теоремы 1.3. Как было показано в [12, лемма 2], при $z \neq 0, \pm 1$ и $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ справедливо равенство

$$h^{(l)}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \sum_{k=0}^l \left(A_{l,k}(z) T_q^{(k)}(z) + A_{l,k}\left(\frac{1}{z}\right) T_q^{(k)}\left(\frac{1}{z}\right) \right),$$

где $T_q(z)$ – функция Чакалова (1.6), $A_{l,k}(z)$ – рациональные функции с коэффициентами из $\mathbb{Q}$, не имеющие полюсов, отличных от ± 1 , причем

$$A_{l,l}(z) = \frac{z^{2l+1}}{(z^2 - 1)^l(z + 1)}.$$

При $1 \leq j \leq m$ пусть $\alpha_{j,1}, \alpha_{j,2} \in \mathbb{C}_w^*$ – корни уравнения $z^2 - a_j z + 1 = 0$ (так что $\alpha_{j,2} = 1/\alpha_{j,1}$). Заметим, что $\alpha_{j,1} \neq \pm 1$ в силу условия (i) теоремы 1.3. Тогда при $\bar{\omega} = (\omega_0, \omega_{j,\sigma}) \in \mathbb{C}_w^{1+s}$ справедливо равенство

$$\omega_0 + \sum_{j=1}^m \sum_{\sigma=0}^{s_j-1} \omega_{j,\sigma} h^{(\sigma)}(a_j) = \omega_0 + \sum_{j=1}^m \sum_{\nu=1}^2 \sum_{\sigma=0}^{s_j-1} C_{j,\sigma}(\alpha_{j,\nu}, \bar{\omega}) T_q^{(\sigma)}(\alpha_{j,\nu}), \quad (6.4)$$

где

$$C_{j,\sigma}(z, \bar{x}) = \sum_{\tau=\sigma}^{s_j-1} A_{\tau,\sigma}(z) x_{j,\tau}. \quad (6.5)$$

Если не все $\omega_{j,\sigma}$ равны нулю, то это же справедливо и для $C_{j,\sigma}(\alpha_{j,\nu}, \bar{\omega})$.

Рассмотрим последовательности многочленов

$$\begin{aligned} u_n &= u_n(\bar{y}) = \sum_{j=1}^m \sum_{\nu=1}^2 \sum_{\sigma=0}^{s_j-1} \sigma! \binom{n}{\sigma} \alpha_{j,\nu}^{n-\sigma} y_{j,\nu,\sigma}, \\ v_n &= v_n(z, \bar{y}) = z^{n(n+1)/2} y_0 + \sum_{k=0}^n z^{n(n+1)/2 - k(k+1)/2} u_k(\bar{y}), \\ V_n &= V_n(z, \bar{y}) = \det(v_{i+j})_{i,j=0}^{n-1}, \end{aligned}$$

где $\bar{y} = (y_0, y_{j,\nu,\sigma})$. Для V_n справедливы результаты из § 3 (для $P(x, y) = y$, $Q(x) = 1$ и соответствующих значений параметров).

Чтобы использовать результаты, полученные в § 4, достаточно проверить, что $\alpha_{j,\nu} \alpha_{k,\mu}^{-1} \notin q^{\mathbb{Z}}$ при $(j, \nu) \neq (k, \mu)$. Но если $\alpha_{j,\nu} = \alpha_{k,\mu}$, то $a_j = a_k$, так что $j = k$, поэтому и $\nu = \mu$ (поскольку $\alpha_{j,1} \neq \pm 1$). Если же $\alpha_{j,\nu} = \alpha_{k,\mu} q^n$ при $n \neq 0$, то многочлены

$$x^2 - a_k x + 1, \quad q^{2n} x^2 - a_j q^n x + 1$$

имеют общий корень, поэтому их результат равен нулю, что противоречит условию (ii) теоремы 1.3.

Определим многочлены W_n с помощью равенств

$$W_n(\bar{x}) = W_n(x_0, x_{j,\sigma}) = V_n(q, \bar{y}(\bar{x})) (\Delta_n(q))^{-1},$$

где $\Delta_n(z)$ определено в (3.32) (при соответствующих значениях параметров),

$$y_0(\bar{x}) = x_0, \quad y_{j,\nu,\sigma}(\bar{x}) = C_{j,\sigma}(\alpha_{j,\nu}, \bar{x}),$$

а $C_{j,\sigma}$ определены в (6.5).

Заметим, что $\tilde{u}_n := u_n(\bar{y}(\bar{x})) \in \mathbb{K}[\bar{x}]$, поскольку для любого элемента σ группы Галуа $\text{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K})$, где $\mathbb{L} = \mathbb{K}(\alpha_{j,\nu})_{\substack{1 \leq j \leq m, \\ 1 \leq \nu \leq 2}}$, выполнено $\tilde{u}_n^\sigma = \tilde{u}_n$; следовательно, $W_n \in \mathbb{K}[\bar{x}]$.

Аналогично доказательству предложения 6.1 с учетом равенства (6.4) получаем следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.2. *Многочлен W_n либо равен нулю, либо является однородным многочленом степени n , причем при $n \rightarrow \infty$ справедливы асимптотические оценки*

$$H(W_n) \leq (H(q))^{(2/3-\gamma+o(1))n^3}, \quad H_w(W_n) \leq (H(q))^{((1-1/\lambda)(2/3-\gamma)+o(1))n^3},$$

где λ и γ определены в (1.1) и (1.24). Далее, равномерно по $\bar{\omega} = (\omega_0, \bar{\omega}_1) = (\omega_0, \omega_{j,\sigma}) \in \mathbb{C}_w^{1+s}$, удовлетворяющим условию

$$\omega_0 + \sum_{j=1}^m \sum_{\sigma=0}^{s_j-1} \omega_{j,\sigma} h^{(\sigma)}(a_j) = 0,$$

при $n \rightarrow \infty$ выполнено

$$|W_n(\bar{\omega})|_w \leq |\bar{\omega}_1|_w^n |q|_w^{-(\alpha+\gamma+o(1))n^3},$$

где α определено в (1.23). Кроме того, для любых $\bar{\omega} \in \mathbb{C}_w^{1+s} \setminus \{\bar{0}\}$ и $n_0 \in \mathbb{Z}_{>0}$ найдется $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ из промежутка $n_0 \leq n \leq n_0 + 2s$, для которого $W_n(\bar{\omega}) \neq 0$.

С помощью леммы 5.1 из предложения 6.2 получаем утверждение теоремы 1.3 (см. заключительную часть п. 6.1).

ЗАМЕЧАНИЕ 6.1. Небольшие изменения в ходе доказательства позволяют улучшить оценки меры линейной независимости в основных теоремах и их следствиях. В настоящий момент автор готовит соответствующие результаты к публикации (см. [17]).

ЗАМЕЧАНИЕ 6.2. В случае, когда $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ и $|\cdot|_\omega = |\cdot|$, качественная часть теоремы 1.2 следует по сути из результатов работы [18].

Автор выражает благодарность В. В. Зудилину за проявленный интерес к работе и ценные указания.

Список литературы

1. M. Amou, K. Väänänen, “Linear independence of the values of q -hypergeometric series and related functions”, *Ramanujan J.*, **9**:3 (2005), 317–339.
2. M. Amou, M. Katsurada, “Irrationality results for values of generalized Tschakaloff series. II”, *J. Number Theory*, **104**:1 (2004), 132–155.
3. J.-P. Bézivin, “Indépendance linéaire des valeurs des solutions transcendentes de certaines équations fonctionnelles”, *Manuscripta Math.*, **61**:1 (1988), 103–129.
4. J.-P. Bézivin, “Sur les Propriétés Arithmétiques d’une Fonction Entière”, *Math. Nachr.*, **190**:1 (1998), 31–42.
5. R. Choulet, “Des résultats d’irrationalité pour deux fonctions particulières”, *Collect. Math.*, **52**:1 (2001), 1–20.

6. Ch. Krattenthaler, I. Rochev, K. Väänänen, W. Zudilin, “On the non-quadraticity of values of the q -exponential function and related q -series”, *Acta Arith.*, **136**:3 (2009), 243–269.
7. K. Väänänen, “On linear independence of the values of generalized Heine series”, *Math. Ann.*, **325**:1 (2003), 123–136.
8. K. Väänänen, W. Zudilin, “Baker-type estimates for linear forms in the values of q -series”, *Canad. Math. Bull.*, **48**:1 (2005), 147–160.
9. O. Sankilampi, K. Väänänen, “On the values of Heine series at algebraic points”, *Results Math.*, **50**:1–2 (2007), 141–153.
10. T. Matala-Aho, K. Väänänen, “On approximation measures of q -logarithms”, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **58**:1 (1998), 15–31.
11. M. Haas, “Über die lineare Unabhängigkeit von werten einer speziellen Reihe”, *Arch. Math. (Basel)*, **56**:2 (1991), 148–162.
12. J.-P. Bézivin, “Irrationalité de certaines sommes de séries”, *Manuscripta Math.*, **126**:1 (2008), 41–47.
13. Г. Харди, Дж. Литтлвуд, Г. Поля, *Неравенства*, ИЛ, М., 1948; пер. с англ.: G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1934.
14. Р. Стенли, *Перечислительная комбинаторика*, Мир, М., 1990; пер. с англ.: R. P. Stanley, *Enumerative combinatorics*, Wadsworth Brooks/Cole Math. Ser., Wadsworth & Brooks, Monterey, CA, 1986.
15. Y. Amice, *Les nombres p -adiques*, Presses Universitaires de France, Paris, 1975.
16. Г. Поля, Г. Серё, *Задачи и теоремы из анализа. Ч. 2. Теория функций. Распределение нулей. Полиномы. Определители. Теория чисел*, Мир, М., 1956; пер. с нем.: G. Pólya, G. Szegő, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis. Zweiter Band. Funktionentheorie, Nullstellen, Polynome, Determinanten, Zahlentheorie*, Julius Springer, Berlin, 1925.
17. I. Rochev, *New linear independence measures for values of q -hypergeometric series*, [arXiv: math/1006.5413v1](https://arxiv.org/abs/math/1006.5413v1).
18. J.-P. Bézivin, “Indépendance linéaire des valeurs des solutions transcendentes de certaines équations fonctionnelles. II”, *Acta Arith.*, **55**:3 (1990), 233–240.

И. П. РОЧЕВ (I. P. ROCHEV)

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова,

механико-математический факультет

E-mail: justrip@rambler.ru

Поступило в редакцию

26.11.2008

22.10.2009