Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. К. Захаров, А. В. Михалёв, Проблема общего радоновского представления для произвольного хаусдорфова пространства. II, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2002, том 66, выпуск 6, 3–18

DOI: <https://doi.org/10.4213/im407>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 13:24:35

УДК 517.981.1+517.518.1+517.982.3

В. К. Захаров, А. В. Михалёв

Проблема общего радоновского представления для произвольного хаусдорфова пространства. II

Проблема общего радоновского представления состоит в следующем: для хаусдорфовых топологических пространств найти пространство линейных функционалов, представимых в виде интегралов по всем радоновским мерам.

В ч. I настоящей статьи (см. [39]) получено одно из возможных решений этой проблемы. В ч. II устанавливается, что классические теоремы Рисса–Радона и Прохорова получаются как следствия теоремы об общем интегральном радоновском представлении, доказанной в [39].

Библиография: 39 наименований.

После основополагающих работ [1]–[3] стала актуальной *проблема общего радоновского представления*. Суть ее состоит в следующем. На хаусдорфовом топологическом пространстве $(T, \mathcal{G})$ рассматривается семейство $\mathfrak{M}^{wo}(T, \mathcal{G})_0$ всех положительных широких борелевско-радоновских мер μ из $\mathcal{B}(T, \mathcal{G})$ в $[0, \infty]$. Каждая мера μ порождает *интегральный радоновский функционал* $i_\mu \equiv \int \cdot d\mu$ на векторном пространстве $\text{MI}(T, \mathcal{B}(T, \mathcal{G}), \mu)$ всех $\mathcal{B}(T, \mathcal{G})$ -измеримых μ -интегрируемых функций f из T в $\mathbb{R}$.

Все радоновские функционалы i_μ можно рассматривать на любом векторном пространстве $A(T)$, лежащем в векторном пространстве

$$\text{UI}(T) \equiv \bigcap (\text{MI}(T, \mathcal{B}(T, \mathcal{G}), \mu) \mid \mu \in \mathfrak{M}^{wo}(T, \mathcal{G})_0)$$

всех $\mathcal{B}(T, \mathcal{G})$ -измеримых *универсально-интегрируемых функций* относительно всех указанных радоновских мер таким, что *отображение сужения* $\mu \mapsto i_\mu \mid A(T)$ из множества $\mathfrak{M}^{wo}(T, \mathcal{G})_0$ в векторное пространство $A(T)^\times$ всех линейных функционалов на $A(T)$ является инъективным. Поэтому возникает *проблема абстрактного описания семейства всех интегральных радоновских функционалов* (обычно именуемая как *проблема интегрального радоновского представления*): для некоторого подходящего векторного пространства $A(T)$ в векторном пространстве $A(T)^\times$ всех линейных функционалов на нем выделить в абстрактных (т.е. не использующих меры) терминах некоторое векторное решеточное подпространство $A(T)^\Delta$ такое, что его положительная часть $(A(T)^\Delta)_+$ в точности совпадает с семейством $A(T)_0^{rf} \equiv \{i_\mu \mid A(T) \mid \mu \in \mathfrak{M}^{wo}(T, \mathcal{G})_0\}$ всех положительных радоновских функционалов на $A(T)$.

Рассматривается также ограниченная версия этой проблемы (*проблема ограниченного интегрального радоновского представления*), когда вместо семейства $A(T)_0^{rf}$ рассматривается векторное пространство $A(T)_b^{rf} \equiv \{i_\mu \mid A(T) \mid \mu \in \mathfrak{M}_b^{wo}(T, \mathcal{G})\}$ всех *равномерно ограниченных* радоновских функционалов, соответствующих всем ограниченному радоновским мерам μ из $\mathcal{B}(T, \mathcal{G})$ в $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Решение проблемы радоновского представления для случая локально компактного пространства было дано Халмошем [7], Хьюитом [8] и Эдвардсом [9] и известно как *общая теорема Рисса–Радоны о представлении* (см., например, [11] или [12]).

ТЕОРЕМА. Пусть $(T, \mathcal{G})$ – локально компактное пространство и $C_c(T, \mathcal{G})$ – векторное решеточное пространство всех непрерывных функций на $(T, \mathcal{G})$ с компактными носителями. Тогда:

- 1) отображение сужения $\mu \mapsto i_\mu \mid C_c(T, \mathcal{G})$ из $\mathfrak{RM}^{wo}(T, \mathcal{G})_0$ в $C_c(T, \mathcal{G})^\times$ является инъективным;
- 2) семейство $C_c(T, \mathcal{G})_0^{rf}$ всех положительных радоновских функционалов в точности совпадает с положительной частью $(C_c(T, \mathcal{G}))_+^\sim$ векторного решеточного пространства всех линейных бинарно-положительных функционалов на $C_c(T, \mathcal{G})$.

Решение проблемы ограниченного радоновского представления для случая тихоновского пространства было дано Прохоровым [13].

ТЕОРЕМА. Пусть $(T, \mathcal{G})$ – тихоновское пространство и $C_b(T, \mathcal{G})$ – векторное решеточное пространство всех непрерывных ограниченных функций на $(T, \mathcal{G})$. Тогда:

- 1) отображение ограниченного сужения $\mu \mapsto i_\mu \mid C_b(T, \mathcal{G})$ из $\mathfrak{RM}_b^{wo}(T, \mathcal{G})$ в $C_b(T, \mathcal{G})^\times$ является инъективным;
- 2) решеточное векторное пространство $C_b(T, \mathcal{G})_b^{rf}$ всех равномерно ограниченных радоновских функционалов в точности совпадает с векторным решеточным пространством $(C_b(T, \mathcal{G}))^\oplus$ всех линейных узких бинарно-положительных равномерно ограниченных функционалов на $C_b(T, \mathcal{G})$.

Одно из возможных решений проблемы радоновского представления для общего случая произвольного хаусдорфова пространства было дано авторами настоящей статьи (см. [21]–[23] и [39]).

ТЕОРЕМА (об общем радоновском представлении). Пусть $(T, \mathcal{G})$ – хаусдорфово пространство, $S(T, \mathcal{G})$ – векторное решеточное пространство всех метаконтинуально-непрерывных (ограниченных) функций на $(T, \mathcal{G})$ и $S_c(T, \mathcal{G})$ – соответствующее подпространство функций с компактными носителями. Тогда:

- А.1) отображение сужения $\mu \mapsto i_\mu \mid S_c(T, \mathcal{G})$ из $\mathfrak{RM}^{wo}(T, \mathcal{G})_0$ в $S_c(T, \mathcal{G})^\times$ является инъективным;
- 2) семейство $S_c(T, \mathcal{G})_0^{rf}$ всех положительных радоновских функционалов в точности совпадает с положительной частью $(S_c(T, \mathcal{G}))_+^\Delta$ векторного решеточного пространства всех линейных тонких бинарно-положительных функционалов на $S_c(T, \mathcal{G})$;

- В.1) отображение ограниченного сужения $\mu \mapsto i_\mu \mid S(T, \mathcal{G})$ из $\mathfrak{RM}_b^{wo}(T, \mathcal{G})$ в $S(T, \mathcal{G})^\times$ является инъективным;
- 2) решеточное векторное пространство $S(T, \mathcal{G})_b^{rf}$ всех равномерно ограниченных радоновских функционалов в точности совпадает с векторным решеточным пространством $S(T, \mathcal{G})^\oplus$ всех линейных тонких бинарно-положительных равномерно ограниченных функционалов на $S(T, \mathcal{G})$.

После выхода статей [21]–[23] и [39] оставался открытым вопрос: *следуют ли из теоремы об общем радоновском представлении теоремы Рисса–Радоны и Прохорова?* В настоящей статье дается положительный ответ на этот вопрос:

теоремы Рисса–Радона и Прохорова следуют из теоремы об общем радоновском представлении (см. теоремы о следствии).

Настоящая статья является непосредственным продолжением статьи [39], поэтому за всеми необходимыми сведениями мы отсылаем к ней. Более того, мы продолжаем нумерацию пунктов § 2 статьи [39].

Авторы выражают благодарность профессору А. В. Яковлеву за плодотворные обсуждения, результатом которых явилась настоящая работа.

6. Теорема о следствии для локально компактного пространства. В этом пункте покажем, что теорема Рисса–Радона для локально компактного пространства следует из теоремы об общем радоновском представлении для хаусдорфова пространства.

Пусть $(T, \mathcal{G})$ – локально компактное пространство и φ – линейный положительный функционал на $C_c(T, \mathcal{G})$, т.е. $\varphi \in (C_c(T, \mathcal{G})^\sim)_+$. Покажем, что функционал φ продолжается единственным образом до линейного положительного тонкого функционала на $S_c(T, \mathcal{G})$, т.е. $\varphi \in (S_c(T, \mathcal{G})^\Delta)_+$.

Пусть $A(T)$ – произвольное подмножество в $F(T)$. Напомним, что функционал ξ из $A(T)$ в $\mathbb{R}$ называется *поточечно непрерывным*, если $f = p\text{-}\lim(f_m \mid m \in M)$ влечет $\xi f = \lim(\xi f_m \mid m \in M)$ для каждой монотонной сети $(f_m \in A(T) \mid m \in M)$ и каждой функции $f \in A(T)$. Если $A(T)$ – решеточное векторное пространство, то это свойство равносильно каждому из следующих свойств:

- 1) условие $(f_m \in A(T)_+ \mid m \in M) \downarrow 0$ в $F(T)$ влечет условие $(\xi f_m \mid m \in M) \downarrow 0$ в $\mathbb{R}$;
- 2) условия $f \in A(T)$ и $(f_m \in A(T)_+ \mid m \in M) \uparrow f$ в $F(T)$ влекут условие $(\xi f_m \mid m \in M) \uparrow \xi f$ в $\mathbb{R}$.

Аналогичная равносильность свойств 1) и 2) справедлива для *поточечной σ -непрерывности* по последовательностям $(f_m \in A(T) \mid m \in M \subset \omega)$.

Следующая лемма является ключевой для дальнейших рассуждений, поэтому приводим ее с доказательством, хотя она является хорошо известной (см. [12, п. 73D]).

ЛЕММА 1. *Функционал φ на $C_c(T, \mathcal{G})$ является поточечно непрерывным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(f_m \in C_c(T, \mathcal{G})_+ \mid m \in M) \downarrow 0$ в $F(T)$. Зафиксируем $m_0 \in M$ и рассмотрим функцию $g \equiv f_{m_0}$ и компактное множество $C \equiv \text{cl}\{t \in T \mid g(t) > 0\}$. Для C существует функция $h \in C_c(T)_+$ такая, что $h \geq \chi(C)$.

Возьмем $\varepsilon > 0$. Тогда найдется $a > 0$ такое, что $a\varphi(h) < \varepsilon$. Рассмотрим открытые множества $G_m \equiv \{t \in T \mid f_m(t) < a\}$. Так как $(f_m \mid m \in M) \downarrow 0$, то $(G_m \mid m \in M) \uparrow T$. Поэтому существует конечное покрытие $(G_n \mid n \in N \subset M)$ множества C . Из направленности M следует, что существует $m \in M$ такое, что $n \leq m$ для любого $n \in N$. Поэтому $G_m \supset G_n$ для любого n . Значит, $C \subset G_m$. Возьмем $l \in M$ такое, что $l \geq m_0$ и $l \geq m$. Тогда $f_l \leq g$ и $f_l \leq f_m$. Из первого неравенства следует, что $H \equiv \text{coz} f_l \subset C \subset G_m$, а из второго неравенства следует, что $f_l(t) \leq f_m(t) < a = a\chi(C)(t) \leq ah(t)$ для любой точки $t \in H$. Значит, $f_l \leq ah$ влечет $\varphi f_l \leq a\varphi(h) < \varepsilon$. Если $k < l$, то $\varphi f_k \leq \varphi f_l < \varepsilon$. Таким образом, $(\varphi f_m \mid m \in M) \downarrow 0$. Лемма доказана.

Используя свойство поточечной непрерывности функционала φ , будем строить его продолжение некоторым упрощенным вариантом метода Даниэля, описанного

в [29]. Приведем необходимые нам сведения из [29], опуская их доказательство.

Рассмотрим множество $S(T, C_c(T, \mathcal{G}))$ всех функций $g \in F(T)$ таких, что $g = \sup(f_m \in C_c(T, \mathcal{G}) \mid m \in M)$ в $F(T)$ для некоторой сети $(f_m \in C_c(T, \mathcal{G}) \mid m \in M) \uparrow$ и $g \leq f$ для некоторой функции $f \in C_c(T, \mathcal{G})$. Такие функции будем называть *супремальными для $C_c(T, \mathcal{G})$* . Аналогичным образом рассмотрим множество $I(T, C_c(T, \mathcal{G}))$ всех функций $h \in F(T)$ таких, что $h = \inf(f_m \in C_c(T, \mathcal{G}) \mid m \in M)$ в $F(T)$ для некоторой сети $(f_m \in C_c(T, \mathcal{G}) \mid m \in M) \downarrow$ и $h \geq f$ для некоторой функции $f \in C_c(T, \mathcal{G})$. Такие функции будем называть *инфимальными для $C_c(T, \mathcal{G})$* . Ясно, что $C_c(T, \mathcal{G}) = S(T, C_c(T, \mathcal{G})) \cap I(T, C_c(T, \mathcal{G}))$.

Далее временно будем обозначать $S(T, C_c(T, \mathcal{G}))$ и $I(T, C_c(T, \mathcal{G}))$ через Y и Z соответственно.

ЛЕММА 2. *Множества Y и Z относительно операций в $F(T)$ обладают следующими свойствами:*

- 1) $\sum(a_i g_i \mid i \in I) \in Y$ и $\sum(a_i h_i \mid i \in I) \in Z$ для любых конечных коллекций $(a_i \in \mathbb{R}_+ \mid i \in I)$, $(g_i \in Y \mid i \in I)$ и $(h_i \in Z \mid i \in I)$;
- 2) $\inf(g_i \mid i \in I) \in Y$ и $\sup(h_i \mid i \in I) \in Z$ для любых конечных коллекций $(g_i \in Y \mid i \in I)$ и $(h_i \in Z \mid i \in I)$;
- 3) $\sup(g_i \mid i \in I) \in Y$ и $\inf(h_i \mid i \in I) \in Z$ для любых коллекций $(g_i \in Y \mid i \in I)$ и $(h_i \in Z \mid i \in I)$ и любых функций $g \in Y$ и $h \in Z$ таких, что $g_i \leq g$ и $h_i \geq h$ при всех i ;
- 4) $g \wedge \mathbf{1} \in Y$, $g \vee (-\mathbf{1}) \in Y$, $h \wedge \mathbf{1} \in Z$ и $h \vee (-\mathbf{1}) \in Z$ для любых функций $g \in Y$ и $h \in Z$;
- 5) $-Y \subset Z$ и $-Z \subset Y$, т.е. $-g \in Z$ и $-h \in Y$ для любых $g \in Y$ и $h \in Z$.

Определим на Y вещественный функционал $\bar{\varphi}$, полагая $\bar{\varphi}g \equiv \sup\{\varphi f \mid f \in C_c(T, \mathcal{G}) \wedge f \leq g\}$ для каждого $g \in Y$. Аналогичным образом определим на Z вещественный функционал $\underline{\varphi}$, полагая $\underline{\varphi}h \equiv \inf\{\varphi f \mid f \in C_c(T, \mathcal{G}) \wedge f \geq h\}$ для каждого $h \in Z$. Ясно, что $\bar{\varphi}$ и $\underline{\varphi}$ являются продолжениями φ .

С помощью леммы 1 доказывается

ЛЕММА 3. *Если $g \in Y$ и $(f_m \mid m \in M) \uparrow g$ для некоторой сети $(f_m \in C_c(T, \mathcal{G})_+ \mid m \in M)$, то $(\varphi f_m \mid m \in M) \uparrow \bar{\varphi}g$.*

ЛЕММА 4. *Функционал $\bar{\varphi}$ на множестве Y и функционал $\underline{\varphi}$ на множестве Z обладают следующими свойствами:*

- 1) $\bar{\varphi}$ и $\underline{\varphi}$ возрастают;
- 2) $\bar{\varphi}(\sum(a_i g_i \mid i \in I)) = \sum(a_i \bar{\varphi}g_i \mid i \in I)$ и $\underline{\varphi}(\sum(a_i h_i \mid i \in I)) = \sum(a_i \underline{\varphi}h_i \mid i \in I)$ для любых конечных коллекций $(a_i \in \mathbb{R}_+ \mid i \in I)$, $(g_i \in Y \mid i \in I)$ и $(h_i \in Z \mid i \in I)$;
- 3) $(\bar{\varphi}(g_m) \mid m \in M) \uparrow \bar{\varphi}g$ для любой сети $(g_m \in Y \mid m \in M)$ и любой функции $g \in Y$ такой, что $(g_m \in Y \mid m \in M) \uparrow g$ в $F(T)$;
- 4) $\underline{\varphi}(-g) = -\bar{\varphi}(g)$ и $\bar{\varphi}(-h) = -\underline{\varphi}(h)$ для любых функций $g \in Y$ и $h \in Z$;
- 5) $\underline{\varphi}v \leq \bar{\varphi}u$ и $\bar{\varphi}u \leq \underline{\varphi}w$ для любых функций $u \in Y$ и $v, w \in Z$ таких, что $v \leq u \leq w$.

Определим теперь на множестве $F_{bc}(T)$ всех вещественных ограниченных функций с компактными носителями вещественные функционалы $\tilde{\varphi}$ и $\underline{\varphi}$, полагая $\tilde{\varphi}f \equiv \inf\{\bar{\varphi}g \mid g \in Y \wedge g \geq f\}$ и $\underline{\varphi}f \equiv \sup\{\underline{\varphi}h \mid h \in Z \wedge h \leq f\}$ для каждой функции $f \in F_{bc}(T)$. Это определение корректно. Действительно, так как функция f ограничена и имеет компактный носитель, то существуют компактное множество C и

число $a > 0$ такие, что $|f| \leq a\chi(C)$. Поэтому $|f| \leq a\chi(C) \leq f_0$ для некоторой функции $f_0 \in C_c(T, \mathcal{G})$. В результате $\tilde{\varphi}f \geq \varphi(-f_0) > -\infty$ и $\varphi f \leq \varphi f_0 < \infty$. Ясно, что $\tilde{\varphi}$ является продолжением $\bar{\varphi}$, а φ является продолжением $\underline{\varphi}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Функционалы $\tilde{\varphi}$ и φ на $F_{bc}(T)$ обладают следующими свойствами:*

- 1) $\tilde{\varphi}$ и φ возрастают;
- 2) $\varphi f \leq \tilde{\varphi}f$ для любого $f \in F_{bc}(T)$;
- 3) $\tilde{\varphi}(-f) = -\varphi f$ и $\varphi(-f) = -\tilde{\varphi}f$ для любого $f \in F_{bc}(T)$;
- 4) $\tilde{\varphi}(af) = a\tilde{\varphi}f$ и $\varphi(af) = a\varphi f$ для любых $a \in \mathbb{R}_+$ и $f \in F_{bc}(T)$;
- 5) $\tilde{\varphi}(f' + f'') \leq \tilde{\varphi}f' + \tilde{\varphi}f''$ и $\varphi(f' + f'') \geq \varphi f' + \varphi f''$ для любых $f', f'' \in F_{bc}(T)$;
- 6) $(\tilde{\varphi}f_n \mid n \in \mathbb{N}) \uparrow \tilde{\varphi}f$ для любой последовательности $(f_n \in F_{bc}(T) \mid n \in \mathbb{N})$ и любой функции $f \in F_{bc}(T)$ такой, что $(f_n \mid n \in \mathbb{N}) \uparrow f$ в $F(T)$.

Функцию $f \in F(T)$ назовем *даниелевской относительно семейства $C_c(T, \mathcal{G})$ и функционала φ* , если для любого $\varepsilon > 0$ существуют функции $g \in S(T, C_c(T, \mathcal{G}))$ и $h \in I(T, C_c(T, \mathcal{G}))$ такие, что $h \leq f \leq g$ и $\bar{\varphi}g - \varphi h < \varepsilon$. Семейство всех таких функций обозначим через $D(T, C_c(T, \mathcal{G}), \varphi)$. Ясно, что $D(T, C_c(T, \mathcal{G}), \varphi) = \{f \in F_{bc}(T) \mid \tilde{\varphi}f = \varphi f\}$. Определим вещественный функционал $\hat{\varphi}$ на $D(T, C_c(T, \mathcal{G}), \varphi)$, положив $\hat{\varphi}f \equiv \tilde{\varphi}f = \varphi f$. Далее иногда вместо $D(T, C_c(T, \mathcal{G}), \varphi)$ будем писать просто X_φ .

С помощью предыдущих утверждений доказывается следующая

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $(T, \mathcal{G})$ – локально компактное пространство и $\varphi \in (C_c(T))^+_{\sim}$. Тогда:*

- 1) *семейство $D(T, C_c(T, \mathcal{G}), \varphi)$ является векторным решеточным пространством;*
- 2) $S(T, C_c(T, \mathcal{G})) \cup I(T, C_c(T, \mathcal{G})) \subset D(T, C_c(T, \mathcal{G}), \varphi)$;
- 3) *функционал $\hat{\varphi}$ является линейным положительным продолжением функционала φ ;*
- 4) *функционал $\hat{\varphi}$ является поточечно σ -непрерывным.*

Докажем теперь, что $S_c(T, \mathcal{G}) \subset D(T, C_c(T, \mathcal{G}), \varphi)$.

Далее через $\mathcal{G}_c$ будем обозначать множество всех открытых предкомпактных множеств из T .

ЛЕММА 5. *Пусть $(T, \mathcal{G})$ – локально компактное пространство и $A \in \mathcal{A}_c(T, \mathcal{G})$. Тогда $A = \bigcup (C_i \cap D_i \mid i \in I)$ для некоторых конечных коллекций $(C_i \in \mathcal{C} \mid i \in I)$ и $(D_i \in \mathcal{G}_c \mid i \in I)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию $A = \bigcup (F_i \cap G_i \mid i \in I) \subset C$ для некоторых конечных коллекций $(F_i \in \mathcal{F} \mid i \in I)$ и $(G_i \in \mathcal{G} \mid i \in I)$ и некоторого компактного множества C . Так как T локально компактно, то существует открытое предкомпактное множество H такое, что $C \subset H$. Поэтому

$$F_i \cap G_i = F_i \cap G_i \cap C \cap H = (F_i \cap C) \cap (G_i \cap H).$$

Рассмотрим множества $C_i \equiv F_i \cap C$ и $D_i \equiv G_i \cap H$. Тогда $A = \bigcup (C_i \cap D_i \mid i \in I)$.

ЛЕММА 6. *Пусть $A \in \mathcal{A}_c(T, \mathcal{G})$. Тогда $\chi(A) \in D(T, C_c(T, \mathcal{G}), \varphi)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если D – открытое предкомпактное множество, то $g \equiv \chi(D) \in Y \subset X_\varphi$. Если C – компактное множество, то $h \equiv \chi(C) \in Z \subset X_\varphi$. Так как X_φ – решетка, то $\chi(C \cap D) = g \wedge h \in X_\varphi$.

По лемме 5 $A = \bigcup (C_i \cap D_i \mid i \in I)$. Поэтому $\chi(A) = \sup(\chi(C_i \cap D_i) \mid i \in I) \in X_\varphi$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. $S_c(T, \mathcal{G}) \subset D(T, C_c(T, \mathcal{G}), \varphi)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in S_c$. Возьмем любое $\varepsilon > 0$. При доказательстве теоремы 1 из [39, § 2, п. 4] было установлено, что для ε существует ступенчатая функция $u \in \text{St}(T, \mathcal{A}(T, \mathcal{G}))$ такая, что $|f(t) - u(t)| < \varepsilon/4$ для всех $t \in T$. Возьмем $g' \equiv u - (\varepsilon/4)\mathbf{1}$ и $h' \equiv u + (\varepsilon/4)\mathbf{1}$. Тогда

$$\begin{aligned} g'(t) &= (u(t) - f(t)) + f(t) - \varepsilon/4 \leq f(t), \\ h'(t) &= (u(t) - f(t)) + f(t) + \varepsilon/4 \geq f(t). \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} g'(t) &= (u(t) - f(t)) + f(t) - \varepsilon/4 > f(t) - \varepsilon/2, \\ h'(t) &= (u(t) - f(t)) + f(t) + \varepsilon/4 < f(t) + \varepsilon/2. \end{aligned}$$

Поскольку функция f ограничена и имеет компактный носитель, то существуют компактное множество C и числа a и b такие, что $a\chi(C) \leq f \leq b\chi(C)$. Обозначим $\chi(C)$ через x и рассмотрим ступенчатые функции с компактными носителями $v \equiv (ax \vee g') \wedge bx$ и $w \equiv (ax \vee h') \wedge bx$. Тогда

$$f(t) - \varepsilon/2 < v(t) \leq f(t) \leq w(t) < f(t) + \varepsilon/2$$

для любого $t \in T$ и $0 \leq w - v \leq \varepsilon x$.

Так как $v \in \text{St}(T, \mathcal{A}(T, \mathcal{G}))$, то $v = \sum (a_k \chi(A_k) \mid k \in K)$ для некоторых коллекций $(a_k \in \mathbb{R} \mid k \in K)$ и $(A_k \in \mathcal{A}(T, \mathcal{G}) \mid k \in K)$. В силу того, что $\mathcal{A}(T, \mathcal{G})$ – алгебра, можно считать, что все множества A_k попарно не пересекаются и все a_k отличны от нуля. Тогда $\bigcup (A_k \mid k \in K) = \text{coz } v \subset C$. Следовательно, каждое множество A_k является предкомпактным. По лемме 6 $\chi(A_k) \in X_\varphi$. Значит, $v \in X_\varphi$. Аналогичным образом $w \in X_\varphi$.

Возьмем произвольное $\delta > 0$. По доказанному выше для $\varepsilon \equiv \delta/(3\widehat{\varphi}(x))$ подберем соответствующие v и w из X_φ . Для них существуют $g', g'' \in Y$ и $h', h'' \in Z$ такие, что $h' \leq v \leq g'$, $h'' \leq w \leq g''$, $\overline{\varphi}g' - \underline{\varphi}h' < \delta/3$ и $\overline{\varphi}g'' - \underline{\varphi}h'' < \delta/3$. Ясно, что $h' \leq f \leq g''$. Кроме того,

$$\begin{aligned} \overline{\varphi}g'' - \underline{\varphi}h' &= (\overline{\varphi}g'' - \underline{\varphi}h'') + (\underline{\varphi}h'' - \overline{\varphi}g') + (\overline{\varphi}g' - \underline{\varphi}h') \\ &< 2\delta/3 + \widehat{\varphi}h'' - \widehat{\varphi}g' \leq 2\delta/3 + \widehat{\varphi}w - \widehat{\varphi}v \\ &= 2\delta/3 + \widehat{\varphi}(w - v) \leq 2\delta/3 + \varepsilon\widehat{\varphi}x = \delta. \end{aligned}$$

Следовательно, $f \in X_\varphi$.

Рассмотрим линейный положительный функционал $\widehat{\varphi}$ на множестве $S_c(T, \mathcal{G})$ и докажем, что на этом множестве он является тонким.

ЛЕММА 7. Для любого $A \in \mathcal{A}_c(T, \mathcal{G})$ и любого $\varepsilon > 0$ существует $K \in \mathcal{C}$ такое, что $K \subset A$ и $\widehat{\varphi}(\chi(A \setminus K)) < \varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть D – открытое предкомпактное множество, $g \equiv \chi(D)$. Так как $g = \sup\{f \in C_c(T, \mathcal{G})_+ \mid f \leq g\}$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $f \in C_c(T, \mathcal{G})_+$ такое, что $f \leq g$ и $\bar{\varphi}g - \varepsilon/2 < \varphi f$. Рассмотрим открытое множество $D' \equiv \text{coz } f$ и функцию $g' \equiv \chi(D')$. Так как $\varphi f = \bar{\varphi}f \leq \bar{\varphi}g'$, то $\bar{\varphi}g - \varepsilon/2 < \bar{\varphi}g'$. По лемме 6 $g, g' \in X_\varphi$. Поэтому

$$\hat{\varphi}g - \hat{\varphi}g' = \tilde{\varphi}g - \tilde{\varphi}g' = \bar{\varphi}g - \bar{\varphi}g' < \varepsilon/2.$$

Рассмотрим замкнутые множества $K_n \equiv \{t \in T \mid f(t) \geq 1/n\} \subset D'$ и функции $h_n \equiv \chi(K_n)$. Ясно, что K_n компактны. Так как $(K_n \mid n \in \mathbb{N}) \uparrow D'$, то $(h_n \mid n \in \mathbb{N}) \uparrow g'$. В силу поточечной σ -непрерывности функционала $\hat{\varphi}$ получаем $(\hat{\varphi}h_n \mid n \in \mathbb{N}) \uparrow \hat{\varphi}g'$. Поэтому существует n такое, что $\hat{\varphi}g' - \varepsilon/2 \leq \hat{\varphi}h_n \leq \hat{\varphi}g'$. В результате $g - h_n = \chi(D \setminus K_n)$ влечет

$$\hat{\varphi}(\chi(D \setminus K_n)) = \hat{\varphi}g - \hat{\varphi}h_n \leq \hat{\varphi}g - \hat{\varphi}g' + \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Пусть теперь C – компактное множество. Для множества D и $\varepsilon > 0$ согласно установленному выше существует компактное множество L такое, что $L \subset D$ и $\hat{\varphi}(\chi(D \setminus L)) < \varepsilon$. Рассмотрим компактное множество $K \equiv C \cap L \subset C \cap D$. Тогда получаем

$$\hat{\varphi}(\chi(C \cap D \setminus K)) = \hat{\varphi}(\chi(C \cap (D \setminus L))) \leq \hat{\varphi}(\chi(D \setminus L)) < \varepsilon.$$

Пусть $A \in \mathcal{A}_c(T, \mathcal{G})$. По лемме 5 $A = \bigcup(C_i \cap D_i \mid i = 1, \dots, n)$. Для $\varepsilon > 0$ существуют компактные множества K_i такие, что $K_i \subset C_i \cap D_i$ и $\hat{\varphi}(\chi(C_i \cap D_i \setminus K_i)) < \varepsilon/n$. Рассмотрим компактное множество $K \equiv \bigcup(K_i \mid i = 1, \dots, n)$. Так как

$$A \setminus K = \bigcup(C_i \cap D_i \setminus K \mid i = 1, \dots, n) \subset \bigcup(C_i \cap D_i \setminus K_i \mid i = 1, \dots, n),$$

то

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(\chi(A \setminus K)) &\leq \hat{\varphi}\left(\sum(\chi(C_i \cap D_i \setminus K_i) \mid i = 1, \dots, n)\right) \\ &= \sum(\hat{\varphi}(\chi(C_i \cap D_i \setminus K_i)) \mid i = 1, \dots, n) < \varepsilon. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $(T, \mathcal{G})$ – локально компактное пространство и $\varphi \in (C_c(T, \mathcal{G}))_+^\sim$. Тогда функционал $\hat{\varphi}$ на $S_c(T, \mathcal{G})$ является линейным положительным тонким. Более того, он является единственным линейным положительным тонким продолжением функционала φ на $S_c(T, \mathcal{G})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(A_n \in \mathcal{A}_c(T, \mathcal{G}) \mid n \in \mathbb{N}) \downarrow 0$ и $\varepsilon > 0$. По лемме 7 для A_n существует компактное множество L_n такое, что $L_n \subset A_n$ и $\hat{\varphi}(\chi(A_n \setminus L_n)) < \varepsilon/2^{n+1}$. Рассмотрим компактные множества $K_n \equiv \bigcap(L_i \mid i = 1, \dots, n) \subset A_n$. Так как $A_n \setminus K_n = \bigcup(A_n \setminus L_i \mid i = 1, \dots, n) \subset \bigcup(A_i \setminus L_i \mid i = 1, \dots, n)$, то

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(\chi(A_n \setminus K_n)) &\leq \hat{\varphi}\left(\sum(\chi(A_i \setminus L_i) \mid i = 1, \dots, n)\right) \\ &= \sum(\hat{\varphi}(\chi(A_i \setminus L_i)) \mid i = 1, \dots, n) \\ &< \varepsilon \sum(1/2^{i+1} \mid i = 1, \dots, n) \leq \varepsilon/2. \end{aligned}$$

Рассмотрим компактное множество $K \equiv \bigcap (K_n \mid n \in \mathbb{N})$ и функции $h \equiv \chi(K)$ и $h_n \equiv \chi(K_n)$. Так как $(K_n \mid n \in \mathbb{N}) \downarrow K$, то $(h_n \mid n \in \mathbb{N}) \downarrow h$. В силу поточечной σ -непрерывности функционала $\widehat{\varphi}$ получаем $(\widehat{\varphi}h_n \mid n \in \mathbb{N}) \downarrow \widehat{\varphi}h$. Следовательно, существует n такое, что $\widehat{\varphi}h + \varepsilon/2 > \widehat{\varphi}h_n$. В результате

$$\widehat{\varphi}\chi(A_n \setminus K) = \widehat{\varphi}\chi(A_n) - \widehat{\varphi}h < \widehat{\varphi}\chi(A_n) - \widehat{\varphi}h_n + \varepsilon/2 = \widehat{\varphi}\chi(A_n \setminus K_n) + \varepsilon/2 \leq \varepsilon.$$

Значит, функционал $\widehat{\varphi}$ является положительным внутренне компактным.

Далее, для любой точки $t \in T$ существует предкомпактная открытая окрестность D . Рассмотрим функцию $g \equiv \chi(D) \in X_\varphi$. Если $f \in X_\varphi$ и $|f| \leq g$, то $-\widehat{\varphi}g = \widehat{\varphi}(-g) \leq \widehat{\varphi}f \leq \widehat{\varphi}g$ влечет $|\widehat{\varphi}f| \leq \widehat{\varphi}g < \infty$. Значит, $\widehat{\varphi}$ является локально ограниченным.

Наконец, свойство поточечной σ -непрерывности следует из теоремы 1. Таким образом, функционал $\widehat{\varphi}$ является тонким.

Пусть теперь ψ является линейным положительным тонким функционалом на S_c , продолжающим функционал φ . Докажем, что $\psi = \widehat{\varphi}$.

Сначала докажем, что $\psi\chi(D) = \widehat{\varphi}\chi(D)$ для любого предкомпактного открытого множества D . Так как функционал ψ является положительным внутренне компактным, то для любого $\varepsilon > 0$ существует компактное множество $C \subset D$ такое, что $\psi\chi(D \setminus C) < \varepsilon$. Обозначим $\chi(D)$ и $\chi(C)$ через g и h соответственно. Следовательно, $\psi g < \psi h + \varepsilon$. Рассмотрим замкнутое множество $F \equiv T \setminus D$. Так как пространство T тихоновское и множество C компактное, то существует непрерывная функция f на T такая, что $0 \leq f \leq 1$, $f(t) = 0$ для любого $t \in F$ и $f(t) = 1$ для любого $t \in C$. Ясно, что $h \leq f \leq g$. Поэтому $\psi g < \psi h + \varepsilon \leq \psi f + \varepsilon = \varphi f + \varepsilon$. Значит,

$$\psi g = \sup\{\varphi f \mid f \in C_c \wedge f \leq g\} \equiv \overline{\varphi}g = \widehat{\varphi}g.$$

Пусть теперь K – произвольное компактное множество. Тогда существует предкомпактное открытое множество $D \supset K$. Рассмотрим предкомпактное открытое множество $E \equiv D \setminus K$. Так как $\chi(K) = \chi(D) - \chi(E)$, то $\psi\chi(K) = \psi\chi(D) - \psi\chi(E) = \widehat{\varphi}\chi(D) - \widehat{\varphi}\chi(E) = \widehat{\varphi}\chi(K)$.

Пусть теперь $A \in \mathcal{A}_c$. Так же, как и выше, для $\varepsilon > 0$ существует компактное множество $K \subset A$ такое, что $\psi\chi(A \setminus K) < \varepsilon/2$. Аналогично, существует компактное множество $L \subset A$ такое, что $\widehat{\varphi}\chi(A \setminus L) < \varepsilon/2$. Рассмотрим компактное множество $C \equiv K \cup L \subset A$. Так как ψ и $\widehat{\varphi}$ возрастают, то $\psi\chi(A \setminus C) < \varepsilon/2$ и $\widehat{\varphi}\chi(A \setminus C) < \varepsilon/2$. Следовательно,

$$|\psi\chi(A) - \widehat{\varphi}\chi(A)| \leq |\psi\chi(A) - \psi\chi(C)| + |\widehat{\varphi}\chi(C) - \widehat{\varphi}\chi(A)| < \varepsilon.$$

Так как ε произвольно, то $\psi\chi(A) = \widehat{\varphi}\chi(A)$.

Наконец, пусть $f \in S_c$. Возьмем произвольное $\delta > 0$ и $\varepsilon \equiv \delta/\psi(x)$, где x – функция из доказательства предложения 2. Для ε рассмотрим функции v и w из доказательства предложения 2. Тогда $v = \sum(a_k\chi(A_k) \mid k \in K)$ для некоторой конечной коллекции $(A_k \in \mathcal{A}_c \mid k \in K)$. Следовательно,

$$\psi v = \sum(a_k\psi\chi(A_k) \mid k \in K) = \sum(a_k\widehat{\varphi}\chi(A_k) \mid k \in K) = \widehat{\varphi}v.$$

Аналогично, $\psi w = \widehat{\varphi}w$. Так как $v \leq f \leq w$ и $0 \leq w - v \leq \varepsilon x$, то

$$\begin{aligned} \psi f &\leq \psi w \leq \psi v + \varepsilon\psi x = \widehat{\varphi}v + \delta \leq \widehat{\varphi}f + \delta, \\ \widehat{\varphi}f &\leq \widehat{\varphi}w \leq \widehat{\varphi}v + \varepsilon\widehat{\varphi}x = \psi v + \delta \leq \psi f + \delta. \end{aligned}$$

Следовательно, $|\psi f - \widehat{\varphi} f| \leq \delta$. Так как δ произвольно, то $\psi f = \widehat{\varphi} f$. Теорема доказана.

По этой теореме можно корректно определить отображение P_0 из $(C_c(T, \mathcal{G})^\sim)_+$ в $(S_c(T, \mathcal{G})^\Delta)_+$, полагая $P_0 \varphi \equiv \widehat{\varphi}$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $(T, \mathcal{G})$ – локально компактное пространство. Тогда отображение P_0 из $(C_c(T, \mathcal{G})^\sim)_+$ в $(S_c(T, \mathcal{G})^\Delta)_+$ является биективным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\varphi' \neq \varphi''$, то, очевидно, $\widehat{\varphi}' \neq \widehat{\varphi}''$. Значит, P_0 инъективно. Если $\psi \in (S_c^\Delta)_+$, то функционал $\varphi \equiv \psi \mid C_c$ является линейным и положительным. Рассмотрим его продолжение $\widehat{\varphi}$. По теореме 2 $\psi = \widehat{\varphi}$. Значит, P_0 биективно.

Теперь можно доказать основную теорему этого пункта.

ТЕОРЕМА 3 (о следствии). *Радоновское представление для локально компактного пространства следует из общего радоновского представления для произвольного хаусдорфова пространства.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(T, \mathcal{G})$ – локально компактное пространство. По теореме 2 существует биекция P_0 из $(C_c^\sim)_+$ на $(S_c^\Delta)_+$. По теореме 1 из [39, § 2, п. 5] об общем радоновском представлении существует биекция V из $(S_c^\Delta)_+$ на $(\mathfrak{M}^{wo})_0$. Биекция $V \circ P_0$ дает необходимое радоновское представление.

Следствие 1 можно значительно уточнить.

ТЕОРЕМА 4. *Отображение P_0 имеет единственное расширение до такого изоморфизма P из решеточного векторного пространства $C_c(T, \mathcal{G})^\sim$ на решеточное векторное пространство $S_c(T, \mathcal{G})^\Delta$, что $P\varphi = P_0(\varphi_+) - P_0(-\varphi_-)$ для каждого $\varphi \in C_c(T, \mathcal{G})^\sim$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим сначала, что $P_0(a\varphi) = aP_0\varphi$ и $P_0(\varphi' + \varphi'') = P_0\varphi' + P_0\varphi''$ для любых $a \in \mathbb{R}_+$ и $\varphi', \varphi'' \in (C_c^\sim)_+$.

Можно считать, что $a > 0$. Обозначим $a\varphi$ через ψ . Возьмем любые $g \in Y$ и $\varepsilon > 0$. Рассмотрим множество $L_g \equiv \{f \in C_c \mid f \leq g\}$. Тогда из $\overline{\varphi}g = \sup(\varphi f \mid f \in L_g)$ и $\overline{\psi}g = \sup(\psi f \mid f \in L_g)$ следует, что существуют $u, v \in L_g$ такие, что $\overline{\varphi}g - \varepsilon/(2a) < \varphi u$ и $\overline{\psi}g - \varepsilon/2 < \psi v$. Рассмотрим функцию $w \equiv u \vee v \in L_g$. Тогда

$$|(a\overline{\varphi})g - \overline{\psi}g| \leq |a\overline{\varphi}g - a\varphi w| + |\psi w - \overline{\psi}g| < a|\overline{\varphi}g - \varphi w| + \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Из произвольности ε следует, что $(a\overline{\varphi})g = \overline{\psi}g$.

Аналогичным образом доказывается, что $(a\varphi)h = \underline{\psi}h$ для любого $h \in Z$.

Пусть теперь $f \in S_c$ и $\varepsilon > 0$. Рассмотрим множество $Z_f \equiv \{h \in Z \mid h \leq f\}$. Тогда из $\widehat{\varphi}f = \underline{\varphi}f = \sup(\varphi h \mid h \in Z_f)$ и $\widehat{\psi}f = \sup(\psi h \mid h \in Z_f)$ так же, как и выше, следует, что $(a\widehat{\varphi})f = \widehat{\psi}f$.

Обозначим $\varphi' + \varphi''$ через ψ . Пусть $g \in Y$ и $\varepsilon > 0$. Тогда из $\overline{\varphi'}g = \sup(\varphi' f \mid f \in L_g)$, $\overline{\varphi''}g = \sup(\varphi'' f \mid f \in L_g)$ и $\overline{\psi}g = \sup(\psi f \mid f \in L_g)$ следует, что существуют $u, v, w \in L_g$ такие, что $\overline{\varphi'}g - \varepsilon/3 < \varphi' u$, $\overline{\varphi''}g - \varepsilon/3 < \varphi'' v$ и $\overline{\psi}g - \varepsilon/3 < \psi w$. Рассмотрим функцию $x \equiv u \vee v \vee w \in L_g$. Тогда

$$|(\overline{\varphi'} + \overline{\varphi''})g - \overline{\psi}g| \leq |\overline{\varphi'}g - \varphi' x| + |\overline{\varphi''}g - \varphi'' x| + |\psi x - \overline{\psi}g| < \varepsilon.$$

Следовательно, $(\overline{\varphi'} + \overline{\varphi''})g = \overline{\psi}g$.

Аналогичным образом доказывается, что $(\varphi' + \varphi'')h = \underline{\psi}h$ для любого $h \in Z$.

Пусть теперь $f \in S_c$ и $\varepsilon > 0$. Тогда $\widehat{\varphi}'f = \underline{\varphi}'f = \sup(\underline{\varphi}'h \mid h \in Z_f)$, $\widehat{\varphi}''f = \sup(\underline{\varphi}''h \mid h \in Z_f)$ и $\widehat{\psi}f = \sup(\underline{\psi}h \mid h \in Z_f)$. Так же, как и выше, отсюда следует, что $(\widehat{\varphi}' + \widehat{\varphi}'')f = \widehat{\psi}f$.

Проверим теперь, что отображение P_0 изотонно и сохраняет любые порядковые границы. Пусть $\varphi \leq \psi$. Возьмем любое $g \in Y$ и рассмотрим множество $L_g \equiv \{f \in C_c \mid f \leq g\}$. Тогда из $\overline{\varphi}g = \sup(\varphi f \mid f \in L_g)$ и $\overline{\psi}g = \sup(\psi f \mid f \in L_g)$ следует, что $\overline{\varphi}g \leq \overline{\psi}g$.

Возьмем теперь любое $f \in S_c$ и рассмотрим множество $Y^f \equiv \{g \in Y \mid g \geq f\}$. Тогда из $\widehat{\varphi}f = \widetilde{\varphi}f = \inf(\overline{\varphi}g \mid g \in Y^f)$ и $\widehat{\psi}f = \inf(\overline{\psi}g \mid g \in Y^f)$ следует, что $\widehat{\varphi}f \leq \widehat{\psi}f$. Таким образом, P_0 является монотонным. Из биективности P_0 теперь следует, что P_0 является изотонным. Следовательно, P_0 сохраняет любые порядковые границы.

В силу предложения 3.6.1 из [24] отображение P_0 имеет единственное расширение до инъективного линейного оператора P из $A \equiv C_c^\sim$ в $B \equiv S_c^\Delta$ такого, что $P\varphi = P_0(\varphi_+) - P_0(-\varphi_-)$.

Так как P_0 сохраняет любые порядковые границы, то $\varphi_1 \wedge \varphi_2 = 0$ влечет $P\varphi_1 \wedge P\varphi_2 = P_0\varphi_1 \wedge P_0\varphi_2 = P_0(\varphi_1 \wedge \varphi_2) = 0$. В силу [12, п. 14, E(b)] P является решеточным линейным оператором.

Если $\xi \in B$, то $\xi = \xi_+ + \xi_-$. Согласно следствию 1 $\xi_+ = P_0\varphi'$ и $-\xi_- = P_0\varphi''$ для некоторых $\varphi', \varphi'' \in A_+$. Рассмотрим функционал $\varphi \equiv \varphi' - \varphi'' \in A$. Тогда $\xi = P_0\varphi' - P_0\varphi'' = P\varphi' - P\varphi'' = P\varphi$. Это означает, что P является сюръективным. Таким образом, P – биективный решеточный линейный оператор. Поэтому P – необходимый изоморфизм.

7. Теорема о следствии для тихоновского пространства. В этом пункте покажем, что из общего ограниченного радоновского представления следует ограниченное радоновское представление для тихоновского пространства.

Пусть $(T, \mathcal{G})$ – тихоновское пространство и φ – линейный положительный узкий вещественный функционал на решеточном векторном пространстве $C_b(T, \mathcal{G})$ всех ограниченных непрерывных вещественнозначных функций на T , т.е. $\varphi \in (C_b(T, \mathcal{G})^\pi)_+$.

Покажем, что функционал φ продолжается до линейного положительного тонкого функционала $\widehat{\varphi}$ на решеточном векторном пространстве $S(T, \mathcal{G})$ всех метаконтинуальных функций на T .

Так же, как и в предыдущем пункте, следующая лемма является ключевой для дальнейших рассуждений. Поэтому приведем ее с доказательством, хотя она является хорошо известной.

ЛЕММА 1. *Функционал φ на $C_b(T, \mathcal{G})$ является поточечно непрерывным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(f_m \in C_b \mid m \in M) \downarrow 0$ в $F(T)$. Если $\varphi f_m = 0$ для всех $m \in M$, то все доказано. Поэтому предположим, что существует m_0 такое, что $\varphi f_{m_0} > 0$. Тогда $\|f_{m_0}\|_u > 0$ и $\varphi \mathbf{1} > 0$. Рассмотрим $M_0 \equiv \{m \in M \mid m \geq m_0\}$. Ясно, что $(f_m \mid m \in M_0) \downarrow 0$. Рассмотрим $g_m \equiv f_m / \|f_{m_0}\|_u$. Тогда $0 \leq g_m \leq g_{m_0} \leq \mathbf{1}$ для любого $m \in M_0$ и $(g_m \mid m \in M_0) \downarrow 0$.

Пусть для $\varepsilon > 0$ компактное множество K таково, что $f \in C_b$ и $|f| \leq \chi(T \setminus K)$ влечет $|\varphi f| < \varepsilon/2$. Возьмем $\delta \equiv \varepsilon/(2\varphi \mathbf{1})$. Рассмотрим открытые множества $G_m \equiv \{t \in T \mid g_m(t) < \delta\}$. Так как $(g_m \mid m \in M_0) \downarrow 0$, то $\bigcup (G_m \mid m \in$

$M_0) = T$. Выделим конечное покрытие $(G_n \mid n \in N \subset M_0)$ множества K . Для N существует m такое, что $m \geq n$ для всех $n \in N$. Если $t \in K$, то $t \in G_n$. Поэтому $g_m(t) \leq g_n(t) < \delta$. Рассмотрим непрерывную функцию $h_m \equiv (g_m - \delta \mathbf{1}) \vee 0 \leq \mathbf{1}$. Так как $0 \leq h_m \leq \chi(T \setminus K)$, то $\varphi g_m - \delta \varphi \mathbf{1} \leq \varphi h_m < \varepsilon/2$. Следовательно, $\varphi g_m < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Значит, $(\varphi g_m \mid m \in M_0) \downarrow 0$. Отсюда $(\varphi f_m \mid m \in M_0) \downarrow 0$ и, окончательно, $(\varphi f_m \mid m \in M) \downarrow 0$.

Рассмотрим множество $S(T, C_b(T, \mathcal{G}))$ всех ограниченных функций $f \in F_b(T)$ таких, что $f = \sup(f_m \in C_b(T, \mathcal{G}) \mid m \in M)$ в $F(T)$ для некоторой сети $(f_m \in C_b(T, \mathcal{G}) \mid m \in M)$, возрастающей вверх. Аналогичным образом рассмотрим множество $I(T, C_b(T, \mathcal{G}))$ всех функций $f \in F_b(T)$ таких, что $f = \inf(f_m \in C_b(T, \mathcal{G}) \mid m \in M)$ в $F(T)$ для некоторой сети $(f_m \in C_b(T, \mathcal{G}) \mid m \in M)$, убывающей вниз. Ясно, что $C_b(T, \mathcal{G}) = S(T, C_b(T, \mathcal{G})) \cap I(T, C_b(T, \mathcal{G}))$.

Далее вместо $S(T, C_b(T, \mathcal{G}))$ и $I(T, C_b(T, \mathcal{G}))$ временно будем писать просто Y и Z соответственно.

Определим на Y вещественный функционал $\bar{\varphi}$, полагая $\bar{\varphi}g \equiv \sup\{\varphi f \mid f \in C_b(T, \mathcal{G}) \wedge f \leq g\}$ для каждого $g \in Y$. Аналогичным образом определим на Z вещественный функционал $\underline{\varphi}$, полагая $\underline{\varphi}h \equiv \inf\{\varphi f \mid f \in C_b(T, \mathcal{G}) \wedge f \geq h\}$ для каждого $h \in Z$. Ясно, что $\bar{\varphi}$ и $\underline{\varphi}$ являются продолжениями φ .

Теперь определим на $F_b(T)$ вещественные функционалы $\tilde{\varphi}$ и φ , полагая $\tilde{\varphi}f \equiv \inf\{\bar{\varphi}g \mid g \in Y \wedge g \geq f\}$ и $\varphi f \equiv \sup\{\underline{\varphi}h \mid h \in Z \wedge h \leq f\}$ для каждой функции $f \in F_b(T)$. Ясно, что $\tilde{\varphi}$ является продолжением $\bar{\varphi}$, а φ является продолжением $\underline{\varphi}$.

Рассмотрим в $F_b(T)$ подмножество $X_\varphi \equiv D(T, \tilde{C}_b(T, \mathcal{G}), \varphi) \equiv \{f \in F_b(T) \mid \tilde{\varphi}f = \varphi f\}$. Определим вещественный функционал $\hat{\varphi}$ на X_φ , положив $\hat{\varphi}f \equiv \tilde{\varphi}f = \varphi f$.

Для $Y, Z, X_\varphi, \bar{\varphi}, \varphi, \tilde{\varphi}, \underline{\varphi}$ и $\hat{\varphi}$ справедливы леммы 2–4, предложение 1 и теорема 1 из предыдущего пункта.

Докажем теперь, что $S(T, \mathcal{G}) \subset D(T, C_b(T, \mathcal{G}), \varphi)$.

ЛЕММА 2. Пусть $A \in \mathcal{A}(T, \mathcal{G})$. Тогда $\chi(A) \in X_\varphi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если G – открытое множество, то $g \equiv \chi(G) \in Y \subset X_\varphi$. Если F – замкнутое множество, то $h \equiv \chi(F) \in Z \subset X_\varphi$. Так как X_φ – решетка, то $\chi(F \cap G) = g \wedge h \in X_\varphi$.

Так как $A = \bigcup(F_i \cap G_i \mid i \in I)$ для некоторых конечных коллекций $(F_i \in \mathcal{F} \mid i \in I)$ и $(G_i \in \mathcal{G} \mid i \in I)$, то $\chi(A) = \sup(\chi(F_i \cap G_i) \mid i \in I) \in X_\varphi$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. $S(T, \mathcal{G}) \subset D(T, C_b(T, \mathcal{G}), \varphi)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in S$. Возьмем любое $\varepsilon > 0$. При доказательстве теоремы 1 из [39, § 2, п. 4] было установлено, что для ε существует ступенчатая функция $u \in \text{St}(T, \mathcal{A}(T, \mathcal{G}))$ такая, что $|f(t) - u(t)| < \varepsilon/4$ для всех $t \in T$. Возьмем $v \equiv u - (\varepsilon/4)\mathbf{1}$ и $w \equiv u + (\varepsilon/4)\mathbf{1}$. Тогда $v(t) \leq f(t) \leq w(t)$, $v(t) > f(t) - \varepsilon/2$ и $w(t) < f(t) + \varepsilon/2$ для всех $t \in T$. Следовательно, $0 \leq w - v \leq \varepsilon x$, где $x \equiv \mathbf{1}$.

Так как $v \in \text{St}(T, \mathcal{A}(T, \mathcal{G}))$, то $v = \sum(a_k \chi(A_k) \mid k \in K)$ для некоторых конечных коллекций $(a_k \in \mathbb{R} \mid k \in K)$ и $(A_k \in \mathcal{A}(T, \mathcal{G}) \mid k \in K)$. В силу леммы 2 $v \in X_\varphi$. Аналогично, $w \in X_\varphi$.

Далее рассуждением, полностью повторяющим соответствующее рассуждение из доказательства предложения 2 п. 6, убеждаемся, что $f \in X_\varphi$.

Рассмотрим теперь линейный положительный функционал $\hat{\varphi}$ на $S(T, \mathcal{G})$ и докажем, что на этом множестве он является тонким.

ЛЕММА 3. Для любого $A \in \mathcal{A}(T, \mathcal{G})$ и любого $\varepsilon > 0$ существует $K \in \mathcal{C}$ такое, что $K \subset A$ и $\widehat{\varphi}(\chi(A \setminus K)) < \varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G – открытое множество и $g \equiv \chi(G)$. Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Рассмотрим множество $B \equiv \{f \in C_b \mid 0 \leq f \leq g\}$. Так как $\overline{\varphi}g = \sup(\varphi f \mid f \in B)$, то существует $f \in B$ такое, что $\overline{\varphi}g - \varepsilon/4 < \varphi f$. Рассмотрим функции $f_n \equiv (f - (1/n)\mathbf{1}) \vee 0 \in B$. Так как $(f_n \mid n \in \mathbb{N}) \uparrow f$, то по лемме 1 $(\varphi f_n \mid n \in \mathbb{N}) \uparrow \varphi f$. Поэтому существует m такое, что $\varphi f - \varepsilon/4 < \varphi f_m$. В результате $\overline{\varphi}g - \varepsilon/2 < \varphi f_m$. Если $t \in \text{coz } f_m$, то $f(t) - 1/m > 0$. Следовательно, $\text{coz } f_m \subset \{t \in T \mid f(t) > 1/m\}$ влечет $C \equiv \text{cl } \text{coz } f_m \subset \{t \in T \mid f(t) \geq 1/m\} \subset \text{coz } f \subset G$. Для замкнутого множества C мы получаем неравенство $\widehat{\varphi}g - \varepsilon/2 < \widehat{\varphi}f_m \leq \widehat{\varphi}\chi(C)$, откуда $\widehat{\varphi}\chi(G \setminus C) = \widehat{\varphi}g - \widehat{\varphi}\chi(C) < \varepsilon/2$.

Так как функционал φ является узким, то существует компактное множество D такое, что $f \in C_b$ и $|f| \leq \chi(T \setminus D)$ влечет $|\varphi f| < \varepsilon/2$. Это означает, что $\widehat{\varphi}\chi(T \setminus D) = \overline{\varphi}\chi(T \setminus D) \leq \varepsilon/2$.

Рассмотрим компактное множество $L \equiv C \cap D \subset G$. Так как $G \setminus L \subset (G \setminus C) \cup (T \setminus D)$, то $\chi(G \setminus L) \leq \chi(G \setminus C) + \chi(T \setminus D)$ влечет $\widehat{\varphi}\chi(G \setminus L) \leq \widehat{\varphi}\chi(G \setminus C) + \widehat{\varphi}\chi(T \setminus D) < \varepsilon$.

Пусть F – замкнутое множество. Согласно установленному выше, для $\varepsilon > 0$ и множества G существует компактное множество $L \subset G$ такое, что $\widehat{\varphi}(\chi(G \setminus L)) < \varepsilon$. Рассмотрим компактное множество $K \equiv F \cap L \subset F \cap G$. Тогда $F \cap G \setminus K = F \cap G \setminus F \cap L = F \cap (G \setminus L) \subset G \setminus L$ влечет $\chi(F \cap G \setminus K) \leq \chi(G \setminus L)$. Следовательно, $\widehat{\varphi}(\chi(F \cap G \setminus K)) \leq \widehat{\varphi}(\chi(G \setminus L)) < \varepsilon$.

Пусть теперь $A \in \mathcal{A}(T, \mathcal{G})$. Тогда $A = \bigcup (F_i \cap G_i \mid i = 1, \dots, n)$. Для $\varepsilon > 0$ существуют компактные множества K_i такие, что $K_i \subset F_i \cap G_i$ и $\widehat{\varphi}(\chi(F_i \cap G_i \setminus K_i)) < \varepsilon/n$. Рассмотрим компактное множество $K \equiv \bigcup (K_i \mid i = 1, \dots, n)$. Так как $A \setminus K \subset \bigcup (F_i \cap G_i \setminus K_i \mid i = 1, \dots, n)$, то $\widehat{\varphi}(\chi(A \setminus K)) \leq \widehat{\varphi}(\sum (\chi(F_i \cap G_i \setminus K_i) \mid i = 1, \dots, n)) = \sum (\widehat{\varphi}(\chi(F_i \cap G_i \setminus K_i)) \mid i = 1, \dots, n) < \varepsilon$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $(T, \mathcal{G})$ – тихоновское пространство и $\varphi \in (C_b(T, \mathcal{G})^\pi)_+$. Тогда функционал $\widehat{\varphi}$ на $S(T, \mathcal{G})$ является линейным положительным тонким. Более того, он является единственным линейным положительным тонким продолжением функционала φ на $S(T, \mathcal{G})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Тонкость функционала $\widehat{\varphi}$ устанавливается точно так же, как и при доказательстве теоремы 2 из п. 6.

Пусть теперь ψ является линейным положительным тонким функционалом на S , продолжающим функционал φ . Докажем, что $\psi = \widehat{\varphi}$.

Пусть G – произвольное открытое множество. Так как ψ является положительным внутренне компактным, то для любого $\varepsilon > 0$ существует компактное множество $C \subset G$ такое, что $\psi\chi(G \setminus C) < \varepsilon$. Обозначим $\chi(G)$ и $\chi(C)$ через g и h соответственно. Далее точно так же, как и при доказательстве теоремы 2 из п. 6, устанавливается, что $\psi g = \widehat{\varphi}g$.

Пусть теперь F – произвольное замкнутое множество. Рассмотрим открытое множество $G \equiv T \setminus F$. Так как $\chi(F) = \mathbf{1} - \chi(G)$, то $\psi\chi(F) = \psi\mathbf{1} - \psi\chi(G) = \widehat{\varphi}\mathbf{1} - \widehat{\varphi}\chi(G) = \widehat{\varphi}\chi(F)$.

Пусть теперь $A \in \mathcal{A}$. Так же, как и при доказательстве теоремы 2 из п. 6, устанавливается, что $\psi\chi(A) = \widehat{\varphi}\chi(A)$.

Наконец, пусть $f \in S$. Возьмем произвольное $\delta > 0$ и $\varepsilon \equiv \delta/\psi(x)$, где $x \equiv \mathbf{1}$. Для ε возьмем функции v и w из доказательства предложения 1. Тогда $v = \sum (a_k \chi(A_k)) \mid$

$k \in K$) для некоторой конечной коллекции $(A_k \in \mathcal{A} \mid k \in K)$. Следовательно, $\psi v = \sum (a_k \psi \chi(A_k) \mid k \in K) = \sum (a_k \widehat{\varphi} \chi(A_k) \mid k \in K) = \widehat{\varphi} v$. Аналогично, $\psi w = \widehat{\varphi} w$. Далее точно так же, как и при доказательстве упомянутой теоремы 2, устанавливается, что $\psi f = \widehat{\varphi} f$.

По этой теореме можно корректно определить отображение Q_0 из $(C_b(T, \mathcal{G})^\pi)_+$ в $(S(T, \mathcal{G})^\Delta)_+$, полагая $Q_0 \varphi \equiv \widehat{\varphi}$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $(T, \mathcal{G})$ – тихоновское пространство. Тогда отображение Q_0 из $(C_b(T, \mathcal{G})^\pi)_+$ в $(S(T, \mathcal{G})^\Delta)_+$ является биективным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\varphi' \neq \varphi''$, то, очевидно, $\widehat{\varphi}' \neq \widehat{\varphi}''$. Значит, Q_0 инъективно. Если $\psi \in (S_c^\Delta)_+$, то функционал $\varphi \equiv \psi \mid C_b$ является линейным и положительным. Пусть $\varepsilon > 0$. Так как ψ является положительным внутренне компактным, то для T существует компактное множество K такое, что $\psi \chi(T \setminus K) < \varepsilon$. Если $f \in C_b$ и $|f| \leq \chi(T \setminus K)$, то $|\varphi f| = |\psi f| < \varepsilon$. Значит, φ является узким. Рассмотрим его продолжение $\widehat{\varphi}$. По теореме 1 $\psi = \widehat{\varphi}$. Значит, Q_0 биективно.

ЛЕММА 4. Отображение Q_0 является положительно линейным в том смысле, что $Q_0(a\varphi) = aQ_0\varphi$ и $Q_0(\varphi' + \varphi'') = Q_0\varphi' + Q_0\varphi''$ для любых $a \in \mathbb{R}_+$ и $\varphi', \varphi'' \in (C_b(T, \mathcal{G})^\pi)_+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a > 0$. Обозначим $a\varphi$ через ψ . Возьмем любые $g \in Y$ и $\varepsilon > 0$. Рассмотрим множество $L_g \equiv \{f \in C_b \mid f \leq g\}$. Тогда из $\overline{\varphi}g = \sup(\varphi f \mid f \in L_g)$ и $\overline{\psi}g = \sup(\psi f \mid f \in L_g)$ следует, что существуют $u, v \in L_g$ такие, что $\overline{\varphi}g - \varepsilon/(2a) < \varphi u$ и $\overline{\psi}g - \varepsilon/2 < \psi v$. Рассмотрим функцию $w \equiv u \vee v \in L_g$. Тогда

$$|(a\overline{\varphi})g - \overline{\psi}g| \leq |a\overline{\varphi}g - a\varphi w| + |\psi w - \overline{\psi}g| < a|\overline{\varphi}g - \varphi w| + \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Из произвольности ε следует, что $(a\overline{\varphi})g = \overline{\psi}g$.

Аналогично доказывается, что $(a\varphi)h = \underline{\psi}h$ для любого $h \in Z$.

Пусть теперь $f \in S$ и $\varepsilon > 0$. Рассмотрим множество $Z_f \equiv \{h \in Z \mid h \leq f\}$. Тогда из $\widehat{\varphi}f = \underline{\varphi}f = \sup(\varphi h \mid h \in Z_f)$ и $\widehat{\psi}f = \sup(\underline{\psi}h \mid h \in Z_f)$ так же, как и выше, следует, что $(a\widehat{\varphi})f = \widehat{\psi}f$.

Обозначим $\varphi' + \varphi''$ через ψ . Пусть $g \in Y$ и $\varepsilon > 0$. Тогда из $\overline{\varphi}'g = \sup(\varphi'f \mid f \in L_g)$, $\overline{\varphi}''g = \sup(\varphi''f \mid f \in L_g)$ и $\overline{\psi}g = \sup(\psi f \mid f \in L_g)$ следует, что существуют $u, v, w \in L_g$ такие, что $\overline{\varphi}'g - \varepsilon/3 < \varphi'u$, $\overline{\varphi}''g - \varepsilon/3 < \varphi''v$ и $\overline{\psi}g - \varepsilon/3 < \psi w$. Рассмотрим функцию $x \equiv u \vee v \vee w \in L_g$. Тогда

$$|(\overline{\varphi}' + \overline{\varphi}'')g - \overline{\psi}g| \leq |\overline{\varphi}'g - \varphi'x| + |\overline{\varphi}''g - \varphi''x| + |\psi x - \overline{\psi}g| < \varepsilon.$$

Следовательно, $(\overline{\varphi}' + \overline{\varphi}'')g = \overline{\psi}g$.

Аналогично доказывается, что $(\underline{\varphi}' + \underline{\varphi}'')h = \underline{\psi}h$ для любого $h \in Z$.

Пусть теперь $f \in S$ и $\varepsilon > 0$. Тогда $\widehat{\varphi}'f = \underline{\varphi}'f = \sup(\varphi'h \mid h \in Z_f)$, $\widehat{\varphi}''f = \sup(\underline{\varphi}''h \mid h \in Z_f)$ и $\widehat{\psi}f = \sup(\underline{\psi}h \mid h \in Z_f)$. Так же, как и выше, отсюда следует, что $(\widehat{\varphi}' + \widehat{\varphi}'')f = \widehat{\psi}f$.

ЛЕММА 5. Отображение Q_0 изотонно и сохраняет любые порядковые границы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi \leq \psi$. Возьмем любое $g \in Y$ и рассмотрим множество $L_g \equiv \{f \in C_b \mid f \leq g\}$. Тогда из $\bar{\varphi}g = \sup(\varphi f \mid f \in L_g)$ и $\bar{\psi}g = \sup(\psi f \mid f \in L_g)$ следует, что $\bar{\varphi}g \leq \bar{\psi}g$.

Возьмем теперь любое $f \in S$ и рассмотрим множество $Y^f \equiv \{g \in Y \mid g \geq f\}$. Тогда из $\hat{\varphi}f = \tilde{\varphi}f = \inf(\bar{\varphi}g \mid g \in Y^f)$ и $\hat{\psi}f = \inf(\bar{\psi}g \mid g \in Y^f)$ следует, что $\hat{\varphi}f \leq \hat{\psi}f$. Таким образом, Q_0 является монотонным. Так как Q_0 биективно, то Q_0 является изотонным. Следовательно, Q_0 сохраняет любые порядковые границы.

ЛЕММА 6. *Отображение Q_0 имеет единственное расширение до такого изоморфизма Q из решеточного векторного пространства $C_b(T, \mathcal{G})^\pi$ на решеточное векторное пространство $S(T, \mathcal{G})^\Delta$, что $Q\varphi = Q_0(\varphi_+) - Q_0(-\varphi_-)$ для каждого $\varphi \in C_b(T, \mathcal{G})^\pi$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложения 3.6.1 из [24] отображение Q_0 имеет единственное расширение до инъективного линейного оператора Q из $A \equiv C_b^\pi$ в $B \equiv S^\Delta$ такого, что $Q\varphi = Q_0(\varphi_+) - Q_0(-\varphi_-)$.

По лемме 5 Q_0 сохраняет любые порядковые границы. Поэтому $\varphi_1 \wedge \varphi_2 = 0$ влечет $Q\varphi_1 \wedge Q\varphi_2 = Q_0\varphi_1 \wedge Q_0\varphi_2 = Q_0(\varphi_1 \wedge \varphi_2) = 0$. В силу [12, п. 14, E(b)] Q является решеточным линейным оператором.

Если $\xi \in B$, то $\xi = \xi_+ - (-\xi_-)$. Согласно следствию 1 $\xi_+ = Q_0\varphi'$ и $-\xi_- = Q_0\varphi''$ для некоторых $\varphi', \varphi'' \in A_+$. Рассмотрим функционал $\varphi \equiv \varphi' - \varphi'' \in A$. Тогда $\xi = Q_0\varphi' - Q_0\varphi'' = Q\varphi' - Q\varphi'' = Q\varphi$. Это означает, что Q является сюръективным. Таким образом, Q есть биективный решеточный линейный оператор. Поэтому Q есть необходимый изоморфизм.

Так как $C_b(T, \mathcal{G})^\pi \subset C_b(T, \mathcal{G})^\sim \subset (C_b(T, \mathcal{G}), \|\cdot\|_u)'$ и $S(T, \mathcal{G})^\Delta \subset S(T, \mathcal{G})^\sim \subset (S(T, \mathcal{G}), \|\cdot\|_u)'$, то $C_b(T, \mathcal{G})^\pi \subset C_b(T, \mathcal{G})^\pi$ и $S(T, \mathcal{G})^\Delta \subset S(T, \mathcal{G})^\Delta$. Поэтому Q является изоморфизмом из решеточного векторного пространства $C_b(T, \mathcal{G})^\pi$ на решеточное векторное пространство $S(T, \mathcal{G})^\Delta$.

Индусируем на $C_b(T, \mathcal{G})^\pi$ норму $\|\cdot\|$ из нормированного решеточного векторного пространства $((C_b(T, \mathcal{G}), \|\cdot\|_u)', \|\cdot\|)$, а на $S(T, \mathcal{G})^\Delta$ – норму $\|\cdot\|$ из нормированного решеточного векторного пространства $((S(T, \mathcal{G}), \|\cdot\|_u)', \|\cdot\|)$.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $(T, \mathcal{G})$ – тихоновское пространство. Тогда отображение Q является (изометрическим) изоморфизмом из нормированного решеточного векторного пространства $(C_b(T, \mathcal{G})^\pi, \|\cdot\|)$ на нормированное решеточное векторное пространство $(S(T, \mathcal{G})^\Delta, \|\cdot\|)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 6 нужно проверить только изометричность. Пусть $\varphi \in (C_b^\pi)_+$ и $\hat{\varphi} = Q\varphi$. Если $f \in C_b$, то $|\varphi f| = \|\hat{\varphi}f\| \leq \|\hat{\varphi}\| \|f\|$. Следовательно, $\|\varphi\| \leq \|\hat{\varphi}\|$.

Пусть теперь $f \in S$. Тогда $|\hat{\varphi}f| \leq \hat{\varphi}|f| = \tilde{\varphi}|f| = \sup\{\bar{\varphi}h \mid h \in Z_+ \wedge h \leq |f|\}$. Так как $\bar{\varphi}h = \inf\{\varphi x \mid x \in C_b \wedge x \geq h\}$, то

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}h &\leq \inf\{\varphi x \mid x \in C_b \wedge x \geq h\} \leq \inf\{\|\varphi\| \|x\|_u \mid x \in C_b \wedge x \geq h\} \\ &\leq \|\varphi\| \inf\{\|x\|_u \mid x \in C_b \wedge x \geq h\} = \|\varphi\| \|h\|_u. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |\hat{\varphi}f| &\leq \|\varphi\| \sup\{\|h\|_u \mid h \in Z_+ \wedge h \leq |f|\} \\ &\leq \|\varphi\| \sup\{\|h\|_u \mid h \in Z_+ \wedge \|h\|_u \leq \|f\|_u\} \leq \|\varphi\| \|f\|_u. \end{aligned}$$

Значит, $\|\widehat{\varphi}\| \leq \|\varphi\|$. В результате $\|\varphi\| = \|Q\varphi\|$.

Пусть теперь $\varphi \in C_b^{\oplus}$. Тогда $|\varphi| = \varphi \vee 0 + (-\varphi) \vee 0$ в силу леммы 6 влечет $Q|\varphi| = |Q\varphi|$. Применяя равенство, доказанное выше, получаем $\|\varphi\| = \||\varphi|\| = \|Q|\varphi|\| = \||Q\varphi|\| = \|Q\varphi\|$.

Теперь можно доказать основную теорему этого пункта.

ТЕОРЕМА 3 (о следствии). *Ограниченное радоновское представление для тихоновского пространства следует из общего ограниченного радоновского представления для произвольного хаусдорфова пространства.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(T, \mathcal{G})$ – тихоновское пространство. По теореме 2 существует изоморфизм Q из $(C_b^{\oplus}, \|\cdot\|)$ на $(S^{\oplus}, \|\cdot\|)$. По теореме об общем ограниченном радоновском представлении существует изоморфизм K из $(S^{\oplus}, \|\cdot\|)$ на $(\mathfrak{M}_b^{wo}, \|\cdot\|)$. Изоморфизм $K \circ Q$ дает необходимое радоновское представление.

Список литературы

1. *Riesz F.* Sur les opérations fonctionnelles linéaires // C.R. Acad. Sci. Paris. 1909. V. 149. P. 974–977.
2. *Radon J.* Theorie und Anwendungen der absolut additiven Mengenfunktionen // S.-B. Akad. Wiss. Wien. 1913. V. 122. P. 1295–1438.
3. *Hausdorff F.* Grundzüge der Mengenlehre. Leipzig: Veit, 1914.
4. *Saks S.* Theory of the integral. N.Y.: Hafner, 1937.
5. *Saks S.* Integration in abstract metric spaces // Duke Math. J. 1938. V. 4. P. 408–411.
6. *Kakutani S.* Concrete representation of abstract (M) – spaces // Ann. Math. (2). 1941. V. 42. P. 994–1024.
7. *Halmos P. R.* Measure Theory. Princeton: Van Nostrand, 1950.
8. *Hewitt E.* Integration on locally compact spaces. I // Univ. of Washington Publ. in Math. 1952. V. 3. P. 71–75.
9. *Edwards R. E.* A theory of Radon measures on locally compact spaces // Acta Math. 1953. V. 89. P. 133–164.
10. *Bourbaki N.* Intégration. Chap. I–VI. Paris: Hermann, 1952–1959.
11. *Hewitt E., Stromberg K.* Real and Abstract Analysis. Berlin: Springer-Verlag, 1965.
12. *Fremlin D. H.* Topological Riesz spaces and measure theory. Cambridge: The University Press, 1974.
13. *Прохоров Ю. В.* Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей // Теор. вероятн. и ее применения. 1956. Т. 1. С. 177–238.
14. *Topsoe F.* Topology and measure // Lect. Notes Math. 1970. V. 133.
15. *Pollard D., Topsoe F.* A unified approach to Riesz type representation theorems // Studia Math. 1975. V. 54. P. 173–190.
16. *Topsoe F.* Further results on integral representations // Studia Math. 1976. V. 55. P. 239–245.
17. *Topsoe F.* Radon measures, some basic constructions // Lect. Notes Math. 1983. V. 1033. P. 303–311.
18. *Anger B., Portenier C.* Radon integrals. Boston–Berlin: Birkhäuser, 1992.
19. *König H.* The Daniell–Stone–Riesz representation theorem // Operator theory: advances and applications. 1995. V. 75. P. 191–222.
20. *König H.* Measure and integration. Berlin: Springer-Verlag, 1997.
21. *Захаров В. К., Михалёв А. В.* Проблема Радона для регулярных мер на произвольном хаусдорфовом пространстве // Фундам. и прикл. математика. 1997. Т. 3. № 3. С. 801–808.
22. *Захаров В. К., Михалёв А. В.* Интегральное представление для радоновских мер на произвольном хаусдорфовом пространстве // Фундам. и прикл. математика. 1997. Т. 3. № 4. С. 1135–1172.
23. *Захаров В. К., Михалёв А. В.* Проблема интегрального представления для радоновских мер на произвольном хаусдорфовом пространстве // Докл. РАН. 1998. Т. 360. № 1. С. 13–15.

24. *Semadeni Z.* Banach spaces of continuous functions. Warszawa: Polish Sci. Publ., 1971.
25. *Dinculianu N.* Vector Measures. London–N.Y.: Oxford Univ. Press, 1967.
26. *Александров А. Д.* Additive functions in abstract spaces. I–III // Матем. сб. 1940. Т. 8. С. 303–348; 1941. Т. 9. С. 563–628; 1943. Т. 13. С. 169–238.
27. *Stone M. N.* Notes on integration. I–IV // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1948. V. 34. P. 336–342; 447–455; 483–490; 1949. V. 35. P. 50–58.
28. *Schwartz L.* Radon measures on arbitrary topological spaces and cylindrical measures. London–N.Y.: Oxford Univ. Press, 1973.
29. *Jacobs K.* Measure and integral. N.Y.: Academic Press, 1978.
30. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
31. *Захаров В. К.* Функциональное представление равномерного пополнения максимального и счетно-плотного модулей частных модуля непрерывных функций // УМН. 1980. Т. 35. № 4. С. 187–188.
32. *Zaharov V.* Functional characterization of absolut and Dedekind completion // Bull. Acad. Polon. Sci. Serie sci. math. 1981. V. 29. № 5–6. P. 293–297.
33. *Захаров В. К.* Связи между расширением Лебега и расширением Бореля первого класса и между соответствующими им прообразами // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. Т. 54. № 5. С. 928–956.
34. *Hausdorff F.* Über halbstetige Functionen und deren Verallgemeinerung // Math. Z. 1915. V. 4. P. 292–309.
35. *Sierpin'ski W.* Sur les fonctions développables en séries absolument conoergentes de fonctions continues // Fund. Math. 1921. V. 2. P. 15–27.
36. *Zaharov V. K.* Alexandrovian cover and Sierpin'skian extension // Studia Sci. Math. Hung. 1989. V. 24. P. 93–117.
37. *Захаров В. К.* Связь между полным кольцом частных кольца непрерывных функций, регулярным пополнением и расширениями Хаусдорфа–Серпинского // УМН. 1990. Т. 45. № 6. С. 133–134.
38. *Захаров В. К.* Расширения кольца непрерывных функций, порожденные регулярным, счетно-делимым и полным кольцами частных, и соответствующие им прообразы // Изв. РАН. Сер. матем. 1995. Т. 59. № 4. С. 15–60.
39. *Захаров В. К., Михалев А. В.* Проблема общего радоновского представления для произвольного хаусдорфова пространства // Изв. РАН. Сер. матем. 1999. Т. 63. № 5. С. 37–82.

Поступило в редакцию
2.VII.2001