Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Пухликов, Бирациональная геометрия двойных пространств Фано индекса два, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2010, том 74, выпуск 5, 45–114

DOI: <https://doi.org/10.4213/im4071>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 15:23:40

УДК 512.7

А. В. Пухликов

Бирациональная геометрия двойных пространств Фано индекса два

Изучена бирациональная геометрия многообразий Фано, реализованных в виде двойного накрытия $\sigma: V \rightarrow \mathbb{P}^M$, $M \geq 5$, разветвленного над общей гладкой гиперповерхностью $W = W_{2(M-1)}$ степени $2(M-1)$. Доказано, что структуры рационально связного расслоения на V исчерпываются пучками-подсистемами свободной линейной системы $|\frac{1}{2}K_V|$. Группы бирациональных и бирегулярных автоморфизмов многообразия V совпадают: $\text{Bir } V = \text{Aut } V$.

Библиография: 41 наименование.

Ключевые слова: бирациональное отображение, многообразие Фано, максимальная особенность, рационально связное расслоение, бирациональный автоморфизм.

Введение

0.1. Постановка задачи и формулировка основного результата. Целочисленный параметр $M \geq 4$ фиксирован на протяжении всей работы. Через $\mathbb{P}$ обозначено проективное пространство $\mathbb{P}^M$ над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль (в первую очередь, имеется в виду $\mathbb{C}$). Пусть $W = W_{2(M-1)} \subset \mathbb{P}$ – гладкая гиперповерхность степени $2(M-1)$. Существует и однозначно определено двойное накрытие $\sigma: V \rightarrow \mathbb{P}$, разветвленное над W . Его можно явно определить как гиперповерхность, заданную уравнением

$$x_{M+1}^2 = f(x_0, \dots, x_M),$$

во взвешенном проективном пространстве $\mathbb{P}^{M+1}(1, \dots, 1, M-1)$, где $f(x_*)$ – уравнение гиперповерхности W .

Многообразие V есть многообразие Фано индекса 2:

$$\text{Pic } V = \mathbb{Z}H,$$

где H – обильная образующая, $K_V = -2H$, класс H – σ -подъем гиперплоскости в $\mathbb{P}$. На многообразии V имеются следующие естественные структуры рационально связного расслоения. Пусть $\alpha_P: \mathbb{P} \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ – линейная проекция из произвольного линейного подпространства P коразмерности 2; тогда отображение

$$\pi_P = \alpha_P \circ \sigma: V \dashrightarrow \mathbb{P}^1$$

расслаивает V на $(M-1)$ -мерные многообразия Фано индекса 1. Сформулируем теперь основной результат.

Напомним [1], что (нетривиальное) рационально связанное расслоение – это сюръективный морфизм $\lambda: Y \rightarrow S$ проективных многообразий, где $\dim S \geq 1$, а многообразие S и слой общего положения $\lambda^{-1}(s)$, $s \in S$, рационально связны (и само многообразие Y автоматически рационально связано по теореме Грабера–Харриса–Старра [2]).

ТЕОРЕМА 0.1. *Предположим, что $M \geq 5$ и гиперповерхность ветвления $W \subset \mathbb{P}$ достаточно общая. Пусть $\chi: V \dashrightarrow Y$ – бирациональное отображение на пространство рационально связанного расслоения $\lambda: Y \rightarrow S$. Тогда $S = \mathbb{P}^1$ и для некоторого изоморфизма $\beta: \mathbb{P}^1 \rightarrow S$ и некоторого подпространства $P \subset \mathbb{P}$ коразмерности 2 имеем $\lambda \circ \chi = \beta \circ \pi_P$, т.е. коммутативна диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\chi} & Y \\ \pi_P \downarrow & & \downarrow \lambda \\ \mathbb{P}^1 & \xrightarrow{\beta} & S \end{array}$$

СЛЕДСТВИЕ 0.1. *Для общего двойного пространства V размерности $\dim V \geq 5$ справедливы следующие утверждения:*

- (i) *на многообразии V нет структур рационально связанного расслоения с базой размерности ≥ 2 ; в частности, на V нет структур расслоения на коники и поверхности дель Пеццо, а само многообразие V нерационально;*
- (ii) *пусть $\chi: V \dashrightarrow Y$ – бирациональное отображение, где Y – многообразие Фано индекса $r \geq 2$ с факториальными терминальными особенностями такое, что $\text{Pic } Y = \mathbb{Z}H_Y$, причем $K_Y = -rH_Y$, линейная система $|H_Y|$ непуста и свободна; тогда $r = 2$ и отображение χ есть бирегулярный изоморфизм;*
- (iii) *группы бирациональных и бирегулярных автоморфизмов многообразия V совпадают:*

$$\text{Bir } V = \text{Aut } V = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (i) и равенство $r = 2$ в (ii) очевидны (любая линейная подсистема проективной размерности $\leq r - 1$ в полной линейной системе $|H_Y|$ определяет структуру рационально связанного расслоения на Y). Далее, χ -прообраз общего дивизора в системе $|H_Y|$ есть дивизор в линейной системе $|H|$ по теореме 0.1, что завершает доказательство утверждения (ii). Утверждение (iii), очевидно, следует из (ii). Следствие доказано.

Цель настоящей работы – доказать теорему 0.1. Как обычно, ее утверждение будет выведено из другого факта – гораздо более технической и менее наглядной теоремы 0.2 о порогах канонического присоединения подвижных линейных систем на многообразии V . Однако, прежде всего, обсудим место теоремы 0.1 в контексте известных результатов о бирациональной геометрии многомерных многообразий Фано.

0.2. От бирационально жестких многообразий к бирационально нежестким. Напомним основные определения теории бирациональной жесткости. Пусть X – гладкое проективное рационально связанное многообразие. Оно удовлетворяет классическому условию обрыва присоединения канонического класса: для любого эффективного дивизора D линейная система $|D + mK_X|$

пуста при $m \gg 0$, поскольку K_X отрицателен на любом семействе рациональных кривых, заметающих X , а эффективный дивизор неотрицателен на любом таком семействе. Чтобы точно зафиксировать момент обрыва, рассмотрим группу Пикара $A^1 X = \text{Pic } X$, положим $A_{\mathbb{R}}^1 X = A^1 X \otimes \mathbb{R}$ и определим конусы $A_+^1 X \subset A_{\mathbb{R}}^1 X$ и $A_{\text{mov}}^1 X \subset A_{\mathbb{R}}^1 X$ псевдоэффективных классов и подвижных классов как замкнутые (в обычной вещественной топологии $A_{\mathbb{R}}^1 X \cong \mathbb{R}^k$) конусы, порожденные классами эффективных дивизоров и подвижных дивизоров (т. е. дивизоров в линейных системах без неподвижных компонент) соответственно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.1. *Порог канонического присоединения* дивизора D на многообразии X есть число $c(D, X) = \sup\{\varepsilon \in \mathbb{Q}_+ \mid D + \varepsilon K_X \in A_+^1 X\}$. Если Σ — непустая линейная система на X , полагаем $c(\Sigma, X) = c(D, X)$, где $D \in \Sigma$ есть произвольный дивизор.

ПРИМЕР 0.1. (i) Пусть X — гладкое многообразие Фано, причем $\text{Pic } X = \mathbb{Z}H_X$, где H_X — обильная образующая и $K_X = -rH_X$, $r \geq 1$. Для любого эффективного дивизора D имеем $D \sim nH_X$ для некоторого $n \geq 1$, так что

$$c(D, X) = \frac{n}{r}.$$

(ii) Пусть $\pi: X \rightarrow S$ — рационально связное расслоение, $\dim X > \dim S \geq 1$, и Δ — эффективный дивизор на базе S . Очевидно, $c(\pi^* \Delta, X) = 0$. Если $\text{Pic } X = \mathbb{Z}K_X \oplus \pi^* \text{Pic } S$, т. е. X/S — стандартное расслоение Фано, и D — эффективный дивизор на X , который не поднят с базы S , то $D \in |-mK_X + \pi^* R|$ для некоторого дивизора R на S , где $m \geq 1$. Очевидно, $c(D, X) \leq m$, и, более того, если дивизор R эффективен, то $c(D, X) = m$. В самом деле, K_X отрицателен на слоях морфизма π (в частности, на плотных семействах рациональных кривых, заметающих слои проекции π), в то время как любой дивизор, поднятый с базы, тривиален на слоях.

ПРИМЕР 0.2. Пусть Y — многообразие Фано индекса $r \geq 2$, описанное в п. (ii) следствия 0.1. Рассмотрим подвижную линейную систему Σ , натянутую на дивизоры $D_1, \dots, D_r \in |H_Y|$ общего положения. Очевидно,

$$Q = D_1 \cap \dots \cap D_r \subset Y$$

есть неприводимое подмногообразие коразмерности $r \geq 2$, причем $\text{Bs } \Sigma = Q$. Пусть $\varphi: Y^+ \rightarrow Y$ — раздутие Q и Σ^+ — собственный прообраз системы Σ на Y^+ . Очевидно, свободная система Σ^+ определяет морфизм

$$\pi_Q: Y^+ \rightarrow \mathbb{P}^{r-1},$$

слои которого суть многообразия Фано и потому рационально связны. Имеем равенства

$$c(\Sigma, Y) = \frac{1}{r}, \quad c(\Sigma^+, Y^+) = 0,$$

потому что Σ^+ поднята с базы $\mathbb{P}^{r-1}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.2. Для подвижной линейной системы Σ на многообразии X определим виртуальный порог канонического присоединения формулой

$$c_{\text{virt}}(\Sigma) = \inf_{X^\sharp \rightarrow X} \{c(\Sigma^\sharp, X^\sharp)\},$$

где точная нижняя грань берется по всем бирациональным морфизмам $X^\sharp \rightarrow X$ и $X^\sharp$ – гладкая проективная модель $\mathbb{C}(X)$, $\Sigma^\sharp$ – собственный прообраз системы Σ на $X^\sharp$.

Виртуальный порог, очевидно, есть бирациональный инвариант пары (X, Σ) , а именно если $\chi: X \dashrightarrow X^+$ – бирациональное отображение, $\Sigma^+ = \chi_*\Sigma$ – собственный прообраз системы Σ относительно χ^{-1} , то получаем $c_{\text{virt}}(\Sigma) = c_{\text{virt}}(\Sigma^+)$.

Следующее очевидное утверждение показывает, как информация о виртуальном пороге канонического присоединения позволяет описывать бирациональные свойства алгебраического многообразия.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 0.1. (i) *Предположим, что на многообразии X нет подвижных линейных систем с нулевым виртуальным порогом канонического присоединения. Тогда на X отсутствуют структуры нетривиального расслоения на многообразия отрицательной кодаировой размерности, т. е. не существует рационального доминантного отображения $\rho: X \dashrightarrow S$, $\dim S \geq 1$, общий слой которого имеет отрицательную кодаирову размерность.*

(ii) *Пусть $\pi: X \rightarrow S$ – рационально связанное расслоение. Предположим, что каждая подвижная линейная система Σ на X с нулевым виртуальным порогом канонического присоединения, $c_{\text{virt}}(\Sigma) = 0$, есть прообраз системы на базе: $\Sigma = \pi^*\Lambda$, где Λ – некоторая подвижная линейная система на S . Тогда любое бирациональное отображение*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\chi} & X^\sharp \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi^\sharp \\ S & & S^\sharp \end{array} \quad (0.1)$$

где $\pi^\sharp: X^\sharp \rightarrow S^\sharp$ – расслоение на многообразия отрицательной кодаировой размерности, является послонным, т. е. существует рациональное доминантное отображение $\rho: S \dashrightarrow S^\sharp$, превращающее диаграмму (0.1) в коммутативную, $\pi^\sharp \circ \chi = \rho \circ \pi$.

Единственный способ вычислять виртуальные пороги канонического присоединения – сводить их к обычным порогам.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.3. (i) Многообразие X называется бирационально сверхжестким, если для любой подвижной линейной системы Σ на X выполнено равенство

$$c_{\text{virt}}(\Sigma) = c(\Sigma, X).$$

(ii) Многообразие X (соответственно, расслоение Фано X/S) называется бирационально жестким, если для любой подвижной линейной системы Σ на X

существует бирациональный автоморфизм $\chi \in \text{Bir } X$ (соответственно, послойный бирациональный автоморфизм $\chi \in \text{Bir}(X/S)$), обеспечивающий равенство

$$c_{\text{virt}}(\Sigma) = c(\chi_*\Sigma, X).$$

(iii) Многообразие X называется *почти бирационально жестким*, если оно имеет модель $\tilde{X}$, которая является бирационально жестким многообразием, т.е. условие п. (ii) выполнено для некоторого гладкого проективного многообразия $\tilde{X}$, бирационально эквивалентного многообразию X .

ПРИМЕР 0.3. (i) Гладкая трехмерная кватрика $X = X_4 \subset \mathbb{P}^4$ бирационально сверхжесткая, что немедленно следует из рассуждений, используемых в [3].

(ii) Общая гладкая гиперповерхность $X = X_d \subset \mathbb{P}^d$, $d \geq 5$, – бирационально сверхжесткое многообразие [4]. Общее полное пересечение $X_{d_1 \dots d_k} \subset \mathbb{P}^{M+k}$ индекса 1 (т.е. $d_1 + \dots + d_k = M + k$) и размерности $M \geq 4$ бирационально сверхжесткое при $M \geq 2k + 1$ [5]. Другие примеры см. в [1].

(iii) Общее гладкое полное пересечение $X_{2,3} \subset \mathbb{P}^5$ кубической гиперповерхности и квадрики бирационально жесткое, но не сверхжесткое [6], [7]. Общее полное пересечение $X_{2,3} \subset \mathbb{P}^5$ с невырожденной квадратичной особенностью $o \in X_{2,3}$ почти бирационально жесткое. Роль бирационально жесткой модели $\bar{X}_{2,3}$ играет раздутие особой точки [8].

ГИПОТЕЗА 0.1. *Гладкое полное пересечение Фано индекса 1 и размерности ≥ 4 во взвешенном проективном пространстве бирационально жесткое, размерности ≥ 5 – бирационально сверхжесткое.*

Из примера 0.2 следует, что двойное пространство V – основной предмет изучения в настоящей работе – не является ни сверхжестким, ни жестким, ни почти жестким.

0.3. Начало и план доказательства теоремы 0.1. Как и для бирационально жестких многообразий, в основе теоремы 0.1 лежит некоторое утверждение о виртуальном пороге канонического присоединения подвижной линейной системы на V . Для произвольного линейного подпространства $P \subset \mathbb{P}$ коразмерности 2 пусть V_P – раздутие подмногообразия $\sigma^{-1}(P) \subset V$ (оно неприводимо в силу условий общности положения; см. п. 0.4). Для подвижной линейной системы Σ на V через Σ_P обозначим ее собственный прообраз на V_P .

Теорема 0.1 является следствием более технического факта.

ТЕОРЕМА 0.2. *Предположим, что $M \geq 5$ и для подвижной линейной системы Σ справедливо неравенство*

$$c_{\text{virt}}(\Sigma) < c(\Sigma, V). \quad (0.2)$$

Тогда существует однозначно определенное линейное подпространство $P \subset \mathbb{P}$ коразмерности 2, удовлетворяющее неравенству

$$\text{mult}_{\sigma^{-1}(P)} \Sigma > c(\Sigma, V),$$

а для собственного прообраза Σ_P имеют место равенства

$$c_{\text{virt}}(\Sigma) = c_{\text{virt}}(\Sigma_P) = c(\Sigma_P, V_P).$$

Теорема 0.1 выводится из теоремы 0.2 в несколько строк (см. § 1). Почти вся статья посвящена доказательству теоремы 0.2. Зафиксируем подвижную линейную систему Σ , удовлетворяющую неравенству (0.2). Переходя, если нужно, к симметрической степени системы Σ , можно считать, что

$$\Sigma \subset |2nH| = |-nK_V|,$$

где $n \geq 1$ – целое положительное число. Система Σ (и число n) фиксированы на протяжении всей работы, за исключением нескольких технических параграфов (прежде всего, § 4, 5), в которых используются независимые обозначения; это, как правило, специально отмечается и всегда ясно из контекста. Очевидно,

$$c(\Sigma, V) = n.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 0.2 (неравенство Нётера–Фано). *Существуют бирациональный морфизм $\varphi: \tilde{V} \rightarrow V$ и неприводимый исключительный дивизор $E \subset \tilde{V}$, которые удовлетворяют оценке*

$$\text{ord}_E \varphi^* \Sigma > na(E, V). \quad (0.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см., например, в [1].

Дивизор E (или соответствующее ему дискретное нормирование поля рациональных функций многообразия V) называется *максимальной особенностью* линейной системы Σ . Если φ – раздутие неприводимого подмногообразия $B \subset V$ (и тогда $E = \varphi^{-1}(B)$), то последнее называется *максимальным подмногообразием* системы Σ . В этом случае оценка (0.3) эквивалентна неравенству

$$\text{mult}_B \Sigma > n(\text{codim } B - 1).$$

В любом случае подмногообразие $B = \varphi(E)$ называется *центром* максимальной особенности E (см. [1]).

Приведем эквивалентную формулировку предложения 0.2: *пара $(V, \frac{1}{n}\Sigma)$ не канонична, а простой дивизор $E \subset \tilde{V}$ есть не каноническая особенность этой пары.*

Если вместо (0.3) выполнено более сильное неравенство

$$\text{ord}_E \varphi^* \Sigma > n(a(E) + 1), \quad (0.4)$$

то E есть *логмаксимальная особенность*, пара $(V, \frac{1}{n}\Sigma)$ не логканонична, а оценка (0.4) есть логнеравенство Нётера–Фано. Основная часть статьи посвящена доказательству следующего факта.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 0.3. *Существует единственное линейное подпространство $P \subset \mathbb{P}$ коразмерности 2 такое, что подмногообразие $\sigma^{-1}(P)$ есть максимальное подмногообразие системы Σ .*

Предложение 0.3 доказано в § 2–6 в “отрицательном” варианте: предполагая, что система Σ не имеет максимальных подмногообразий вида $\sigma^{-1}(P)$, где $P \subset \mathbb{P}$ – линейное подпространство коразмерности 2, исключим последовательно все возможности для максимальной особенности системы Σ и, тем самым,

придем к противоречию с предложением 0.2. Рассуждения из § 2 исключают и возможность того, что система Σ имеет два максимальных подмногообразия $\sigma^{-1}(P_1)$ и $\sigma^{-1}(P_2)$, где $P_1 \neq P_2$ – различные линейные подпространства коразмерности 2.

Теперь раздвем максимальное подмногообразие $\sigma^{-1}(P)$ и на полученном (вообще говоря, особом) многообразии завершим доказательство теоремы 0.2, из которой теорема 0.1 легко следует. Эта по смыслу рассуждения в целом заключительная часть работы опирается лишь на предложение 0.3 и от содержания § 2–6 независима. Она помещена в § 1 (в предположении, что предложение 0.3 справедливо).

В § 7 дано обоснование условий общности положения, которым должно удовлетворять двойное пространство V (см. предложения 0.4–0.6 ниже). Нет сомнений в том, что эти условия являются излишними, т.е. в том, что теоремы 0.1, 0.2 справедливы для произвольного гладкого двойного пространства индекса 2. Однако условия общности положения существенно используются в доказательстве. Некоторые из этих условий можно было бы по крайней мере ослабить, однако это привело бы к усложнению и без того трудного и длинного доказательства. С другой стороны, мы обходимся совсем без условий общности положения или используем их не в полную силу там, где это не слишком усложняет доказательство. Некоторые типы максимальных особенностей исключены в предположении лишь гладкости многообразия V .

Отметим, что в статье проделана значительная часть работы и для двойных пространств размерности $M = 4$ (исключено большинство типов максимальных особенностей). Для $M = 5$, чтобы избежать чрезмерного разрастания статьи, опущено рассмотрение одного из случаев при исключении бесконечно близких максимальных особенностей (см. § 6). Для $M \geq 6$ рассмотрены все возможности.

0.4. Формулировка условий общности положения. Как отмечено выше, основной результат настоящей статьи получен в предположении, что двойное пространство V достаточно общее (т.е. дивизор ветвления $W \subset \mathbb{P}$ – достаточно общая гиперповерхность степени $2(M-1)$). Будут использованы несколько условий общности положения, три главных из которых сформулированы ниже и обоснованы в § 7 (показано, что общая гиперповерхность W действительно им удовлетворяет). Некоторые другие, менее значительные, условия приводятся непосредственно там, где используются.

Первое основное условие связано с прямыми на V . Как обычно, кривую $C \subset V$ назовем *прямой*, если выполнено равенство $(C \cdot H) = 1$. В частности, прямая есть гладкая неприводимая рациональная кривая. Имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 0.4. *На общем многообразии V через каждую точку проходит конечное число прямых.*

Второе и третье условия связаны с линейными подпространствами (плоскостями) в $\mathbb{P}$ коразмерности 2. Рассмотрим произвольную плоскость $P \subset \mathbb{P} = \mathbb{P}^M$ коразмерности 2. Пересечение $P \cap W$, вообще говоря, имеет особенности:

$$p \in \text{Sing } P \cap W$$

тогда и только тогда, когда $P \subset T_p W$.

Хорошо известно, что (без предположения об общности гиперповерхности W) множество $\text{Sing } P \cap W$, самое большее, одномерно (см., например, [7]).

Предположение об общности W позволяет усилить это утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 0.5. *Для общей гиперповерхности W и произвольной плоскости $P \subset \mathbb{P}$ коразмерности 2 множество $\text{Sing } P \cap W$ конечно (или пусто). В частности, замкнутое множество $R = \sigma^{-1}(P)$ неприводимо, т. е. является подмногообразием, а множество его особых точек, самое большее, конечно.*

Третье условие характеризует особенности многообразия $\sigma^{-1}(P)$ и особенности раздутия этого многообразия на V . Если имеется квадратичная особая точка, т. е. гиперповерхностная особенность с локальным уравнением

$$0 = w_2(u_1, \dots, u_N) + w_3(u_*) + \dots,$$

где $w_i(u_*)$ – однородный многочлен степени i , то скажем, что эта точка имеет ранг $\text{rk } w_2$. При раздутии такой особенности исключительный дивизор есть квадрика $\{w_2 = 0\} \subset \mathbb{P}^{N-1}$ ранга $\text{rk } w_2$.

Пусть V_P – раздутие (неприводимого согласно предложению 0.5) подмногообразия $\sigma^{-1}(P)$ на V .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 0.6. *Для общей гиперповерхности W и произвольной плоскости $P \subset \mathbb{P}$ коразмерности 2 выполнено следующее:*

- (i) *при $M \geq 6$ любая особенность многообразия V_P есть изолированная квадратичная точка ранга ≥ 4 ;*
- (ii) *при $M \geq 4$ любая особенность многообразия V_P есть изолированная квадратичная точка ранга ≥ 3 ;*
- (iii) *при $M \geq 6$ любая особенность многообразия $\sigma^{-1}(P)$ есть изолированная квадратичная точка ранга ≥ 2 .*

Свойства, сформулированные в предложениях 0.4–0.6, будут предполагаться выполненными (иногда об этом напоминает в ходе рассуждений).

0.5. Исторические замечания. До сих пор описанию бирациональной геометрии многообразий Фано индекса $r \geq 2$ было посвящено немного работ. (Следует сказать, здесь имеется в виду решение задач, дающих информацию о бирациональном типе многообразия, таких, как проблема рациональности, вычисление группы бирациональных автоморфизмов, описание множества структур рационально связных расслоений и т. д. Работ, в которых строятся и изучаются конкретные бирациональные отображения, например бирациональные преобразования проективного пространства, очень много, но это совсем другая тема.) Пионером в изучении многообразий индекса ≥ 2 был Дж. Фано, пытавшийся описать группу бирациональных автоморфизмов трехмерной кубики [9]. Эта попытка, как теперь ясно, не могла быть успешной: задача была слишком трудной для методов того времени. После того, как В. А. Исковских и Ю. И. Манин доказали в 1971 г. бирациональную жесткость (в современной терминологии) трехмерных квартик, естественно было попытаться применить новую технику метода максимальных особенностей к многообразиям большего индекса, и такая попытка сразу была сделана: в [10] некоторые вспомогательные утверждения формулируются для многообразий

произвольного индекса $r \geq 1$ и сделана часть работы по описанию бирациональной геометрии двойного конуса Веронезе размерности 3 (это многообразие Фано индекса 2). Статья [11] была посвящена завершению этой работы (в частности, решению проблемы рациональности для этого класса многообразий). К сожалению, упомянутая работа [11], как стало ясно позднее, была ошибочной (см. [12], где доказательство было доведено до конца 20 лет спустя). Однако ошибочность статьи [11] была достаточно очевидной уже в середине 1990-х годов: для успешного изучения двойного конуса Веронезе необходимо уметь исключать максимальные особенности подвижных линейных систем на пучках поверхностей дель Пеццо (потому что на двойном конусе имеются такие пучки), в то время как техника такого исключения впервые была разработана в [13]. Методами, которые использовались в 1980-е годы (техника пробного класса), эту задачу решить было нельзя.

Стоит упомянуть, что в докладе [14] на Варшавском конгрессе было анонсировано данное С. И. Хашиным описание группы бирациональных автоморфизмов двойного пространства индекса 2 размерности 3 (соответствующего значению $M = 3$ в обозначениях настоящей статьи), однако этот анонс не подтвердился и доказательство не было предъявлено. (Отметим, что трехмерное двойное пространство индекса 2 – намного более сложный объект для изучения, чем двойной конус Веронезе, так что данный в [14] анонс представляется несколько наивным.) Это многообразие, по-видимому, уже доступно для изучения современными методами, но задача все равно является очень трудной (см. [15], [16]).

Таким образом, двойной конус Веронезе размерности 3 был до настоящего времени единственным многообразием Фано индекса 2, бирациональная геометрия которого была полностью описана. Ряд замечательных результатов был получен другими методами: нерациональность трехмерной кубики доказана Г. Клеменсом и Ф. Гриффитсом в [17] (см. также [18], [19]), нерациональность “очень общих” гиперповерхностей Фано произвольной размерности индекса 2 и выше доказана Я. Колларом [20], нерациональность двойных пространств $\mathbb{P}^3$ индекса 2 следует из того, что на них отсутствуют структуры расслоения на коники, как показал А. С. Тихомиров в [21]–[23]. Это лишь три примера, и мы не приводим полного списка этих результатов, поскольку используемые в упомянутых работах методы весьма далеки от метода максимальных особенностей, который составляет основу настоящей работы. Отметим, однако, что и “трансцендентный метод” (метод промежуточного якобиана, развитый Г. Клеменсом и Ф. Гриффитсом) и подход Я. Коллара позволяют получить гораздо меньше информации о бирациональной геометрии заданного многообразия, чем метод максимальных особенностей, который дает почти исчерпывающее ее описание. В частности, только метод максимальных особенностей описывает все структуры рационально связного расслоения (в том случае, когда исследование доведено до конца).

Двойной конус Веронезе размерности 3 является в некотором смысле исключительным многообразием по своим численным характеристикам. Двойные пространства произвольной размерности, рассматриваемые в данной работе, уже вполне типичны. Теоремы 0.1, 0.2 показывают, что то поведение, которого

естественно ожидать от многомерных многообразий Фано индекса 2, действительно имеет место.

§ 1. Структуры рационально связного расслоения

В этом параграфе доказаны основные результаты работы – теоремы 0.1, 0.2 – в предположении, что справедливо предложение 0.3 о максимальном подмногообразии коразмерности 2.

1.1. Расслоение Фано над $\mathbb{P}^1$. Согласно предложению 0.3 существует (и единственно) линейное подпространство $P \subset \mathbb{P}$ коразмерности 2, удовлетворяющее оценке

$$\text{mult}_R \Sigma > n,$$

где $R = \sigma^{-1}(P)$ – неприводимое многообразие, особенности которого, самое большее, нульмерны (предложение 0.5). Пусть $\varphi: V^+ \rightarrow V$ – раздутие (возможно, особого) подмногообразия $R = \sigma^{-1}(P)$, $E = \varphi^{-1}(R)$ – исключительный дивизор.

ЛЕММА 1.1. (i) *Многообразие V^+ факториально и имеет, самое большее, конечное число изолированных двойных точек (не обязательно невырожденных).*

(ii) *Линейная проекция $\pi_{\mathbb{P}}: \mathbb{P} \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ из плоскости P порождает регулярную проекцию*

$$\pi = \pi_{\mathbb{P}} \circ \sigma \circ \varphi: V^+ \rightarrow \mathbb{P}^1,$$

общий слой которой $F_t = \pi^{-1}(t)$, $t \in \mathbb{P}^1$, – неособое многообразие Фано индекса 1, а конечное число особых слоев имеют изолированные двойные точки.

(iii) *Имеют место равенства*

$$\text{Pic } V^+ = \mathbb{Z}H \oplus \mathbb{Z}E = \mathbb{Z}K^+ \oplus \mathbb{Z}F,$$

где $H = \varphi^*H$ для упрощения обозначений, $K^+ = K_{V^+}$ – канонический класс многообразия V^+ , F – класс слоя проекции π , причем

$$K^+ = -2H + E, \quad F = H - E.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эти утверждения непосредственно вытекают из определения раздутия φ , предложения 0.5 и хорошо известного факта: изолированная гиперповерхностная особенность многообразия размерности ≥ 4 факториальна (см. [24]).

Пусть Σ^+ – собственный прообраз системы Σ на раздутии V^+ подмногообразия R .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. *Имеет место равенство $c_{\text{virt}}(\Sigma^+) = c(\Sigma^+, V^+)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 0.2. Данная теорема является простым объединением предложения 0.3 и предложения 1.1.

СЛЕДСТВИЕ 1.1. *Предположим, что $c_{\text{virt}}(\Sigma^+) = 0$. Тогда система Σ^+ составлена из пучка $|H - R|$, т. е. $\Sigma^+ \subset |2nF|$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное: $\Sigma^+ \subset |-mK^+ + lF|$, где $m \geq 1$. В силу утверждения (iii) леммы 1.1 имеем

$$m = 2n - \nu, \quad l = 2\nu - 2n \geq 2,$$

так что для порога канонического присоединения получаем $c(\Sigma^+, V^+) = m$. Поскольку $c_{\text{virt}}(\Sigma^+) = 0$, в силу предложения 1.1 получаем $m = 0$, что и утверждалось. Следствие доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 0.1. В качестве линейной системы Σ рассмотрим собственный прообраз относительно χ любой линейной системы вида $\lambda^* \Lambda$, где Λ – подвижная система на базе S . Применение теоремы 0.2 (или следствия 1.1) завершает доказательство.

1.2. Подвижные линейные системы на многообразии V^+ . Начнем доказательство предложения 1.1 с хорошо известного шага: предположим, что справедливо неравенство $c_{\text{virt}}(\Sigma^+) < c(\Sigma^+, V^+) = m$. Тогда пара $(V^+, \frac{1}{m}\Sigma^+)$ не канонична, так что линейная система Σ^+ обладает максимальной особенностью, т. е. для некоторого бирационального морфизма $\psi: \tilde{V} \rightarrow V^+$ и неприводимого исключительного дивизора $E^+ \subset \tilde{V}$ выполнено неравенство Нётера–Фано:

$$\nu_E(\Sigma^+) > ma(E^+, V^+).$$

ЛЕММА 1.2. *Центр максимальной особенности E^+ содержится в некотором слое $F_t = \pi^{-1}(t)$, т. е. $B = \pi \circ \psi(E^+) = t \in \mathbb{P}^1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное: $\pi \circ \psi(E^+) = \mathbb{P}^1$. Ограничивая линейную систему Σ^+ на слой общего положения $F = F_s$, получим, что пара $(F, \frac{1}{m}\Sigma_F)$ не канонична, где $\Sigma_F \subset |-mK_F|$. Однако F – гладкое двойное пространство индекса 1 и хорошо известно [25], что это невозможно. Лемма доказана.

Для упрощения обозначений пусть $F = F_t$ – слой, содержащий центр особенности E^+ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. *Центр B есть особая точка слоя F .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку антиканоническая степень дивизора $D_F \in \Sigma_F$ есть $2m$, а в силу общности дивизора ветвления антиканоническая степень любого подмногообразия коразмерности 1 на F не меньше 2, имеем неравенство $\text{codim}_F B \geq 2$, так что

$$\text{codim}_{V^+} B \geq 3.$$

В обозначениях, введенных в п. 1.1, пусть $\Pi = \sigma \circ \varphi(F) \subset \mathbb{P}$ – гиперплоскость, соответствующая слою F . Легко видеть, что

$$\sigma_F = \sigma \circ \varphi: F \rightarrow \Pi = \mathbb{P}^{M-1}$$

есть двойное накрытие, разветвленное над $W_\Pi = W \cap \Pi$: раздутье φ не изменяет дивизоры-элементы пучка $|H - R|$. Теперь необходимо рассмотреть два случая:

- 1) $\sigma_F(B) \not\subset W_\Pi$;
- 2) $\sigma_F(B) \subset W_\Pi$, но общая точка подмногообразия B есть неособая точка слоя F .

Случай 1) исключается рассуждениями, использованными в [26]. Пусть $o \in B$ – точка общего положения, $\lambda: F^\sharp \rightarrow F$ – ее раздутие, $E^\sharp = \lambda^{-1}(o) \subset F^\sharp$ – исключительный дивизор, $E^\sharp \cong \mathbb{P}^{M-2}$. В силу обращения присоединения для общего дивизора $D \in \Sigma^+$ имеем: пара $(F, \frac{1}{m}D_F)$ не логканонична в B , так что согласно [26, предложение 3] найдется гиперплоскость $\Lambda \subset E^\sharp$, удовлетворяющая неравенству

$$\text{mult}_o D_F + \text{mult}_\Lambda D_F^\sharp > 2m,$$

где $D_F^\sharp$ – собственный прообраз дивизора D_F на $F^\sharp$. Теперь, используя рассуждения из [26, п. 2.2], приходим к противоречию.

Рассмотрим случай 2). Если $\dim B \geq 1$, то для точки $o \in B$ общего положения пересечение дивизоров $T_p W_\Pi$ и $\sigma_F(D_F)$, где $p = \sigma_F(o)$, имеет коразмерность 2 (в силу условия общности положения для любой гиперплоскости $\Lambda \subset \Pi$ имеем $\dim \text{Sing } \Lambda \cap W = 0$, так что касательные гиперплоскости $T_p W_\Pi$, $p \in B$, образуют $(\dim B)$ -мерное семейство). В частности, теоретико-схемное пересечение $(\sigma_F^{-1}(T_p W_\Pi) \circ D_F)$ есть эффективный цикл коразмерности 2 на F , имеющий H -степень $2m$ и кратность в точке o , не меньшую, чем $2 \text{mult}_o D_F > 2m$, что невозможно.

Итак, осталось рассмотреть случай, когда $B = o$ – гладкая точка на дивизоре ветвления морфизма σ_F . Поскольку условие не логканоничности пары $(F, \frac{1}{m}D_F)$ линейно по дивизору $D_F \in |-mK_F|$, можно предполагать, что D_F – простой дивизор. Положим $\Lambda = T_p W_\Pi$. Если

$$D_F \neq \sigma_F^{-1}(\Lambda),$$

то рассуждаем так же, как в случае $\dim B \geq 1$. Покажем, что равенство $D_F = \sigma_F^{-1}(\Lambda)$ невозможно. Это можно сделать, анализируя возможные особенности пересечения $W_\Pi \cap \Lambda$ для гиперповерхности W общего положения. Мы приведем более простое рассуждение, на которое внимание автора обратил анонимный рецензент статьи [27] (см. также [28]). А именно, если пара $(F, \frac{1}{m}D_F)$ не логканонична для $D_F = \sigma_F^{-1}(\Lambda)$, то согласно [29] (или [30]) не логканонична и пара $(\Pi, \Lambda + \frac{1}{2}W_\Pi)$, откуда, в свою очередь, следует, что пара $(\Lambda, \frac{1}{2}W_\Lambda)$ не логканонична, $W_\Lambda = (W \circ \Lambda) = W \cap \Lambda$. Однако, как отмечено выше, ограничение W_Λ имеет лишь изолированные двойные точки в качестве особенностей. Полученное противоречие доказывает предложение.

Пусть $B = o$ – центр максимальной особенности E^+ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3. *Точка o есть особенность многообразия V^+ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное: точка $o \in V^+$ неособа. Поскольку пара $(V^+, \frac{1}{m}\Sigma^+)$ не канонична, имеем неравенство $\text{mult}_o \Sigma^+ > m$, откуда в силу предложения 1.2 следует, что

$$\text{mult}_o D_F > 2m$$

(потому что $o \in F$ – особая точка слоя). Как отмечено выше, это невозможно, что и доказывает предложение.

1.3. Центр максимальной особенности – особая точка многообразия V^+ . Выше было показано, что центр максимальной особенности E^+ есть особая точка $o \in V^+$, что и будем предполагать. Пусть теперь $\lambda: V^\sharp \rightarrow V^+$ – раздутие точки o , $E^\sharp = \lambda^{-1}(o) \subset V^\sharp$ – исключительный дивизор, который можно рассматривать как квадратичную гиперповерхность в $\mathbb{P}^M$.

Напомним (предложение 0.6), что при $M \geq 6$ можно предполагать, что для общей гиперповерхности $W \subset \mathbb{P}$, произвольной плоскости $P \subset \mathbb{P}$ коразмерности 2 и любой особенности $o \in V^+$ ранг квадрики $E^\sharp$ не меньше 4.

Определим число $\beta \in \mathbb{Z}_+$ соотношением

$$D^\sharp \sim \lambda^* D - \beta E^\sharp,$$

где $D \in \Sigma^+$ – общий дивизор, $D^\sharp$ – его собственный прообраз на $V^\sharp$. Согласно доказываемому ниже предложению 1.4 из предложения 0.6 следует неравенство $\beta > m$.

Далее, дивизор $\lambda_F^* D_F - \beta E_F^\sharp$ на собственном прообразе $F^\sharp \subset V^\sharp$ эффективен (через λ_F и $E_F^\sharp$ обозначены раздутие точки $o \in F$ и исключительный дивизор $\lambda_F^{-1}(o)$ соответственно). Отсюда следует, что выполнено неравенство

$$\text{mult}_o D_F \geq 2\beta > 2m,$$

что невозможно. Предложение 1.1 для $M \geq 6$ полностью доказано.

1.4. Максимальная особенность над квадратичной точкой. Рассмотрим следующую локальную ситуацию. Пусть $o \in X$ – росток изолированной квадратичной особенности, $\dim X \geq 3$. Раздуем точку o :

$$\lambda: X^+ \rightarrow X,$$

через E обозначим исключительный дивизор $\lambda^{-1}(o)$, который будем рассматривать как квадратичную гиперповерхность $E \subset \mathbb{P}^{\dim X}$.

Пусть, далее, D – эффективный $\mathbb{Q}$ -картье дивизор на многообразии X , D^+ – его собственный прообраз на X^+ . Предполагая исключительную квадрику E неприводимой, определим число $\beta \in \mathbb{Q}_+$ соотношением

$$D^+ \sim \lambda^* D - \beta E.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4. *Предположим, что ранг квадратичной гиперповерхности E не меньше 4, а пара (X, D) имеет точку o изолированным центром не канонической особенности, т. е. она не канонична, но канонична вне точки o . Тогда имеет место неравенство $\beta > 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\dim X = 3$, то в силу предположения точка $o \in X$ есть невырожденная квадратичная особенность, и этот факт хорошо известен [31]. (Если $\beta \leq 1$, то пара (X^+, D^+) не канонична, так что в силу обращения присоединения пара (E, D_E^+) не логканонична, но $E \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ и D_E^+ – эффективная кривая бистепени (β, β) , что невозможно [32].) Если $\dim X \geq 4$, то, ограничивая D на общее гиперплоское сечение $Y \ni o$ многообразия X относительно какого-нибудь вложения $X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ и повторяя эту процедуру $\dim X - 3$ раз, сводим задачу (в силу обращения присоединения) к уже разобранным случаю $\dim X = 3$. Предложение доказано.

1.5. Двойные пространства размерности 5. Предположим теперь, что $M = \dim V = 5$. Пусть особая точка $o \in V^+$ является изолированным центром не логканонических особенностей пары $(V^+, \frac{1}{m}\Sigma^+)$. Слой $F \ni o$ есть дивизор Картье, так что точка o является центром не логканонической особенности пары $(F, \frac{1}{m}D_F)$, где $D_F \in \Sigma^+|_F$ – общий дивизор, $D_F \sim -mK_F$. В силу рассуждений из п. 1.2 точка o есть изолированный центр не логканонических особенностей этой пары. Если квадратичная особенность $o \in F$ имеет ранг 4 или 5, то рассуждаем, как в случае $M \geq 6$, и приходим к противоречию. Поскольку в силу условий общности положения ранг квадратичной точки $o \in F$ не меньше 3, предполагаем, что он равен 3.

Многообразие F реализуется как двойное накрытие $\sigma_F: F \rightarrow \mathbb{P}^4$, порожденное морфизмом σ . Согласно доказываемому ниже предложению 1.8 и в силу условий общности положения (см. предложение 1.7) пара $(F, \frac{1}{m}D_F)$ логканонична при $m = 1$. Теперь предложение 1.1 для $M = 5$ вытекает из следующего утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.5. Пусть $D \sim -mK_F$ – произвольный эффективный дивизор Картье на F . Тогда пара $(F, \frac{1}{m}D)$ логканонична.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем индукцией по $m \geq 2$ (как отмечено выше, при $m = 1$ утверждение предложения справедливо). Достаточно показать, что из не логканоничности пары $(F, \frac{1}{m}D)$ следует не логканоничность аналогичной пары с меньшим значением параметра $m \geq 2$.

Можно предполагать, что точка o является изолированным центром не логканонических особенностей пары $(F, \frac{1}{m}D)$. Для общей поверхности $S \ni o$ (сечения ростка $o \in F$ двумя общими гиперплоскостями относительно какого-либо проективного вложения) пара $(S, \frac{1}{m}D_S)$, где $D_S = D|_S$, не логканонична в точке o в силу обращения присоединения. С другой стороны, точка o есть изолированный центр не логканонических особенностей этой пары, так как в противном случае на F имеется дивизор T такой, что

$$D = aT + D_1,$$

где $a > m$ и D_1 эффективен, что невозможно. Особенность $o \in S$ – невырожденная квадратичная точка.

Пусть

$$\psi: F^\sharp \rightarrow F, \quad \bar{\psi}: \mathbb{P}^\sharp \rightarrow \mathbb{P}^4$$

– раздутия точек $o \in F$ и $p = \sigma_F(o) \in \mathbb{P}^4$. Обозначим исключительные дивизоры раздутий ψ и $\bar{\psi}$ через $E^\sharp$ и $\bar{E}^\sharp$ соответственно. Очевидно, $\bar{E}^\sharp \cong \mathbb{P}^3$, а σ_F продолжается до двойного накрытия $\sigma_\sharp: F^\sharp \rightarrow \mathbb{P}^\sharp$, которое на уровне исключительных дивизоров дает двойное накрытие

$$\sigma_E = \sigma_\sharp|_{E^\sharp}: E^\sharp \rightarrow \bar{E}^\sharp.$$

Положим

$$\psi^*D = D^\sharp + \nu E^\sharp,$$

где $D^\sharp$ – собственный прообраз. Если $\nu > m$, то, как и выше, имеем $\text{mult}_o D > 2m$, что невозможно. Поэтому предполагаем, что $\nu \leq m$. Применяя доказываемое ниже предложение 1.6 к паре $(S, \frac{1}{m}D_S)$, заключаем, что на квадрике $E^\sharp$

имеется плоскость $P \cong \mathbb{P}^2$ такая, что центр любой не логканонической особенности пары $(S, \frac{1}{m}D_S)$ на собственном прообразе $S^\sharp \subset F^\sharp$ есть точка $P \cap S^\sharp$. Очевидно, $\sigma_E(P)$ – плоскость в $\bar{E}^\sharp \cong \mathbb{P}^3$.

Пусть $Q \subset \mathbb{P}^4$ – единственная гиперплоскость такая, что

$$Q^\sharp \cap \bar{E}^\sharp = \sigma_E(P)$$

(как всегда, $Q^\sharp \subset \mathbb{P}^\sharp$ – собственный прообраз). Положим

$$\Pi = \sigma_F^{-1}(Q) \subset F.$$

Дивизор Π неприводим, причем $\Pi^\sharp \cap E^\sharp \supset P$. Запишем теперь

$$D = a\Pi + D^*,$$

где $a \in \mathbb{Z}_+$ и D^* эффективен и не содержит Π компонентой.

ЛЕММА 1.3. *Справедливо неравенство $a \geq 1$. Пара $(F, \frac{1}{m^*}D^*)$ не логканонична в точке o , где $m^* = m - a$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу условий общности положения пара (F, Π) логканонична. Теперь по линейности заключаем, что пара $(F, \frac{1}{m^*}D^*)$ не логканонична в точке o , причем в силу рассуждений из п. 1.2 имеет эту точку изолированным центром не логканонических особенностей. Этим второе утверждение леммы доказано. Однако при $a = 0$ оно тривиальным образом справедливо: $m^* = m$ и $D^* = D$.

Покажем, что на самом деле $a \geq 1$. Действительно, согласно предложению 1.6 (которое, напомним, доказывается ниже) имеет место неравенство

$$\text{mult}_P D^\sharp + 2\nu > 2m. \quad (1.1)$$

Если $a = 0$, то Π не содержится в носителе дивизора D , так что корректно определен эффективный цикл $Y = (\Pi \circ D)$ коразмерности 2 на F . В силу неравенства (1.1) имеем

$$\text{mult}_o Y > 2m,$$

но в то же время $\deg Y = 2m$. Противоречие. Лемма доказана.

Поскольку пара $(F, \frac{1}{m^*}D^*)$, где $D^* \sim -m^*K_F$, имеет точку $o \in F$ изолированным центром не логканонической особенности и $m^* < m$, применяем предположение индукции и завершаем доказательство предложения 1.5.

Теперь и предложение 1.1 доказано для $M = 5$.

1.6. Не логканоническая особенность над особой точкой поверхности. Рассмотрим следующую локальную ситуацию. Пусть $o \in S$ – росток невырожденной двойной точки на поверхности S (т.е. росток, аналитически изоморфный ростку $(0, 0, 0) \in \{x^2 + y^2 + z^2 = 0\} \subset \mathbb{C}^3$). Пусть $\varphi: S^+ \rightarrow S$ – раздутие двойной точки o , $E = \varphi^{-1}(o)$ – исключительная коника. Предположим,

что C – эффективный 1-цикл на S , причем для некоторого положительно-го m пара $(S, \frac{1}{m}C)$ не логканонична в точке o , но логканонична вне этой точки. Определим число $\nu \in \mathbb{Z}_+$ соотношением

$$C^+ \sim \varphi^* C - \nu E,$$

где C^+ – собственный прообраз 1-цикла C на S^+ . Аналогом предложения 3 из [26] для двойной точки является

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.6. *Существует точка $q \in E$ такая, что*

$$2\nu + \text{mult}_q C^+ > 2m. \quad (1.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что если исключительная коника E реализует не логканоническую особенность пары $(S, \frac{1}{m}C)$, то выполнено неравенство $\nu > m$, т.е. (1.2) справедливо для любой точки $q \in E$. Если $\nu \leq m$, то из принципа связности следует, что центр любой не логканонической особенности пары $(S, \frac{1}{m}C)$ есть некоторая однозначно определенная (этой парой) точка $q \in E$. Мы докажем, что неравенство (1.2) выполнено для этой точки.

Пусть

$$\varphi_i: S_i \rightarrow S_{i-1}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.3)$$

– последовательность раздутий точек-центров фиксированной не логканонической особенности пары $(S, \frac{1}{m}C)$. Точнее, пусть $\beta: \tilde{S} \rightarrow S^+$ – некоторый бирациональный морфизм, $E^+ \subset \tilde{S}$ – неприводимая исключительная кривая, реализующая не логканоническую особенность пары $(S, \frac{1}{m}C)$, т.е. справедливо логнеравенство Нётера–Фано

$$\nu_{E^+}(C) > m(a(E^+, S) + 1).$$

В силу предположения $\beta(E^+)$ есть точка $q \in E$. Определим последовательность раздутий (1.3), полагая, что $S_0 = S$, $S_1 = S^+$, для $i = 1, \dots, N$ отображение φ_i раздувает точку

$$x_{i-1} = \text{centre}(E^+, S_{i-1}),$$

так что $x_0 = o$, $x_1 = q$, и последняя исключительная кривая

$$E_N = \varphi_N^{-1}(x_{N-1}) \subset S_N$$

реализует E^+ . Исключительные кривые обозначим, как обычно, через

$$E_i = \varphi_i^{-1}(x_{i-1}) \subset S_i,$$

так что $E_1 = E$. Пусть

$$\nu_i = \text{mult}_{x_{i-1}} C^{i-1} \in \mathbb{Z}_+,$$

где C^{i-1} – собственный прообраз цикла C на S_{i-1} , $i = 2, \dots, N$, и $\nu_1 = \nu$. Логнеравенство Нётера–Фано переписывается в традиционном виде:

$$p_1\nu + \sum_{i=2}^N p_i\nu_i > m\left(\sum_{i=2}^N p_i + 1\right), \quad (1.4)$$

где $p_i = p_{Ni}$ – число путей из вершины N в вершину i в графе последовательности раздутий (1.3). Обратим внимание, что в правой части (1.4) отсутствует компонента с $i = 1$, потому что дискрепантность E равна нулю. Кратности ν_i удовлетворяют системе линейных неравенств

$$\nu_i \geq \sum_{j \rightarrow i} \nu_j, \quad i = 2, \dots, N, \quad (1.5)$$

и, кроме того,

$$2\nu \geq \sum_{j \rightarrow 1} \nu_j. \quad (1.6)$$

Наконец, $\nu_N \geq 0$. Неотрицательность остальных чисел $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{N-1}$ следует из (1.5), (1.6).

Для простоты записи обозначим через (1.4)* *нестрогое* логнеравенство Нёте-ра-Фано, т. е. неравенство (1.4), в котором знак $>$ заменен на $\geq$.

Наконец, через $\mathcal{L}$ обозначим систему нестрогих линейных неравенств (1.4)*, (1.5), (1.6) и $\nu_N \geq 0$.

Покажем, что если набор вещественных чисел $\nu_1, \dots, \nu_N$ удовлетворяет системе $\mathcal{L}$, то справедлива оценка

$$2\nu_1 + \nu_2 \geq 2m. \quad (1.7)$$

Отсюда немедленно вытекает неравенство (1.2).

Пусть $\Lambda \subset \mathbb{R}^N$ – выпуклое подмножество, задаваемое системой $\mathcal{L}$. Очевидно, линейная функция $2\nu_1 + \nu_2$ ограничена снизу на Λ , причем точная нижняя грань есть минимум, достигающийся в точке

$$v = (\theta_1, \dots, \theta_N) \in \mathbb{R}^N.$$

Можно считать, что точка v – одна из вершин множества Λ , т. е. N неравенств из системы $\mathcal{L}$ в этой точке являются равенствами.

ЛЕММА 1.4. *Предположим, что $\theta_N = 0$. Тогда существует $K \in \{2, \dots, N-1\}$ такое, что выполнено неравенство*

$$\sum_{i=1}^K p_{Ki} \theta_i > m \left(\sum_{i=2}^K p_{Ki} + 1 \right). \quad (1.8)$$

Используя индукцию по длине N разрешения особенности E^+ , получаем оценку (1.7) в случае $\theta_N = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1.4. Поскольку кривая $\bigcup_{i=1}^N E_i^N$ есть дивизор с нормальными пересечениями на неособой поверхности, вершина N соединена стрелками с одной или двумя вершинами: всегда

$$N \rightarrow N-1,$$

кроме того, возможно, $N \rightarrow L$ для некоторого $L \leq N-2$. Если из вершины N выходит только одна стрелка, то этот случай тривиален; мы разберем случай,

когда из N выходят две стрелки (из наших рассуждений, с упрощениями, следует и утверждение леммы в первом случае). Полагая $p_{ij} = 0$ при $i < j$, по определению графа инцидентности получаем

$$p_{Ni} = p_{N-1,i} + p_{Li}$$

для любого $i \leq N-1$. Теперь неравенство (1.4)* с учетом того, что $\theta_N = 0$, можно переписать в следующем виде:

$$\left(\sum_{i=1}^{N-1} p_{N-1,i} \theta_i - m \left(\sum_{i=2}^{N-1} p_{N-1,i} + 1 \right) \right) + \left(\sum_{i=1}^L p_{Li} \theta_i - m \left(\sum_{i=2}^L p_{Li} + 1 \right) \right) \geq 0,$$

откуда следует, что неравенство (1.8) справедливо либо при $K = N-1$, либо при $K = L$ (либо для обоих этих значений). Лемма доказана.

Таким образом, можно считать, что $\theta_N > 0$, и поэтому для вектора v неравенства (1.4)*, (1.5) и (1.6) являются равенствами. Отсюда для $\theta = \theta_N$ следует, что

$$\theta_i = p_i \theta$$

при $i = 2, \dots, N$, и $\theta_1 = \frac{1}{2} p_1 \theta$, так что θ находится из уравнения

$$\left(\frac{1}{2} p_1^2 + \sum_{i=2}^N p_i^2 \right) \theta = \left(\sum_{i=2}^N p_i + 1 \right) m.$$

Значение линейной функции $2\nu_1 + \nu_2$ на векторе v есть $(p_1 + p_2)\theta$, так что неравенство (1.7) вытекает из следующего комбинаторного факта.

ЛЕММА 1.5. *Имеет место неравенство*

$$(p_1 + p_2) \left(\sum_{i=2}^N p_i + 1 \right) \geq p_1^2 + 2 \sum_{i=2}^N p_i^2. \quad (1.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем индукцией по числу N вершин в графе инцидентности. Если $N = 2$, то $p_1 = p_2 = 1$ и (1.9) справедливо. Далее, неравенство

$$(p_2 + p_3) \left(\sum_{i=3}^N p_i + 1 \right) \geq p_2^2 + 2 \sum_{i=3}^N p_i^2$$

справедливо по предположению индукции. Чтобы получить (1.9), достаточно установить оценку

$$(p_1 + p_2)p_2 + (p_1 - p_3) \left(\sum_{i=3}^N p_i + 1 \right) \geq p_1^2 + p_2^2. \quad (1.10)$$

В [33, лемма 1.6] было доказано, что справедливо неравенство

$$\sum_{i=3}^N p_i + 1 \geq p_1,$$

так что (1.10) вытекает из оценки $(p_1 + p_2)p_2 + (p_1 - p_3)p_1 \geq p_1^2 + p_2^2$, которая очевидна, так как $p_2 \geq p_3$.

Лемма, а вместе с ней предложение 1.6 полностью доказаны.

1.7. Дополнительные условия общности положения для $M = 5$.
Предполагаем, что $M = 5$. Для произвольной точки $p \in W$ положим

$$T(p) = \sigma^{-1}(T_p W).$$

Пусть $\varphi: T^+(p) \rightarrow T(p)$ – раздутие изолированной особой точки $o = \sigma^{-1}(p)$ с исключительным дивизором $E(p)$ – трехмерной квадрикой в $\mathbb{P}^4$. Положим

$$Y_i = \{p \in W \mid \text{rk } E(p) = i\} \subset W.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.7. Для общего многообразия V имеем $\text{rk } E(p) \geq 3$, т. е. $Y_1 = Y_2 = \emptyset$. Далее, $\dim Y_3 = 1$. Для точки $p \in Y_3$ особенности многообразия $T(p)$ имеют следующий вид:

1) для точки $p \in Y_3$ общего положения на прямой $L = \text{Sing } E(p)$ лежат три различные особые точки многообразия $T^+(p)$, которые суть невырожденные квадратичные точки, и других особенностей на $E(p)$ многообразие $T^+(p)$ не имеет;

2) для конечного множества точек $p \in Y_3$, которые не имеют вид 1), на прямой $L = \text{Sing } E(p)$ лежат две различные особые точки p_1 и p_2 многообразия $T(p)$, других особенностей на $E(p)$ многообразие $T(p)$ не имеет, одна из этих точек (скажем, p_1) – невырожденная квадратичная особенность, точка p_2 – изолированная квадратичная точка ранга 4, ее раздутие $\varphi_\sharp: T^\sharp(p) \rightarrow T^+(p)$ имеет единственную особую точку p_3 на исключительном дивизоре $E^\sharp = \varphi_\sharp^{-1}(p_2)$ – вершину конуса $E^\sharp$, причем $p_3 \in T^\sharp(p)$ – невырожденная квадратичная точка.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится несложным подсчетом размерностей для локального уравнения

$$y^2 = q_2(z_1, z_2, z_3, z_4) + q_3(z_*) + \dots$$

многообразия $T(p)$ в точке o . Для точки $p \in Y_3$ особенности многообразия $T^+(p)$ соответствуют нулям многочлена $q_3(z_*)|_L$ на вершинной прямой L квадрики $E(p)$. Если три корня различны, получаем случай 1). Если один из корней двойной, то получаем случай 2), где точка $p_2 \in L$ соответствует двойному корню. Простые вычисления завершают доказательство.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.8. Для общего многообразия V , произвольной точки $p \in Y_3$ и произвольной гиперплоскости $R \subset T_p W$, $R \ni p$, пара $(T(p), \Pi)$, где $\Pi = \sigma^{-1}(R)$, канонична в точке o .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку

$$\text{mult}_o \Pi = a(E, T) = 2,$$

где для простоты обозначений вводим $E = E(p)$, $T = T(p)$, достаточно доказать каноничность пары (T^+, Π^+) , $\Pi^+ \subset T^+$ – собственный прообраз дивизора Π .

Пусть

$$y^2 = q_2^*(z_1, z_2, z_3) + q_3^*(z_*) + \dots$$

– локальное уравнение многообразия Π . Если $\operatorname{rk} q_2^* = 3$, то $o \in \Pi$ – обыкновенная двойная точка и доказательство очевидно. Если $\operatorname{rk} q_2^* = 2$, то нетрудно проверить, что особенности Π над точкой o разрешаются последовательностью $k \leq 6$ раздутий изолированных квадратичных точек ранга ≥ 3 . В этом случае каноничность пары (T, Π) также очевидна.

Предположим, что $\operatorname{rk} q_2^* = 1$. Это накладывает три независимых условия на Π (точнее, на многочлен $f|_R$), так что имеется 4-мерное семейство подпространств $R \subset \mathbb{P}$, для которых Π обладает этим свойством. Пусть

$$E_\Pi = \Pi^+ \cap E$$

– исключительная квадрика ранга 2 в $\mathbb{P}^3$, т. е. пара плоскостей, $L = \operatorname{Sing} E_\Pi$ – прямая их пересечения.

Если $q_3^*|_L \equiv 0$ (это накладывает дополнительные четыре независимых условия на Π , так что имеется лишь конечное число таких пар), то пусть

$$\varphi_L: \Pi_L \rightarrow \Pi^+$$

– раздутие прямой L . Легко проверяется, что Π_L имеет конечное число изолированных двойных точек, разрешаемых одним раздутием. Каноничность пары (T, Π) теперь очевидна из того, что

$$\operatorname{mult}_L \Pi^+ = a(L, T^+) = 2.$$

Предположим, что $q_3^*|_L \not\equiv 0$, т. е. в общей точке прямой L многообразие Π^+ неособо. Достаточно проверить каноничность пары (T^+, Π^+) в особых точках многообразия Π^+ на прямой L . Явные вычисления в локальных координатах (они элементарны, но громоздки, и мы их не приводим) показывают, что особенности дивизора Π^+ разрешаются последовательностью раздутий изолированных квадратичных точек (ранга ≥ 2), откуда следует каноничность пары (T^+, Π^+) .

Предположим, наконец, что $q_2^* \equiv 0$. Это накладывает шесть независимых условий на Π , так что имеется одномерное семейство таких подмногообразий на V . Квадрика E_Π есть двойная плоскость $2\Lambda = \{y = 0\}$, однако из соображений общности положения вытекает, что $\operatorname{mult}_\Lambda \Pi^+ = 1$ и, более того,

$$C = \operatorname{Sing} \Pi^+ = \{q_3^*|_\Lambda = 0\}$$

(имеются в виду особенности над точкой o) – неприводимая кубическая кривая, причем если она особая, то единственная особая точка этой кривой лежит вне прямой $L = \operatorname{Sing} E(p)$. Имеем

$$\operatorname{mult}_C \Pi^+ = a(C, T^+) = 2.$$

Раздутие кубики C приводит к многообразию Π_C , неособому над общей точкой C . Легко проверить, что и для любой точки $p \in C \setminus L$ пара (T^+, Π^+) канонична (даже терминальна) в этой точке. Наконец, многообразие Π_C имеет лишь изолированные квадратичные точки ранга ≥ 3 , так что легко проверить

каноничность пары (T^+, Π^+) и над точками $q \in C \cap L$. Отметим, что для раздутья $\varphi_q: T_q \rightarrow T^+$ точки $q \in C \cap L$, $E_q = \varphi_q^{-1}(q)$ – исключительный дивизор, имеем

$$\text{mult}_q \Pi^+ = a(E_q, T^+) = 2,$$

E_q – квадрика ранга ≥ 4 , так что E_q реализует еще одну каноническую, но не терминальную особенность пары (T, Π) . Этим доказательство предложения завершено.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Поскольку кратности особых точек и подмногообразий равны 2, доказательство предложения 1.8 сводится к проверке того факта, что если собственный прообраз дивизора Π имеет кривую особенностей, то собственный прообраз T неособ в общей точке этой кривой, и что особенности собственного прообраза Π не более чем одномерны.

§ 2. Исключение максимальных подмногообразий коразмерности 2

В этом параграфе начнем доказательство предложения 0.3: докажем, что никакое подмногообразие коразмерности 2, кроме прообраза $\sigma^{-1}(P)$, где $P \subset \mathbb{P}$ – линейное подпространство коразмерности 2, не может быть максимальным подмногообразием системы Σ .

2.1. Постановка задачи. Имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Если неприводимое подмногообразие $B \subset V$ коразмерности 2 является максимальным для подвижной линейной системы $\Sigma \subset |2nH|$, т. е. имеет место неравенство $\text{mult}_B \Sigma > n$, то $B = \sigma^{-1}(\bar{B})$, где $\bar{B} \subset \mathbb{P}$ – линейное подпространство коразмерности 2.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Самопересечение $Z = (D_1 \circ D_2)$, $D_i \in \Sigma$, линейной системы Σ имеет H -степень $8n^2$ и содержит подмногообразие B с кратностью, строго большей, чем n^2 . Поэтому $\deg B \leq 7$. Необходимо показать, что реализуется только одна из этих возможностей: $\deg B = 2$, причем $\bar{B} = \sigma(B)$ есть $(M - 2)$ -плоскость в $\mathbb{P}$, т. е. двойное накрытие $\sigma^{-1}(\bar{B}) \rightarrow \bar{B}$ не распадается.

Отметим, что при $\dim V = M \geq 5$ имеем $A^2 V = \mathbb{Z}H^2$, так что имеются только три возможности: $B \sim H^2$, или $2H^2$, или $3H^2$. В частности, $\deg B \in \{2, 4, 6\}$. Однако далее мы исключаем максимальные подмногообразия коразмерности 2 и для $M = 4$.

Исключим, прежде всего, случай $\deg B = 1$. Здесь $M = 4$, так что $\bar{B} \subset \mathbb{P} = \mathbb{P}^4$ есть 2-плоскость, причем двойное накрытие $\sigma^{-1}(\bar{B}) \rightarrow \bar{B}$ распадается. Следовательно, кривая $\bar{B} \cap W$ всюду неприведена (это кубическая кривая с кратностью 2). Такого не может быть в силу общности гиперповерхности W (см. п. 0.4).

Если $B = \sigma^{-1}(\bar{B})$, то $\deg B \in \{2, 4, 6\}$. Предположим, что $\deg B \in \{4, 6\}$, т. е. $\deg \bar{B} \in \{2, 3\}$. Покажем, что эти возможности не реализуются. В самом деле, пусть $L \subset \mathbb{P}$ – общая секущая подмногообразия $\bar{B} \subset \mathbb{P}$. В силу общности кривая $C = \sigma^{-1}(L)$ неособа и неприводима, и такие кривые замечают по меньшей мере дивизор на V , так что $C \notin \text{Bs } \Sigma$. Для общего дивизора $D \in \Sigma$ имеем $C \not\subset D$ и $(C \cdot D) = 4n$. С другой стороны, пусть $p_1 \neq p_2$ – точки пересечения $L \cap \bar{B}$;

тогда (в силу общности) $\sigma^{-1}(p_i) = \{p_{i1}, p_{i2}\}$, $i = 1, 2$, где p_{ij} – четыре различные точки на B . Поэтому

$$4n = (C \cdot D) \geq \sum_{i,j} (C \cdot D)_{p_{ij}} > 4n.$$

Противоречие.

Таким образом, если $B = \sigma^{-1}(\overline{B})$, то $\overline{B} \subset \mathbb{P}$ есть $(M - 2)$ -плоскость, т. е. в точности то, что нам нужно.

Теперь предполагаем, что $\sigma^{-1}\overline{B} = B \cup B'$ распадается на две неприводимые компоненты и

$$\deg B = \deg \overline{B} \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}.$$

Далее будет показано, что ни одна из этих возможностей не реализуется. Опишем, прежде всего, основные технические приемы, которые будут использованы для их исключения.

2.2. Коники на многообразии $\overline{B}$. Пусть $C \subset \overline{B}$ – неприводимая коника, $P = \langle C \rangle$ – ее линейная оболочка (2-плоскость). Предположим, что $C \not\subset W$, кривая $W \cap P$ приведена и два конечных множества $C \cap W$ и $\text{Sing}(W \cap P)$ не пересекаются. Положим $S = \sigma^{-1}(P)$; это неприводимая поверхность с конечным множеством особых точек $\sigma^{-1}(\text{Sing}(W \cap P))$. Пусть C_+ и C_- – компоненты кривой $\sigma^{-1}(C) = C_+ \cup C_-$, где $C_+ \subset B$, $C_- \subset B'$.

ЛЕММА 2.1. *Поверхность S содержится в базисном множестве $\text{Bs } \Sigma$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Тогда для общего дивизора $D \in \Sigma$ имеем $S \not\subset D$, так что $(D \circ S)$ – эффeктивная кривая на S , содержащая C_+ с некоторой кратностью

$$\nu_+ \geq \text{mult}_B \Sigma > n$$

и C_- с некоторой кратностью $\nu_- \in \mathbb{Z}_+$. Пусть $H_S = H|_S$ – класс гиперплоского сечения S . В силу сказанного имеем

$$((2nH_S - \nu_+C_+ - \nu_-C_-) \cdot C_{\pm}) \geq 0. \quad (2.1)$$

По предположению кривые $C_{\pm}$ не содержат особых точек поверхности S , так что локальные индексы пересечения $(C_+ \cdot C_-)_x$ суть $\frac{1}{2}(C \cdot W)_{\sigma(x)}$, а потому

$$(C_+ \cdot C_-) = \frac{1}{2}(C \cdot W) = 2(M - 1).$$

Далее, $C_+ + C_- \sim 2H_S$, откуда получаем

$$(C_+^2) = (C_-^2) = 2(3 - M).$$

Таким образом, неравенства (2.1) принимают вид линейных неравенств

$$\begin{aligned} 4n + 2(M - 3)\nu_+ - 2(M - 1)\nu_- &\geq 0, \\ 4n - 2(M - 1)\nu_+ + 2(M - 3)\nu_- &\geq 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

откуда получаем $\nu_{\pm} \leq n$. Противоречие. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. *Справедливо неравенство $\deg B \geq 4$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимо исключить случаи $\deg B = 2$ и $\deg B = 3$. Пусть сначала $\deg B = 2$. Применяя лемму 2.1 к неприводимой конике $C = \overline{B} \cap P$, где $P \subset \langle \overline{B} \rangle$ – общая 2-плоскость в линейной оболочке $\overline{B}$, получаем, что $\sigma^{-1}(P) \subset \text{Bs } \Sigma$. Следовательно,

$$\sigma^{-1}(\langle \overline{B} \rangle) \subset \text{Bs } \Sigma,$$

что невозможно, потому что $\langle \overline{B} \rangle$ – дивизор в $\mathbb{P}$. Если $\deg B = 3$, рассуждения аналогичны: многообразие $\overline{B}$ замещается кониками, причем общая коника $C \subset \overline{B}$ удовлетворяет предположениям леммы 2.1. Линейные оболочки $P = \langle C \rangle$ этих коник замещают по меньшей мере дивизор в $\mathbb{P}$, что снова дает противоречие с подвижностью линейной системы Σ . Следствие доказано.

2.3. Секущие прямые многообразия $\overline{B}$. Пусть $C \subset \overline{B}$ – неприводимая кривая, не содержащаяся в W . Пусть $x \in \mathbb{P}$ – точка, удовлетворяющая следующим условиям общности положения:

- 1) $x \notin C$;
- 2) для любой точки $p \in C \cap W$ прямая $L = \langle x, p \rangle$, соединяющая точки x и p , трансверсально пересекает гиперповерхность W в точке p и не является секущей кривой C , т. е. $C \cap L = \{p\}$.

Рассмотрим конус $\Delta = \Delta(x, C)$ с вершиной в точке x и базой C . Положим $S = \sigma^{-1}(\Delta)$; это неприводимая поверхность. Пусть C_+ и C_- – компоненты кривой $\sigma^{-1}(C) = C_+ \cup C_-$, где $C_+ \subset B$, $C_- \subset B'$. В силу сделанных предположений все точки пересечения кривых C_+ и C_- суть гладкие точки поверхности S . Очевидно,

$$(C_+ \cdot C_-) = \frac{1}{2}(C \cdot W) = (M - 1) \deg C.$$

Далее, хорошо известно [1], что на конусе Δ кривая C численно эквивалентна гиперплоскому сечению. Поэтому на поверхности S

$$C_+ + C_- \equiv H_S = \sigma^* H_\Delta,$$

где H_Δ – гиперплоское сечение конуса Δ . Отсюда получаем, что

$$(C_+^2) = (C_-^2) = -(M - 2) \deg C.$$

Ограничение $\Sigma_S = \Sigma|_S$ системы Σ на S есть непустая линейная система кривых, содержащая $C_\pm$ с кратностью $\nu_\pm$ соответственно, причем $\nu_+ \geq \text{mult}_B \Sigma > n$. Следовательно,

$$((2nH_S - \nu_+ C_+ - \nu_- C_-) \cdot C_\pm) \geq 0,$$

что дает систему линейных неравенств

$$\begin{aligned} 2n - (M - 1)\nu_+ + (M - 2)\nu_- &\geq 0, \\ 2n + (M - 2)\nu_+ - (M - 1)\nu_- &\geq 0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Отсюда немедленно получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. *Имеет место оценка*

$$\text{mult}_{B'} \Sigma > \frac{M-3}{M-2} n \geq \frac{n}{2}. \quad (2.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При общем выборе вершины x конуса Δ имеем $\nu_+ = \text{mult}_B \Sigma$, $\nu_- = \text{mult}_{B'} \Sigma$, а неравенство

$$\nu_- > \frac{M-3}{M-2} n$$

сразу следует из (2.3). Предложение доказано.

Отметим, что оценка (2.4) тем сильнее, чем выше M . Предложение 2.2 позволяет сразу исключить случай $\deg B = 7$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. *Случай $\deg B = 7$ не реализуется.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное: $\deg B = 7$. Пусть $D_1, D_2 \in \Sigma$ – общие дивизоры, $Z = (D_1 \circ D_2)$ – самопересечение системы Σ . Имеем

$$8n^2 = \deg Z \geq 7((\text{mult}_B \Sigma)^2 + (\text{mult}_{B'} \Sigma)^2) > 7 \cdot \frac{5}{4} n^2,$$

что невозможно. Противоречие. Предложение доказано.

Отметим, что дословное повторение этого рассуждения исключает случай $\deg B = 6$ при $M \geq 5$: для кратности подмногообразия B' предложение 2.2 дает оценку $\text{mult}_{B'} \Sigma > 2n/3$, так что

$$8n^2 > 6 \cdot \left(1 + \frac{4}{9}\right) n^2 = \frac{26}{3} n^2,$$

но это также невозможно.

2.4. Трисекущие прямые многообразия $\overline{B}$. Таким образом, осталось исключить три случая: $\deg B = 4, 5, 6$, причем в двух последних случаях $\dim V = M = 4$. Нам потребуется еще одна простая конструкция. Пусть $L \subset \mathbb{P}$ – 3-секущая многообразия $\overline{B}$, т. е. прямая, пересекающая $\overline{B}$ в (по крайней мере) трех точках вне W .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. *Если кривая $\sigma^{-1}(L) = C$ неприводима, то $C \subset \text{Bs } \Sigma$. Если $C = C_+ \cup C_-$ приводима, то по крайней мере одна из компонент $C_{\pm}$ содержится в $\text{Bs } \Sigma$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $D \in \Sigma$ – произвольный дивизор. Кривая C пересекает D в по крайней мере шести точках. Суммарная кратность D в этих точках не меньше, чем

$$3(\text{mult}_B \Sigma + \text{mult}_{B'} \Sigma) > \frac{9}{2} n,$$

в то время как $C \cdot D = 4n$. Поэтому $L \subset \sigma(D)$, что и требовалось показать. Предложение доказано.

Таким образом, если подмногообразие $\overline{B} \subset \mathbb{P}$ имеет достаточно много 3-секущих (точнее, если они заматают по крайней мере дивизор на $\mathbb{P}$), то подмногообразие $B \subset V$ не может быть максимальным в силу подвижности линейной системы Σ .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Утверждение предложения 2.4 (и его доказательство) остаются в силе, если прямая L пересекает $\overline{B}$ в двух различных точках вне W , причем в одной из них, скажем $\overline{x} \in L \cap \overline{B}$, касается $\overline{B}$. В этом случае кривая $C = \sigma^{-1}(L)$ касается B и B' в точках x и x' соответственно, где $\sigma^{-1}(\overline{x}) = \{x, x'\}$, $x \in B$, $x' \in B'$, и легко видеть, что локальные индексы пересечения удовлетворяют неравенствам

$$(C \cdot D)_x \geq 2 \operatorname{mult}_B \Sigma, \quad (C \cdot D)_{x'} \geq 2 \operatorname{mult}_{B'} \Sigma,$$

это позволяет нам рассуждать так же, как в случае трех различных точек. Далее, говоря о 3-секущих, будем без специальных комментариев включать и предельный случай касания.

В качестве первого приложения конструкции предложения 2.4 исключим случай $\deg B = 4$ (размерность $M \geq 4$ произвольна).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. *Случай $\deg B = 4$ не реализуется.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Пусть $P \subset \mathbb{P}$ – общая 3-плоскость. Для неприводимой кривой $B_P = \overline{B} \cap P$ в $\mathbb{P}^3$ возможны четыре случая:

- 1) $B_P \subset R$ – плоская кривая, $R = \mathbb{P}^2$ – некоторая плоскость в P ;
- 2) $B_P = Q_1 \cap Q_2$ – гладкая эллиптическая кривая, пересечение квадрик Q_1 и Q_2 ;
- 3) B_P – гладкая рациональная кривая;
- 4) B_P имеет двойную точку.

Случай 1) не реализуется, потому что любая прямая $L \subset R$ есть 4-секущая. Из предложения 2.4 вытекает, что вся поверхность $\sigma^{-1}(R)$ содержится в базисном множестве $\operatorname{Bs} \Sigma$. Этого не может быть, потому что P – общая 3-плоскость.

В случае 2) приходим к противоречию точно так же, как в доказательстве леммы 2.1. А именно, пусть Q – общая квадрика, содержащая кривую B_P . На поверхности Q имеем $B_P \sim 2H_Q$, где H_Q – плоское сечение. Полагаем

$$S = \sigma^{-1}(Q), \quad \sigma^{-1}(B_P) = C_+ \cup C_-, \quad C_+ \subset B, \quad C_- \subset B',$$

так что на S имеем $C_+ + C_- \sim 2H_S$, где $H_S = H|_S$ – класс гиперплоского сечения. Далее, рассуждая дословно так же, как в лемме 2.1, получаем неравенства (2.1), которые дают систему линейных неравенств (2.2). Этим противоречием случай 2) исключен. Отметим, что ключевую роль (как и в лемме 2.1) играет тот факт, что кривая B_P эквивалентна двум гиперплоским сечениям поверхности Q . В общем случае кривую можно вложить в поверхность в качестве гиперплоского сечения (с кратностью 1), что дает лишь некоторую оценку для кратности второй компоненты B' , но не позволяет сразу получить противоречие.

Рассмотрим случай 3). Пусть $x \in B_P$ – точка общего положения, и пусть $\pi_x: B_P \rightarrow \mathbb{P}^2$ – проекция из точки x . Образ $\pi_x(B_P) \subset \mathbb{P}^2$ есть рациональная

кубическая кривая, которая имеет двойную точку. Следовательно, кривая B_P имеет 3-секущую, проходящую через точку x . Поскольку P – 3-плоскость, а $x \in B_P$ – общая точка, применяем предложение 2.4 и получаем противоречие.

В случае 4) кривая B_P имеет, конечно, единственную двойную точку. Отсюда следует, что многообразие $\overline{B}$ содержит $(M-3)$ -плоскость Π двойных точек. Пусть $L \subset \Pi$ – общая прямая, $\Lambda \supset L$ – общая 3-плоскость, содержащая L . Теперь кривая $B_\Lambda = B \cap \Lambda$ есть кватрика в $\mathbb{P}^3$, содержащая прямую L с кратностью 2. Следовательно,

$$B_\Lambda = C_\Lambda + 2L,$$

где C_Λ – коника (в общем случае неприводимая). Многообразие $\overline{B}$ замещается кониками C_Λ . Теперь применяем лемму 2.1 и получаем противоречие.

Предложение доказано.

2.5. Исключение случаев $\deg B = 5, 6$. Напомним: можно предполагать, что $\dim V = M = 4$ (хотя наши рассуждения верны и в произвольной размерности). Пусть $P \subset \mathbb{P}$ – общая гиперплоскость (т. е. 3-плоскость), $B_P = \overline{B} \cap P$ – неприводимая кривая. Можно предполагать, что линейная оболочка кривой B_P есть $P = \mathbb{P}^3$ (иначе рассуждаем, как в случае 1) при $\deg B = 4$). Кроме того, кривая B_P не содержит особых точек кратности ≥ 3 при $\deg B = 5$ и кратности ≥ 4 при $\deg B = 6$ (иначе рассуждаем, как в случае 4) при $\deg B = 4$).

Пусть $\deg B = 5$. Нетрудно проверить, что через общую точку $x \in B_P$ проходит 3-секущая. В самом деле, если кривая B_P гладкая, то проекция из точки x реализует B_P как плоскую кватрику $Q \subset \mathbb{P}^2$, которая не может быть гладкой: если бы кривая Q была гладкой, то по теореме Римана–Роха мы бы имели

$$h^0(l_Q + x) - h^1(l_Q + x) = 5 + 1 - 3 = 3,$$

где $l_Q = L \cap Q$ – сечение Q прямой $L \subset \mathbb{P}^2$. Далее,

$$h^1(l_Q + x) = h^0(-x) = 0,$$

откуда $h^0(l_Q + x) = 3$, в то время как $l_Q + x$ есть плоское сечение гладкой кривой $B_P \subset \mathbb{P}^3$, и потому $h^0(l_Q + x) \geq 4$. Противоречие. Значит, кватрика Q имеет особенности, а B_P – 3-секущую, проходящую через точку x . Теперь использование предложения 2.4 приводит к противоречию. Следовательно, кривая B_P имеет $\delta \geq 1$ двойных точек. Пусть $p \in \text{Sing } B_P$ – двойная точка. Проекция $\pi_p: B_P \rightarrow \mathbb{P}^2$ из точки p реализует B_P как плоскую кубику с не менее $(\delta - 1) \geq 0$ двойными точками, т. е. кривую рода $\leq 2 - \delta$. С другой стороны, проекция $\pi_x: B_P \rightarrow \mathbb{P}^2$ из общей точки $x \in B_P$ реализует B_P как плоскую кватрику с $\delta^* \geq \delta$ двойными точками, т. е. кривую рода $3 - \delta^*$. Следовательно, имеем неравенство $\delta^* \geq \delta + 1$, т. е. через точку x проходит 3-секущая $L \subset P$, не содержащая двойных точек кривой B_P . Теперь можно применить предложение 2.4 и получить противоречие. Этим случай $\deg B = 5$ исключен.

Пусть $\deg B = 6$. Тот факт, что кривая B_P не может быть гладкой, доказывается, как аналогичный факт для $\deg B = 5$. Предположим, что точка $p \in B_P$ имеет кратность 3. Сравнивая кривые

$$\pi_p(B_P) \subset \mathbb{P}^2, \quad \pi_x(B_P) \subset \mathbb{P}^2,$$

где x – общая точка, исключаем эту возможность такими же рассуждениями, как в случае кривой степени 5 с особенностями. Поэтому можно предполагать, что кривая B_P содержит $\delta \geq 1$ двойных точек и не содержит точек более высокой кратности.

Теперь рассуждаем дословно так же, как при $\deg B = 5$: сравниваем кривую $\pi_p(B_P) \subset \mathbb{P}^2$ степени 4, имеющую не менее $(\delta - 1) \geq 0$ двойных точек ($p \in \text{Sing } B_P$ – одна из особых точек), с кривой $\pi_x(B_P) \subset \mathbb{P}^2$ степени 5, имеющей $\delta^* \geq \delta$ двойных точек. Получаем, что B_P имеет 3-секущую, проходящую через точку $x \in B_P$ общего положения и не содержащую особых точек кривой B_P . (Если кривая $\pi_p(B_P) \subset \mathbb{P}^2$ есть коника, т. е. $\deg \pi_p = 2$, то B_P содержится в квадратичном конусе с вершиной p , причем можно предполагать, что B_P не имеет других двойных точек. В этом случае род кривой B_P легко вычисляется и устанавливается существование 3-секущей, проходящей через точку общего положения.) Применяя предложение 2.4, получаем противоречие. Случай $\deg B = 6$ исключен.

Доказательство предложения 2.1 завершено.

§ 3. Исключение максимальных особенностей с центром коразмерности 3

В этом параграфе продолжим доказательство предложения 0.3: докажем, что линейная система Σ не имеет максимальных особенностей, центр которых есть подмногообразие коразмерности 3 на V .

3.1. Постановка задачи. Исключение центров степени ≥ 2 . Напомним, что линейная система Σ имеет максимальную особенность, центр которой есть неприводимое подмногообразие $B \subset V$. В § 2 было доказано, что если Σ не имеет максимального подмногообразия вида $\sigma^{-1}(P)$, где $P \subset \mathbb{P}$ – линейное подпространство коразмерности 2, то Σ вообще не имеет максимальных подмногообразий коразмерности 2. Следовательно, можно считать, что $\text{codim } B \geq 3$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Подмногообразие B имеет коразмерность ≥ 4 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Тогда в силу предложения 2.1 имеем $\text{codim } B = 3$. Случай $\deg B = 1$ невозможен (см. ниже пп. 3.2, 3.3). Следовательно, можно считать, что $\deg B \geq 2$.

Отметим что морфизм $\sigma|_B: B \rightarrow \sigma(B) = \bar{B}$ бирационален. В самом деле, пусть $Z = (D_1 \circ D_2)$ – самопересечение системы Σ , тогда

$$\text{mult}_B Z > 4n^2,$$

откуда следует, что если $\sigma|_B$ – двойное накрытие, то

$$\text{mult}_{\bar{B}} \sigma_* Z > 8n^2,$$

однако $\sigma_* Z$ – эффективный цикл коразмерности 2 на $\mathbb{P}$ степени $8n^2$. Противоречие. Следовательно, $\deg \bar{B} = \deg_H B \geq 2$ (поскольку дивизор ветвления W не содержит линейных подпространств коразмерности 3). Пусть $p, q \in \bar{B}$ – точки общего положения, $L \subset \mathbb{P}$ – прямая, соединяющая эти точки, $\Pi \supset L$ – общая

(двумерная) плоскость, $\Lambda = \sigma^{-1}(\Pi)$ – неприводимая поверхность на V . Если $L \not\subset \text{Supp } \sigma_* Z$, то пересечение $\Pi \cap \text{Supp } \sigma_* Z$, а следовательно, и пересечение $\Lambda \cap \text{Supp } Z$ нульмерны, так что имеем

$$8n^2 = (\Lambda \cdot Z) \geq \sum_{x \in \sigma^{-1}(L) \cap B} (\Lambda \cdot Z)_x \geq \sum_{x \in \sigma^{-1}(L) \cap B} \text{mult}_x Z > 8n^2.$$

Противоречие. Следовательно, $L \subset \text{Supp } \sigma_* Z$.

Пусть $Q \subset \mathbb{P}$ – неприводимое подмногообразие, заметаемое всеми секущими многообразия $\bar{B}$. По доказанному имеем $\text{codim } Q = 2$, так что Q – подпространство коразмерности 2, а $\bar{B} \subset Q$ – некоторая гиперповерхность.

Запишем теперь

$$Z = a\sigma^{-1}(Q) + Z^\sharp,$$

где $Z^\sharp$ не содержит подмногообразия $\sigma^{-1}(Q)$ компонентой и $a \geq 1$. Цикл Z удовлетворяет линейному неравенству

$$2 \text{mult}_B Z > \deg Z.$$

Легко видеть, что любой эффективный цикл коразмерности 2, удовлетворяющий этому неравенству, содержит подмногообразие $\sigma^{-1}(Q)$ компонентой: как и выше,

$$\deg Z = (\Lambda \cdot Z) \geq \sum_{x \in \sigma^{-1}(L) \cap B} \text{mult}_B Z > \deg Z$$

для любой секущей L многообразия $\bar{B}$, которая не содержится в носителе цикла $\sigma_* Z$ (и общей плоскости $\Pi \supset L$). Однако

$$\text{mult}_B \sigma^{-1}(Q) = 1, \quad \deg \sigma^{-1}(Q) = 2$$

(напомним, что для общей гиперповерхности W пересечение $Q \cap W$ имеет, самое большее, нульмерные особенности, так что $\sigma^{-1}(Q)$ – неприводимое множество), откуда следует, что цикл $Z^\sharp$ удовлетворяет неравенству

$$2 \text{mult}_B Z^\sharp > \deg Z^\sharp$$

и, следовательно, содержит подмногообразие $\sigma^{-1}(Q)$ компонентой. Противоречие. Этим случай $\deg B \geq 2$ исключен.

3.2. Исключение бесконечно близких особенностей с $\deg B = 1$. Далее до конца параграфа предполагаем, что $\deg B = 1$. В силу условий общности положения этот случай реализуется только для двойных пространств размерности 4. Пусть X – σ -прообраз общей 3-плоскости в $\mathbb{P}$ (в частности, пересекающей $\bar{B}$ ровно в одной точке). Тогда $\sigma_X: X \rightarrow \mathbb{P}^3$ – двойное накрытие, разветвленное над гладкой гиперповерхностью $W_X \subset \mathbb{P}^3$ степени $2m_X \geq 8$, $o = X \cap B$ – точка, лежащая вне дивизора ветвления:

$$p = \sigma_X(o) \notin W_X,$$

H_X есть σ_X -подъем класса плоскости в $\mathbb{P}^3$. Для упрощения записи будем записывать H вместо H_X . В силу предложения 0.4 можно предположить, что на X

нет прямых, проходящих через точку o , т. е. для любой прямой $L \subset \mathbb{P}^3$, $L \ni p$, кривая $\sigma_X^{-1}(L)$ неприводима.

Через Σ_X обозначим ограничение системы Σ на X . Подвижная линейная система $\Sigma_X \subset |2nH|$ обладает максимальной особенностью с центром в точке o , т. е. для пары $(X, \frac{1}{n}\Sigma_X)$ точка o является центром не канонической особенности. Предположим, что выполнено неравенство

$$\nu = \text{mult}_o \Sigma_X \leq 2n,$$

т. е. точка o не максимальна (см. доказываемую ниже лемму 3.2). Раздуем эту точку:

$$\varphi: \tilde{X} \rightarrow X,$$

$E = \varphi^{-1}(o) \cong \mathbb{P}^2$ – исключительный дивизор.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *Центр максимальной особенности на $\tilde{X}$ есть прямая в $E \cong \mathbb{P}^2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если центр максимальной особенности есть кривая $C \subset E$ степени $d_C \geq 1$, то выполнено неравенство $\nu > nd_C$, откуда в силу сделанных предположений получаем $d_C = 1$, т. е. C – прямая. Таким образом, достаточно исключить возможность того, что центр особенности есть точка $y \in E$. Предположим, что это так, и покажем, что это ведет к противоречию.

ЛЕММА 3.1. *Для любой неприводимой кривой $C \subset X$ выполнено неравенство*

$$\text{mult}_o C + \text{mult}_y \tilde{C} \leq \deg C = (C \cdot H), \quad (3.1)$$

где $\tilde{C} \subset \tilde{X}$ – собственный прообраз.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\tilde{\varphi}: \tilde{\mathbb{P}} \rightarrow \mathbb{P}^3$ – раздутие точки $p = \sigma_X(o)$, $\bar{E} = \tilde{\varphi}^{-1}(o)$ – исключительный дивизор. Морфизм σ_X индуцирует изоморфизм

$$\sigma_E: E \rightarrow \bar{E}.$$

Пусть $\bar{y} = \sigma_E(y) \in \bar{E}$. Для любой плоскости $P \ni p$ такой, что ее собственный прообраз $\tilde{P} \subset \tilde{\mathbb{P}}$ содержит точку $\bar{y}$, ее прообраз $H = \sigma_X^{-1}(P)$ содержит точку o и $\tilde{H} \ni y$. Через $|H - o - y|$ обозначим линейную подсистему системы H , определяемую этим условием. Очевидно,

$$\text{Bs } |H - o - y| = \sigma^{-1}(L),$$

где $L \ni p$ – прямая в $\mathbb{P}^3$ с касательным направлением $\bar{y}$ в точке p . Пусть $C \subset X$ – неприводимая кривая, $C \ni p$.

Напомним, что по предположению через точку o не проходят прямые, т. е. кривая $\sigma^{-1}(L)$ неприводима. Имеем

$$\text{mult}_o \sigma^{-1}(L) = \text{mult}_y \widetilde{\sigma^{-1}(L)} = 1$$

и $(H \cdot \sigma^{-1}(L)) = 2$, так что для кривой $\sigma^{-1}(L)$ неравенство (3.1) справедливо.

Пусть $C \neq \sigma^{-1}(L)$. Для общего дивизора $R \in |H - o - y|$ имеем

$$(C \cdot R) = (C \cdot H) \geq (C \cdot R)_o \geq \text{mult}_o C + (\tilde{C} \cdot \tilde{R})_y \geq \text{mult}_o C + \text{mult}_y \tilde{C},$$

что и требовалось показать ($\tilde{R}$ – собственный прообраз R на $\tilde{X}$). Лемма доказана.

Теперь доказательство предложения 3.2 завершается дословно такими же рассуждениями, как и доказательство $(8n^2)$ -неравенства (лемма 4.2). В самом деле, пусть $\varphi_{i,i-1}: X_i \rightarrow X_{i-1}$, $i = 1, \dots, N$, – разрешение максимальной особенности, т. е. $\varphi_{i,i-1}$ раздувает ее центр B_{i-1} на X_{i-1} , $E_i = \varphi_{i,i-1}^{-1}(B_{i-1})$ – исключительный дивизор. Для $i = 1, \dots, L$ центры раздутий суть точки, для $i = L + 1, \dots, N$ – кривые, причем из неравенства $\nu \leq 2n$ следует, что эти кривые гладкие и рациональные: $B_L \subset E_L \cong \mathbb{P}^2$ – некоторая прямая, $B_i \subset E_i$ – сечение линейчатой поверхности $E_i \rightarrow B_{i-1}$ при $i = L + 1, \dots, N - 1$. В силу того же неравенства $\nu \leq 2n$ имеем $N \geq L + 1$ и

$$B_L \not\subset E_{L-1}^L,$$

т. е. $L + 1 \rightarrow L - 1$ в ориентированном графе последовательности раздутий $\varphi_{i,i-1}$. Наконец, по предположению имеем $L \geq 2$, точнее, $B_0 = o$ и $B_1 = y \in E_1$. Теперь, рассуждая так же, как в доказательстве леммы 4.2, получаем неравенство

$$\text{mult}_o Z + \text{mult}_y \tilde{Z} > 8n^2$$

для самопересечения $Z = (D_1 \circ D_2)$ подвижной линейной системы Σ . Однако Z – эффективный 1-цикл степени $\deg Z = (Z \cdot H) = 8n^2$. Полученное противоречие с леммой 3.1 завершает доказательство предложения 3.2.

3.3. Исключение последнего случая: предварительные построения.

Для завершения доказательства предложения 3.1 осталось исключить ситуацию, описанную в предложении 3.2. Считаем, что $M \geq 4$.

Пусть $L \subset \mathbb{P}^4$ – прямая, порождающая прямую на V , т. е. $\sigma^{-1}(L) = C_+ \cup C_-$, где $C = C_+$, C_- – гладкие рациональные кривые. Пусть $\varphi: \tilde{V} \rightarrow V$, $\varphi_{\mathbb{P}}: \tilde{\mathbb{P}} \rightarrow \mathbb{P}^4$ – раздутия кривой C и прямой L соответственно с исключительными дивизорами $E = \varphi^{-1}(C) \subset \tilde{V}$, $E_{\mathbb{P}} = \varphi_{\mathbb{P}}^{-1}(L) \subset \tilde{\mathbb{P}}$.

Морфизм σ индуцирует рациональное отображение $\sigma_E: E \dashrightarrow E_{\mathbb{P}}$, которое является бирациональным изоморфизмом, отображающим $E \setminus \varphi^{-1}(C \cap \sigma^{-1}(W))$ изоморфно на $E_{\mathbb{P}} \setminus \sigma_{\mathbb{P}}^{-1}(L \cap W)$. В частности, для любой неприводимой поверхности $S \subset E$, накрывающей C , корректно определен ее образ

$$\sigma_E(S) \subset E_{\mathbb{P}} \cong L \times \mathbb{P}^2.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. *Подвижная линейная система $\Sigma \subset |2nH|$ не может иметь максимальную особенность, центр которой на V есть кривая C , а на $\tilde{V}$ – некоторая поверхность $S \subset E$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим противное: такая максимальная особенность существует.

ЛЕММА 3.2. *Имеет место неравенство $\text{mult}_C \Sigma \leq 2n$, т.е. кривая C не является максимальным подмногообразием системы Σ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $P \subset \mathbb{P}^4$ – общая плоскость, содержащая прямую L . Легко видеть, что пересечение $P \cap W$ есть неособая кривая, так что $Q = \sigma^{-1}(P)$ – неособая поверхность типа КЗ. Ограничение $\Sigma|_Q = \Sigma_Q$ есть линейная система кривых, имеющая, вообще говоря, неподвижные компоненты C_+ и C_- кратности ν_+ и ν_- соответственно. Следовательно, на Q имеют место неравенства

$$((2nH_Q - \nu_+C_+ - \nu_-C_-) \cdot C_{\pm}) \geq 0,$$

где $H_Q = H|_Q$, или, в явном виде,

$$2n + 2\nu_+ - 3\nu_- \geq 0, \quad 2n - 3\nu_+ + 2\nu_- \geq 0$$

(потому что $(C_{\pm}^2) = -2$ и $(C_+ \cdot C_-) = 3$). Умножая первое неравенство на 2, второе на 3 и суммируя, получаем

$$10n - 5\nu_+ \geq 0,$$

что и требовалось показать. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. *Для точки $x \in L$ пересечение $S \cap \sigma^{-1}(x)$ есть прямая в $\sigma^{-1}(x) \cong \mathbb{P}^2$. Граф разрешения максимальной особенности есть цепь.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеет место неравенство

$$\text{mult}_C \Sigma \geq n \deg(S \cap \sigma^{-1}(x)),$$

откуда следует первое утверждение следствия, второе очевидно.

Продолжим доказательство предложения 3.3. Поверхность $\sigma_E(S)$ в $E_{\mathbb{P}} \cong L \times \mathbb{P}^2 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ имеет бистепень $(d, 1)$.

3.4. Трудный случай $d = 0$. Имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. *Случай $d = 0$ невозможен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это наиболее трудный случай, и его рассмотрение требует разбора большого количества возможностей.

Прежде всего, заметим, что существует единственная гиперплоскость $\Pi \subset \mathbb{P}^4$, высекающая S на $E_{\mathbb{P}}$:

$$S = \tilde{\Pi} \cap E_{\mathbb{P}},$$

где $\tilde{\Pi} \subset \tilde{\mathbb{P}}$ – собственный прообраз. Поскольку линейная система Σ подвижна, ее ограничение

$$\Sigma_{\Pi} = \Sigma|_{\sigma^{-1}(\Pi)}$$

есть непустая линейная система (возможно, имеющая неподвижные компоненты). Рассмотрим теперь общую плоскость $P \supset L$, $P \subset \Pi$, и будем рассуждать таким же образом, как в доказательстве леммы 2.1: ограничим эффективный дивизор в системе Σ_{Π} на поверхность $Q = \sigma^{-1}(P)$ и покажем, что полученная

эффективная кривая Σ_Q не может содержать кривую C с кратностью, строго большей, чем $2n$.

К сожалению, рассуждать дословно так же, как в доказательстве леммы 2.1, нельзя, потому что поверхность Q , вообще говоря, имеет особые точки. Необходимо разрешить особенности, а для этого, в свою очередь, перечислить возможные случаи для общего дивизора ветвления W . Особенности могут возникать потому, что гиперплоскость Π (однозначно определенная системой Σ) может оказаться касательной гиперплоскостью к W в одной или нескольких точках пересечения L и W .

Для точки $x \in W$ через $T_x W$ обозначим гиперплоскость в $\mathbb{P}^4$, касательную к W в точке x .

Для теоретико-схемного пересечения $(L \circ W)$ возможны три случая:

- 1) $(L \circ W) = 2x_1 + 2x_2 + 2x_3$, где x_1, x_2, x_3 – различные точки на прямой L ;
- 2) $(L \circ W) = 4x_1 + 2x_2$, где $x_1 \neq x_2$ – две различные точки;
- 3) $(L \circ W) = 6x$, $x \in L$.

Случай 1) реализуется для прямой общего положения (трехмерное семейство). Случай 2) реализуется для двумерного, случай 3) – для одномерного семейства прямых $C \subset V$.

Далее, гиперплоскость Π касается дивизора W в точках x, y тогда и только тогда, когда

$$\Pi = T_x W = T_y W.$$

Поэтому получаем следующую детализацию случаев 1) и 2):

- 1.1) три гиперплоскости $T_{x_i} W$ различны (случай общего положения);
- 1.2) $T_{x_1} W = T_{x_2} W \neq T_{x_3} W$ (этот случай реализуется для одномерного семейства прямых, потому что совпадение касательных гиперплоскостей налагает два независимых условия на прямую C);
- 1.3) $T_{x_1} W = T_{x_2} W = T_{x_3} W$ (этот случай для общего дивизора W не реализуется, однако будет рассмотрен для полноты изложения);
- 2.1) $T_{x_1} W \neq T_{x_2} W$ (разные гиперплоскости);
- 2.2) $T_{x_1} W = T_{x_2} W$ (этот случай реализуется для конечного числа прямых).

Стратегия дальнейших рассуждений следующая. Предполагая, что Π касается W по крайней мере в одной точке (иначе используем доказательство леммы 2.1 без каких-либо изменений), разрешим особенности поверхности $Q = \sigma^{-1}(P)$ для общей плоскости P , где $L \subset P \subset \Pi$. Пусть T_i , $i \in I$, – множество неприводимых исключительных кривых, которые являются (-2) -кривыми на КЗ-поверхности $\tilde{Q}$. Пусть $\tilde{C}_\pm$ – собственные прообразы кривых $C_\pm$ на $\tilde{Q}$, $\tilde{\Sigma}_Q$ – собственный прообраз линейной системы Σ_Q на $\tilde{Q}$. Для некоторых неотрицательных чисел $a_i \in \mathbb{Z}_+$, $i \in I$, имеем

$$\Sigma_Q \subset \left| 2nH_Q - \sum_{i \in I} a_i T_i \right|,$$

где $H_Q = H|_Q$ (подъем этого класса на $\tilde{Q}$ обозначаем также через H_Q). Линейная система $\tilde{\Sigma}_Q$ содержит кривые $C_\pm$ неподвижными компонентами кратности $\nu_\pm$, причем по крайней мере одна из этих двух кратностей по построению

строго больше $2n$. Предполагаем, что $\nu_+ > 2n$. Следовательно, справедливы $\#I + 2$ линейных неравенства

$$\left(\left(2nH_Q - \nu_+ \tilde{C}_+ - \nu_- \tilde{C}_- - \sum_{i \in I} a_i T_i \right) \cdot R \right) \geq 0,$$

где $R \in \{\tilde{C}_+, \tilde{C}_-\} \cup \{T_i | i \in I\}$. В каждом из возможных случаев эта система линейных неравенств дает оценку $\nu_+ \leq 2n$, противоречащую исходному предположению. Этим доказательство предложения 3.4 завершится.

Реализуем описанную программу. Для этого перечислим все возможные типы особенностей поверхности Q для *общей* плоскости $P \subset \Pi$, $P \supset L$ (в предположении общности дивизора W). Для произвольной плоскости вариантов гораздо больше, но нам рассматривать их не нужно. Перечисленные ниже типы особенностей получаются элементарными вычислениями в аффинных координатах z_1, z_2, z_3, z_4 на $\mathbb{P}^4$, в которых гиперплоскость Π имеет уравнение $z_4 = 0$, а прямая L задается системой уравнений $z_1 = z_2 = 0$, так что плоскость P задается уравнением $z_1 + \beta z_2 = 0$, где $\beta \in \mathbb{C}$ – некоторое число. Непосредственные вычисления в координатах показывают, что если особенности поверхности Q хуже, чем в перечисленных ниже случаях, для хотя бы одной прямой $C \subset V$, то W не является гиперповерхностью общего положения. Вычисления элементарны, и мы их не приводим.

Приведем список возможных типов особенностей.

Тип А. Поверхность Q имеет одну обыкновенную двойную точку, а $\tilde{Q}$ – одну исключительную кривую E . В этом случае таблица умножения имеет следующий вид:

	$\tilde{C}_+$	$\tilde{C}_-$	E
$\tilde{C}_+$	–2	2	1
$\tilde{C}_-$	2	–2	1
E	1	1	–2

Этот тип реализуется в случаях 1.1), 2.1) и 3).

Тип В. Поверхность Q имеет одну вырожденную двойную точку, разрешаемую одним раздутием, а $\tilde{Q}$ – две исключительные прямые E_+ и E_- . В этом случае таблица умножения имеет вид

	$\tilde{C}_+$	$\tilde{C}_-$	E_+	E_-
$\tilde{C}_+$	–2	2	1	0
$\tilde{C}_-$	2	–2	0	1
E_+	1	0	–2	1
E_-	0	1	1	–2

Этот тип реализуется в случаях 1.1), 2.1).

Тип С. Поверхность Q имеет вырожденную двойную точку, исключительный дивизор раздутия последней – пара прямых, точка пересечения которых

есть обыкновенная двойная точка поверхности (разрешаемая одним раздутием). На $\tilde{Q}$ имеются три исключительные кривые E_+ , E_- , E с таблицей умножения

	$\tilde{C}_+$	$\tilde{C}_-$	E_+	E_-	E
$\tilde{C}_+$	-2	2	1	0	0
$\tilde{C}_-$	2	-2	0	1	0
E_+	1	0	-2	0	1
E_-	0	1	0	-2	1
E	0	0	1	1	-2

Этот тип реализуется в случае 1.1).

Тип D. Поверхность Q имеет две обыкновенные двойные точки (разрешаемые одним раздутием). На $\tilde{Q}$ имеются две исключительные кривые E_1 и E_2 . Таблица умножения имеет вид

	$\tilde{C}_+$	$\tilde{C}_-$	E_1	E_2
$\tilde{C}_+$	-2	1	1	1
$\tilde{C}_-$	1	-2	1	1
E_1	1	1	-2	0
E_2	1	1	0	-2

Этот тип реализуется в случаях 1.2) и 2.2).

Этими четырьмя типами завершается список возможных особенностей поверхности Q для многообразий V общего положения. Однако условие общности положения несущественно. Автором разобраны примеры более сложных особенностей, и применяемый метод во всех случаях дает доказательство предложения 3.4. В качестве иллюстрации, в дополнение к типам A–D, приведем еще два примера (не реализующиеся на многообразии общего положения).

Тип E. Поверхность Q имеет две особые точки: невырожденную и вырожденную. Обе разрешаются одним раздутием. На $\tilde{Q}$ имеются три исключительные кривые: E (соответствует невырожденной точке) и $E_{\pm}$ (они соответствуют исключительным прямым на раздутии вырожденной точки). Таблица умножения имеет вид

	$\tilde{C}_+$	$\tilde{C}_-$	E_+	E_-	E
$\tilde{C}_+$	-2	1	1	0	1
$\tilde{C}_-$	1	-2	0	1	1
E_+	1	0	-2	1	0
E_-	0	1	1	-2	0
E	1	1	0	0	-2

Этот тип реализуется на многообразии необщего положения в случае 1.2).

Тип F. Поверхность Q имеет три невырожденные двойные точки. На $\tilde{Q}$ имеются три исключительные кривые E_1 , E_2 , E_3 . Таблица умножения имеет

вид

	$\tilde{C}_+$	$\tilde{C}_-$	E_1	E_2	E_3
$\tilde{C}_+$	-2	0	1	1	1
$\tilde{C}_-$	0	-2	1	1	1
E_1	1	1	-2	0	0
E_2	1	1	0	-2	0
E_3	1	1	0	0	-2

Этот тип реализуется на многообразии необщего положения в случае 1.3).

Осталось осуществить описанную выше программу для каждого типа особенностей. Мы разберем два примера, А и С, в остальных случаях вычисления аналогичны. Затем объясним сущность вычислений.

Рассмотрим тип А. Пусть ν_+ , ν_- и α – кратности кривых $\tilde{C}_+$, $\tilde{C}_-$ и E в линейной системе Σ_Q , поднятой на $\tilde{Q}$. Умножая класс

$$2nH_Q - \nu_+\tilde{C}_+ - \nu_-\tilde{C}_- - \alpha E$$

на $\tilde{C}_+$, $\tilde{C}_-$ и E , получаем систему линейных неравенств

$$\begin{aligned} 2n + 2\nu_+ - 2\nu_- - \alpha &\geq 0, \\ 2n - 2\nu_+ + 2\nu_- - \alpha &\geq 0, \\ -\nu_+ - \nu_- + 2\alpha &\geq 0. \end{aligned}$$

Прибавляя к первому и второму неравенствам умноженное на $\frac{1}{2}$ третье неравенство, получаем систему

$$\begin{aligned} 4n + 3\nu_+ - 5\nu_- &\geq 0, \\ 4n - 5\nu_+ + 3\nu_- &\geq 0. \end{aligned}$$

Умножая первое неравенство на 3, второе на 5 и суммируя, получаем

$$32n - 16\nu_+ \geq 0,$$

т. е. в точности то, что нам нужно показать.

Рассмотрим тип С. Обозначая кратности компонент $\tilde{C}_+$, $\tilde{C}_-$, E_+ , E_- , E через ν_+ , ν_- , α_+ , α_- , α соответственно, умножим эффективный класс

$$2nH_Q - \nu_+\tilde{C}_+ - \nu_-\tilde{C}_- - \alpha_+E_+ - \alpha_-E_- - \alpha E$$

на $\tilde{C}_+$, $\tilde{C}_-$, E_+ , E_- , E и получим систему неравенств

$$\begin{aligned} 2n + 2\nu_+ - 2\nu_- - \alpha_+ &\geq 0, \\ 2n - 2\nu_+ + 2\nu_- &\quad - \alpha_- \geq 0, \\ -\nu_+ &\quad + 2\alpha_+ \quad - \alpha \geq 0, \\ &\quad - \nu_- \quad + 2\alpha_- - \alpha \geq 0, \\ &\quad - \alpha_+ \quad - \alpha_- + 2\alpha \geq 0. \end{aligned}$$

С помощью пятого неравенства элиминируем α в третьем и четвертом неравенствах, которые принимают вид

$$\begin{aligned} -\nu_+ + \frac{3}{2}\alpha_+ - \frac{1}{2}\alpha_- &\geq 0, \\ -\nu_- - \frac{1}{2}\alpha_+ + \frac{3}{2}\alpha_- &\geq 0. \end{aligned}$$

Умножая одно из этих неравенств на $\frac{3}{2}$, другое на $\frac{1}{2}$ и суммируя, получаем неравенства

$$\begin{aligned} -3\nu_+ - \nu_- + 4\alpha_+ &\geq 0, \\ -\nu_+ - 3\nu_- + 4\alpha_- &\geq 0, \end{aligned}$$

которые позволяют элиминировать α_+ , α_- в первых двух неравенствах и получить систему неравенств

$$\begin{aligned} 8n + 5\nu_+ - 9\nu_- &\geq 0, \\ 8n - 9\nu_+ + 5\nu_- &\geq 0, \end{aligned}$$

откуда, как и в случае А, получаем

$$112n - 56\nu_+ \geq 0,$$

т. е. в точности то, что нужно показать.

Остальные типы особенностей разбираются аналогично. Объясним теперь, почему все перечисленные выше типы приводят к неравенству $2n \geq \nu_+$. Рассмотрим пространство

$$\mathcal{L} = \mathbb{R}[\tilde{C}_+] \oplus \mathbb{R}[\tilde{C}_-] \oplus \mathcal{E},$$

где $\mathcal{E} = \bigoplus_{i=1}^k T_i$, $\{T_i \mid i = 1, \dots, k\}$ – множество неприводимых исключительных кривых на поверхности $\tilde{Q}$. На $\mathcal{L}$ имеется естественная билинейная форма, порожденная пересечением кривых. Пусть

$$\Theta = \|(T_i \cdot T_j)\|_{1 \leq i, j \leq k}$$

– отрицательно определенная матрица формы пересечения на $\mathcal{E}$. Пусть $\Theta^{-1} = \|\lambda_{ij}\|$ – обратная матрица. Легко проверить, что в каждом из случаев А–F (и во всех других случаях особенностей необщего положения, разобранных автором) матрица Θ удовлетворяет условию: *все коэффициенты $\lambda_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq k$, обратной матрицы Θ^{-1} отрицательны*.

Пусть $\mathcal{E}_+ = \{a_i T_i \mid a_i \in \mathbb{R}_+\}$ – положительный координатный конус. Поскольку матрица Θ невырождена, существуют однозначно определенные векторы $e_{\pm} \in \mathcal{E}$ такие, что

$$R_{\pm} = \tilde{C}_{\pm} + e_{\pm} \in \mathcal{E}^{\perp}.$$

ЛЕММА 3.3. *Имеем $e_{\pm} \in \mathcal{E}_+$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение следует из неравенств $(C_{\pm} \cdot T_i) \geq 0$ и свойств матрицы Θ ($\lambda_{ij} < 0$).

Ввиду невырожденности формы пересечения на $\mathcal{L}$ класс H_Q можно рассматривать как элемент пространства $\mathcal{L}$, $H_Q \in \mathcal{E}^\perp$.

ЛЕММА 3.4. *Имеет место равенство $H_Q = R_+ + R_-$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку H_Q – класс дивизора Картье на Q , состоящего из кривых C_+ и C_- , для некоторого $e \in \mathcal{E}$ имеем равенство

$$H_Q = \tilde{C}_+ + \tilde{C}_- + e.$$

Так как $H_Q \in \mathcal{E}^\perp$, из невырожденности квадратичной формы пересечения на $\mathcal{L}$ следует утверждение леммы.

Очевидно, $(R_\pm \cdot H_Q) = 1$.

Легко проверяется, что $(R_\pm^2) = -a < 0$, так что форма пересечения на двумерном пространстве $\mathcal{R} = \mathbb{R}[R_+] \oplus \mathbb{R}[R_-]$ задается матрицей

$$\begin{pmatrix} -a & 1+a \\ 1+a & -a \end{pmatrix},$$

для которой обратная матрица есть

$$\frac{1}{1+2a} \begin{pmatrix} a & 1+a \\ 1+a & a \end{pmatrix}.$$

В силу леммы 3.4 неотрицательность пересечений класса

$$2nH_Q - \nu_+ \tilde{C}_+ - \nu_- \tilde{C}_- - \sum_{i=1}^k b_i T_i,$$

где $b_i \in \mathbb{Z}_+$, с классами $\tilde{C}_+$, $\tilde{C}_-$, T_i влечет неотрицательность пересечений класса

$$\beta_+ R_+ + \beta_- R_- = 2nH_Q - \nu_+ R_+ - \nu_- R_-$$

с классами R_+ и R_- , откуда следует, что $\beta_\pm \geq 0$. Однако

$$\beta_\pm = 2n - \nu_\pm,$$

что и требуется показать.

Приведенное общее рассуждение с успехом применяется к любому типу особенностей поверхности Q , удовлетворяющему двум свойствам: все элементы λ_{ij} матрицы Θ^{-1} отрицательны и $(R_\pm^2) = -a < 0$. Эти свойства необходимо проверять непосредственно (например, для типа C матрица Θ^{-1} есть

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix},$$

как и требуется). По-видимому, однако, эти два свойства – проявление какого-то общего факта.

Предложение 3.4 доказано полностью.

Вернемся к доказательству предложения 3.3.

3.5. Случай $d \geq 1$: завершение доказательства предложения 3.3.

Предполагаем, что $d \geq 1$. Пусть $\varphi_{i,i-1}: V_i \rightarrow V_{i-1}$, $i = 1, \dots, k+1$, – разрешение максимальной особенности. Здесь $V_0 = V$, $\varphi_{1,0}: V_1 \rightarrow V$ – раздутие кривой C , т. е. $\tilde{V} \cong V_1$, и $B_1 \subset E_1 = E$ есть поверхность S . Полагая, как обычно,

$$\nu_i = \text{mult}_{B_{i-1}} \Sigma^{i-1},$$

запишем неравенство Нётера–Фано

$$\nu_1 + \dots + \nu_{k+1} > (k+2)n.$$

Рассмотрим общую плоскость $P \supset L$ и неособую поверхность $Q = \sigma^{-1}(P)$. В силу неравенства $d \geq 1$ сечение $\tilde{P} \cap E_{\mathbb{P}}$ трансверсально пересекает поверхность $\sigma_E(S)$ в по крайней мере одной точке общего положения и поверхность $\tilde{P}$ трансверсально пересекает $\sigma_E(S)$ в точке общего положения. Следовательно, поверхность $Q^1 = \tilde{Q}$ трансверсально пересекает поверхность S в по крайней мере одной точке общего положения, скажем $x \in S \cap Q^1$, и можно считать, что $x \notin C_-^1$.

Далее, в силу общности P ограничение $\Sigma^1|_{Q^1}$ может иметь неподвижной компонентой лишь кривую C_-^1 . Пусть

$$\nu_- = \text{mult}_{C_-^1}(\Sigma^1|_{Q^1}) = \text{mult}_{C_-}(\Sigma|_Q) = \text{mult}_{C_-} \Sigma.$$

В силу трансверсальности пересечения $S \cap Q^1$ поверхности $B_2, \dots, B_k$ порождают бесконечно близкие базисные точки $x_i \in B_i \cap Q^i$ линейной системы кривых $\Sigma^1|_Q$ на неособой поверхности $Q^1 = Q$, лежащие над точкой $x = x_1$. Поскольку точка x лежит вне неподвижной компоненты C_- , самопересечение подвижной части линейной системы $\Sigma^1|_Q$ не меньше, чем $\nu_2^2 + \dots + \nu_{k+1}^2$. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} f(\nu_-, \nu_1, \dots, \nu_{k+1}) &= (2nH_Q - \nu_1 C_+ - \nu_- C_-)^2 - \sum_{i=2}^{k+1} \nu_i^2 \\ &= 8n^2 - 4n\nu_1 - 4n\nu_- - 2\nu_1^2 - 2\nu_-^2 + 6\nu_1\nu_- - \sum_{i=2}^{k+1} \nu_i^2 \geq 0 \end{aligned}$$

(см. доказательство леммы 2.1, где выписаны индексы пересечения). Кроме того, как установлено при доказательстве леммы 3.2, выполнено неравенство

$$\nu_- \geq \frac{3\nu_1 - 2n}{2} > \frac{n}{2}.$$

Оценим теперь функцию $f(\nu_-, \nu_1, \dots, \nu_{k+1})$ сверху. Заменим неравенство Нётера–Фано равенством

$$\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_{k+1} = (k+2)n, \quad (3.2)$$

от этого величина $f(\cdot)$ только увеличится. Далее, фиксируя ν_- и ν_1 , рассмотрим f как функцию от $\nu_2, \dots, \nu_{k+1}$ при ограничении (3.2). Очевидно, ее максимум достигается при

$$\nu_2 = \dots = \nu_{k+1} = \frac{(k+2)n - \nu_1}{k}.$$

С другой стороны, максимум f как функции одного аргумента ν_- достигается, как легко проверить, при

$$\nu_- = \frac{3\nu_1 - 2n}{2}.$$

Подставляя эти значения $\nu_2, \dots, \nu_{k+1}, \nu_-$ в $f(\cdot)$, получим следующее выражение:

$$\frac{1}{k}[-(k^2 + 4)n^2 + (4 - 2k)n\nu_1].$$

При $k \geq 2$ отрицательность очевидна. Пусть $k = 1$; тогда имеем $-5n^2 + 2n\nu_1$. Выше было показано, что $\nu_1 \leq 2n$. Следовательно, для любого $k \geq 1$ получаем оценку

$$f(\nu_-, \nu_1, \dots, \nu_{k+1}) < -kn^2.$$

Полученное противоречие завершает доказательство предложения 3.3.

Предложение 3.1 полностью доказано.

§ 4. Локальное неравенство для самопересечения подвижной системы

Приведем доказательство так называемого $(8n^2)$ -неравенства для самопересечения подвижной линейной системы, исправляющее ошибку в работах [34]–[36]. Обозначения, используемые в настоящем параграфе, не зависят от обозначений, используемых в других параграфах статьи.

4.1. Постановка задачи и начало доказательства $(8n^2)$ -неравенства.

Пусть $o \in X$ – росток гладкого многообразия размерности $\dim X \geq 4$. Пусть Σ – подвижная линейная система на X , а эффективный цикл

$$Z = (D_1 \circ D_2),$$

где $D_1, D_2 \in \Sigma$ – общие дивизоры, есть ее самопересечение. Раздуем точку o :

$$\varphi: X^+ \rightarrow X,$$

$E = \varphi^{-1}(o) \cong \mathbb{P}^{\dim X - 1}$ – исключительный дивизор. Собственный прообраз системы Σ и цикла Z на X^+ обозначим через Σ^+ и Z^+ соответственно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1 ($(8n^2)$ -неравенство). *Предположим, что пара $(X, \frac{1}{n}\Sigma)$ не канонична, но канонична вне точки o , где n – некоторое положительное число. Существует линейное подпространство $P \subset E$ коразмерности 2 (относительно E) такое, что выполнено неравенство*

$$\text{mult}_o Z + \text{mult}_P Z^+ > 8n^2.$$

Эквивалентное, но громоздко формулируемое утверждение неоднократно публиковалось И. А. Чельцовым [34]–[36], однако в его доказательстве имеется существенный пробел (см. [37]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 4.1. Первая часть наших рассуждений следует работам [34], [36]. Отметим, что если $\text{mult}_o Z > 8n^2$, то в качестве P можно взять любое подпространство коразмерности 2 в E . Если $\text{mult}_o Z \leq 8n^2$, то подпространство P определено однозначно: это легко следует из принципа связности Шокурова–Коллара [29], [38].

Ограничивая Σ на росток гладкого общего подмногообразия, содержащего точку o , можно считать, что $\dim X = 4$. Более того, можно предполагать, что $\nu = \text{mult}_o \Sigma \leq 2\sqrt{2}n < 3n$, иначе

$$\text{mult}_o Z \geq \nu^2 > 8n^2$$

и доказательство очевидно.

ЛЕММА 4.1. *Пара*

$$\left(X^+, \frac{1}{n}\Sigma^+ + \frac{(\nu - 2n)}{n}E \right) \quad (4.1)$$

не логканонична, и центр любой ее не логканонической особенности содержится в исключительном дивизоре E .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\lambda: \tilde{X} \rightarrow X$ – разрешение особенностей пары $(X, \frac{1}{n}\Sigma)$ и $E^* \subset \tilde{X}$ – простой исключительный дивизор, реализующий неканоническую особенность этой пары. Тогда $\lambda(E^*) = o$ и выполнено неравенство Нётера–Фано

$$\nu_{E^*}(\Sigma) > na(E^*).$$

Для общего дивизора $D \in \Sigma$ имеем $\varphi^*D = D^+ + \nu E$, так что

$$\begin{aligned} \nu_{E^*}(\Sigma) &= \nu_{E^*}(\Sigma^+) + \nu \cdot \nu_{E^*}(E), \\ a(E^*, X) &= a(E^*, X^+) + 3\nu_{E^*}(E). \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \nu_{E^*} \left(\frac{1}{n}\Sigma^+ + \frac{\nu - 2n}{n}E \right) &= \nu_{E^*} \left(\frac{1}{n}\Sigma \right) - 2\nu_{E^*}(E) \\ &> a(E^*, X^+) + \nu_{E^*}(E) \geq a(E^*, X^+) + 1, \end{aligned}$$

что и доказывает лемму.

Пусть $R \ni o$ – общий трехмерный росток, $R^+ \subset X^+$ – его собственный прообраз на раздутии точки o . Для малого $\varepsilon > 0$ пара

$$\left(X^+, \frac{1}{1+\varepsilon} \frac{1}{n}\Sigma^+ + \frac{\nu - 2n}{n}E + R^+ \right)$$

все еще удовлетворяет условию принципа связности (относительно морфизма $\varphi: X^+ \rightarrow X$), так что множество центров не логканонических особенностей этой пары связно в окрестности исключительного дивизора E . Поскольку R^+ есть не логканоническая особенность, получаем, что найдется не логканоническая особенность пары (4.1), центр которой на X^+ имеет положительную размерность, так как пересекает R^+ .

Пусть $Y \subset E$ – центр не логканонической особенности пары (4.1), имеющий максимальную размерность.

Если $\dim Y = 2$, то рассмотрим общий двумерный росток S , трансверсально пересекающий Y в точке общего положения. Ограничение пары (4.1) на S не логканонично в этой точке, так что, применяя доказываемое ниже предложение 4.2, получаем

$$\text{mult}_Y(D_1^+ \circ D_2^+) > 4 \left(3 - \frac{\nu}{n} \right) n^2,$$

откуда имеем

$$\text{mult}_o Z \geq \nu^2 + \text{mult}_Y(D_1^+ \circ D_2^+) \deg Y > (\nu - 2n)^2 + 8n^2,$$

что и требовалось доказать.

Если $\dim Y = 1$, то, поскольку пара

$$\left(R^+, \frac{1}{1+\varepsilon} \frac{1}{n} \Sigma_R^+ + \frac{\nu - 2n}{n} E_R \right), \quad (4.2)$$

где $\Sigma_R^+ = \Sigma^+|_{R^+}$ и $E_R = E|_{R^+}$, удовлетворяет условию принципа связности и R^+ пересекает Y в $\deg Y$ различных точках, заключаем, что $Y \subset E$ – прямая в $\mathbb{P}^3$.

Теперь необходимо различать два случая: $\nu \geq 2n$ и $\nu < 2n$. Методы доказательств $(8n^2)$ -неравенства в этих двух случаях различны. Рассмотрим сначала случай $\nu \geq 2n$.

Выберем в качестве $R \ni o$ общий трехмерный росток, удовлетворяющий условию $R^+ \supset Y$. Поскольку пара (4.1) эффективная (напомним, $\nu \geq 2n$), можно применить обращение присоединения [29, гл. 17] и заключить, что пара (4.2) не логканонична в Y .

Теперь, применяя к паре (4.2) (где $R^+ \supset Y$) предложение 4.2 так, как это было сделано при $\dim Y = 2$, получаем неравенство

$$\text{mult}_Y(D_1^+|_{R^+} \circ D_2^+|_{R^+}) > 4 \left(3 - \frac{\nu}{n} \right) n^2.$$

Слева в скобках стоит самопересечение подвижной линейной системы Σ_R^+ , которое раскладывается на две естественные компоненты:

$$(D_1^+|_{R^+} \circ D_2^+|_{R^+}) = Z_R^+ + Z_R^{(1)},$$

где Z_R^+ – собственный прообраз цикла $Z_R = Z|_R$ на R^+ и носитель цикла $Z_R^{(1)}$ содержится в E_R . Прямая Y есть компонента эффективного 1-цикла $Z_R^{(1)}$.

С другой стороны, для самопересечения подвижной линейной системы Σ^+ имеем

$$(D_1^+ \circ D_2^+) = Z^+ + Z_1,$$

где носитель цикла Z_1 содержится в E . Из общности R следует, что вне прямой Y циклы $Z_R^{(1)}$ и $Z_1|_{R^+}$ совпадают, а для Y получаем равенство

$$\text{mult}_Y Z_R^{(1)} = \text{mult}_Y Z^+ + \text{mult}_Y Z_1.$$

Однако $\text{mult}_Y Z_1 \leq \deg Z_1$, так что

$$\text{mult}_o Z + \text{mult}_Y Z^+ = \nu^2 + \deg Z_1 + \text{mult}_Y Z^+ \geq \nu^2 + \text{mult}_Y Z_R^{(1)} > 8n^2,$$

что и требовалось доказать. Этим разбор случая $\nu \geq 2n$ завершен.

Отметим, что эфффективность пары (4.1) – ключевое свойство, на котором основано это рассуждение. При $\nu < 2n$ обращение присоединения (так, как это сделано в [39]) применить нельзя. Дополнительные рассуждения из [34]–[36], обосновывающие обращение присоединения специально для этой пары при $\nu < 2n$, неверны (см. [37]).

4.2. Случай $\nu < 2n$. Рассмотрим снова пару (4.2) для общего ростка $R \ni o$. Пусть $y = Y \cap R^+$ – точка (трансверсального) пересечения прямой Y и многообразия R^+ . Поскольку $a(E_R, R) = 2$, не логканоничность пары (4.2) в точке y влечет не логканоничность пары $(R, \frac{1}{n}\Sigma_R)$ в точке o , причем центр некоторой не логканонической (т. е. логмаксимальной) особенности на R^+ есть точка y .

Теперь $(8n^2)$ -неравенство вытекает из следующего факта.

ЛЕММА 4.2. *Имеет место неравенство*

$$\text{mult}_o Z_R + \text{mult}_y Z_R^+ > 8n^2,$$

где Z_R – самопересечение подвижной линейной системы Σ_R и Z_R^+ – собственный прообраз этого самопересечения на R^+ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим разрешение максимальной особенности системы Σ_R , центр которой на R^+ есть точка y :

$$\begin{array}{ccc} R_i & \xrightarrow{\psi_i} & R_{i-1} \\ \cup & & \cup \\ E_i & & B_{i-1} \end{array}$$

где B_{i-1} – центр особенности на R_{i-1} , $R_0 = R$, $R_1 = R^+$, $E_i = \psi_i^{-1}(B_{i-1})$ – исключительный дивизор, $B_0 = o$, $B_1 = y \in E_1$, $i = 1, \dots, N$, причем первые L раздутий соответствуют точкам, при $i \geq L+1$ раздуваются кривые. Поскольку

$$\text{mult}_o \Sigma_R = \text{mult}_o \Sigma < 2n,$$

имеем $L < N$, $B_L \subset E_L \cong \mathbb{P}^2$ есть прямая и при $i \geq L+1$

$$\deg[\psi_i|_{B_i} : B_i \rightarrow B_{i-1}] = 1,$$

т. е. $B_i \subset E_i$ есть сечение линейчатой поверхности E_i . Рассмотрим граф последовательности раздутий ψ_i .

ЛЕММА 4.3. *Вершины $L+1$ и $L-1$ не соединены стрелкой: $L+1 \nrightarrow L-1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное: $L+1 \rightarrow L-1$. Это означает, что $B_L = E_L \cap E_{L-1}^L$ есть исключительная прямая на поверхности E_{L-1}^L , а отображение $E_{L-1}^{L+1} \rightarrow E_{L-1}^L$ есть изоморфизм.

Как обычно, положим $\nu_i = \text{mult}_{B_{i-1}} \Sigma_R^{i-1}$, $i = 1, \dots, N$. Ограничим подвижную линейную систему Σ_R^{L+1} на поверхность E_{L-1}^{L+1} (т. е. на плоскость $E_{L-1} \cong \mathbb{P}^2$

с раздутой точкой B_{L-1}). Получим непустую (но, конечно, не обязательно подвижную) линейную систему, которая есть подсистема полной линейной системы

$$|\nu_{L-1}(-E_{L-1}|_{E_{L-1}}) - (\nu_L + \nu_{L+1})B_L|.$$

Поскольку $(-E_{L-1}|_{E_{L-1}})$ – класс прямой на плоскости E_{L-1} , получаем

$$\nu_{L-1} \geq \nu_L + \nu_{L+1} > 2n,$$

так что, тем более, $\nu_1 = \nu > 2n$. Противоречие. Лемма доказана.

Аналогично, из неравенства $\nu_1 \leq 2n$ выводится, что верхняя часть графа последовательности раздутий ψ_i , т.е. часть, соответствующая вершинам $L+1, \dots, N$, есть цепь. Иными словами, сечение B_i линейчатой поверхности E_i , $i \geq L+1$, отлично от сечения $E_i \cap E_{i-1}^i$. Положим теперь, как обычно,

$$m_i = \text{mult}_{B_{i-1}}(Z_R)^{i-1}, \quad i = 1, \dots, L,$$

так что, в частности,

$$m_1 = \text{mult}_o Z_R, \quad m_2 = \text{mult}_y Z_R^+.$$

Пусть для $1 \leq i \leq L$ число $p_i \geq 1$ есть число путей в графе последовательности раздутий ψ_i из вершины L в вершину i и

$$p_N = p_{N-1} = \dots = p_L = 1$$

по определению. Согласно технике подсчета кратностей (см. [1], [40] и § 5 ниже) имеем неравенство

$$\sum_{i=1}^L p_i m_i \geq \sum_{i=1}^N p_i \nu_i^2, \quad (4.3)$$

кроме того, справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^N p_i \nu_i > n \left(2 \sum_{i=1}^L p_i + \sum_{i=L+1}^N p_i \right). \quad (4.4)$$

(На самом деле, справедливо несколько более сильное неравенство – *логнеравенство* Нётера–Фано, но нам это не нужно). Неравенство (4.4) вытекает из неравенства Нётера–Фано для максимальной особенности E_N в силу предположения, что $\nu_1 \leq 2n$.

В самом деле, пусть p_i^* – число путей в графе последовательности раздутий $\{\psi_i\}$ из вершины N в вершину i . По доказанному выполнено

$$p_N^* = p_{N-1}^* = \dots = p_L^* = p_{L-1}^* = 1,$$

и для $i \leq L$ имеем $p_i \leq p_i^*$, так как p_i – число путей из вершины N в вершину i , проходящих через вершину L . Неравенство Нётера–Фано может быть записано в виде

$$\sum_{i=L+1}^N p_i^* (\nu_i - n) > \sum_{i=1}^L p_i^* (2n - \nu_i),$$

где в правой части каждое слагаемое неотрицательно, так как $2n \geq \nu_i$ для всех $i = 1, \dots, N$. Отсюда следует, что

$$\sum_{i=L+1}^N p_i(\nu_i - n) > \sum_{i=1}^L p_i(2n - \nu_i)$$

(напомним, что $p_i = p_i^*$ для $i = L+1, \dots, N$, так что левая часть неравенства остается без изменений, а правая может только уменьшиться), как и утверждалось. Из оценок (4.3), (4.4) стандартным образом [1], [40] выводится неравенство

$$\sum_{i=1}^L p_i m_i > \frac{(2\Sigma_0 + \Sigma_1)^2}{\Sigma_0 + \Sigma_1} n^2,$$

где $\Sigma_0 = \sum_{i=1}^L p_i$ и $\Sigma_1 = \sum_{i=L+1}^N p_i = N - L$. Учитывая, что при $i \geq 2$ имеем неравенство $m_i \leq m_2$ и очевидное неравенство $(2\Sigma_0 + \Sigma_1)^2 > 4\Sigma_0(\Sigma_0 + \Sigma_1)$, получаем следующую оценку:

$$p_1 m_1 + (\Sigma_0 - p_1) m_2 > 4n^2 \Sigma_0.$$

Предположим теперь, что утверждение леммы неверно, т. е.

$$m_1 + m_2 \leq 8n^2.$$

ЛЕММА 4.4. *Имеет место неравенство $\Sigma_0 \geq 2p_1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По построению, p_1 есть число путей из вершины L в вершину 1. Отмечая в каждом пути предпоследнюю вершину, имеем

$$p_1 = \sum_{L \geq i, i \rightarrow 1} p_i,$$

так что $p_1 \leq \Sigma_0 - p_1$, это и требовалось показать. Лемма доказана.

Теперь, учитывая, что $m_2 \leq m_1$, получаем

$$\begin{aligned} p_1 m_1 + (\Sigma_0 - p_1) m_2 &= p_1(m_1 + m_2) + (\Sigma_0 - 2p_1) m_2 \\ &\leq 8p_1 n^2 + (\Sigma_0 - 2p_1) \cdot 4n^2 = 4n^2 \Sigma_0. \end{aligned}$$

Противоречие. Лемма 4.2 доказана.

Доказательство предложения 4.1 завершено.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Объясним ключевой момент в доказательстве $(8n^2)$ -неравенства при $\nu_1 \leq 2n$. Как следует из техники подсчета кратностей, граф последовательности раздутий $\{\psi_i\}$ можно модифицировать с сохранением всех приложений, а именно стереть все стрелки, идущие из вершин $L+1, \dots, N$ верхней части графа в вершины $1, \dots, L-1$ нижней части (при этом и неравенство Нётера–Фано, и оценка кратности самопересечения линейной системы сохраняются). Таким образом модифицированный граф удовлетворяет свойству леммы 4.4.

4.3. Локальное неравенство для поверхности. Пусть $o \in X$ – росток гладкой поверхности, $C \ni o$ – гладкая кривая и Σ – подвижная линейная система на X . Пусть, далее, $Z = (D_1 \circ D_2)$ – самопересечение линейной системы Σ , т. е. некоторый эффективный 0-цикл. Ввиду локальности ситуации можно считать, что носитель цикла Z есть точка o , т. е.

$$\deg Z = (D_1 \cdot D_2)_o.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. *Предположим, что для некоторого вещественного числа $a < 1$ пара $(X, \frac{1}{n}\Sigma + aC)$ не логканонична (т. е. для общего дивизора $D \in \Sigma$ не логканонична пара $(X, \frac{1}{n}D + aC)$), где $n > 0$ – положительное число. Тогда имеет место оценка*

$$\deg Z > 4(1 - a)n^2. \quad (4.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Исходное рассуждение см. в [31]. Мы покажем, что неравенство (4.5) есть прямое следствие хорошо известных фактов о бесконечно близких особенностях кривой на неособой поверхности [32], [33]. Пусть последовательность раздутий

$$\varphi_{i,i-1}: X_i \rightarrow X_{i-1}, \quad i = 1, \dots, N,$$

где $X_0 = X$, разрешает не логканоническую особенность пары $(X, \frac{1}{n}\Sigma + aC)$. Мы пользуемся стандартными обозначениями и соглашениями: центр раздутия $\varphi_{i,i-1}$ есть точка $x_{i-1} \in X_{i-1}$, его исключительная прямая есть

$$E_i = \varphi_{i,i-1}^{-1}(x_{i-1}) \subset X_i,$$

первой раздувается точка $o = x_0$, раздуваемые точки x_i лежат друг над другом: $x_i \in E_i$. Последняя исключительная прямая E_N реализует не логканоническую особенность пары $(X, \frac{1}{n}\Sigma + aC)$, т. е. выполнено логнеравенство Нётера–Фано

$$\sum_{i=1}^N \nu_i p_i + an \sum_{x_{i-1} \in C^{i-1}} p_i > n \left(\sum_{i=1}^N p_i + 1 \right), \quad (4.6)$$

где $\nu_i = \text{mult}_{x_{i-1}} \Sigma^{i-1}$, через Σ^i и C^i обозначены собственные прообразы на X_i и p_i – число путей в графе Γ построенной последовательности раздутий из вершины E_N в E_i (см. [1], [40]). Пусть $x_{i-1} \in C^{i-1}$ для $i = 1, \dots, k \leq N$; тогда неравенство (4.6) принимает вид

$$\sum_{i=1}^N \nu_i p_i > n \left(\sum_{i=1}^k (1 - a) p_i + \sum_{i=k+1}^N p_i + 1 \right). \quad (4.7)$$

ЛЕММА 4.5. *Имеет место неравенство*

$$\deg Z \geq \sum_{i=1}^N \nu_i^2. \quad (4.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это очевидно.

ЛЕММА 4.6. Для любого $i \in \{1, \dots, N-1\}$ выполнена оценка

$$\nu_i \geq \sum_{j \rightarrow i} \nu_j. \quad (4.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это хорошо известное свойство кратностей кривых в бесконечно близких точках на неособой поверхности.

ЛЕММА 4.7. Имеет место оценка

$$\sum_{i=1}^N \nu_i^2 > \frac{\Delta^2}{q} n^2,$$

где $\Delta = 1 + (1-a) \sum_{i=1}^k p_i + \sum_{i=k+1}^N p_i$ и $q = \sum_{i=1}^N p_i^2$ (так что $n\Delta$ есть правая часть неравенства (4.7)).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Минимум квадратичной формы в правой части неравенства (4.8) при ограничениях (4.9) и

$$\sum_{i=1}^N \nu_i p_i = \Delta n \quad (4.10)$$

достигается при $\nu_i = p_i \theta$, где $\theta = \frac{\Delta n}{q}$ вычисляется из (4.10). Лемма доказана.

Теперь утверждение предложения вытекает из чисто комбинаторного факта о графе Γ , который мы и будем доказывать.

ЛЕММА 4.8. Предположим, что начальный отрезок графа Γ с вершинами $1, \dots, k$ есть цепь. Тогда имеет место неравенство

$$\Delta^2 \geq 4(1-a)q. \quad (4.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем индукцией по числу N вершин в графе Γ . Если $N = 1$, то неравенство (4.11) выполнено тривиальным образом:

$$(2-a)^2 \geq 4(1-a).$$

Рассмотрим неравенство (4.11) как утверждение о неотрицательности квадратичной функции аргумента a :

$$a^2 \left(\sum_{i=1}^k p_i \right)^2 + 2a \left(2q - \left(\sum_{i=1}^k p_i \right) \left(\sum_{i=1}^N p_i + 1 \right) \right) + \left(\left(\sum_{i=1}^N p_i + 1 \right)^2 - 4q \right) \geq 0,$$

на интервале $a \leq 1$. Поскольку при $a \rightarrow \pm\infty$ эта функция положительна, достаточно проверить, что ее минимум неотрицателен. Элементарные вычисления показывают, что с точностью до несущественного положительного множителя этот минимум определяется выражением

$$\left(\sum_{i=1}^k p_i \right) \left(\sum_{i=k+1}^N p_i + 1 \right) - \sum_{i=1}^N p_i^2. \quad (4.12)$$

Неотрицательность последнего выражения и будем доказывать индукцией по числу вершин N . Напомним, что единственное предположение, ограничивающее выбор числа $k \geq 1$, – это отсутствие стрелок $i \rightarrow j$ при $i \geq j + 2$, $i \leq k$.

Рассмотрим сначала случай $k = 1$. Предположим, что $l \geq 1$ вершин соединены стрелкой с 1, т.е.

$$2 \rightarrow 1, \dots, l+1 \rightarrow 1, \quad \text{но} \quad l+2 \nrightarrow 1.$$

В этом случае $p_1 = p_2 + \dots + p_{l+1}$ и подграф графа Γ с вершинами $\{2, \dots, l+1\}$ либо состоит из одной вершины, либо есть цепь. Выражение (4.12) преобразуется к виду

$$\left(\sum_{i=2}^{l+1} p_i \right) \left(\sum_{i=l+2}^N p_i + 1 \right) - \sum_{i=2}^N p_i^2,$$

так что можно применить предположение индукции к подграфу с вершинами $\{2, \dots, N\}$. Этим случай $k = 1$ разобран.

Пусть $k \geq 2$. Имеет место следующий ключевой факт.

ЛЕММА 4.9. *Имеет место неравенство $p_i \leq \sum_{j=i+2}^N p_j + 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [33, лемма 1.6].

Согласно лемме 4.9 имеет место неравенство

$$p_1 = p_2 = \dots = p_{k-1} \leq \sum_{i=k+1}^N p_i + 1.$$

Поэтому при $k \geq 2$ выражение (4.12) ограничено снизу числом

$$\left(\sum_{i=2}^k p_i \right) \left(\sum_{i=k+1}^N p_i + 1 \right) - \sum_{i=2}^N p_i^2.$$

Теперь применяем предположение индукции к подграфу с вершинами $\{2, \dots, N\}$ и завершаем доказательство леммы 4.8 и предложения 4.2.

§ 5. Техника подсчета кратностей

В этом параграфе приводится усиленная версия техники подсчета кратностей для самопересечения подвижной линейной системы. Полученный результат вместе с $(8n^2)$ -неравенством является технической основой исключения максимальных особенностей, центр которых имеет коразмерность ≥ 4 . Обозначения данного параграфа независимы от обозначений, используемых в остальных параграфах работы.

5.1. Постановка задачи. Пусть $o \in X$ – росток гладкого трехмерного многообразия, $\varphi: \tilde{X} \rightarrow X$ – некоторый бирациональный морфизм, $E \subset \tilde{X}$ – неприводимый исключительный дивизор над точкой o , т.е. $\varphi(E) = o$. Рассмотрим разрешение [1], [40] дискретного нормирования ν_E , т.е. последовательность раздутий $\varphi_{i,i-1}: X_i \rightarrow X_{i-1}$, $i = 1, \dots, N$, где $X_0 = X$, $\varphi_{i,i-1}$

раздувает неприводимое подмногообразие $B_{i-1} \subset X_{i-1}$ (точку или кривую), $E_i = \varphi_{i,i-1}^{-1}(B_{i-1}) \subset X_i$ — исключительный дивизор, где B_i однозначно определены условиями $B_0 = o$ и $B_i = \text{centre}(E, X_i)$ для $i = 1, \dots, N-1$, и, наконец, геометрические дискретные нормирования ν_E и ν_{E_N} поля рациональных функций многообразия X совпадают. Геометрически это означает, что бирациональное отображение

$$\varphi_{N,0}^{-1} \circ \varphi: \tilde{X} \dashrightarrow X_N$$

бирегулярно в общей точке дивизора E и отображает E на E_N (см. в [1], [40]). Здесь

$$\varphi_{N,0} = \varphi_{1,0} \circ \dots \circ \varphi_{N,N-1}: X_N \rightarrow X_0,$$

и при $i > j$ положим

$$\varphi_{i,j} = \varphi_{j+1,j} \circ \dots \circ \varphi_{i,i-1}: X_i \rightarrow X_j.$$

Собственный прообраз неприводимого подмногообразия $Y \subset X_j$ на X_i обозначаем, как обычно, добавлением верхнего индекса i : записываем Y^i . По линейности это обозначение используется и для эффективного цикла.

Пусть для $i = 1, \dots, L \leq N$ центры B_{i-1} раздутий суть точки, а для $i \geq L+1$ — кривые. Пусть Γ — граф построенного разрешения, т. е. ориентированный граф с вершинами $1, \dots, N$, где ориентированное ребро (стрелка) соединяет i и j при $i > j$ (обозначение: $i \rightarrow j$), если и только если

$$B_{i-1} \subset E_j^{i-1}.$$

В частности, по построению всегда $i+1 \rightarrow i$.

Опишем очевидные комбинаторные свойства графа Γ .

ЛЕММА 5.1. *Пусть $i < j < k$ — три различные вершины. Если имеется стрелка $k \rightarrow i$, то $j \rightarrow i$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению $k \rightarrow i$ означает, что $B_{k-1} \subset E_i^{k-1}$. В силу конструкции разрешения особенностей имеем

$$\varphi_{k-1,j-1}(B_{k-1}) = B_{j-1}$$

(центры раздутий с более высокими номерами накрывают центры предыдущих раздутий), кроме того, очевидно, что

$$\varphi_{k-1,j-1}(E_i^{k-1}) = E_i^{j-1}.$$

Отсюда непосредственно вытекает утверждение леммы. Доказательство закончено.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Скажем, что вершина i графа Γ имеет класс $e \geq 1$ (обозначение: $\varepsilon(i) = e$), если из нее выходят ровно e стрелок, т. е.

$$\#\{j \mid i \rightarrow j\} = e.$$

Скажем, далее, что граф Γ имеет класс $e \geq 1$, если для любой его вершины i имеем $\varepsilon(i) \leq e$.

Например, граф класса 1 есть цепь

$$1 \longleftarrow 2 \longleftarrow \dots \longleftarrow N$$

(т. е. нет никаких других стрелок, кроме $i + 1 \rightarrow i$). Граф последовательности раздутий точек на неособой поверхности имеет класс 2.

ЛЕММА 5.2. *Граф разрешения нормирования ν_E имеет класс 3. Если для некоторой его вершины i имеем $\varepsilon(i) = 3$, то $i \leq L$, т. е. B_{i-1} – точка.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению имеем

$$B_{i-1} \subset E(i) = \bigcup_{\{j|i \rightarrow j\}} E_j^{i-1},$$

причем в общей точке B_{i-1} – гладкое многообразие, а $E(i)$ – дивизор с нормальными пересечениями, каждая компонента которого содержит B_{i-1} . Этим лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Используя те же рассуждения, можно показать, что в случае произвольной размерности $\dim X$ граф разрешения любого нормирования имеет класс не больше $\dim X$ и если

$$\#\{j \mid i \rightarrow j\} = a,$$

то $\text{codim } B_{i-1} \geq a$.

Пусть Σ – росток подвижной (т. е. не имеющей неподвижных компонент) линейной системы на X , Σ^i – его собственный прообраз на X_i , $\nu_i = \text{mult}_{B_{i-1}} \Sigma^{i-1}$, так что для общего дивизора $D \in \Sigma$ имеем

$$D^i = D - \sum_{j=1}^i \nu_j E_j,$$

где мы записываем D вместо $\varphi_{i,0}^* D$ и, аналогично, для исключительных дивизоров E_i .

Рассмотрим пару общих дивизоров $D_1, D_2 \in \Sigma$ и построим *самопересечения* линейных систем Σ^i – эффективные (неоднозначно определенные) 1-циклы

$$Z_i = (D_1^i \circ D_2^i)$$

на X_i . Эти циклы допускают естественное разложение

$$\begin{aligned} Z_1 &= Z_0^1 + Z_{1,1}, \\ Z_2 &= Z_1^2 + Z_{2,2} = Z_0^2 + Z_{1,2} + Z_{2,2}, \\ &\dots\dots\dots \\ Z_i &= Z_{i-1}^i + Z_{i,i} = Z_0^i + Z_{1,i} + \dots + Z_{i,i}, \end{aligned}$$

где $Z_{a,i} = (Z_{a,i-1})^i = \dots = Z_{a,a}^i$, $i = 1, \dots, L$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.2. Функция $a: \{1, \dots, L\} \rightarrow \mathbb{Z}_+$ называется *согласованной со структурой графа* Γ , если выполнены неравенства

$$a(i) \geq \sum_{j \rightarrow i} a(j).$$

По построению $B_L \subset E_L \cong \mathbb{P}^2$ – плоская кривая. Пусть $\beta_L = \deg B_L$ – ее степень в $\mathbb{P}^2$ и для произвольного $i \geq L+1$

$$\beta_i = \beta_L \deg[\varphi_{i,L}|_{B_i} : B_i \rightarrow B_L]. \quad (5.1)$$

Основной вычислительный инструмент теории бирациональной жесткости – следующий локальный факт.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. Для любой функции $a(\cdot)$, согласованной со структурой графа, имеет место неравенство

$$\sum_{i=1}^L a(i) m_i \geq \sum_{i=1}^L a(i) \nu_i^2 + a(L) \sum_{i=L+1}^N \beta_i \nu_i^2, \quad (5.2)$$

где $m_i = \text{mult}_{B_{i-1}} Z_0^{i-1}$, $i = 1, \dots, L$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [1], [40].

Цель данного параграфа – доказать более сильную оценку, включающую (5.2) в качестве частного случая.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.3. Вершину $i \in \{4, \dots, L\}$ графа Γ назовем *сложной*, если из нее выходят ровно три стрелки, т. е. для трех различных вершин $i_1 < i_2 < i_3$ имеем

$$i \rightarrow i_1, \quad i \rightarrow i_2, \quad i \rightarrow i_3.$$

Отметим, что в обозначениях из определения 5.3 по лемме 5.1 всегда имеем

$$i_2 \rightarrow i_1, \quad i_3 \rightarrow i_1, \quad i_3 \rightarrow i_2.$$

Если в графе Γ нет сложных вершин, то он имеет класс ≤ 2 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.4. Назовем *упрощением* графа Γ ориентированный граф Γ^* класса ≤ 2 со множеством вершин $1, \dots, L$, стрелки в котором соединяют вершины по следующему правилу: если $\#\{j \mid i \rightarrow j\} \leq 2$, то $i \rightarrow j$ в Γ^* тогда и только тогда, когда $i \rightarrow j$ в Γ ; если i – сложная вершина, то в обозначениях из определения 5.3 в Γ^* из вершины i выходят две стрелки, $i \rightarrow i_2$ и $i \rightarrow i_3$, т. е. стрелка $i \rightarrow i_1$ отсутствует.

Таким образом, граф Γ^* получается из Γ удалением некоторых стрелок (и вершин, которые соответствуют раздутиям кривых).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. Для любой функции $a: \{1, \dots, L\} \rightarrow \mathbb{Z}_+$, согласованной со структурой графа Γ^* , имеет место неравенство (5.2).

5.2. Доказательство усиленного неравенства. Если функция $a(\cdot)$ согласована со структурой Γ , то, тем более, она согласована с Γ^* , так что из предложения 5.2 вытекает предложение 5.1. Следуя общей схеме доказательства неравенства (5.2) в [1], [40], для $i = 1, \dots, L$ положим

$$d_i = \deg Z_{i,i},$$

где $Z_{i,i} \subset E_i \cong \mathbb{P}^2$ – плоская кривая, а для $i < j \leq L$ положим

$$m_{i,j} = \text{mult}_{B_{j-1}} Z_{i,j-1}.$$

Получаем систему равенств

$$\begin{aligned} \nu_1^2 + d_1 &= m_1, \\ \nu_2^2 + d_2 &= m_2 + m_{1,2}, \\ &\dots\dots\dots \\ \nu_i^2 + d_i &= m_i + m_{1,i} + \dots + m_{i-1,i}, \\ &\dots\dots\dots \\ \nu_L^2 + d_L &= m_L + m_{1,L} + \dots + m_{L-1,L}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Кроме того, имеем очевидное неравенство

$$d_L \geq \sum_{i=L+1}^N \beta_i \nu_i^2,$$

где числа β_i определены формулой (5.1). Умножим i -е равенство в (5.3) на $a(i)$ и сложим все получившиеся равенства. В левой части имеем

$$\sum_{i=1}^L a(i) \nu_i^2 + \sum_{i=1}^L a(i) d_i.$$

В правой части получаем

$$\sum_{i=1}^L a(i) m_i + \sum_{i=1}^{L-1} \left(\sum_{j=i+1}^L a(j) m_{i,j} \right).$$

Поэтому предложение 5.2 немедленно вытекает из следующего утверждения.

ЛЕММА 5.3. *Для любого $i = 1, \dots, L-1$ имеет место неравенство*

$$a(i) d_i \geq \sum_{j=i+1}^L a(j) m_{i,j}. \tag{5.4}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. До настоящего момента наши рассуждения дословно повторяли соответствующие доказательства в [1], [40]. Если функция $a(\cdot)$ согласована со структурой графа Γ (а не Γ^*), то, учитывая, что неравенство $m_{i,j} > 0$ возможно только при условии $j \rightarrow i$ и что всегда $d_i \geq m_{i,j}$, выводим (5.4) из неравенства $a(i) \geq \sum_{j \rightarrow i} a(j)$ (этим доказано предложение 5.1).

Для доказательства предложения 5.2 этого, однако, недостаточно, потому что функция $a(\cdot)$ согласована лишь со структурой графа Γ^* , в котором, вообще говоря, меньше стрелок, чем в Γ .

Для доказательства (5.4) вспомним, прежде всего, что целозначные функции

$$d_i = \deg Z_{i,i}, \quad m_{i,j} = \text{mult}_{B_{j-1}} Z_{i,j-1}$$

суть линейные функции эффективных 1-циклов $Z_{i,i}$ на исключительной плоскости $E_i \cong \mathbb{P}^2$. Поскольку неравенство (5.4) также линейное, утверждение леммы следует из более простого факта.

ЛЕММА 5.4. *Для любой неприводимой кривой $C \subset E_i$ имеет место неравенство*

$$a(i) \deg C \geq \sum_{j=i+1}^L a(j) \text{mult}_{B_{j-1}} C^{j-1}. \quad (5.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$d = \deg C, \quad \mu_j = \text{mult}_{B_{j-1}} C^{j-1}, \quad j = i+1, \dots, L.$$

Как отмечено выше, если $\mu_j > 0$, то $j \rightarrow i$, так что необходимо доказать неравенство

$$a(i)d \geq \sum_{j \rightarrow i} a(j)\mu_j.$$

Последнее неравенство есть некоторое утверждение об особенностях плоских кривых. Рассмотрим два случая:

- 1) $C \subset E_i$ – прямая в $E_i \cong \mathbb{P}^2$;
- 2) C – кривая степени $d \geq 2$.

В случае 1) определим число $k \geq 1$ условием

$$\{j \mid B_{j-1} \in C^{j-1}\} = \{i+1, \dots, i+k\}. \quad (5.6)$$

Чтобы различать стрелки в графах Γ и Γ^* , будем записывать $a \xrightarrow{*} b$, если вершины a, b соединены стрелкой в Γ^* , и использовать обычную стрелку для Γ .

Следующий факт является ключевым.

ЛЕММА 5.5. *Для любого e , $1 \leq e \leq k$, имеем $i+e \xrightarrow{*} i$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $i+e$ – сложная вершина графа Γ (в противном случае $i+e \xrightarrow{*} i$ по определению). Напомним, что процедура упрощения удаляет из трех стрелок, выходящих из $i+e$, ту, которая идет в самую нижнюю вершину. Значит, можно предполагать, что $e \geq 3$. Однако точки

$$B_i, B_{i+1}, B_{i+2}, \dots, B_{i+k-1}$$

лежат на собственном прообразе гладкой кривой C , и потому подграф

$$i+1 \leftarrow i+2 \leftarrow i+3 \leftarrow \dots \leftarrow 1+k$$

есть цепь, т. е. между вершинами $i+1, \dots, i+k$ в исходном графе Γ нет других стрелок, кроме последовательных. Из вершины $i+e$ заведомо выходят две стрелки:

$$i+e \rightarrow i+e-1, \quad i+e \rightarrow i.$$

Отсюда следует, что если из вершины $i + e$ выходит и третья стрелка, $i + e \rightarrow j$, то обязательно $j \leq i - 1$. Именно эту стрелку и удалит процедура упрощения. Следовательно, стрелка $i + e \rightarrow i$ не будет удалена. Лемма доказана.

Вернемся к случаю 1). Неравенство (5.5) принимает вид оценки

$$a(i) \geq \sum_{j=i+1}^{i+k} a(j). \quad (5.7)$$

В силу леммы 5.5, неравенство (5.7) верно, потому что функция $a(\cdot)$ согласована со структурой графа Γ^* . Лемма 5.4 в случае 1) доказана.

Рассмотрим случай 2). Снова определим $k \geq 1$ условием (5.6). Если $k = 1$, то доказательство очевидно, так как $i + 1 \xrightarrow{*} i$ и $\mu_j \leq d$ для любого j . Считаем поэтому, что $k \geq 2$.

ЛЕММА 5.6. *Имеет место неравенство $d \geq \mu_1 + \mu_2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $L \subset E_i$ — прямая, проходящая через точку B_i в направлении бесконечно близкой точки $B_{i+1} \in E_i^{i+1}$. По предположению имеем $C \neq L$. Теперь для индекса пересечения на поверхности E_i^{i+2} имеем

$$0 \leq (C^{i+2} \cdot L^{i+2}) = d - \mu_1 - \mu_2,$$

что и требовалось показать. Лемма доказана.

Пусть Γ_C — подграф графа Γ с вершинами $\{i + 1, \dots, i + k\}$ (и теми же стрелками), Γ_C^* — подграф графа Γ^* с этим же множеством вершин. По определению процедуры упрощения стрелка

$$i + a \rightarrow i + b, \quad a > b \leq 1,$$

не может быть удалена, потому что в Γ имеется стрелка, идущая в более низкую вершину:

$$i + a \rightarrow i. \quad (5.8)$$

Отсюда следует, что $\Gamma_C = \Gamma_C^*$. Далее, стрелка (5.8) удаляется процедурой упрощения в том и только в том случае, когда $i + a$ — сложная вершина и стрелка (5.8) самая нижняя. В терминах графа Γ_C это означает, что вершина $i + a$ имеет класс 2 (как вершина этого графа). Имеет место очевидная

ЛЕММА 5.7. *Целозначная функция $i + a \mapsto \mu_{i+a} \in \mathbb{Z}_+$ согласована со структурой графа Γ_C .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это хорошо известное свойство кратностей кривой в бесконечно близких точках (на неособой поверхности).

В силу всего сказанного доказательство неравенства (5.5) в случае 2) сводится к следующему комбинаторному факту. Пусть Δ — граф класса 2 со множеством вершин $\{1, \dots, k\}$ и $\varepsilon_\Delta(\cdot) \in \{0, 1, 2\}$ — функция класса вершины ($\varepsilon_\Delta(1) = 0$). Пусть $\mu(\cdot)$ и $a(\cdot)$ — $\mathbb{Z}_+$ -значные функции, согласованные со структурой графа Δ .

ЛЕММА 5.8. *Имеет место неравенство*

$$(\mu(1) + \mu(2)) \sum_{\varepsilon_{\Delta}(j) \leq 1} a(j) \geq \sum_{j=1}^k \mu(j)a(j). \quad (5.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем индукцией по числу вершин $k \geq 2$. Если $k = 2$, то $\varepsilon_{\Delta}(1) = 0$, $\varepsilon_{\Delta}(2) = 1$ и неравенство (5.9) имеет вид

$$(\mu(1) + \mu(2))(a(1) + a(2)) \geq \mu(1)a(1) + \mu(2)a(2),$$

поэтому доказательство очевидно.

Предположим, что $k \geq 3$ и вершины 3 и 1 не соединены стрелкой: $3 \nrightarrow 1$, т. е. $\varepsilon_{\Delta}(3) = 1$. В этом случае применим предположение индукции к графу Δ_1 с вершинами $\{2, \dots, k\}$ и теми же стрелками, что и в Δ : для него неравенство (5.9) принимает вид

$$(\mu(2) + \mu(3)) \sum_{\varepsilon_{\Delta}(j)=1} a(j) \geq \sum_{j=2}^k \mu(j)a(j),$$

откуда с учетом неравенства $\mu(1) \geq \mu(2) \geq \mu(3)$ вытекает требуемое неравенство (5.9) для Δ .

Предположим, что $k \geq 3$ и имеются стрелки $3 \rightarrow 1, \dots, 2 + l \rightarrow 1$, где $l \geq 1$. В этом случае распишем левую часть (5.9) следующим образом:

$$(\mu(1) + \mu(2)) \left(a(1) + a(2) + \sum_{\substack{j \geq l+3 \\ \varepsilon_{\Delta}(j)=1}} a(j) \right),$$

и распишем правую часть (5.9):

$$\mu(1)a(1) + \mu(2)a(2) + \sum_{j=3}^{l+2} \mu(j)a(j) + \sum_{j=l+3}^k \mu(j)a(j).$$

Поскольку функции $\mu(\cdot)$ и $a(\cdot)$ согласованы со структурой графа, имеем неравенство

$$\mu(2)a(1) \geq \mu(2)(a(2) + a(3) + \dots + a(l+2))$$

и симметричное неравенство для $\mu(1)a(2)$. Применяя предположение индукции к подграфу Δ_{l+3} с вершинами $\{l+3, \dots, k\}$, завершаем доказательство леммы.

Этим предложение 5.2 доказано.

5.3. Подсчет кратностей самопересечения для не логканонической особенности. Пусть $o \in X$ – неособый трехмерный росток, Σ – подвижная линейная система такая, что $\text{mult}_o \Sigma \leq 2n$, но точка o является изолированным центром не логканонических особенностей пары $(X, \frac{1}{n}\Sigma)$, где $n > 0$ – некоторое число. Пусть $Z = (D_1 \circ D_2)$ – самопересечение системы Σ (эффективный 1-цикл на X). Пусть

$$\varphi_{i,i-1}: X_i \rightarrow X_{i-1}, \quad i = 1, \dots, K,$$

– последовательность раздутий центров некоторой не логканонической особенности пары $(X, \frac{1}{n}\Sigma)$, $X_0 = X$, $\varphi_{i,i-1}$ раздувает неприводимое подмногообразие $B_{i-1} \subset X_{i-1}$ – точку или кривую, $B_0 = o$,

$$E_i = \varphi_{i,i-1}^{-1}(B_{i-1}) \subset X_i$$

– исключительный дивизор, наконец, $E_K \subset X_K$ реализует не логканоническую особенность пары $(X, \frac{1}{n}\Sigma)$, т.е. имеет место логнеравенство Нётера–Фано

$$\sum_{i=1}^K p_{Ki} \nu_i > n \left(\sum_{i=1}^K p_{Ki} \delta_i + 1 \right), \quad (5.10)$$

где $\delta_i = \text{codim } B_{i-1} - 1$, p_{Ki} – число путей из E_K в E_i и, как обычно,

$$\nu_i = \text{mult}_{B_{i-1}} \Sigma^{i-1} \leq 2n,$$

Σ^i – собственный прообраз подвижной системы Σ на X_i . Пусть

$$\{1, \dots, L\} = \{j \mid \dim B_{j-1} = 0\}.$$

Поскольку по предположению $\nu_i \leq 2n$, из (5.10) следует, что $K \geq L + 1$, т.е. среди центров раздутий имеется по крайней мере одна кривая.

Обозначим через Γ ориентированный граф последовательности раздутий $\varphi_{i,i-1}$, $i = 1, \dots, K$, и через Γ^* – его упрощение, граф класса ≤ 2 . Число путей из вершины i в вершину j , $i > j$, в графе Γ^* обозначим через p_{ij}^* . По определению $p_{ii}^* = 1$. Положим также

$$m_i = \text{mult}_{B_{i-1}} Z^{i-1}, \quad i = 1, \dots, L.$$

Следующий факт усиливает классическое $(4n^2)$ -неравенство для случая не логканонической особенности пары $(X, \frac{1}{n}\Sigma)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3. *Имеет место оценка*

$$\sum_{i=1}^L p_{Li}^* m_i > 4n^2 \left(\sum_{i=1}^L p_{Li}^* + 1 \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$N = \min \left\{ e \mid \sum_{i=1}^e p_{ei} (\nu_i - \delta_i n) > 0 \right\},$$

т.е. E_N – не каноническая особенность пары $(X, \frac{1}{n}\Sigma)$ с минимальным номером. В частности, пара $(X, \frac{1}{n}\Sigma)$ канонична в $E_1, \dots, E_{N-1}$. Из неравенства $\nu_1 \leq 2n$ легко следует (см. § 4), что отрезок графа Γ с вершинами $L-1, L, L+1, \dots, N$ есть цепь. Определим число a , $0 \leq a \leq 1$, равенством

$$a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{N-1} p_{Ni} (\delta_i n - \nu_i)$$

(числа путей p_{Ni} и $p_{N-1,i}$ совпадают в силу сказанного выше). Если $a = 1$, то легко убедиться в том, что

$$\nu_1 = \dots = \nu_N = 2n,$$

откуда утверждение предложения следует непосредственно. Считаем поэтому, что $a < 1$.

Предположим сначала, что $N = K$. В этом случае при использовании техники подсчета кратностей с учетом неравенства (5.10) получаем

$$\sum_{i=1}^L p_{Li}^* m_i > \frac{(2\Sigma_0^* + \Sigma_1^* + 1)^2}{\Sigma_0^* + \Sigma_1^*} n^2 = 4(\Sigma_0^* + 1)n^2 + \frac{(\Sigma_1^* - 1)^2}{\Sigma_0^* + \Sigma_1^*} n^2,$$

где

$$\Sigma_{2-\alpha}^* = \sum_{\delta_i=\alpha} p_{Ni}^*, \quad \alpha = 1, 2,$$

что и требовалось показать (отметим, что логнеравенство Нётера–Фано лишь усиливается при замене p_{Ki} на p_{Ki}^* , поскольку эти коэффициенты изменяются лишь при $i = 1, \dots, L-1$, и $\nu_i \leq 2n$ для этих значений i – это хорошо известный феномен).

Итак, при $N = K$ предложение 5.3 справедливо.

Предположим, что $K \geq N + 1$.

ЛЕММА 5.9. *Пара $(X_{N-1}, \frac{1}{n}\Sigma^{N-1} - aE_{N-1})$ не логканонична в кривой $B_{N-1} \subset E_{N-1}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая стандартные свойства чисел p_{ij} , перепишем неравенство (5.10) в виде

$$\left(\sum_{\alpha \rightarrow N-1} p_{K\alpha} \right) \left(\sum_{i=1}^{N-1} p_{Ni}(\nu_i - \delta_i n) \right) + \sum_{i=N}^K p_{Ki}(\nu_i - \delta_i n) > n$$

(очевидно, для $i \leq N-1$ имеет место равенство $p_{Ni} = p_{N-1,i}$). Теперь утверждение леммы вытекает непосредственно из определения числа a и того, что $N \rightarrow N-1$. Лемма доказана.

Далее, полагая

$$\Sigma_0^* = \sum_{i=1}^L p_{Li}^*, \quad \Sigma_1^* = \sum_{i=L+1}^{N-1} p_{Ni}^*,$$

согласно предложениям 4.2, 5.2 имеем

$$\sum_{i=1}^L p_{Li}^* m_i > \sum_{i=1}^{N-1} p_{Ni}^* \nu_i^2 + 4(1+a)n^2,$$

откуда с учетом неравенства Нётера–Фано получаем

$$\sum_{i=1}^L p_{Li}^* m_i > \left[\frac{(2\Sigma_0^* + \Sigma_1^* - a)^2}{\Sigma_0^* + \Sigma_1^*} + 4(1+a) \right] n^2 = 4(\Sigma_0^* + 1)n^2 + \frac{(\Sigma_1^* + a)^2}{\Sigma_0^* + \Sigma_1^*} n^2. \quad (5.11)$$

Предложение 5.3 доказано.

§ 6. Исключение бесконечно близких максимальных особенностей

В данном параграфе завершается доказательство предложения 0.3: в предположении, что система Σ не имеет максимального подмногообразия вида $\sigma^{-1}(P)$, где $P \subset \mathbb{P}$ – линейное подпространство коразмерности 2, доказано, что Σ не имеет максимальных особенностей с центром B коразмерности ≥ 4 .

6.1. Случай, когда центр особенности не содержится в дивизоре ветвления. В силу предложений 2.1, 3.1 можно считать, что центр B максимальной особенности линейной системы Σ имеет коразмерность ≥ 4 (и то же самое справедливо для любой другой максимальной особенности). Пусть $P \subset \mathbb{P}$ – общее линейное подпространство размерности $\text{codim } B$ и $o \in \sigma^{-1}(P) \cap B$ – некоторая точка. Положим $V_P = \sigma^{-1}(P)$.

Рассмотрим сначала случай, когда $\sigma(B) \not\subset W$. В этом случае $p = \sigma(o) \notin W$. Многообразие V_P гладкое, $\sigma_P = \sigma|_{V_P}: V_P \rightarrow P$ – двойное накрытие, разветвленное над $W_P = W \cap P$,

$$\text{Pic } V_P = \mathbb{Z}H_P,$$

где $H_P = H|_{V_P}$. Пусть Σ_P – ограничение системы Σ на V_P . Это подвижная линейная система, причем пара $(V_P, \frac{1}{n}\Sigma_P)$ не логканонична и имеет точку o изолированным центром не логканонической особенности. Пусть $\varphi: V_P^+ \rightarrow V_P$ – раздутие точки o , $E = \varphi^{-1}(o)$ – исключительный дивизор. Пусть $Z_P = (D_1 \circ D_2)$ – самопересечение линейной системы Σ_P и Z_P^+ – его собственный прообраз на V_P^+ . Согласно предложению 4.1 для некоторой плоскости $\Pi \subset E$ коразмерности 2 имеет место неравенство

$$\text{mult}_o Z_P + \text{mult}_\Pi Z_P^+ > 8n^2. \quad (6.1)$$

Пусть теперь $\varphi_P: P^+ \rightarrow P$ – раздутие точки $p = \sigma(o)$ и $E_P = \varphi_P^{-1}(p)$ – исключительный дивизор, E естественно отождествляется с E_P . Пусть $\Lambda \subset P$ – единственная плоскость коразмерности 2, содержащая точку p и пересекающая Π на $E_P = E$:

$$\Lambda^+ \cap E_P = \Pi,$$

где $\Lambda^+ \subset P^+$ – собственный прообраз. Подмногообразие $Q = \sigma_P^{-1}(\Lambda) \subset V_P$ неприводимо, имеет коразмерность 2 (относительно V_P), причем

$$\deg Q = 2, \quad \text{mult}_o Q = \text{mult}_\Pi Q^+ = 1, \quad (6.2)$$

где $Q^+ \subset V_P^+$ – собственный прообраз. Поскольку цикл Z_P удовлетворяет неравенству

$$\text{mult}_o Z_P + \text{mult}_\Pi Z_P^+ > \deg Z_P = 8n^2,$$

записывая $Z_P = aQ + Z_P^\sharp$, где $a \in \mathbb{Z}_+$ и $Z_P^\sharp$ не содержит Q компонентой, получаем

$$\text{mult}_o Z_P^\sharp + \text{mult}_\Pi (Z_P^\sharp)^+ > \deg Z_P^\sharp,$$

$(Z_P^\sharp)^+$ – собственный прообраз. Наконец, пусть R есть σ -прообраз общей гиперплоскости в P , содержащей точку p и пересекающей Π на $E_P = E$, т. е.

$$\sigma(R)^+ \cap E_P = \Pi.$$

Дивизор R не содержит ни одной компоненты эффективного цикла $Z_P^\sharp$, так что для теоретико-схемного пересечения $Z_R^\sharp = (Z_P^\sharp \circ R)$ имеем неравенство

$$\text{mult}_o Z_R^\sharp \geq \text{mult}_o Z_P^\sharp + \text{mult}_\Pi(Z_P^\sharp)^+ > \deg Z_R^\sharp,$$

что невозможно. Полученное противоречие доказывает предложение 0.3 в случае, когда $\sigma(B) \not\subset W$.

6.2. Случай, когда центр особенности содержится в дивизоре ветвления. Простой случай. Рассмотрим, наконец, последний случай, когда $\sigma(B) \subset W$. Снова работаем на многообразии $V_P = \sigma^{-1}(P)$, линейная система Σ_P подвижна, и точка o есть изолированный центр логмаксимальной особенности этой линейной системы. Положим $p = \sigma(o)$. Для раздутий $\varphi: V_P^+ \rightarrow V_P$ и $\varphi: P^+ \rightarrow P$ точек o и p соответственно с исключительными дивизорами $E = \varphi^{-1}(o)$ и $E_P = \varphi_P^{-1}(p)$, отображение двойного накрытия $\sigma_P: V_P \rightarrow P$ не продолжается до изоморфизма исключительных дивизоров E и E_P . Пусть $T_P = T_p W_P$ – касательная гиперплоскость к дивизору ветвления $W_P = W \cap P$ в точке p , $\mathbb{T}_P$ – соответствующая гиперплоскость в E_P . Легко видеть, что существуют гиперплоскость $\mathbb{T} \subset E$ и точка $\xi \in E \setminus \mathbb{T}$ такие, что σ_P индуцирует изоморфизм пространств $\mathbb{T}$ и $\mathbb{T}_P$ и рациональное отображение

$$\sigma_E: E \dashrightarrow E_P$$

есть композиция проекции $\text{pr}_\xi: E \dashrightarrow \mathbb{T}$ из точки ξ и изоморфизма $\mathbb{T} \cong \mathbb{T}_P$. В частности, $\sigma_E(E) = \mathbb{T}_P$ (все это легко проверить в подходящих локальных координатах $z_1, \dots, z_k$ в точке p на P , в которых V_P задается локальным уравнением $y^2 = z_1$).

Пусть, как и выше, Z_P и Z_P^+ – самопересечение линейной системы Σ_P и его собственный прообраз на V_P^+ соответственно. Пусть $\Pi \subset E$ – плоскость коразмерности 2, удовлетворяющая неравенству (6.1),

$$\Pi_P = \sigma_E(\Pi) \subset \mathbb{T}_P \subset E_P$$

– образ плоскости Π . Очевидно, Π_P есть линейное подпространство в $\mathbb{T}_P$ коразмерности 1 или 2. В последнем случае для общей гиперплоскости $R \ni p$, $R \subset P$, такой, что $R^+ \supset \Pi_P$, имеем: ни одна компонента эффективного цикла $(\sigma_P)_* Z_P$ коразмерности 2 не содержится в R . В силу неравенства (6.1) получаем

$$\begin{aligned} \text{mult}_o(\sigma^{-1}(R) \circ Z_P) &\geq \text{mult}_o Z_P + \text{mult}_\Pi Z_P^+ \\ &> 8n^2 = \deg Z_P = \deg(\sigma^{-1}(R) \circ Z_P), \end{aligned}$$

что невозможно. Следовательно, Π_P есть гиперплоскость в $\mathbb{T}_P$. Пусть $\Lambda \subset P$ – единственная плоскость коразмерности 2 такая, что $\Lambda \ni p$ и $\Lambda^+ \cap E_P = \Pi_P$. Подмногообразие $Q = \sigma_P^{-1}(\Lambda)$ неприводимо. Если Q^+ не содержит Π , то имеем

$$\text{mult}_o Q = 2, \quad \text{mult}_\Pi Q^+ = 0,$$

так что $\text{mult}_o Q + \text{mult}_\Pi Q^+ = \deg Q$ и можно рассуждать так же, как выше. Напомним, что согласно условиям общности положения (и с учетом общности подпространства P) точка $o \in Q$ есть изолированная квадратичная особенность.

Если ранг этой особенности не меньше 3, то квадрака $Q^+ \cap E$ неприводима (и приведена), так что $\Pi \not\subset Q^+$. Несложный подсчет размерностей (аналогичный проведенному ниже в п. 7.3) показывает, что при $M \geq 8$ для достаточно общей гиперповерхности W , общего подпространства P и общего подпространства $\Lambda \subset P$, $\Lambda \ni p$, коразмерности 2 в P , где $p \in P \cap W$ – произвольная точка, ранг соответствующей квадратичной особенности $o \in Q$ не меньше 3.

Однако при $M \leq 7$ возможность $\Pi \subset Q^+$ реализуется для любой гиперповерхности W . Теперь рассуждать так же, как в случае, когда точка o не лежит на дивизоре ветвления, нельзя:

$$\text{mult}_o Q = 2, \quad \text{mult}_\Pi Q^+ = 1,$$

так что рассуждения, как в случае $\sigma(o) \notin W$, не приводят к результату. Для исключения этой возможности необходима усиленная техника подсчета кратностей (см. § 5). Мы завершим доказательство во всех деталях для $M \geq 6$.

6.3. Случай, когда центр особенности содержится в дивизоре ветвления. Трудный случай. Справедлива

ЛЕММА 6.1. *Верна оценка $\nu = \text{mult}_o \Sigma \leq 2n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим дивизор $T = \sigma^{-1}(T_p W)$, где $T_p W \subset \mathbb{P}$ – касательная гиперплоскость. Система Σ подвижна, так что корректно определен эффективный цикл $(D \circ T)$, где $D \in \Sigma$ – общий дивизор. Теперь имеем

$$2\nu \leq \text{mult}_o(D \circ T) \leq \deg(D \circ T) = \deg D = 4n,$$

что и утверждалось.

Пусть $\Delta \subset P$, $\Delta \ni p$, – общая 3-плоскость, так что $V_\Delta = \sigma^{-1}(\Delta)$ – гладкое многообразие, $\sigma_\Delta: V_\Delta \rightarrow \Delta$ – двойное накрытие, Σ_Δ – ограничение системы Σ на V_Δ . Пара $(V_\Delta, \frac{1}{n}\Sigma_\Delta)$ не логканонична в точке o , причем o – изолированный центр не логканонических особенностей этой пары.

Пусть $C = Q \cap V_\Delta = \sigma^{-1}(L)$, где $L = \Delta \cap \Lambda$ – прямая, проходящая через точку p и касательная к W в этой точке (определение плоскости Λ см. в конце п. 6.2). Положим $y = \Pi \cap V_\Delta^+$, где V_Δ^+ – собственный прообраз V_Δ на V^+ , т. е.

$$\varphi_\Delta = \varphi|_{V_\Delta^+}: V_\Delta^+ \rightarrow V_\Delta$$

– раздутие точки o с исключительной плоскостью E_Δ , $y = \Pi \cap E_\Delta$. Имеется не логканоническая особенность пары $(V_\Delta, \frac{1}{n}\Sigma_\Delta)$, центр которой на V_Δ^+ есть точка y .

Рассмотрим самопересечение

$$Z_\Delta = (D_1 \circ D_2) = Z|_{V_\Delta}$$

подвижной линейной системы Σ_Δ и запишем $Z_\Delta = bC + Z_1$, где $b \in \mathbb{Z}_+$, эффективный 1-цикл Z_1 не содержит кривую C компонентой и потому удовлетворяет неравенству

$$\text{mult}_o Z_1 + \text{mult}_y Z_1^+ \leq \deg Z_1 = 8n^2 - 2b. \quad (6.3)$$

Предположим теперь, что в точке o кривая C имеет две различные ветви:

$$C^+ \cap E_\Delta = \{y, y^*\},$$

где $y, y^* \in E_\Delta$ – различные точки. Это предположение оправданно при $M \geq 6$ в силу условий общности положения, так как для любого подпространства $\mathcal{U} \subset \mathbb{P}$ коразмерности 2 такого, что $\mathcal{U} \ni p$, квадратичная точка $o \in \sigma^{-1}(\mathcal{U})$ имеет ранг не меньше 2 (см. предложение 0.6, (iii)), так что это же верно и для квадратичной точки $o \in \sigma^{-1}(L) = C$, так как $L = \mathcal{U} \cap \Delta$, где Δ – общая 3-плоскость, содержащая точку p . При $M = 5$ необходимо рассматривать и случай, когда $o \in C$ – каспидальная особая точка порядка 1 (см. ниже).

В обозначениях из п. 5.3 пусть $\varphi_{i,i-1}: X_i \rightarrow X_{i-1}$, $i = 1, \dots, N$, $X_0 = V_\Delta$, – разрешение не логканонической особенности, центр которой на $X_1 = V_\Delta^+$ есть точка $B_1 = y$. Пусть

$$\{1, \dots, k\} = \{i \mid 1 \leq i \leq L, B_{i-1} \in C^{i-1}\}.$$

В силу сделанного предположения о ветвях кривой C имеем $k \geq 2$, причем подграф с вершинами $1, \dots, k$ есть цепь.

Отметим, что $b \geq 1$, в противном случае выполнено неравенство

$$\text{mult}_o Z_\Delta + \text{mult}_y Z_\Delta^+ \leq \deg Z_\Delta = 8n^2$$

и можно рассуждать дословно так же, как при $\sigma(o) \notin W$.

Имеем $p_{L1}^* = \dots = p_{L,k-1}^*$. Положим, далее, $\mu_i = \text{mult}_{B_{i-1}} Z_1^{i-1}$ при $i = 1, \dots, L$. В силу неравенства (6.3) имеем оценку

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^L p_{Li}^* m_i &= b \left(\sum_{i=1}^k p_{Li}^* + p_{L1}^* \right) + \sum_{i=1}^L p_{Li}^* \mu_i \\ &\leq b \left(\sum_{i=1}^k p_{Li}^* + p_{L1}^* \right) + \frac{1}{2} \deg Z_1 \sum_{i=1}^L p_{Li}^*. \end{aligned} \quad (6.4)$$

ЛЕММА 6.2. *Имеет место оценка*

$$p_{L1}^* = \dots = p_{L,k-1}^* \leq 1 + \sum_{i=k+1}^L p_{Li}^*.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\mathcal{P}_{i,j}^*$ при $L \geq i > j \geq 1$ множество путей в графе Γ^* из вершины i в вершину j . Стрелку $i \xrightarrow{*} j$ назовем *прыжком*, если $i \geq j + 2$. Путь $\pi \in \mathcal{P}_{i,j}^*$ назовем *простым*, если в нем нет прыжков, т. е. он последовательно проходит все вершины

$$i \xrightarrow{*} i-1 \xrightarrow{*} \dots \xrightarrow{*} a \xrightarrow{*} a-1 \xrightarrow{*} \dots \xrightarrow{*} j.$$

Очевидно, каждое множество $\mathcal{P}_{i,j}^*$ содержит в точности один простой путь. Обозначим его через σ_{ij} .

Если множество $\mathcal{P}_{i,j}^* \setminus \{\sigma_{ij}\}$ непусто, то каждый путь $\pi \in \mathcal{P}_{i,j}^* \setminus \{\sigma_{ij}\}$ имеет хотя бы один прыжок. Пусть

$$l(\pi) \xrightarrow{*} q(\pi)$$

– *последний* прыжок в пути (т. е. прыжок из вершины $l(\pi)$ с *наименьшим* номером). Поскольку граф Γ^* имеет класс ≤ 2 , прыжок $a \xrightarrow{*} b$ однозначно определен вершиной a (так как из вершины a выходят ровно две стрелки, и одна из них – это стрелка $a \xrightarrow{*} a - 1$). Следовательно, путь π однозначно определен после вершины $l(\pi)$: сначала происходит однозначно определенный прыжок в вершину $q(\pi)$, а после этой вершины (если $q(\pi) \neq j$) путь π является простым.

Обозначим через $\mathcal{J}_{i,j}^* \subset \{j+2, \dots, i\}$ множество таких индексов l , $j+2 \leq l \leq i$, что из вершины l имеется прыжок $l \xrightarrow{*} a \geq j$. Из сказанного следует, что, сопоставляя каждому пути $\pi \in \mathcal{P}_{i,j}^* \setminus \{\sigma_{ij}\}$ вершину $l(\pi)$ последнего прыжка, получаем взаимно однозначное соответствие между множествами

$$\mathcal{P}_{i,j}^* \setminus \{\sigma_{ij}\}, \quad \coprod_{l \in \mathcal{J}_{i,j}^*} \mathcal{P}_{i,l}^*$$

(где через $\coprod$ обозначено дизъюнктивное объединение). Следовательно,

$$p_{ij}^* = 1 + \sum_{l \in \mathcal{J}_{i,j}^*} p_{il}^* \leq 1 + \sum_{l \geq j+2} p_{il}^*,$$

так как для $l \in \mathcal{J}_{i,j}^*$ во всяком случае $j+2 \leq l$. Лемма доказана.

Отметим, что приведенное рассуждение дает новое доказательство леммы 4.9 и, тем самым, $(4n^2)$ -неравенства (см. [33]).

Ввиду леммы 6.2 правая часть неравенства (6.4) оценивается сверху числом

$$b + \left(b + \frac{1}{2} \deg Z_1\right) \sum_{i=1}^L p_{Li}^* = b + 4n^2 \sum_{i=1}^L p_{Li}^*.$$

Теперь из предложения 5.3 получаем оценку

$$b > 4n^2,$$

что невозможно. Полученное противоречие завершает доказательство предложения 0.3 для $M \geq 6$.

При $M = 5$ для завершения доказательства предложения 0.3 остается рассмотреть случай, когда кривая C имеет простую каспидальную особенность в точке o , так что C^+ касается исключительного дивизора E в точке y (касание простое). Если $L = 2$, то можно использовать предыдущие рассуждения. Если $L \geq 3$ и $B_2 \in C^2$, то вершины 3 и 1 соединены стрелкой, $3 \rightarrow 1$, так что

$$p_{L1}^* \geq p_{L2}^* + p_{L3}^*$$

и вклад первой вершины графа в сумму $\sum_{i=1}^L p_{Li}^* m_i$ не компенсируется числом

$$b \left(1 + \sum_{i=k+1}^L p_{Li}^*\right),$$

как выше. Однако предыдущие оценки могут быть усилены следующим образом. Положим

$$\mu = \text{mult}_C \Sigma \leq n$$

(если $\mu > n$, то система Σ обладает максимальным подмногообразием коразмерности 2, что и требуется). Ограничим Σ на σ -прообраз S общей 2-плоскости в $\mathbb{P}$, проходящей через прямую L . Очевидно, $\Sigma_S = \Sigma|_S$ есть непустая линейная система кривых, имеющая единственную неподвижную компоненту C кратности μ . Для общей кривой $G \in \Sigma_S$ имеем неравенство

$$((G - \mu C) \cdot C) \geq 2 \operatorname{mult}_o(G - \mu C) + \sum_{i=2}^k \operatorname{mult}_{B_{i-1}}(G - \mu C),$$

где

$$\{2, \dots, k\} = \{i \mid B_{i-1} \in C^{i-1}\}, \quad k \geq 3.$$

Имеется стандартная техника (использованная в [41, § 8], а также в [12], [15], [32]), позволяющая из этой оценки и неравенства Нётера–Фано вывести, что “верхняя” сумма Σ_1^* велика по сравнению с “нижней” Σ_0^* , откуда получается существенное усиление квадратичного неравенства (5.11). Этого усиленного неравенства уже достаточно для исключения каспидального случая. Детали мы опускаем; они будут приведены в другой работе. Таким образом завершается доказательство предложения 0.3 для $M = 5$.

§ 7. Двойные пространства общего положения

В этом параграфе докажем предложения 0.4–0.6.

7.1. Прямые на многообразии V . Докажем предложение 0.4. Нетривиальная часть этого утверждения состоит в том, что через каждую точку проходит не более конечного числа прямых; тот факт, что любое (не обязательно общее) двойное пространство индекса 2 замещается прямыми, почти очевиден. Легко видеть, что образ $L = \sigma(C)$ прямой $C \subset V$ на $\mathbb{P}$ есть прямая в обычном понимании и

$$\sigma|_C: C \rightarrow L \subset \mathbb{P}$$

есть изоморфизм. Таким образом, имеются две возможности: либо $L \not\subset W$, так что $\sigma^{-1}(L) = C \cup C^*$ – пара гладких рациональных кривых (переставляемых инволюцией Галуа двойного накрытия σ), либо $L \subset W$ целиком содержится в дивизоре ветвления, т. е. $\sigma^{-1}(L) = C$. Верно и обратное: если прямая $L \subset \mathbb{P}$ такова, что кривая $\sigma^{-1}(L)$ приводима либо $L \subset W$, то $\sigma^{-1}(L)$ состоит соответственно из двух либо одной прямой на V . Легкий подсчет размерностей показывает, что на общей гиперповерхности в $\mathbb{P}$ степени $2(M-1)$ прямых нет, так что вторая возможность не реализуется. Далее, двойное накрытие $\sigma^{-1}(L) \rightarrow L$ распадается тогда и только тогда, когда дивизор $W|_L$ на $L = \mathbb{P}^1$ делится на 2, т. е.

$$\frac{1}{2}(W|_L) \in \operatorname{Div} L$$

– целый дивизор. Поэтому предложение 0.4 немедленно вытекает из следующего факта.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.1. *Для общей гладкой гиперповерхности $W \subset \mathbb{P}$ степени $2(M-1)$ через каждую точку $x \in \mathbb{P}$ проходит конечное число таких прямых L , что $W|_L \in 2 \operatorname{Div} L$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Через $\mathcal{P}_k(\mathbb{P}^l)$ обозначим пространство однородных многочленов степени k на проективном пространстве $\mathbb{P}^l$ (т.е. $H^0(\mathbb{P}^l, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^l}(k))$), рассматриваемое как аффинное алгебраическое многообразие размерности $\binom{k+l}{l}$. Пусть

$$\text{sq}: \mathcal{P}_k(\mathbb{P}^l) \rightarrow \mathcal{P}_{2k}(\mathbb{P}^l), \quad \text{sq}: f \mapsto f^2,$$

– отображение возведения в квадрат. Его образ $\text{sq}(\mathcal{P}_k(\mathbb{P}^l)) \subset \mathcal{P}_{2k}(\mathbb{P}^l)$ обозначим через $[\mathcal{P}_k(\mathbb{P}^l)]^2$. Рассмотрим пространство пар

$$\Pi = \mathbb{P} \times \mathcal{P}_{2(M-1)}(\mathbb{P})$$

и положим $\Pi(x) = \{x\} \times \mathcal{P}_{2(M-1)}(\mathbb{P})$ для произвольной точки $x \in \mathbb{P}$. Пусть $Y(x) \subset \Pi(x)$ – замкнутое алгебраическое подмножество пар (x, F) , $F \in \mathcal{P}_{2(M-1)}(\mathbb{P})$, определяемое следующим условием:

(+) множество прямых $L \subset \mathbb{P}$, $L \ni x$, для которых $F|_L \in [\mathcal{P}_{M-1}(L)]^2$, имеет положительную размерность.

Легко видеть, что замыкание

$$\overline{\bigcup_{x \in \mathbb{P}} Y(x)} \subset \Pi$$

есть замкнутое алгебраическое подмножество размерности $\leq M + \dim Y(x)$. Поэтому предложение, в свою очередь, вытекает из следующего факта.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.2. *Коразмерность замкнутого множества $Y(x)$ в $\Pi(x) \cong \mathcal{P}_{2(M-1)}(\mathbb{P})$ не меньше $M + 1$.*

На самом деле, как будет видно из доказательства, справедлива гораздо более сильная оценка коразмерности множества $Y(x)$. В частности, утверждение предложения 7.1 остается верным и для двойных пространств индекса 2 с простейшими особенностями (квадратичными точками). Однако здесь нам это не нужно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 7.2. Пусть $z_1, \dots, z_M$ – система аффинных координат на $\mathbb{P}$ с началом в точке $x = (0, \dots, 0)$. Многочлен $F \in \mathcal{P}_{2(M-1)}(\mathbb{P})$ записываем в следующем виде:

$$F = q_0 + q_1(z_1, \dots, z_M) + \dots + q_{2(M-1)}(z_1, \dots, z_M),$$

где $q_i(z_*)$ – однородный многочлен степени i . Прямая $L \ni x$ соответствует набору однородных координат

$$(a_1 : \dots : a_M) \in \mathbb{P}^{M-1},$$

$L = \{t(a_1, \dots, a_M) \mid t \in \mathbb{C}\}$. Очевидно, $F|_L \in [\mathcal{P}_{M-1}(L)]^2$ тогда и только тогда, когда многочлен

$$q_0 + tq_1(a_*) + \dots + t^{2(M-1)}q_{2(M-1)}(a_*) \in \mathbb{C}[t]$$

есть полный квадрат в $\mathbb{C}[t]$.

Для каждого $k = 0, 1, \dots, 2(M-1)$ определим подмножество $Y_k(x) \subset \Pi(x)$ следующим условием:

(+_k) существует неприводимое замкнутое подмножество $Z \subset \mathbb{P}^{M-1}$ положительной размерности такое, что для общей прямой $L \in Z$ имеем $F_L \in [\mathcal{P}_{M-1}(L)]^2$, причем $F|_L$ имеет в точке $x \in L$ нуль порядка k .

(Напомним, что мы отождествляем точки $\mathbb{P}^{M-1}$ с прямыми в $\mathbb{P}$, проходящими через точку x .) Очевидно, для нечетного $k \notin 2\mathbb{Z}$ имеем $Y_k = \emptyset$ и

$$Y(x) = \bigcap_{i=0}^{M-1} Y_{2i}(x).$$

Таким образом, достаточно доказать оценку предложения для каждого из (конструктивных) множеств $Y_{2i}(x)$, $i = 0, \dots, M-1$. Рассмотрим сначала множество $Y_0(X)$ (соответствующее прямым на V , проходящим через точку вне дивизора ветвления). Для $F \in Y_0(x)$ имеем $q_0 \neq 0$ и можно считать, что $q_0 = 1$.

ЛЕММА 7.1. *Для любого $m \geq 1$ существует набор квазиоднородных многочленов $A_{m,i}(s_1, \dots, s_m) \in \mathbb{Q}[s_1, \dots, s_m]$ степени $\deg A_{m,i} = i \in \{m+1, \dots, 2m\}$, где вес переменной s_j есть $\text{wt}(s_j) = j$, такой, что многочлен $1 + b_1 t + \dots + b_{2m} t^{2m}$ есть полный квадрат в $\mathbb{Q}[t]$ для $b_1, \dots, b_{2m} \in \mathbb{C}$ тогда и только тогда, когда удовлетворяется система равенств $b_i = A_{m,i}(b_1, \dots, b_m)$, $i = m+1, \dots, 2m$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим равенство

$$1 + s_1 t + \dots + s_{2m} t^{2m} = (1 + r_1 t + \dots + r_m t^m)^2.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t , найдем r_i как многочлены от $s_1, \dots, s_i$ при $i \leq m$ (с коэффициентами в $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$). Равенство коэффициентов при $t^{m+1}, \dots, t^{2m}$ дает требуемую систему уравнений. Доказательство закончено.

Согласно лемме 7.1 ограничение F на прямую $\{t(a_*)\}$ есть полный квадрат тогда и только тогда, когда удовлетворяется система уравнений

$$q_i(a_*) = A_{M-1,i}(q_1(a_*), \dots, q_{M-1}(a_*)), \quad i = M, \dots, 2(M-1). \quad (7.1)$$

Это система $M-1$ полиномиальных однородных уравнений от $(a_1 : \dots : a_M)$ степеней $M, \dots, 2(M-1)$ соответственно (откуда, в частности, сразу следует, что через каждую точку $x \in V$ проходят хотя бы две прямые, а в случае общего положения через $x \in V$ проходят

$$2 \cdot (M \cdot (M+1) \cdots 2(M-1)) = 2 \frac{(2M-2)!}{(M-1)!}$$

прямых). Как видно из (7.1), коэффициенты правой части полиномиально зависят от коэффициентов многочленов $q_1, \dots, q_{M-1}$. Таким образом, $Y_0(x)$ состоит из таких многочленов $F \in \mathcal{P}_{2(M-1)}(\mathbb{P})$, для которых система (7.1) задает алгебраическое множество положительной размерности.

Теперь коразмерность $\text{codim } Y_0(x)$ можно оценить методом из [4]. Считая многочлены $q_1, \dots, q_{M-1}$ фиксированными, получаем равенство

$$\text{codim } Y_0(x) = \text{codim } Y_0^*(x),$$

где замкнутое множество $Y_0^* \subset \mathcal{P}_M(\mathbb{P}^{M-1}) \times \cdots \times \mathcal{P}_{2(M-1)}(\mathbb{P}^{M-1})$ (состоящее из наборов $q_M^*, \dots, q_{2(M-1)}^*$ однородных многочленов соответствующих степеней) определяется следующим условием: система уравнений

$$q_M^* = \cdots = q_{2(M-1)}^* = 0$$

имеет множество решений положительной размерности. Повторяя доказательство леммы 3.3 из [1] (это рассуждение хорошо известно, оно применялось и публиковалось много раз), определим подмножества $Y_{0,j}^* \subset Y_0^*$ для $j = M, \dots, 2(M-1)$, фиксируя первую “неправильную” коразмерность:

$$Y_{0,j}^* = \{(q_M^*, \dots, q_{2(M-1)}^*) \mid \text{codim}\{q_M^* = \cdots = q_j^* = 0\} = j - M\},$$

так что

$$Y_0^* = \bigvee_{j=M}^{2(M-1)} Y_{0,j}^*,$$

где через $\bigvee$ обозначено дизъюнктивное объединение (например, $Y_{0,M}^*$ состоит из наборов (q_M^*) с $q_M^* \equiv 0$). Для $(q_M^*, \dots, q_{2(M-1)}^*) \in Y_{0,j}^*$ имеется неприводимая компонента

$$B \subset \{q_M^* = \cdots = q_{j-1}^* = 0\}$$

коразмерности точно $j - M$, на которой q_j^* тождественно обращается в нуль. Пусть

$$\pi: B \rightarrow \mathbb{P}^{\dim B} \subset \mathbb{P}^{M-1}$$

– общая линейная проекция на общую $(\dim B)$ -мерную плоскость. Поскольку π -подъем ненулевого однородного многочлена на $\mathbb{P}^{\dim B}$ не обращается тождественно в нуль на B , получаем оценку

$$\text{codim } Y_{0,j}^* \geq \dim \mathcal{P}_j(\mathbb{P}^{2M-1-j}) = \binom{2M-1}{j}$$

(поскольку $\dim B = 2M - 1 - j$, $j \in \{M, \dots, 2M - 2\}$), так что

$$\text{codim } Y_0^* \geq \min \left\{ \binom{2M-1}{j} \mid j = M, \dots, 2M - 2 \right\} = 2M - 1.$$

Таким образом, $\text{codim } Y_0(x) \geq 2M - 1 \geq M + 1$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь задачу оценки коразмерности множества $Y_k(x)$, $k = 2e \geq 2$. Для $F \in Y_k(x)$ существует множество $Z_F \subset \mathbb{P}^{M-1}$ положительной размерности, на котором тождественно обращаются в нуль многочлены $q_0, q_1(z_*), \dots, q_{k-1}(z_*)$ и для точки общего положения $(a_1 : \dots : a_M) \in Z_F$ многочлен

$$t^k q_k(a_*) + \cdots + t^{2(M-1)} q_{2(M-1)}(a_*) \in \mathbb{C}[t]$$

есть полный квадрат, причем $q_k(a_*) \neq 0$. Применяя лемму 7.1, получаем систему равенств

$$\frac{q_i(a_*)}{q_k(a_*)} = A_{M-e-1,i} \left(\frac{q_{k+1}(a_*)}{q_k(a_*)}, \dots, \frac{q_{M+e-1}(a_*)}{q_k(a_*)} \right), \quad i = M - e, \dots, 2(M - e - 1),$$

или, после домножения на $q_k(a_*)^i$,

$$q_i(a_*)q_k(a_*)^{i-1} = A_{M-e-1,i}^+(q_k(a_*), q_{k+1}(a_*), \dots, q_{M+e-1}(a_*)), \\ i = M - e, \dots, 2(M - e - 1),$$

где $A^+(\cdot)$ – соответствующим образом модифицированный многочлен. Получаем систему $M + e - 1$ однородных уравнений на $\mathbb{P}^{M-1}$, и множество $Y_k(x)$ состоит из тех многочленов F , для которых эта система имеет множество решений положительной размерности, причем q_k не обращается в нуль тождественно. При этом q_0 есть нулевая константа по определению множества $Y_k(x)$ при $k = 2e \geq 2$.

Теперь рассуждаем так же, как выше: считаем многочлены $q_k, \dots, q_{M+e-1}$ фиксированными, так что коразмерность множества $Y_k(x)$ есть коразмерность подмножества

$$Y_k^* \subset \mathbb{C} \times \mathcal{P}_1(\mathbb{P}^{M-1}) \times \dots \times \mathcal{P}_{k-1}(\mathbb{P}^{M-1}) \times \mathcal{P}_{M+e}(\mathbb{P}^{M-1}) \times \dots \times \mathcal{P}_{2(M-1)}(\mathbb{P}^{M-1}),$$

определяемого следующим условием: последовательность

$$(q_0, q_1, \dots, q_{k-1}, q_{M+e}, \dots, q_{2(M-1)})$$

принадлежит Y_k^* тогда и только тогда, когда $q_0 = 0$ и система уравнений

$$q_1 = \dots = q_{k-1} = q_{M+e} = \dots = q_{2(M-1)} = 0$$

задает алгебраическое множество, имеющее компоненту положительной размерности, на которой $q_k \neq 0$. Последнее условие теперь можно не учитывать.

Теперь коразмерность множества Y_k^* оценивается методом из [4] (см. [1]) точно так же, как это сделано выше для $k = 0$: фиксируется первая “неправильная” коразмерность, когда очередной многочлен q_i в выписанной выше последовательности тождественно обращается в нуль на неприводимой компоненте, определенной предыдущими уравнениями (и имеющей “правильную” коразмерность). Наихудшая оценка получается на первом шаге: условие $q_1 \equiv 0$ (вместе с условием $q_0 = 0$) дает коразмерность

$$\text{codim } Y_2^* = M + 1,$$

и эта оценка является точной. В самом деле, $q_1 \equiv 0$ означает, что дивизор ветвления имеет особенность в точке x , и тогда через эту точку проходит одномерное семейство прямых. Во всех остальных случаях оценка на $\text{codim } Y_k^*$ значительно сильнее (элементарные подсчеты мы опускаем). Предложение 0.4 полностью доказано.

7.2. Изолированные особые точки. Доказательство предложения 0.5 элементарно, и мы лишь наметим его основные шаги. Предположим, что для некоторого подпространства $P \subset \mathbb{P}$ коразмерности 2 пересечение $P \cap W$ имеет целую кривую C особенностей. Удобно рассматривать пару $p \in C$, где p – произвольная точка, так что заведомо $P \subset T_p W$.

Имеется $(2M - 3)$ -мерное семейство пар $(p, P \ni p)$, удовлетворяющих этому условию. Достаточно показать, что количество независимых условий, которые налагаются на (неоднородный) многочлен

$$f|_P = f(z_1, \dots, z_{M-2})$$

степени $2M - 2$ и состоят в том, чтобы гиперповерхность $\{f|_P = 0\} = W \cap P$ содержала кривую C особых точек, проходящих через $p = (0, \dots, 0)$, не меньше, чем $2M - 2$. Имеются три возможности:

- 1) C – прямая;
- 2) C – плоская кривая, $C \subset \Lambda \subset P$, где Λ – некоторая 2-плоскость;
- 3) линейная оболочка кривой C есть k -плоскость, где $k \geq 3$.

В случае 1) количество независимых условий вычисляется точно – это элементарное упражнение.

В случае 2) плоская кривая $\{f|_\Lambda = 0\}$ имеет неприводимую компоненту C степени ≥ 2 и кратности ≥ 2 , что и дает оценку снизу количества независимых условий (существенно более сильную, чем необходимо).

В случае 3) выберем $3(M - 1)$ точек в общем положении на кривой C (никакие три не лежат на прямой и никакие четыре не лежат в одной плоскости). Нетрудно проверить (рассматривая гиперповерхности, являющиеся объединением особых квадрик), что наличие особенностей в этих точках налагает на f независимые условия, что и завершает доказательство предложения 0.5. (На самом деле, коразмерность множества гиперповерхностей, имеющих целую кривую особенностей, гораздо выше, но нам это не нужно.) Детали этих рассуждений проверяются без труда.

7.3. Ранг квадратичных особенностей. Докажем предложение 0.6. Мы установим утверждение (i). Утверждения (ii) и (iii) доказываются аналогично. Легко проверить, что плоскости $P \subset \mathbb{P}$ коразмерности 2, касающиеся гиперповерхности W хотя бы в одной точке (т.е. $\text{Sing } P \cap W \neq \emptyset$), образуют $(2M - 3)$ -мерное семейство. Поэтому достаточно доказать следующий факт.

Пусть $P \subset \mathbb{P}$ – фиксированная плоскость коразмерности 2, $p \in P$ – фиксированная точка,

$$\mathcal{W} = \mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(2M - 2)))$$

– пространство гиперповерхностей степени $2M - 2$. Определим подмножество $\mathcal{W}_P \subset \mathcal{W}$ условиями:

- 1) гиперповерхность $W \in \mathcal{W}_P$ неособа в точке p ;
- 2) касательная гиперплоскость $T_p W$ содержит P ;
- 3) точка p – изолированная особенность пересечения $P \cap W$.

Для $W \in \mathcal{W}_P$ пусть $\sigma_W: V_W \rightarrow \mathbb{P}$ – двойное накрытие, разветвленное над W , $o = \sigma_W^{-1}(p)$ – особая точка, $R = \sigma_W^{-1}(P)$, $\varphi: V_W^+ \rightarrow V_W$ – раздутие подмногообразия R . На многообразии V_W^+ имеется единственная особая точка $o^+ \in \varphi^{-1}(o)$. Определим замкнутое подмножество $Y \subset \mathcal{W}_P$ условием, что для $W \in Y$ ранг квадратичной особенности $o^+ \in V_W^+$ не выше 3. Теперь утверждение (i) немедленно следует из оценки

$$\text{codim}(Y \subset \mathcal{W}_P) \geq 2M - 2 \quad (7.2)$$

при $M \geq 6$.

Доказательство неравенства (7.2) получается простыми локальными вычислениями, которые мы лишь наметим. Пусть $(z_1, \dots, z_M)$ – аффинные координаты в точке p , причем плоскость P задается системой уравнений $z_1 = z_2 = 0$, а касательная гиперплоскость к W есть $z_1 = 0$. Локальное уравнение двойного накрытия V_W в точке $o = \sigma_W^{-1}(p)$ имеет вид

$$y^2 = z_1 + q_2(z_1, \dots, z_M) + q_3(z_*) + \dots,$$

а локальное уравнение раздутия V_W^+ в точке o^+ имеет вид

$$u^2 = u_1 u_2 + q_2(0, u_2, \dots, u_M) + \dots.$$

Отсюда следует, что условие, состоящее в том, что ранг квадратичной точки o^+ не превосходит $M + 1 - k$, налагает $\frac{k(k+1)}{2}$ независимых условий на коэффициенты уравнения гиперповерхности W . Если $M + 1 - k \leq 3$, то получаем не менее $\frac{(M-2)(M-1)}{2}$ независимых условий, что при $M \geq 6$ строго больше, чем $2M - 3$. Утверждение (i) предложения 0.6 доказано. Утверждения (ii) и (iii) устанавливаются аналогично.

Список литературы

1. А. В. Пухликов, “Бирационально жесткие многообразия. I. Многообразия Фано”, *УМН*, **62**:5 (2007), 15–106; англ. пер.: A. V. Pukhlikov, “Birationally rigid varieties. I. Fano varieties”, *Russian Math. Surveys*, **62**:5 (2007), 857–942.
2. T. Graber, J. Harris, J. Starr, “Families of rationally connected varieties”, *J. Amer. Math. Soc.*, **16**:1 (2003), 57–67.
3. В. А. Исковских, Ю. И. Манин, “Трехмерные кваттики и контрпримеры к проблеме Люрота”, *Матем. сб.*, **86(128)**:1(9) (1971), 140–166; англ. пер.: V. A. Iskovskih, J. I. Manin, “Three-dimensional quartics and counterexamples to the Lüroth problem”, *Math. USSR-Sb.*, **15**:1 (1971), 141–166.
4. A. V. Pukhlikov, “Birational automorphisms of Fano hypersurfaces”, *Invent. Math.*, **134**:2 (1998), 401–426.
5. A. V. Pukhlikov, “Birationally rigid Fano complete intersections”, *J. Reine Angew. Math.*, **541** (2001), 55–79.
6. А. В. Пухликов, “Максимальные особенности на многообразии Фано V_6^3 ”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1989, № 2, 47–50; англ. пер.: A. V. Pukhlikov, “Maximal singularities on the Fano variety V_6^3 ”, *Mosc. Univ. Math. Bull.*, **44**:2 (1989), 70–75.
7. V. A. Iskovskih, A. V. Pukhlikov, “Birational automorphisms of multidimensional algebraic manifolds”, *J. Math. Sci.*, **82**:4 (1996), 3528–3613.
8. I. A. Cheltsov, M. M. Grinenko, *Birational rigidity is not an open property*, arXiv: [abs/math/0612159](https://arxiv.org/abs/math/0612159).
9. G. Fano, “Nuove ricerche sulle varietà algebriche a tre dimensioni a curve-sezioni canoniche”, *Pont. Acad. Sci. Comment.*, **11** (1947), 635–720.
10. В. А. Исковских, “Бирациональные автоморфизмы трехмерных алгебраических многообразий”, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат.*, **12**, ВИНТИ, М., 1979, 159–236; англ. пер.: V. A. Iskovskih, “Birational automorphisms of three-dimensional algebraic varieties”, *J. Soviet Math.*, **13**:6 (1980), 815–868.
11. С. И. Хашин, “Бирациональные автоморфизмы двойного конуса Веронезе размерности три”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1984, № 1, 13–16; англ. пер.: S. I. Khashin, “Birational automorphisms of a double Veronese cone of dimension three”, *Mosc. Univ. Math. Bull.*, **39**:1 (1984), 15–20.

12. М. М. Гриненко, “Структуры Мори на трехмерном многообразии Фано индекса 2 и степени 1”, *Алгебраическая геометрия: Методы, связи и приложения*, Тр. МИАН, **246**, Наука, М., 2004, 116–141; англ. пер.: М. М. Grinenko, “Mori structures on a Fano threefold of index 2 and degree 1”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **246**:3 (2004), 103–128.
13. А. В. Пухликов, “Бирациональные автоморфизмы трехмерных алгебраических многообразий с пучком поверхностей дель Пеццо”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **62**:1 (1998), 123–164; англ. пер.: A. V. Pukhlikov, “Birational automorphisms of algebraic threefolds with a pencil of Del Pezzo surfaces”, *Izv. Math.*, **62**:1 (1998), 115–155.
14. V. A. Iskovskih, “Algebraic threefolds with special regard to the problem of rationality”, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, v.I (Warszawa, 1983), **1–2**, PWN, Warszawa; North-Holland, Amsterdam–New York–Oxford, 1984, 733–746.
15. М. М. Гриненко, “Новые структуры Мори на двойном пространстве индекса 2”, *УМН*, **59**:3 (2004), 163–164; англ. пер.: М. М. Grinenko, “New Mori structures on a double space of index 2”, *Russian Math. Surveys*, **59**:3 (2004), 573–574.
16. М. М. Гриненко, “Расслоения на поверхности дель Пеццо”, *УМН*, **61**:2 (2006), 67–112; англ. пер.: М. М. Grinenko, “Fibrations into del Pezzo surfaces”, *Russian Math. Surveys*, **61**:2 (2006), 255–300.
17. С. Н. Clemens, Ph. A. Griffiths, “The intermediate Jacobian of the cubic threefold”, *Ann. of Math. (2)*, **95**:2 (1972), 281–356.
18. А. Н. Тюрин, “Пять лекций о трехмерных многообразиях”, *УМН*, **27**:5 (1972), 3–50; англ. пер.: A. N. Tyurin, “Five lectures on three-dimensional varieties”, *Russian Math. Surveys*, **27**:5 (1972), 1–53.
19. А. Н. Тюрин, “Средний якобиан трехмерных многообразий”, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат.*, **12**, ВИНТИ, М., 1979, 5–57; англ. пер.: A. N. Tyurin, “The middle Jacobian of three-dimensional varieties”, *J. Soviet Math.*, **13**:6 (1980), 707–745.
20. J. Kollár, “Nonrational Hypersurfaces”, *J. Amer. Math. Soc.*, **8**:1 (1995), 241–249.
21. А. С. Тихомиров, “Средний якобиан двойного пространства P^3 , разветвленного в квартике”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **44**:6 (1980), 1329–1377; англ. пер.: A. S. Tikhomirov, “The intermediate Jacobian of the double covering of P^3 branched at a quartic”, *Math. USSR-Izv.*, **17**:3 (1981), 523–566.
22. А. С. Тихомиров, “Особенности тэта-дивизора среднего якобиана двойного пространства P^3 индекса два”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **46**:5 (1982), 1062–1081; англ. пер.: A. S. Tikhomirov, “Singularities of the theta divisor of the intermediate Jacobian of a double cover of P^3 of index two”, *Math. USSR-Izv.*, **21**:2 (1983), 355–373.
23. А. С. Тихомиров, “Письмо в редакцию журнала “Известия АН СССР. Серия математическая”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **49**:4 (1985), 891; англ. пер.: A. S. Tikhomirov, “Letter to the editors of the journal “Izvestiya an SSSR Seriya Matematicheskaya”, *Math. USSR-Izv.*, **27**:1 (1986), 201.
24. F. Call, G. Lyubeznik, “A simple proof of Grothendieck’s theorem on the parafactoriality of local rings”, *Commutative algebra: syzygies, multiplicities, and birational algebra* (South Hadley, MA, 1992), *Contemp. Math.*, **159**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, 15–18.
25. А. В. Пухликов, “Бирациональные автоморфизмы двойного пространства и двойной квадрики”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **52**:1 (1988), 229–239; англ. пер.: A. V. Pukhlikov, “Birational automorphisms of a double space and double quadric”, *Math. USSR-Izv.*, **32**:1 (1989), 233–243.
26. А. В. Пухликов, “Бирациональная геометрия прямых произведений Фано”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:6 (2005), 153–186; англ. пер.: A. V. Pukhlikov, “Birational geometry of Fano direct products”, *Izv. Math.*, **69**:6 (2005), 1225–1255.

27. A. V. Pukhlikov, “Explicit examples of birationally rigid Fano varieties”, *Mosc. Math. J.*, **7**:3 (2007), 543–560.
28. I. Cheltsov, J. Park, J. Won, *Log canonical thresholds of certain Fano hypersurfaces*, arXiv:0706.0751.
29. J. Kollár, *Flips and abundance for algebraic threefolds* (University of Utah, Salt Lake City, 1991), Asterisque, **211**, Soc. Math. de France, Paris, 1992.
30. J. Kollár, “Singularities of pairs”, *Algebraic geometry – Santa Cruz*, Proc. Sympos. Pure Math., **62**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995, 221–286.
31. A. Corti, “Singularities of linear systems and 3-fold birational geometry”, *Explicit birational geometry of 3-folds*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **281**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000, 259–312.
32. А. В. Пухликов, “Бирациональные автоморфизмы трехмерной кватрики с простейшей особенностью”, *Матем. сб.*, **135(177)**:4 (1988), 472–496; англ. пер.: A. V. Pukhlikov, “Birational automorphisms of a three-dimensional quartic with a quadratic singularity”, *Math. USSR-Sb.*, **63**:2 (1989), 457–482.
33. А. В. Пухликов, “Бирационально жесткие итерированные двойные накрытия Фано”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **67**:3 (2003), 139–182; англ. пер.: A. V. Pukhlikov, “Birationally rigid iterated Fano double covers”, *Izv. Math.*, **67**:3 (2003), 555–596.
34. И. А. Чельцов, “Локальные неравенства и бирациональная сверхжесткость многообразий Фано”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **70**:3 (2006), 185–221; англ. пер.: I. A. Cheltsov, “Local inequalities and birational superrigidity of Fano varieties”, *Izv. Math.*, **70**:3 (2006), 605–639.
35. И. А. Чельцов, “Нерациональность четырехмерного гладкого полного пересечения квадрики и кватрики, не содержащего плоскости”, *Матем. сб.*, **194**:11 (2003), 95–116; англ. пер.: I. A. Cheltsov, “Non-rationality of the 4-dimensional smooth complete intersection of a quadric and a quartic not containing planes”, *Sb. Math.*, **194**:11 (2003), 1679–1699.
36. I. Cheltsov, “Double cubics and double quartics”, *Math. Z.*, **253**:1 (2006), 75–86.
37. A. V. Pukhlikov, *On the $8n^2$ -inequality*, arXiv:abs/0811.0183.
38. В. В. Шокуров, “Трехмерные логперестройки”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **56**:1 (1992), 105–203; англ. пер.: V. V. Shokurov, “3-fold log flips”, *Russian Acad. Sci. Izv. Math.*, **40**:1 (1993), 95–202.
39. В. А. Исковских, “Бирациональная жесткость гиперповерхностей Фано в рамках теории Мориа”, *УМН*, **56**:2 (2001), 3–86; англ. пер.: V. A. Iskovskikh, “Birational rigidity of Fano hypersurfaces in the framework of Mori theory”, *Russian Math. Surveys*, **56**:2 (2001), 207–291.
40. A. V. Pukhlikov, “Essentials of the method of maximal singularities”, *Explicit birational geometry of 3-folds*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **281**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000, 73–100.
41. A. V. Pukhlikov, “Birational isomorphisms of four-dimensional quintics”, *Invent. Math.*, **87**:2 (1987), 303–329.

А. В. Пухликов (A. V. PUKHLIKOV)
 Математический институт им. В. А. Стеклова РАН;
 University of Liverpool, UK
 E-mail: pukh@mi.ras.ru, pukh@liv.ac.uk

Поступило в редакцию
 26.12.2008
 29.05.2009