Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Краснов, Вещественные четырехмерные биквадри-
ки, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2011, том 75, выпуск 2, 151–
176

DOI: <https://doi.org/10.4213/im4072>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 13:29:40

УДК 512.7

В. А. Краснов

Вещественные четырехмерные биквадрики

Рассматриваются пересечения двух вещественных пятимерных квадрик, которые мы, для краткости, называем вещественными четырехмерными биквадриками. Жесткие изотопические классы вещественных четырехмерных биквадрик уже давно описаны, всего шестнадцать таких классов. Доказывается, что топологический тип вещественной части неособой вещественной четырехмерной биквадрики однозначно определяет ее жесткий изотопический класс. Для этого вычисляются размерности пространств когомологий вещественной части четырехмерной биквадрики.

Библиография: 18 наименований.

Ключевые слова: биквадрики, жесткие изотопические классы, грубые изотопические классы, индекс-функция.

Введение

Сначала приведем несколько обозначений и определений. Пусть $V \subset \mathbb{P}^{d+2}$ – d -мерное комплексное проективное алгебраическое многообразие, заданное системой уравнений

$$q_1(X_0, \dots, X_{d+2}) = 0, \quad q_2(X_0, \dots, X_{d+2}) = 0, \quad (0.1)$$

где $q_1(X_0, \dots, X_{d+2}) = q_1(X)$, $q_2(X_0, \dots, X_{d+2}) = q_2(X)$ – ненулевые непропорциональные квадратичные формы с комплексными коэффициентами, $X_0, \dots, X_{d+2}$ – однородные координаты в $\mathbb{P}^{d+2} = \mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+3})$. Такое многообразие будем называть *биквадрикой*. Биквадрике V однозначно соответствует пучок квадрик в $\mathbb{P}^{d+2}$

$$\lambda_1 q_1(X) + \lambda_2 q_2(X) = 0, \quad (0.2)$$

который определяет в проективном пространстве квадрик $\mathbb{P}(S^2(\mathbb{C}^{d+3}))$ прямую L , где λ_1, λ_2 являются однородными координатами этой прямой. Таким образом, множество биквадрик содержится в многообразии Грассмана $\mathbb{G}(2, D)$, которое обозначим через $\mathbb{G}$, где

$$D = \frac{(d+3)(d+4)}{2}.$$

Заметим, что биквадрика V , заданная системой уравнений (0.1), неособая тогда и только тогда, когда уравнение

$$\det(\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2) = 0,$$

где M_1, M_2 – матрицы коэффициентов квадратичных форм $q_1(X), q_2(X)$, не имеет кратных корней на комплексной проективной прямой $\mathbb{P}^1$ (см., например,

[1], [2]). Множество точек $p \in \mathbb{G}$, для которых это уравнение имеет кратные корни, образует *дискриминантную* гиперповерхность $\Delta \subset \mathbb{G}$.

Через $\mathbb{G}^*$ обозначим разность $\mathbb{G} \setminus \Delta$, это множество параметризует неособые биквадрики. Через $\mathbb{RG}$, $\mathbb{RG}^*$ обозначим множества вещественных точек из $\mathbb{G}$, $\mathbb{G}^*$ соответственно. (Заметим, что на многообразии Грассмана $\mathbb{G}$ имеется вещественная структура, индуцированная комплексным сопряжением в $\mathbb{C}^D = S^2(\mathbb{C}^{d+3})$.) Если $p \in \mathbb{G}^*$, то через V_p обозначаем соответствующую биквадрику. Заметим, что если $p \in \mathbb{RG}^*$, то комплексная биквадрика V_p может быть задана системой уравнений (0.1) с вещественными коэффициентами. Тогда на комплексной биквадрике V_p определена инволюция комплексного сопряжения $\tau: V_p \rightarrow V_p$. Пара (V_p, τ) называется *вещественной биквадрикой*, обозначим ее также через V_p , так как инволюция $\tau: V_p \rightarrow V_p$ однозначно восстанавливается из инволюции комплексного сопряжения $\tau: \mathbb{P}^{d+2} \rightarrow \mathbb{P}^{d+2}$ и вложения $V_p \hookrightarrow \mathbb{P}^{d+2}$. Множество вещественных точек биквадрики V_p обозначается через $\mathbb{RV}_p$ и называется *вещественной частью биквадрики* V_p ; заметим, что $\mathbb{RV}_p$ равно множеству неподвижных точек V_p^τ инволюции $\tau: V_p \rightarrow V_p$.

Множество $\mathbb{RG}^*$ обозначим через B_d или через B , если это не приводит к путанице. Это множество является несвязным в евклидовой топологии. Компоненты связности топологического пространства B_d называются *жесткими изотопическими классами* неособых вещественных биквадрик в $\mathbb{P}^{d+2}$ (см. аналогичное определение для кривых в [3]). Жесткие изотопические классы вещественных биквадрик описаны в [4, приложение А].

Далее мы рассматриваем вещественные четырехмерные биквадрики, их жесткие изотопические классы обозначаем через

$$\begin{aligned} &B(1), B(3), B(1, 1, 1), B(5), B(1, 2, 2), B(1, 1, 3), \\ &B(1, 1, 1, 1, 1), B(7), B(1, 1, 5), B(1, 2, 4), B(1, 3, 3), B(2, 2, 3), \\ &B(1, 1, 1, 1, 3), B(1, 1, 1, 2, 2), B(1, 1, 2, 1, 2), B(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1). \end{aligned}$$

Заметим, что в скобках стоят разбиения чисел 1, 3, 5, 7 на нечетное число слагаемых (подробности изложены в § 1).

Неособая комплексная четырехмерная биквадрика V_p является многообразием Фано, ее канонический класс равен $-3H$, где H – гиперплоское сечение. Если V_p – вещественная биквадрика, то возьмем вещественное гиперплоское сечение H . Многообразие $\mathbb{RV}_p$ неориентируемо тогда и только тогда, когда класс гомологий

$$[\mathbb{RH}] \in H_3(\mathbb{RV}_p, \mathbb{F}_2)$$

не равен нулю. В настоящей работе будет доказана

ТЕОРЕМА 0.1. *Многообразие $\mathbb{RV}_p$ ориентируемо тогда и только тогда, когда*

$$p \in B(5) \cup B(7) \cup B(1, 1, 5) \cup B(1, 2, 4) \cup B(1, 3, 3),$$

причем справедливы утверждения:

- 1) *если $p \in B(5)$, то многообразие $\mathbb{RV}_p$ диффеоморфно сфере S^4 ;*
- 2) *если $p \in B(7)$, то многообразие $\mathbb{RV}_p$ – пустое множество;*
- 3) *если $p \in B(1, 1, 5)$, то многообразие $\mathbb{RV}_p$ диффеоморфно несвязному объединению $S^4 \sqcup S^4$ двух сфер;*

- 4) если $p \in B(1, 2, 4)$, то многообразие $\mathbb{R}V_p$ диффеоморфно произведению $S^1 \times S^3$ сфер;
 5) если $p \in B(1, 3, 3)$, то многообразие $\mathbb{R}V_p$ диффеоморфно произведению $S^2 \times S^2$ сфер.

Утверждения 1)–5) теоремы 0.1 фактически являются не очень сложными старыми известными результатами, но утверждение о том, что нет других ориентируемых биквадрик, является главным в этой теореме.

Мы не будем полностью устанавливать топологический тип многообразия $\mathbb{R}V_p$ при

$$p \notin B(5) \cup B(7) \cup B(1, 1, 5) \cup B(1, 2, 4) \cup B(1, 3, 3).$$

Сначала вычислим размерности $\mathbb{F}_2$ -пространств когомологий $H^*(\mathbb{R}V_p, \mathbb{F}_2)$, где $\mathbb{F}_2$ – поле из двух элементов. Далее размерности этих пространств будем обозначать через $h^*(\mathbb{R}V_p)$.

ТЕОРЕМА 0.2. Если $p \notin B(5) \cup B(7) \cup B(1, 1, 5) \cup B(1, 2, 4) \cup B(1, 3, 3)$, то многообразие $\mathbb{R}V_p$ связное и справедливы следующие утверждения:

- 1) если $p \in B(1) \cup B(1, 2, 2)$, то выполняются равенства

$$h^1(\mathbb{R}V_p) = h^3(\mathbb{R}V_p) = 1, \quad h^2(\mathbb{R}V_p) = 2;$$

- 2) если $p \in B(3)$, то выполняются равенства

$$h^1(\mathbb{R}V_p) = h^3(\mathbb{R}V_p) = 1, \quad h^2(\mathbb{R}V_p) = 0;$$

- 3) если $p \in B(2, 2, 3) \cup B(1, 1, 1, 2, 2)$, то выполняются равенства

$$h^1(\mathbb{R}V_p) = h^3(\mathbb{R}V_p) = 2, \quad h^2(\mathbb{R}V_p) = 2;$$

- 4) если $p \in B(1, 1, 1) \cup B(1, 1, 2, 1, 2)$, то выполняются равенства

$$h^1(\mathbb{R}V_p) = h^3(\mathbb{R}V_p) = 1, \quad h^2(\mathbb{R}V_p) = 4;$$

- 5) если $p \in B(1, 1, 1, 1, 1)$, то выполняются равенства

$$h^1(\mathbb{R}V_p) = h^3(\mathbb{R}V_p) = 1, \quad h^2(\mathbb{R}V_p) = 6;$$

- 6) если $p \in B(1, 1, 3)$, то выполняются равенства

$$h^1(\mathbb{R}V_p) = h^3(\mathbb{R}V_p) = 2, \quad h^2(\mathbb{R}V_p) = 0;$$

- 7) если $p \in B(1, 1, 1, 1, 3)$, то выполняются равенства

$$h^1(\mathbb{R}V_p) = h^3(\mathbb{R}V_p) = 3, \quad h^2(\mathbb{R}V_p) = 0;$$

- 8) если $p \in B(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$, то выполняются равенства

$$h^1(\mathbb{R}V_p) = h^3(\mathbb{R}V_p) = 1, \quad h^2(\mathbb{R}V_p) = 8.$$

Наконец, при использовании теорем 0.1, 0.2 будет доказана

ТЕОРЕМА 0.3. Жесткий изотопический класс неособой вещественной четырехмерной биквадрики однозначно определяется топологическим типом ее вещественной части.

Фактически не требуется полной информации о топологическом типе многообразия $\mathbb{R}V_p$, чтобы определить жесткий изотопический класс соответствующей вещественной биквадрики V_p . Достаточно только следующие сведения: размерности $\mathbb{F}_2$ -пространств $H^r(\mathbb{R}V_p, \mathbb{F}_2)$, $r = 0, 1, 2$, ориентируемо ли многообразии $\mathbb{R}V_p$, а в случае, если оно неориентируемо, является ли нулевым гомоморфизм

$$\omega: H^1(\mathbb{R}V_p, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^2(\mathbb{R}V_p, \mathbb{F}_2) \quad (0.3)$$

умножения на первый класс Штифеля–Уитни многообразия $\mathbb{R}V_p$.

Таким образом, теорема 0.3 вытекает из теорем 0.1, 0.2 и следующего предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 0.4. *Справедливы следующие утверждения:*

- 1) если $p \in B(1) \cup B(1, 1, 1) \cup B(2, 2, 3)$, то гомоморфизм (0.3) не равен нулю;
- 2) если $p \in B(1, 2, 2) \cup B(1, 1, 1, 2, 2) \cup B(1, 1, 2, 1, 2)$, то гомоморфизм (0.3) равен нулю.

Теорема 0.3 является основным результатом настоящей статьи. Заметим, что аналогичный результат справедлив для двумерных биквадрик (см. [4, приложение А]), но существуют трехмерные вещественные биквадрики, которые принадлежат разным жестким изотопическим классам, а вещественные части этих биквадрик гомеоморфны (см. [5]).

Настоящая работа, кроме введения, содержит два параграфа.

Во вспомогательном § 1 изложена жесткая изотопическая классификация вещественных биквадрик (см. [4, приложение А], а также теорему 1.1 в настоящей статье) и изотопическая классификация вещественных квадратичных отображений в $\mathbb{R}^2$ (см. [6] и теорему 1.2 в настоящей статье). Затем формулируется связь между этими старыми известными результатами (см. предложение 1.5). При формулировке этой связи требуется рассмотреть вещественные биквадрики, которые могут содержать особые точки, но тогда они должны быть комплексными точками. Кроме того, излагаются результаты по вещественным двумерным биквадрикам, которые потребуются при доказательстве теорем 0.1–0.3. Заметим, что в работе [5] изложена теория вещественных трехмерных биквадрик, но она фактически не использована в настоящей статье.

В § 2, являющемся основным, доказываются теоремы 0.1, 0.2 и предложение 0.4. При доказательстве используется результат об эйлеровой характеристике вещественной части биквадрики из работы [6] (см. формулу (1.10) в настоящей статье), а также результат из работы [7] (см. теорему 1.9 в настоящей статье). Кроме того, применяются результаты о сравнении эйлеровой характеристики вещественных алгебраических M -многообразий и $(M - 1)$ -многообразий из работ [8]–[10]. Доказательство теоремы 0.1 основывается на том факте, что при

$$p \notin B(5) \cup B(7) \cup B(1, 1, 5) \cup B(1, 2, 4) \cup B(1, 3, 3)$$

на вещественной биквадрике V_p имеются вещественные прямые. При доказательстве этого утверждения мы используем теорию вещественных двумерных биквадрик. Данное утверждение также применяется при доказательстве теоремы 0.2. Доказательство предложения 0.4 основывается на лемме 2.7. При

доказательстве леммы 2.7 мы применяем спектральную последовательность, построенную в [11]. Заметим наконец, что теорему 0.2, по-видимому, можно доказать с помощью спектральной последовательности, построенной в [12].

§ 1. Изотопические классификации

В этом параграфе мы сформулируем жесткую изотопическую классификацию вещественных биквадрик произвольной размерности, а также изотопическую классификацию вещественных квадратичных отображений в $\mathbb{R}^2$. Затем будет установлена связь между этими классификациями.

1.1. Классификация вещественных неособых биквадрик. Через $\Lambda \subset \mathbb{P}^{D-1}$ обозначим множество особых комплексных квадрик в проективном пространстве квадрик $\mathbb{P}(S^2(\mathbb{C}^{d+3})) = \mathbb{P}^{D-1}$, оно называется *дискриминантной гиперповерхностью*. Пусть $p \in B_d$; тогда через $k(p)$ обозначим количество точек пересечения прямой $\mathbb{R}L_p$ с вещественной частью дискриминантной гиперповерхности $\mathbb{R}\Lambda$. Число $k(p)$ равно количеству особых вещественных квадрик в пучке (0.2), т. е. количеству вещественных решений на проективной прямой уравнения

$$\det(\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2) = 0,$$

где M_1, M_2 – матрицы коэффициентов квадратичных форм $q_1(X), q_2(X)$.

Заметим, что выполняется сравнение $k(p) \equiv d + 1 \pmod{2}$ и неравенство $k(p) \leq d + 3$. Если $k \in \{0, 1, \dots, d + 3\}$ – число, удовлетворяющее сравнению $k \equiv d + 1 \pmod{2}$, то через $B_{d,k}$ обозначим множество точек $p \in B_d$, для которых выполняется равенство $k(p) = k$. Множество $B_{d,k}$ состоит из целых компонент связности пространства B_d . Если d нечетное, то оказывается, что множества $B_{d,0}, B_{d,2}$ связные, а остальные множества $B_{d,k}$ несвязные. Если d четное, то оказывается, что множество $B_{d,1}$ связное, а остальные множества $B_{d,k}$ несвязные.

Пусть k – натуральное число; тогда разложение k в сумму нечетного количества натуральных чисел:

$$k = k_1 + \dots + k_{2s+1},$$

где $s \geq 0$, назовем *нечетным разбиением* числа k . Два разбиения

$$k = k_1 + \dots + k_{2s+1}, \quad k = k'_1 + \dots + k'_{2s+1}$$

называются *эквивалентными*, если второе разбиение можно получить из первого с помощью одной из следующих операций: циклической перестановки, изменения порядка слагаемых на противоположный (т. е. обращения разбиения), циклической перестановки с последующим обращением. Класс эквивалентности нечетного разбиения $k = k_1 + \dots + k_{2s+1}$ обозначим через $(k_1, \dots, k_{2s+1})$. Множество классов эквивалентности нечетных разбиений числа k обозначим через R_k . Таким образом, множества R_1, R_2 содержат по одному элементу. По определению считаем, что множество R_0 также состоит из одного элемента, обозначаемого через (0) .

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть $k \in \{0, 1, \dots, d+3\}$ и $k \equiv d+1 \pmod{2}$. Тогда существует каноническое взаимно однозначное соответствие между множеством $\pi_0(B_{d,k})$ (множеством компонент связности пространства $B_{d,k}$) и множеством R_k .

Заметим, что теорема 1.1 сформулирована в работе [4], но полностью доказательство не приведено, его основные идеи можно найти в [5]. Из теоремы 1.1 получаем, что существует каноническая биекция

$$\pi_0(B_d) \xrightarrow{\cong} \bigcup_k R_k,$$

где $k \equiv d+1 \pmod{2}$ и $0 \leq k \leq d+3$.

Далее мы покажем, как точке $p \in B_{d,k}$, где $k \geq 1$, сопоставляется в [4] класс эквивалентности нечетного разбиения числа k . Пусть вещественная биквадрика V_p задается системой уравнений (0.1). Рассмотрим окружность $S^1 \subset \mathbb{R}^2$, заданную уравнением $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1$. На этой окружности определена целочисленная функция $\sigma_p(\lambda)$, равная сигнатуре квадратичной формы

$$\lambda_1 q_1(X) + \lambda_2 q_2(X).$$

Функция $\sigma_p(\lambda)$ имеет $2k$ точек разрыва, причем при переходе через каждую точку разрыва значения функции изменяются на ± 2 .

Точку разрыва функции $\sigma_p(\lambda)$ назовем *положительной*, если при переходе через нее в положительном направлении (против часовой стрелки) значения функции $\sigma_p(\lambda)$ увеличиваются на 2, в противном случае точка разрыва называется *отрицательной*. Соответствующее нечетное разбиение

$$k = k_1 + \dots + k_{2s+1}$$

состоит из количеств последовательно идущих положительных точек разрыва функции $\sigma_p(\lambda)$, которые возникают при обходе окружности в положительном направлении.

Компоненту связности множества $B_{d,k}$, отвечающую классу эквивалентности нечетного разбиения

$$k = k_1 + \dots + k_{2s+1},$$

мы обозначаем через $B_d(k_1, \dots, k_{2s+1})$, или просто через $B(k_1, \dots, k_{2s+1})$, если это не приводит к путанице. Компоненту $B_{d,0}$ мы обозначаем также через $B_d(0)$. Заметим, что если $p \in B_d(0)$, то функция $\sigma_p(\lambda)$ тождественно равна нулю. Числа 1, 2 имеют по одному нечетному разбиению, поэтому компоненты $B_{d,1}$, $B_{d,2}$ мы обозначаем также через $B_d(1)$, $B_d(2)$.

1.2. Классификация вещественных неособых квадратичных отображений в $\mathbb{R}^2$. Упорядоченная пара квадратичных форм с вещественными коэффициентами

$$(q_1(x_1, \dots, x_n), q_2(x_1, \dots, x_n))$$

определяет квадратичное отображение

$$q(x) = (q_1(x), q_2(x)): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^2. \quad (1.1)$$

Наоборот, каждое квадратичное отображение $q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^2$ получается таким образом. Далее предполагаем, что $n \geq 3$. Множество квадратичных отображений из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^2$ обозначим через Q_n , оно является вещественным векторным пространством размерности $n(n+1)$.

Квадратичное отображение (1.1) называется в работе [6] *неособым*, если нулевое значение отображения

$$q: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

не является критическим. Это означает, что градиенты $\nabla q_1(x), \nabla q_2(x)$ линейно независимы в ненулевых точках множества решений уравнения $q(x) = 0$ в $\mathbb{R}^n$. Заметим, что могут существовать комплексные ненулевые решения уравнения $q(x) = 0$, в которых градиенты $\nabla q_1(x), \nabla q_2(x)$ линейно зависимы. В частности, если уравнение $q(x) = 0$ не имеет вещественных решений, то квадратичное отображение (1.1) неособое. Множество неособых квадратичных отображений из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^2$ обозначим через Q_n^* , оно является открытым множеством в Q_n , точнее, дополнением гиперповерхности особых квадратичных отображений.

Множество неособых квадратичных отображений Q_n^* является несвязным пространством в евклидовой топологии, его компоненты связности называются в [6] классами жесткой изотопической эквивалентности. По-видимому, применение этого термина в данной ситуации не подходит, так как *жесткая* изотопия использует эквивариантную деформацию. Мы будем называть компоненты связности пространства Q_n^* *изотопическими классами*. Далее мы сформулируем теорему о изотопической классификации неособых квадратичных отображений в $\mathbb{R}^2$ (подробности см. в [6]). Сначала введем некоторые стандартные квадратичные отображения.

Пусть $0 < k \leq n$ и $k \equiv n \pmod{2}$. Для каждого нечетного разбиения

$$k = k_1 + \dots + k_{2s+1}$$

рассмотрим квадратичное отображение

$$q_{k_1, \dots, k_{2s+1}}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

заданное упорядоченной парой квадратичных форм

$$\begin{aligned} q_1(x) &= a_1 x_1^2 + \dots + a_k x_k^2 + x_{k+1}^2 - x_{k+2}^2 + \dots + x_{n-1}^2 - x_n^2, \\ q_2(x) &= b_1 x_1^2 + \dots + b_k x_k^2 + x_{k+1} x_{k+2} + \dots + x_{n-1} x_n, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где вещественные коэффициенты $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k$ определяются следующим образом. Если $c_1, \dots, c_{2s+1}$ — последовательность комплексных корней из 1 степени $2s+1$, т. е.

$$c_j = \exp\left\{\frac{2\pi i(j-1)}{2s+1}\right\}, \quad j = 1, \dots, 2s+1, \quad (1.3)$$

то последовательность комплексных чисел $a_1 + ib_1, \dots, a_k + ib_k$ совпадает с последовательностью чисел

$$\underbrace{c_1, c_1, \dots, c_1}_{k_1}, \quad \underbrace{c_2, c_2, \dots, c_2}_{k_2}, \quad \dots, \quad \underbrace{c_{2s+1}, c_{2s+1}, \dots, c_{2s+1}}_{k_{2s+1}}.$$

Если $k = 0$, то нечетных разбиений числа k не существует. Пусть число n четное; тогда обозначим через q_0 квадратичное отображение, заданное упорядоченной парой квадратичных форм

$$\begin{aligned} q_1(x) &= x_1^2 - x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 - x_n^2, \\ q_2(x) &= x_1 x_2 + \cdots + x_{n-1} x_n. \end{aligned} \quad (1.4)$$

ТЕОРЕМА 1.2. *Справедливы следующие утверждения.*

1) Если число n нечетное, то каждое неособое квадратичное отображение $q \in Q_n^*$ изотопно одному из отображений $q_{k_1, \dots, k_{2s+1}}$, где $k_1 + \cdots + k_{2s+1} = k$ – нечетное разбиение нечетного натурального числа $k \leq n$. Отображение $q_{k_1, \dots, k_{2s+1}}$ в том и только в том случае изотопно отображению $q_{k'_1, \dots, k'_{2s'+1}}$, когда $s' = s$ и последовательность $k'_1, \dots, k'_{2s'+1}$ получается из последовательности $k_1, \dots, k_{2s+1}$ циклической перестановкой.

2) Если число n четное, то каждое неособое квадратичное отображение $q \in Q_n^*$ изотопно одному из отображений $q_{k_1, \dots, k_{2s+1}}$ или q_0 , где $k_1 + \cdots + k_{2s+1} = k$ – нечетное разбиение четного натурального числа $k \leq n$. Отображение $q_{k_1, \dots, k_{2s+1}}$ в том и только в том случае изотопно отображению $q_{k'_1, \dots, k'_{2s'+1}}$, когда $s' = s$ и последовательность $k'_1, \dots, k'_{2s'+1}$ получается из последовательности $k_1, \dots, k_{2s+1}$ циклической перестановкой. Квадратичное отображение q_0 не изотопно любому отображению $q_{k_1, \dots, k_{2s+1}}$, где $k_1 + \cdots + k_{2s+1} = k$ – нечетное разбиение четного натурального числа k .

На множестве нечетных разбиений натурального числа k в этом пункте введем следующее отношение эквивалентности. Нечетные разбиения

$$k = k_1 + \cdots + k_{2s+1}, \quad k = k'_1 + \cdots + k'_{2s'+1}$$

натурального числа k эквивалентны, если второе разбиение можно получить из первого с помощью циклической перестановки. Класс эквивалентности нечетного разбиения $k = k_1 + \cdots + k_{2s+1}$ обозначим через $[k_1, \dots, k_{2s+1}]$. Множество классов эквивалентности нечетных разбиений натурального числа k обозначим через $\tilde{R}_k$. По определению считаем, что множество $\tilde{R}_0$ состоит из одного элемента, обозначаемого через $[0]$. Из теоремы 1.2 вытекает, что существует каноническая биекция

$$\pi_0(Q_n^*) \xrightarrow{\cong} \bigcup_k \tilde{R}_k,$$

где $k \equiv n \pmod{2}$ и $0 \leq k \leq n$. Заметим, что определено каноническое сюръективное отображение $\tilde{R}_k \rightarrow R_k$. При этом отображении прообраз элемента из множества R_k может состоять из одного или двух элементов множества $\tilde{R}_k$. А именно, если разбиения

$$k = k_1 + \cdots + k_{2s+1}, \quad k = k_{2s+1} + \cdots + k_1$$

нельзя преобразовать одно в другое с помощью циклической перестановки, то классы эквивалентности $[k_1, \dots, k_{2s+1}]$, $[k_{2s+1}, \dots, k_1]$ из множества $\tilde{R}_k$ отображаются в один класс эквивалентности множества R_k .

Компоненту связности пространства Q_n^* , содержащую квадратичное отображение $q_{k_1, \dots, k_{2s+1}}$, мы будем обозначать через $Q_n^*[k_1, \dots, k_{2s+1}]$, или просто

через $Q^*[k_1, \dots, k_{2s+1}]$, если это не приводит к путанице. Через $Q_n^*[0]$ или $Q^*[0]$ обозначается компонента, содержащая квадратичное отображение q_0 .

На многообразии Q_n^* действуют полные линейные группы $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$, $\mathbb{GL}(2, \mathbb{R})$. Если

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

– элемент группы $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$, то квадратичное отображение $q^A(x)$ получается заменой переменных $x_1, \dots, x_n$ на линейные комбинации

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{n1}x_n, \quad \dots, \quad a_{1n}x_1 + \dots + a_{nn}x_n$$

в квадратичных формах $q_1(x)$, $q_2(x)$. Если

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

– элемент группы $\mathbb{GL}(2, \mathbb{R})$, то квадратичное отображение $Cq(x)$ получается заменой квадратичных форм $q_1(x)$, $q_2(x)$ на линейные комбинации

$$c_{11}q_1(x) + c_{12}q_2(x), \quad c_{21}q_1(x) + c_{22}q_2(x).$$

Если определители матриц A , C положительные, то квадратичные отображения q^A , Cq изотопны квадратичному отображению q . Это утверждение вытекает из связности подгрупп матриц, имеющих положительный определитель.

ЛЕММА 1.3. *Если $q_{k_1, \dots, k_{2s+1}}$ – квадратичное отображение, определенное системой (1.2), где $k = k_1 + \dots + k_{2s+1} > 0$, а определитель матрицы $C \in \mathbb{GL}(2, \mathbb{R})$ отрицательный, то квадратичное отображение $Cq_{k_1, \dots, k_{2s+1}}$ изотопно квадратичному отображению $q_{k_{2s+1}, \dots, k_1}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку группа $\mathbb{GL}(2, \mathbb{R})$ состоит из двух компонент связности, а именно на одной компоненте определитель положительный, а на другой – отрицательный, то достаточно проверить утверждение леммы для матрицы C вида

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда из системы (1.2) получается следующая система квадратичных форм:

$$\begin{aligned} q_1(x) &= a_1x_1^2 + \dots + a_kx_k^2 + x_{k+1}^2 - x_{k+2}^2 + \dots + x_{n-1}^2 - x_n^2, \\ -q_2(x) &= -b_1x_1^2 - \dots - b_kx_k^2 - x_{k+1}x_{k+2} - \dots - x_{n-1}x_n, \end{aligned} \quad (1.5)$$

определяющая квадратичное отображение $Cq_{k_1, \dots, k_{2s+1}}$. Последовательность комплексных чисел $a_1 - ib_1, \dots, a_k - ib_k$ совпадает с последовательностью чисел (см. определение чисел c_j формулой (1.3))

$$\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{k_1}, \quad \underbrace{c_{2s+1}, c_{2s+1}, \dots, c_{2s+1}}_{k_2}, \quad \underbrace{c_{2s}, c_{2s}, \dots, c_{2s}}_{k_3}, \quad \dots, \quad \underbrace{c_2, c_2, \dots, c_2}_{k_{2s+1}}.$$

В системе квадратичных форм (1.5) сделаем следующую замену переменных: x_1 заменим на $\pm x_1$, x_{k_1+1} — на x_k , x_{k_1+2} — на x_{k-1} , ..., x_k — на x_{k_1+1} , x_{k+1} — на $-x_{k+1}$, x_{k+3} — на $-x_{k+3}$, ..., x_{n-3} — на $-x_{n-3}$, x_{n-1} — на $-x_{n-1}$. Остальные переменные не меняются, причем знак перед x_1 нужно выбрать так, чтобы полученная от этих замен матрица A имела положительный определитель. Тогда из системы квадратичных форм (1.5) получится система, определяющая квадратичное отображение $q_{k_1, k_{2s+1}, k_{2s}, \dots, k_2}$. Осталось применить теорему 1.2. Лемма доказана.

ЛЕММА 1.4. *Если q_0 — определенное системой (1.4) квадратичное отображение, а определитель матрицы $C \in \text{GL}(2, \mathbb{R})$ отрицательный, то квадратичное отображение Cq_0 изотопно квадратичному отображению q_0 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что n — четное число, а из предположения $n \geq 3$ следует, что $n \geq 4$. Опять достаточно доказать утверждение леммы для матрицы C вида

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда из системы (1.4) получается следующая система квадратичных форм:

$$\begin{aligned} q_1(x) &= x_1^2 - x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2 - x_n^2, \\ -q_2(x) &= -x_1x_2 - \dots - x_{n-1}x_n. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Если n делится на 4, то необходимо сделать следующую замену переменных в системе (1.6): x_1 заменим на $-x_1$, x_3 — на $-x_3$, ..., x_{n-3} — на $-x_{n-3}$, x_{n-1} — на $-x_{n-1}$. Остальные переменные не меняются. Соответствующая матрица A имеет положительный определитель, если n делится на 4, а после этих замен получаем из системы форм (1.6) систему (1.4). Следовательно, лемма доказана в случае, когда n делится на 4.

Если n не делится на 4, а только на 2, то сначала нужно сделать замену переменных: x_1 заменим на $-x_1$, x_3 — на $-x_3$, ..., x_{n-3} — на $-x_{n-3}$, а остальные переменные не меняются. Тогда из системы (1.6) получим систему квадратичных форм

$$\begin{aligned} q_1(x) &= x_1^2 - x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2 - x_n^2, \\ \tilde{q}_2(x) &= x_1x_2 + \dots + x_{n-3}x_{n-2} - x_{n-1}x_n. \end{aligned} \quad (1.7)$$

В работе [6, с. 193, 194] доказано, что квадратичные отображения

$$\begin{aligned} (x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2, x_1x_2 - x_3x_4): \mathbb{R}^4 &\rightarrow \mathbb{R}^2, \\ (x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2, x_1x_2 + x_3x_4): \mathbb{R}^4 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

изотопны. Поэтому квадратичное отображение, заданное системой (1.7), изотопно квадратичному отображению, заданному системой (1.4). Лемма доказана.

1.3. Классификация вещественных биквадрик, возможно содержащих комплексные особые точки. Обозначим через $\bar{B}_d$ множество вещественных d -мерных биквадрик, которые могут иметь особые точки, но они обязаны быть комплексными. Если $p \in \bar{B}_d$, то вещественная часть $\mathbb{R}V_p$ — гладкое d -мерное многообразие или пустое множество.

Пусть

$$q(x) = (q_1(x), q_2(x)): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^2$$

– неособое квадратичное отображение. Тогда система уравнений

$$q_1(X) = 0, \quad q_2(X) = 0$$

не всегда определяет в комплексном проективном пространстве $\mathbb{P}^{n-1}$ вещественную биквадрику размерности $d = n - 3$.

Из множества Q_n^* удалим те квадратичные отображения, которые не определяют вещественные биквадрики. Тогда полученное множество обозначим через Q_n° . Вложение $Q_n^\circ \hookrightarrow Q_n^*$ индуцирует отображение компонент связности

$$\pi_0(Q_n^\circ) \rightarrow \pi_0(Q_n^*).$$

Это отображение биективно, так как разность $Q_n^* \setminus Q_n^\circ$ имеет коразмерность больше 1 в пространстве всех квадратичных отображений Q_n .

Обозначим прообраз компоненты связности $Q_n^*[k_1, \dots, k_{2s-1}]$ при отображении $\pi_0(Q_n^\circ) \rightarrow \pi_0(Q_n^*)$ через $Q_n^\circ[k_1, \dots, k_{2s-1}]$.

Определено отображение $v: Q_n^\circ \rightarrow \overline{B}_d$, где $d = n - 3$. Это отображение устроено следующим образом. Если $q(x) = (q_1(x), q_2(x))$ – квадратичное отображение, принадлежащее множеству Q_n° , то $p = v(q)$ – такая точка из $\overline{B}_d$, что вещественная биквадрика V_p задается в комплексном проективном пространстве $\mathbb{P}^{n-1}$ системой уравнений

$$q_1(X) = 0, \quad q_2(X) = 0.$$

Группа $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ действует на многообразии Q_n° , причем отображение $v: Q_n^\circ \rightarrow \overline{B}_d$ является локально тривиальным главным $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ -расслоением. Поэтому из теоремы 1.2 и лемм 1.3, 1.4 вытекает, что существует каноническая биекция

$$\bigcup_k R_k \xrightarrow{\approx} \pi_0(\overline{B}_d),$$

где $k \equiv d+1 \pmod{2}$ и $0 \leq k \leq d+3$. Эта биекция устроена следующим образом. Пусть $k = k_1 + \dots + k_{2s+1}$ – нечетное разбиение числа $k \geq 1$. Тогда этому разбиению сопоставляется компонента связности пространства $\overline{B}_d$, в которую отображается компонента связности $Q_n^\circ[k_1, \dots, k_{2s+1}]$ при отображении $v: Q_n^\circ \rightarrow \overline{B}_d$, где $n = d+3$. Компонента связности пространства $\overline{B}_d$, которая сопоставляется разбиению $k = k_1 + \dots + k_{2s+1}$, обозначается через $\overline{B}_d(k_1, \dots, k_{2s+1})$. Через $\overline{B}_d(0)$ обозначается компонента связности пространства $\overline{B}_d$, в которую отображается компонента $Q_n^\circ[0]$. Компоненты связности пространства $\overline{B}_d$ называются *грубыми изотопическими классами* d -мерных вещественных биквадрик с неособой вещественной частью. Заметим, что если две биквадрики с неособыми вещественными частями грубо изотопны, то может не существовать эквивариантной деформации, соединяющей эти биквадрики.

Вложение $B_d \hookrightarrow \overline{B}_d$ индуцирует отображение компонент связности $\pi_0(B_d) \rightarrow \pi_0(\overline{B}_d)$. Это отображение биективно. Действительно, замыкание множества B_d в $\overline{B}_d$ совпадает со множеством $\overline{B}_d$. Поэтому отображение компонент связности

$\pi_0(B_d) \rightarrow \pi_0(\overline{B}_d)$ сюръективно. С другой стороны, число компонент связности пространств $B_d, \overline{B}_d$ одно и то же.

Заметим, что если точки p', p'' принадлежат одной компоненте связности множества $\overline{B}_d$, то гладкие многообразия $\mathbb{R}V_{p'}, \mathbb{R}V_{p''}$ диффеоморфны. Заметим также, что биективность отображения $\pi_0(B_d) \rightarrow \pi_0(\overline{B}_d)$ можно установить без использования теоремы 1.2. Можно показать, что разность $\overline{B}_d \setminus B_d$ имеет коразмерность больше 1 в многообразии $\mathbb{R}G$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.5. *При биекции $\pi_0(B_d) \xrightarrow{\sim} \pi_0(\overline{B}_d)$ компонента связности $B_d(0)$ отображается в компоненту связности $\overline{B}_d(0)$, а компонента $B_d(k_1, \dots, k_{2s+1})$ отображается в компоненту $\overline{B}_d(k_1, \dots, k_{2s+1})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала покажем, что компонента связности $B(0)$ отображается в компоненту $\overline{B}(0)$. Пусть $q_1(x), q_2(x)$ – квадратичные формы в системе (1.4). Тогда система уравнений

$$q_1(X) = 0, \quad q_2(X) = 0 \quad (1.8)$$

определяет особую биквадрику в изотопическом классе $\overline{B}(0)$. Функция

$$\sigma(\lambda) = \sigma(\lambda_1 q_1(X) + \lambda_2 q_2(X)) \quad (1.9)$$

на окружности S^1 принимает постоянное нулевое значение, где $\sigma(\cdot)$ – сигнатура квадратичной формы. Если мы немного изменим коэффициенты квадратичных форм (1.4) и получим формы $\tilde{q}_1(x), \tilde{q}_2(x)$, то функция $\sigma(\lambda_1 \tilde{q}_1(X) + \lambda_2 \tilde{q}_2(X))$ также будет принимать только нулевые значения. Мы можем считать, что уравнения

$$\tilde{q}_1(X) = 0, \quad \tilde{q}_2(X) = 0$$

определяют неособую вещественную биквадрику $V_{\tilde{p}}$. Тогда получаем, что имеет место включение $\tilde{p} \in B(0)$.

Теперь покажем, что компонента связности $B(k_1, \dots, k_{2s+1})$ отображается в компоненту $\overline{B}(k_1, \dots, k_{2s+1})$. Если $q_1(x), q_2(x)$ – квадратичные формы из системы (1.2), то система уравнений (1.8) определяет биквадрику в изотопическом классе $\overline{B}(k_1, \dots, k_{2s+1})$. Функция (1.9) на окружности S^1 имеет точки разрыва, число которых равно $4s + 2$. Укажем эти точки разрыва. Пусть $\lambda^{(j)}$, $j = 1, \dots, 2s + 1$, – единичный вектор на плоскости $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, полученный из вектора c_j (см. формулу (1.3)) поворотом на угол $-\pi/2$. Тогда каждые две точки $\pm\lambda^{(j)}$, $j = 1, \dots, 2s + 1$, являются точками разрыва функции $\sigma(\lambda)$ на окружности S^1 , причем при переходе через точку $\pm\lambda^{(j)}$ в положительном направлении значения функции $\sigma(\lambda)$ изменяются на $\pm 2k_j$ (знаки соответствуют друг другу). Точка $\lambda^{(j)}$ называется *положительной*, а $-\lambda^{(j)}$ – *отрицательной*, $j = 1, \dots, 2s + 1$. Заметим, что между двумя соседними положительными точками находится одна отрицательная точка. Мы можем так немного изменить коэффициенты квадратичных форм (1.2), чтобы полученные квадратичные формы $\tilde{q}_1(x), \tilde{q}_2(x)$ удовлетворяли следующим условиям:

1) квадратичное отображение $\tilde{q}(x) = (\tilde{q}_1(x), \tilde{q}_2(x))$ неособое и принадлежит компоненте $Q_n^\circ[k_1, \dots, k_{2s-1}]$;

2) каждая точка разрыва $\lambda^{(j)}$ функции $\sigma(\lambda)$ преобразуется в k_j очень близких точек разрыва функции $\sigma(\lambda_1 \tilde{q}_1(x) + \lambda_2 \tilde{q}_2(x))$;

3) вещественная биквадрика $V_{\tilde{p}}$ неособая, где $\tilde{p} = v(\tilde{q})$.

Покажем, что тогда точка $\tilde{p}$ принадлежит компоненте $B(k_1, \dots, k_{2s+1})$. Действительно, каждая положительная точка $\lambda^{(j)}$ распалась на k_j положительных точек, так как при переходе через все эти точки функция $\sigma(\lambda_1 \tilde{q}_1(x) + \lambda_2 \tilde{q}_2(x))$ изменяется на $2k_j$. Аналогично, каждая отрицательная точка $-\lambda^{(j)}$ распалась на k_j отрицательных точек. Из этих фактов вытекает, что $\tilde{p} \in B(k_1, \dots, k_{2s+1})$. Предложение доказано.

Заметим, что предложение 1.5 означает коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \pi_0(B_d) & \xrightarrow{\approx} & \pi_0(\overline{B}_d) \\ \downarrow \approx & & \downarrow \approx \\ \bigcup R_k & \xlongequal{\quad} & \bigcup R_k \end{array}$$

где $k \equiv d+1 \pmod{2}$ и $0 \leq k \leq d+3$.

В работе [6] вычислена эйлерова характеристика вещественной части биквадрики. Чтобы написать соответствующую формулу, нам потребуется ввести некоторые обозначения. Далее размерность биквадрики $d = n - 3$ четная. Пусть $p \in \overline{B}_d(k_1, \dots, k_{2s+1})$, где $k = k_1 + \dots + k_{2s+1}$ – нечетное число. Обозначим через J подмножество во множестве натуральных чисел $\{1, \dots, 2s+1\}$, состоящее из номеров j таких, что число k_j нечетно. Через J' обозначим множество $J \cup \{j+2s+1 | j \in J\}$. Для каждого $j \in J$ обозначим через $\theta(j)$ количество точек во множестве $J' \cap \{j, j+1, \dots, j+s\}$. (Заметим, что в [6] имеется опечатка в определении числа $\theta(j)$.) Кроме этого, положим $m = \frac{n-k}{2}$. Тогда справедлива формула (см. [6, с. 215])

$$\chi(\mathbb{R}V_p) = 1 + (-1)^m \sum_{j \in J} (-1)^{\theta(j)}. \quad (1.10)$$

Одна из задач, связанных с изучением вещественных биквадрик, состоит в описании топологического типа многообразия $\mathbb{R}V_p$, когда $p \in \overline{B}_d(k_1, \dots, k_{2s+1})$.

В работах [7], [13] рассматривалась аналогичная задача в случае, когда $k = d+3$. Если $S^{d+2} \rightarrow \mathbb{R}P^{d+2}$ – стандартное двулистное накрытие, то через $W_p \rightarrow \mathbb{R}V_p$ обозначим индуцированное двулистное накрытие. В работах [7], [13] исследовался топологический тип многообразия W_p в зависимости от разбиения $k = k_1 + \dots + k_{2s+1}$, где $k = n = d+3$. Здесь мы не будем полностью цитировать результаты из статей [7], [13], а приведем те из них, которые потребуются при доказательстве теорем 0.1, 0.2 и предложения 0.4. Заметим сначала, что нетрудно установить следующие две леммы (подробности см. в [7], [13]).

ЛЕММА 1.6. *Если $k = n$ и $s = 0$, то множества $W_p, \mathbb{R}V_p$ пустые.*

ЛЕММА 1.7. *Если $k = n$ и $s = 1$, т.е. $k = k_1 + k_2 + k_3$, то многообразие W_p диффеоморфно произведению сфер $S^{k_1-1} \times S^{k_2-1} \times S^{k_3-1}$, причем инволюция двулистного накрытия $W_p \rightarrow \mathbb{R}V_p$ действует антиподально на каждом сомножителе.*

Из леммы 1.7 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1.8. Если $k = n$, $s = 1$ и $k_1 = 1$, $k_2 > 1$, $k_3 > 1$, то многообразие $\mathbb{R}V_p$ диффеоморфно произведению $S^{k_2-1} \times S^{k_3-1}$, а если $k = n$, $s = 1$ и $k_1 = k_2 = 1$, то многообразие $\mathbb{R}V_p$ диффеоморфно несвязному объединению $S^d \sqcup S^d$.

В работе [7] доказана

ТЕОРЕМА 1.9. Пусть $p \in \overline{B}_n(k_1, \dots, k_{2s+1})$, где $k_1 + \dots + k_{2s+1} = n$. Тогда полная группа гомологий $H_*(W_p, \mathbb{Z})$ является свободной и ее ранг равен $4s + 4$.

Покажем, что справедлива следующая

ЛЕММА 1.10. Если $k = n - 2$ и $s = 0$, то многообразие $\mathbb{R}V_p$ диффеоморфно сфере S^d .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно определению изотопического класса $\overline{B}_d(n-2)$, где $n = d+3$, можно считать, что многообразие $\mathbb{R}V_p$ задано системой уравнений

$$X_1^2 + \dots + X_{n-2}^2 + X_{n-1}^2 - X_n^2 = 0, \quad X_{n-1}X_n = 0.$$

Эта система определяет сферу S^d в проективном пространстве $\mathbb{RP}^{d+2}$. Лемма доказана.

1.4. Классификация двумерных биквадрик. Согласно теореме 1.1 существуют следующие жесткие изотопические классы неособых двумерных вещественных биквадрик:

$$B(1), B(3), B(1, 1, 1), B(5), B(1, 1, 3), B(1, 2, 2), B(1, 1, 1, 1, 1).$$

Заметим, что мы произвели сокращение обозначений: вместо $B_2(k_1, \dots, k_{2s+1})$ пишем $B(k_1, \dots, k_{2s+1})$.

В работе [4] показано, что эти жесткие изотопические классы определяются топологическими типами вещественных частей биквадрик (см. [4, приложение А]). Действительно, существуют семь различных топологических типов вещественных частей неособых двумерных биквадрик. Чтобы описать их, обозначим через ${}_gS^2$ связную компактную неориентируемую топологическую поверхность, полученную из сферы S^2 заменой g дисков на листы Мёбиуса, а через T^2 – двумерный тор. Тогда нетрудно построить неособые вещественные двумерные биквадрики, вещественные части которых гомеоморфны топологическим поверхностям

$${}_6S^2, {}_4S^2, {}_2S^2, T^2, S^2 \sqcup S^2, S^2,$$

или являются пустым множеством. Однако в работе [4] не указано соответствие между этими топологическими типами и вышеупомянутыми жесткими изотопическими классами. Оказывается, что имеет место

ЛЕММА 1.11. Справедливы следующие утверждения:

- 1) если $p \in B(1)$, то поверхность $\mathbb{R}V_p$ гомеоморфна ${}_2S^2$;
- 2) если $p \in B(3)$, то поверхность $\mathbb{R}V_p$ гомеоморфна S^2 ;
- 3) если $p \in B(1, 1, 1)$, то поверхность $\mathbb{R}V_p$ гомеоморфна ${}_4S^2$;
- 4) если $p \in B(5)$, то множество $\mathbb{R}V_p$ пустое;
- 5) если $p \in B(1, 1, 3)$, то поверхность $\mathbb{R}V_p$ гомеоморфна $S^2 \sqcup S^2$;
- 6) если $p \in B(1, 2, 2)$, то поверхность $\mathbb{R}V_p$ гомеоморфна T^2 ;
- 7) если $p \in B(1, 1, 1, 1, 1)$, то поверхность $\mathbb{R}V_p$ гомеоморфна ${}_6S^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения 2), 4)–6) следуют из лемм 1.6, 1.7, 1.10 и следствия 1.8. Для доказательства остальных утверждений нужно использовать формулу для эйлеровой характеристики (1.10). Лемма доказана.

Далее нам нужно узнать, на каких вещественных двумерных биквадриках существуют вещественные прямые.

ЛЕММА 1.12. *На неособой вещественной двумерной биквадрике $V_p \subset \mathbb{P}^4$ существует вещественная прямая тогда и только тогда, когда*

$$p \in B(1) \cup B(1, 1, 1) \cup B(1, 1, 1, 1, 1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каноническое расслоение на двумерной биквадрике $V_p \subset \mathbb{P}^4$ задается дивизором $-H$, где H – гиперплоское сечение. Поэтому вещественная часть биквадрики $\mathbb{R}V_p$ ориентируемая тогда и только тогда, когда класс гомологий

$$[\mathbb{R}H] \in H_1(\mathbb{R}V_p, \mathbb{F}_2)$$

равен нулю. Если на биквадрике V_p существует вещественная прямая, то класс гомологий $[\mathbb{R}H]$ не равен нулю, а поэтому поверхность $\mathbb{R}V_p$ неориентируемая. Следовательно, при $p \notin B(1) \cup B(1, 1, 1) \cup B(1, 1, 1, 1, 1)$ на биквадрике V_p не существует вещественной прямой. Остается показать, что при $p \in B(1) \cup B(1, 1, 1) \cup B(1, 1, 1, 1, 1)$ на биквадрике V_p существует вещественная прямая.

Комплексная биквадрика V_p является поверхностью дель Педро степени 4, поэтому она получается из проективной плоскости $\mathbb{P}^2$ раздутием пяти точек, никакие три из которых не лежат на прямой. Наоборот, каждая поверхность, полученная таким раздутием, отображается изоморфно на биквадрику с помощью антиканонического расслоения, причем пять исключительных прямых отображаются на прямые в $\mathbb{P}^4$ (см., например, [14]). Рассмотрим на плоскости $\mathbb{P}^2$ множество из пяти точек, которое инвариантно относительно комплексного сопряжения, а каждые три точки не лежат на прямой. Тогда после раздутия этих пяти точек получим вещественную биквадрику, вещественная часть которой гомеоморфна ${}_2S^2$, ${}_4S^2$, ${}_6S^2$, если вещественных точек среди множества пяти раздуваемых точек будет одна, три, пять соответственно. Тогда на полученной биквадрике имеется вещественная прямая. Лемма доказана.

§ 2. Доказательство основных результатов

Далее мы используем сокращение: вместо $B_4(k_1, \dots, k_{2s+1})$ пишем $B(k_1, \dots, k_{2s+1})$, если это не приводит к путанице.

ЛЕММА 2.1. *Справедливы следующие утверждения:*

- 1) если $p \in B(5)$, то многообразие $\mathbb{R}V_p$ диффеоморфно сфере S^4 ;
- 2) если $p \in B(7)$, то многообразие $\mathbb{R}V_p$ – пустое множество;
- 3) если $p \in B(1, 1, 5)$, то многообразие $\mathbb{R}V_p$ диффеоморфно несвязному объединению двух сфер $S^4 \sqcup S^4$;
- 4) если $p \in B(1, 2, 4)$, то многообразие $\mathbb{R}V_p$ диффеоморфно произведению $S^1 \times S^3$ сфер;

5) если $p \in B(1, 3, 3)$, то многообразие $\mathbb{R}V_p$ диффеоморфно произведению $S^2 \times S^2$ сфер.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из лемм 1.6, 1.7, 1.10 и следствия 1.8.

ЛЕММА 2.2. Если

$$p \in B(1) \cup B(3) \cup B(1, 1, 1) \cup B(1, 1, 3) \cup B(1, 2, 2) \cup B(1, 1, 1, 1, 1) \\ \cup B(1, 1, 1, 1, 3) \cup B(1, 1, 1, 2, 2) \cup B(1, 1, 2, 1, 2) \cup B(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1),$$

то на вещественной биквадрике V_p существует вещественная прямая.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $p \in \mathbb{G}^*$; тогда через F_p будем обозначать комплексное многообразие Фано биквадрики V_p , точками которого являются прямые на $V_p \subset \mathbb{P}^6$. Его размерность равна четырем (см., например, [1]). Заметим, что если точки p', p'' принадлежат одной компоненте связности пространства $\mathbb{R}\mathbb{G}^* = B_4$, то вещественные многообразия Фано $(F_{p'}, \tau)$, $(F_{p''}, \tau)$ эквивариантно диффеоморфны. Действительно, тотальное пространство многообразий Фано неособых биквадрик

$$\mathfrak{F}^* = \bigcup_{p \in \mathbb{G}^*} F_p$$

является неособым многообразием, а проекция $\mathfrak{F}^* \rightarrow \mathbb{G}^*$ является локально тривиальным дифференцируемым расслоением (см. [15]). Положим

$$\mathfrak{F}_{\mathbb{R}}^* = \bigcup_{p \in B_4} F_p.$$

Тогда получим, что проекция $\mathfrak{F}_{\mathbb{R}}^* \rightarrow B_4$ является локально тривиальным эквивариантным расслоением. Поэтому вещественные многообразия Фано $(F_{p'}, \tau)$, $(F_{p''}, \tau)$ эквивариантно диффеоморфны, если точки p', p'' принадлежат одной компоненте связности пространства $\mathbb{R}\mathbb{G}^* = B_4$. Следовательно, вещественные части $\mathbb{R}F_{p'}$, $\mathbb{R}F_{p''}$ диффеоморфны. Далее мы возьмем по одной неособой вещественной биквадрике в каждой из компонент связности

$$B_4(1), B_4(3), B_4(1, 1, 1), B_4(1, 1, 3), B_4(1, 2, 2), B_4(1, 1, 1, 1, 1), \\ B_4(1, 1, 1, 1, 3), B_4(1, 1, 1, 2, 2), B_4(1, 1, 2, 1, 2), B_4(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$$

и покажем, что на этих биквадриках существуют вещественные прямые.

Рассмотрим следующие десять систем уравнений неособых четырехмерных вещественных биквадрик:

$$X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 + X_4^2 - X_5^2 + X_6^2 - X_7^2 = 0, \\ X_2X_3 + 2X_4X_5 + 3X_6X_7 = 0; \quad (2.1)$$

$$X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 + X_4^2 - X_5^2 + X_6^2 + X_7^2 = 0, \\ 2X_2X_3 + X_4X_5 + \varepsilon X_6^2 - \varepsilon X_7^2 = 0; \quad (2.2)$$

$$X_1^2 - X_2^2 - X_3^2 + X_4^2 - X_5^2 + X_6^2 - X_7^2 = 0, \\ X_2^2 - X_3^2 + X_4X_5 + 2X_6X_7 = 0; \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} X_1^2 - X_2^2 + X_3^2 - X_4^2 - X_5^2 - X_6^2 - X_7^2 &= 0, \\ X_2^2 + X_3X_5 - X_4^2 - (1 - \varepsilon)X_6^2 - (1 + \varepsilon)X_7^2 &= 0; \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} X_1^2 - X_2^2 + X_3^2 - X_4^2 - X_5^2 - X_6^2 - X_7^2 &= 0, \\ X_2^2 + X_3X_5 - X_4^2 + (1 + \varepsilon)X_6^2 - (1 + \varepsilon)X_7^2 &= 0; \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} 2X_1^2 + X_2^2 - 2X_3^2 - 2X_4^2 + X_5^2 + X_6^2 - X_7^2 &= 0, \\ X_2^2 + X_3^2 - X_4^2 - X_5^2 + X_6X_7 &= 0; \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} 2X_1^2 - 2X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 - 2X_5^2 + 2X_6^2 + 2X_7^2 &= 0, \\ -X_2^2 - X_3^2 + X_4^2 + X_5^2 + \varepsilon X_6^2 - \varepsilon X_7^2 &= 0; \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} 2X_1^2 + X_2^2 - 2X_3^2 - 2X_4^2 + X_5^2 - 2X_6^2 + X_7^2 &= 0, \\ X_2^2 + X_3^2 - X_4^2 - X_5^2 - (1 + \varepsilon)X_6^2 - (1 + \varepsilon)X_7^2 &= 0; \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} 2X_1^2 + X_2^2 - 2X_3^2 + X_4^2 - 2X_5^2 - 2X_6^2 + X_7^2 &= 0, \\ X_2^2 + X_3^2 - X_4^2 - X_5^2 + (1 + \varepsilon)X_6^2 - (1 + \varepsilon)X_7^2 &= 0; \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} 3X_1^2 + 2X_2^2 + 2X_3^2 - 2X_4^2 - 2X_5^2 - X_6^2 - X_7^2 &= 0, \\ 2X_2^2 - 2X_3^2 + X_4^2 - X_5^2 - 3X_6^2 + 3X_7^2 &= 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Здесь $\varepsilon > 0$ – малое число.

Биквадрики, определенные этими системами уравнений, неособые. Данное утверждение проверяется следующим образом. Рассмотрим уравнение

$$\det(\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2) = 0,$$

где M_1, M_2 – матрицы коэффициентов квадратичных форм из (2.1)–(2.10). Тогда непосредственно проверяется, что это уравнение не имеет кратных корней на комплексной проективной прямой $\mathbb{P}^1$.

Системы уравнений (2.1)–(2.10) определяют соответственно биквадрики из компонент связности

$$\begin{aligned} B_4(1), B_4(3), B_4(1, 1, 1), B_4(1, 1, 3), B_4(1, 2, 2), B_4(1, 1, 1, 1, 1), \\ B_4(1, 1, 1, 1, 3), B_4(1, 1, 1, 2, 2), B_4(1, 1, 2, 1, 2), B_4(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1). \end{aligned}$$

Данное утверждение можно проверить непосредственно, но можно заметить, что биквадрики, определенные системами уравнений (2.1)–(2.10), изотопны стандартным биквадрикам с особыми комплексными точками $q_{k_1, \dots, k_{2s+1}}(X) = 0$ из компонент связности

$$\begin{aligned} \bar{B}_4(1), \bar{B}_4(3), \bar{B}_4(1, 1, 1), \bar{B}_4(1, 1, 3), \bar{B}_4(1, 2, 2), \bar{B}_4(1, 1, 1, 1, 1), \\ \bar{B}_4(1, 1, 1, 1, 3), \bar{B}_4(1, 1, 1, 2, 2), \bar{B}_4(1, 1, 2, 1, 2), \bar{B}_4(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) \end{aligned}$$

соответственно, а затем применить предложение 1.5.

Если добавим к системам (2.1)–(2.10) уравнения $X_6 = X_7 = 0$, то полученные системы уравнений определяют двумерные вещественные биквадрики из компонент связности $B_2(1), B_2(1), B_2(1), B_2(1, 1, 1), B_2(1, 1, 1), B_2(1), B_2(1, 1, 1, 1, 1), B_2(1, 1, 1, 1, 1), B_2(1, 1, 1, 1, 1), B_2(1, 1, 1, 1, 1)$ соответственно, на которых имеются вещественные прямые в силу леммы 1.12. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 0.1. Применим лемму 2.1; тогда получим, что достаточно установить неориентируемость вещественной биквадрики $\mathbb{R}V_p$, если

$$p \notin B(5) \cup B(7) \cup B(1, 1, 5) \cup B(1, 2, 4) \cup B(1, 3, 3).$$

Пусть сначала $p \in B(2, 2, 3)$; тогда рассмотрим двулистное накрытие $W_p \rightarrow \mathbb{R}V_p$. Многообразие W_p диффеоморфно произведению $S^1 \times S^1 \times S^2$ (см. лемму 1.7). Характеристическим классом накрытия $W_p \rightarrow \mathbb{R}V_p$ является класс когомологий

$$[\mathbb{R}H]^* \in H^1(\mathbb{R}V_p, \mathbb{F}_2),$$

где H – вещественное гиперплоское сечение биквадрики V_p . Этот класс когомологий не равен нулю, так как многообразие W_p связное. С другой стороны, многообразие $\mathbb{R}V_p$ неориентируемое тогда и только тогда, когда класс когомологий $[\mathbb{R}H]^*$ не равен нулю.

Пусть теперь

$$p \in B(1) \cup B(3) \cup B(1, 1, 1) \cup B(1, 1, 3) \cup B(1, 2, 2) \cup B(1, 1, 1, 1, 1) \\ \cup B(1, 1, 1, 1, 3) \cup B(1, 1, 1, 2, 2) \cup B(1, 1, 2, 1, 2) \cup B(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1);$$

тогда применим лемму 2.2. Из этой леммы следует, что класс гомологий

$$[\mathbb{R}H] \in H_1(\mathbb{R}V_p, \mathbb{F}_2)$$

не равен нулю. Следовательно, многообразие $\mathbb{R}V_p$ неориентируемое. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 0.2. Прежде всего приведем три леммы.

ЛЕММА 2.3. *Справедливы следующие утверждения:*

- 1) если $p \in B(1) \cup B(1, 2, 2)$, то выполняется равенство $\chi(\mathbb{R}V_p) = 2$;
- 2) если $p \in B(3) \cup B(2, 2, 3) \cup B(1, 1, 1, 2, 2)$, то выполняется равенство $\chi(\mathbb{R}V_p) = 0$;
- 3) если $p \in B(1, 1, 1) \cup B(1, 1, 2, 1, 2)$, то выполняется равенство $\chi(\mathbb{R}V_p) = 4$;
- 4) если $p \in B(1, 1, 1, 1, 1)$, то выполняется равенство $\chi(\mathbb{R}V_p) = 6$;
- 5) если $p \in B(1, 1, 3)$, то выполняется равенство $\chi(\mathbb{R}V_p) = -2$;
- 6) если $p \in B(1, 1, 1, 1, 3)$, то выполняется равенство $\chi(\mathbb{R}V_p) = -4$;
- 7) если $p \in B(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$, то выполняется равенство $\chi(\mathbb{R}V_p) = 8$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства утверждений 1)–7) нужно использовать формулу для эйлеровой характеристики (1.10).

ЛЕММА 2.4. *Если*

$$p \in B(1) \cup B(3) \cup B(1, 1, 1) \cup B(1, 1, 3) \cup B(1, 2, 2) \cup B(1, 1, 1, 1, 1) \\ \cup B(1, 1, 1, 1, 3) \cup B(1, 1, 1, 2, 2) \cup B(1, 1, 2, 1, 2) \cup B(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) \cup B(2, 2, 3),$$

то многообразие $\mathbb{R}V_p$ связное.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $p \in B(2, 2, 3)$; тогда связность многообразия $\mathbb{R}V_p$ следует из связности многообразия W_p .

Если $p \in B(1) \cup B(3) \cup B(1, 1, 1) \cup B(1, 1, 3) \cup B(1, 2, 2) \cup B(1, 1, 1, 1) \cup B(1, 1, 1, 1, 3) \cup B(1, 1, 1, 2, 2) \cup B(1, 1, 2, 1, 2) \cup B(1, 1, 1, 1, 1, 1)$, то по лемме 2.2 на биквадрике V_p имеются вещественные прямые. Зафиксируем одну из них и обозначим ее через l , а через $\mathbb{P}^4 \subset \mathbb{P}^6$ обозначим четырехмерное вещественное проективное подпространство, не пересекающее прямую l . Тогда рассмотрим проекцию $V_p \rightarrow \mathbb{P}^4$ с центром в прямой l . Эта проекция является вещественным бирациональным отображением. Доказательство этого факта аналогично доказательству для трехмерных биквадрик (см. [16]). Поэтому из связности проективного пространства $\mathbb{RP}^4$ вытекает связность многообразия $\mathbb{R}V_p$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.5. Если $p \in B(3)$, то многообразие W_p диффеоморфно произведению $S^1 \times S^3$, а многообразие $\mathbb{R}V_p$ является нетривиальным расслоением над окружностью S^1 со слоем, являющимся сферой S^3 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предложения 1.5 и определения компоненты связности $\bar{B}(3)$ вытекает, что многообразие W_p равно многообразию в $\mathbb{R}^7$, заданному системой уравнений

$$\begin{aligned} X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 - X_5^2 + X_6^2 - X_7^2 &= 0, \\ X_4X_5 + X_6X_7 &= 0, \quad X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 + X_5^2 + X_6^2 + X_7^2 = 2. \end{aligned}$$

Эта система уравнений эквивалентна системе

$$\begin{aligned} X_5^2 + X_7^2 &= 1, \quad X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 + X_6^2 = 1, \\ X_4X_5 + X_6X_7 &= 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Система уравнений (2.11) задает множество пар векторов

$$\mathbf{e}_1 = (0, 0, 0, X_5, X_7), \quad \mathbf{e}_2 = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_6)$$

в пространстве $\mathbb{R}^5$, которые имеют единичную длину и ортогональны. Пары таких векторов в $\mathbb{R}^5$ образуют многообразие, равное многообразию W_p , т.е. $W_p = \{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)\}$, где $\mathbf{e}_1 = (0, 0, 0, x_4, x_4)$, $\mathbf{e}_2 = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$ – единичные векторы в $\mathbb{R}^5$, которые ортогональны. Проекция $W_p \rightarrow S^1$, заданная правилом $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \mapsto \mathbf{e}_1$, определяет расслоение со слоем, являющимся сферой S^3 . Действительно, прообраз точки $\mathbf{e}_1 \in S^1$ состоит из единичных векторов в ортогональной к вектору $\mathbf{e}_1$ гиперплоскости $\mathbf{e}_1^\perp$. Гиперплоскости $\mathbf{e}_1^\perp$, $\mathbf{e}_1 \in S^1$ образуют расслоение $\mathbb{TS}^1 \oplus \mathbb{R}^3$. Поскольку векторное расслоение $\mathbb{TS}^1 \oplus \mathbb{R}^3$ на окружности S^1 тривиально, то многообразие W_p изоморфно произведению $S^1 \times S^3$.

Инволюция двулистного накрытия $W_p \rightarrow \mathbb{R}V_p$ отображает слой расслоения $W_p \rightarrow S^1$ над точкой $\mathbf{e}_1 \in S^1$ в слой этого расслоения над точкой $-\mathbf{e}_1 \in S^1$. Многообразие $\mathbb{R}V_p$ неориентируемое в силу теоремы 0.1. Следовательно, из тривиального расслоения $W_p \rightarrow S^1$ получаем нетривиальное расслоение $\mathbb{R}V_p \rightarrow S^1$ со слоем S^3 . Лемма доказана.

Теперь перейдем непосредственно к доказательству теоремы 0.2. Сначала мы изложим без доказательства некоторые факты о неособых комплексных

четырёхмерных биквадриках (см. доказательства, например, в [1], проведенные с помощью формулы Хирцебруха из [17]).

Полная группа когомологий

$$H^*(V, \mathbb{Z}) = \bigoplus_{r=0}^8 H^r(V, \mathbb{Z})$$

свободная, причем выполняются равенства

$$\begin{aligned} \operatorname{rk} H^0(V, \mathbb{Z}) = \operatorname{rk} H^2(V, \mathbb{Z}) = \operatorname{rk} H^6(V, \mathbb{Z}) = \operatorname{rk} H^8(V, \mathbb{Z}) = 1, \quad \operatorname{rk} H^4(V, \mathbb{Z}) = 8, \\ \operatorname{rk} H^1(V, \mathbb{Z}) = \operatorname{rk} H^3(V, \mathbb{Z}) = \operatorname{rk} H^5(V, \mathbb{Z}) = \operatorname{rk} H^7(V, \mathbb{Z}) = 0. \end{aligned}$$

Для чисел Ходжа $h^{r,s}(V)$ имеют место равенства

$$h^{0,0}(V) = h^{1,1}(V) = h^{3,3}(V) = h^{4,4}(V) = 1, \quad h^{2,2}(V) = 8.$$

Остальные числа Ходжа $h^{r,s}(V)$ равны нулю. Из формулы Ходжа о сигнатуре

$$\sigma(V) = \sum_{0 \leq r, s \leq 4} (-1)^s h^{r,s}(V)$$

получаем равенство $\sigma(V) = 8$.

Перейдем к неособым вещественным четырёхмерным биквадрикам. Через $h^*(\cdot)$ обозначим размерность $\mathbb{F}_2$ -пространства $H^*(\cdot, \mathbb{F}_2)$. Из неравенства Гарнака–Тома–Смита получаем неравенство (см., например, [18])

$$h^*(\mathbb{R}V) \leq 12. \quad (2.12)$$

Если выполняется равенство $h^*(\mathbb{R}V) = 12$, то биквадрика V называется M -многообразием. Если биквадрика V является M -многообразием, то выполняется сравнение

$$\chi(\mathbb{R}V) \equiv 8 \pmod{16}, \quad (2.13)$$

оно вытекает из сравнения Гудкова–Рохлина для M -многообразий (см. [8])

$$\chi(\mathbb{R}V) \equiv \sigma(V) \pmod{16}.$$

Из леммы 2.3 следует, что сравнению (2.13) удовлетворяют только биквадрики из класса $B(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$.

Если выполняется равенство $h^*(\mathbb{R}V) = 10$, то V называется $(M-1)$ -многообразием. Если биквадрика V является $(M-1)$ -многообразием, то выполняется сравнение

$$\chi(\mathbb{R}V) \equiv 8 \pm 2 \pmod{16}, \quad (2.14)$$

оно вытекает из сравнения Гудкова–Крашнава–Харламова для $(M-1)$ -многообразий (см. [9], [10])

$$\chi(\mathbb{R}V) \equiv \sigma(V) \pm 2 \pmod{16}.$$

Из леммы 2.3 следует, что сравнению (2.14) удовлетворяют только биквадрики из класса $B(1, 1, 1, 1, 1)$.

Заметим наконец, что для всех замкнутых топологических четырехмерных многообразий выполняется равенство

$$h^*(\mathbb{R}V) = \chi(\mathbb{R}V) + 4h^1(\mathbb{R}V). \quad (2.15)$$

Если $p \in B(1, 1, 1, 1, 1, 1)$, то в силу леммы 2.3 равенство (2.15) принимает вид

$$h^*(\mathbb{R}V_p) = 8 + 4h^1(\mathbb{R}V_p).$$

Все многообразия $\mathbb{R}V_p$, рассматриваемые в теореме, неориентируемые, поэтому для них выполняется неравенство $h^1(\mathbb{R}V_p) \geq 1$. Следовательно, из неравенства (2.12) получаем, что биквадрика V_p является M -многообразием и выполняются равенства

$$h^1(\mathbb{R}V_p) = h^3(\mathbb{R}V_p) = 1, \quad h^2(\mathbb{R}V_p) = 8.$$

Утверждение 8) доказано.

Если $p \in B(1, 1, 1, 1, 1)$, то в силу леммы 2.3 равенство (2.15) принимает вид

$$h^*(\mathbb{R}V_p) = 6 + 4h^1(\mathbb{R}V_p).$$

Биквадрика V_p не является M -многообразием, поэтому выполняется неравенство

$$h^*(\mathbb{R}V_p) \leq 10.$$

Поскольку $h^1(\mathbb{R}V_p) \geq 1$, получаем, что биквадрика V_p является $(M - 1)$ -многообразием и выполняются равенства

$$h^1(\mathbb{R}V_p) = h^3(\mathbb{R}V_p) = 1, \quad h^2(\mathbb{R}V_p) = 6.$$

Утверждение 5) доказано.

Если $p \in B(1, 1, 1) \cup B(1, 1, 2, 1, 2)$, то в силу леммы 2.3 равенство (2.15) принимает вид

$$h^*(\mathbb{R}V_p) = 4 + 4h^1(\mathbb{R}V_p).$$

Биквадрика V_p не является M -многообразием и не является $(M - 1)$ -многообразием, поэтому выполняется неравенство

$$h^*(\mathbb{R}V_p) \leq 8.$$

Поскольку $h^1(\mathbb{R}V_p) \geq 1$, получаем, что выполняются равенства

$$h^1(\mathbb{R}V_p) = h^3(\mathbb{R}V_p) = 1, \quad h^2(\mathbb{R}V_p) = 4.$$

Утверждение 4) доказано.

Если $p \in B(1) \cup B(1, 2, 2)$, то в силу леммы 2.3 равенство (2.15) принимает вид

$$h^*(\mathbb{R}V_p) = 2 + 4h^1(\mathbb{R}V_p). \quad (2.16)$$

Если $h^1(\mathbb{R}V_p) \geq 2$, то из равенства (2.16) получаем неравенство

$$h^*(\mathbb{R}V_p) \geq 10,$$

которое не может выполняться, так как биквадрика V_p не является $(M-1)$ -многообразием и не является M -многообразием. Следовательно, имеют место равенства

$$h^1(\mathbb{R}V_p) = h^3(\mathbb{R}V_p) = 1, \quad h^2(\mathbb{R}V_p) = 2.$$

Утверждение 1) доказано.

Если $p \in B(1, 1, 3)$, то в силу леммы 2.3 равенство (2.15) принимает вид

$$h^*(\mathbb{R}V_p) = -2 + 4h^1(\mathbb{R}V_p). \quad (2.17)$$

С другой стороны, выполняются неравенства

$$h^*(\mathbb{R}V_p) \geq 2 + 2h^1(\mathbb{R}V_p) \geq 4. \quad (2.18)$$

Поэтому из равенства (2.17) вытекает неравенство $h^1(\mathbb{R}V_p) \geq 2$. Однако если $h^1(\mathbb{R}V_p) \geq 3$, то из равенства (2.17) получаем неравенство

$$h^*(\mathbb{R}V_p) \geq 10.$$

Поскольку биквадрика V_p не является $(M-1)$ -многообразием и не является M -многообразием, неравенство $h^1(\mathbb{R}V_p) \geq 3$ не выполняется. Следовательно, выполняются равенства

$$h^1(\mathbb{R}V_p) = h^3(\mathbb{R}V_p) = 2, \quad h^2(\mathbb{R}V_p) = 0.$$

Утверждение 6) доказано.

Если $p \in B(1, 1, 1, 1, 3)$, то в силу леммы 2.3 равенство (2.15) принимает вид

$$h^*(\mathbb{R}V_p) = -4 + 4h^1(\mathbb{R}V_p). \quad (2.19)$$

Поэтому из (2.19) и (2.18) вытекает неравенство $h^1(\mathbb{R}V_p) \geq 2$. Следовательно, неравенства (2.18) можно уточнить:

$$h^*(\mathbb{R}V_p) \geq 2 + 2h^1(\mathbb{R}V_p) \geq 6.$$

Поэтому из равенства (2.19) получаем неравенство $h^1(\mathbb{R}V_p) \geq 3$. Однако если $h^1(\mathbb{R}V_p) \geq 4$, то из равенства (2.19) получаем неравенство

$$h^*(\mathbb{R}V_p) \geq 12.$$

Поскольку биквадрика V_p не является M -многообразием, то неравенство $h^1(\mathbb{R}V_p) \geq 4$ не выполняется. Следовательно, выполняются равенства

$$h^1(\mathbb{R}V_p) = h^3(\mathbb{R}V_p) = 3, \quad h^2(\mathbb{R}V_p) = 0.$$

Утверждение 7) доказано.

Если $p \in B(3)$, то в силу леммы 2.5 многообразие $\mathbb{R}V_p$ обладает структурой расслоения над окружностью S^1 со слоем, являющимся сферой S^3 . Поэтому выполняются равенства

$$h^1(\mathbb{R}V_p) = h^3(\mathbb{R}V_p) = 1.$$

В силу леммы 2.3 эйлерова характеристика $\chi(\mathbb{R}V_p)$ равна нулю. Следовательно, кроме этого выполняется равенство $h^2(\mathbb{R}V_p) = 0$. Утверждение 2) доказано.

Если $p \in B(2, 2, 3)$, то в силу леммы 1.7 многообразие W_p диффеоморфно произведению $S^1 \times S^1 \times S^2$. Пусть $\omega \in H^1(\mathbb{R}V_p, \mathbb{F}_2)$ – характеристический класс двулистного накрытия $W_p \rightarrow \mathbb{R}V_p$; заметим, что он равен классу когомологий

$$[\mathbb{R}H]^* \in H^1(\mathbb{R}V_p, \mathbb{F}_2),$$

который, в свою очередь, равен первому классу Штифеля–Уитни многообразия $\mathbb{R}V_p$. Тогда получаем длинную точную последовательность Смита когомологий с коэффициентами в поле $\mathbb{F}_2$ (см., например, [18]):

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(\mathbb{R}V_p) \rightarrow H^0(W_p) \rightarrow H^0(\mathbb{R}V_p) \xrightarrow{\omega} H^1(\mathbb{R}V_p) \\ \rightarrow H^1(W_p) \rightarrow H^1(\mathbb{R}V_p) \xrightarrow{\omega} H^2(\mathbb{R}V_p) \rightarrow \dots, \end{aligned} \quad (2.20)$$

где через ω обозначен гомоморфизм умножения на класс когомологий ω , т. е. на первый класс Штифеля–Уитни многообразия $\mathbb{R}V_p$. Поскольку $h^1(W_p) = 2$, из точной последовательности (2.20) вытекает неравенство $h^1(\mathbb{R}V_p) \geq 2$. С другой стороны, неравенство $h^1(\mathbb{R}V_p) \geq 3$ приводит к неравенству $h^*(\mathbb{R}V_p) \geq 12$, которое не выполняется. Следовательно, $h^1(\mathbb{R}V_p) = 2$, а поэтому выполняются равенства

$$h^1(\mathbb{R}V_p) = h^3(\mathbb{R}V_p) = 2, \quad h^2(\mathbb{R}V_p) = 2,$$

так как $\chi(V_p) = 0$.

Если $p \in B(1, 1, 1, 2, 2)$, то $h^*(W_p) = 12$ (см. теорему 1.9). Поскольку

$$\chi(W_p) = 2\chi(\mathbb{R}V_p) = 0$$

в силу леммы 2.3, выполняется равенство $h^1(W_p) = 3$. Пусть $h^1(\mathbb{R}V_p) = 1$; тогда последовательность (2.20) не будет точной. Следовательно, $h^1(\mathbb{R}V_p) \geq 2$. Но неравенство $h^1(\mathbb{R}V_p) \geq 3$ и равенство $\chi(\mathbb{R}V_p) = 0$ приводят к неравенству

$$h^*(\mathbb{R}V_p) \geq 12,$$

которое не может выполняться, так как биквадрика V_p не является M -многообразием. Поэтому имеют место равенства

$$h^1(\mathbb{R}V_p) = h^3(\mathbb{R}V_p) = 2, \quad h^2(\mathbb{R}V_p) = 2.$$

Утверждение 3) доказано, а поэтому полностью доказана теорема 0.2.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.6. По-видимому, теорему 0.2 можно было доказать с помощью спектральной последовательности, построенной в [12]. Приведем краткое описание этой спектральной последовательности.

Кроме функции $\sigma(\lambda)$ на окружности S^1 можно рассмотреть функции $\sigma_{\pm}(\lambda)$, равные положительному и отрицательному индексам инерции квадратичной формы

$$\lambda_1 q_1(X) + \lambda_2 q_2(X).$$

Функцию $\sigma_-(\lambda)$ на окружности S^1 для краткости обозначим через $I(\lambda)$ и назовем *индекс-функцией*. Эта функция полунепрерывна снизу. Пусть $\Omega_j \subset S^1$ — замкнутое множество, определенное неравенством $I(\lambda) \leq j$, где $j = -1, 0, 1, \dots, 7$. Тогда существует спектральная последовательность (см. [12])

$$E_2^{i,j} = H^i(\Omega_{6-j}, \mathbb{F}_2) \Rightarrow H^{i+j}(\mathbb{RP}^6 \setminus \mathbb{R}V_p, \mathbb{F}_2).$$

Поскольку в нашем случае эта спектральная последовательность вырождается, она дает возможность вычислить числа $h^r(\mathbb{RP}^6 \setminus \mathbb{R}V_p)$. Если применить двойственность Пуанкаре–Лефшеца, то вычислим числа $h^r(\mathbb{RP}^6, \mathbb{R}V_p)$. Рассмотрим длинную точную последовательность когомологий пары пространств $(\mathbb{RP}^6, \mathbb{R}V_p)$. Тогда останется вычислить гомоморфизмы ограничения

$$H^r(\mathbb{RP}^6, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^r(\mathbb{R}V_p, \mathbb{F}_2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 0.4. Прежде всего докажем следующую лемму.

ЛЕММА 2.7. *Справедливы следующие утверждения:*

- 1) если $p \in \overline{B}(1) \cup \overline{B}(1, 1, 1)$, то $h^1(W_p) = 0$;
- 2) если $p \in \overline{B}(1, 2, 2) \cup \overline{B}(1, 1, 2, 1, 2)$, то $h^1(W_p) = 1$;
- 3) если $p \in \overline{B}(2, 2, 3)$, то $h^1(W_p) = 2$;
- 4) если $p \in \overline{B}(1, 1, 1, 2, 2)$, то $h^1(W_p) = 3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В работе [11] построена спектральная последовательность

$$E_2^{i,j} = H^i(\Omega_{6-j}, \Omega_{6-j-1} \mathbb{F}_2) \Rightarrow H^{i+j}(S^6 \setminus W_p, \mathbb{F}_2). \quad (2.21)$$

Здесь равенство выполнено при $j > 0$, а член $E^{i,0}$ вычисляется по-другому (см. подробно об этом в [11]). Применим двойственность Александера–Понтрягина.

Тогда получим, что нужно доказать утверждения:

- 1') если $p \in \overline{B}(1) \cup \overline{B}(1, 1, 1)$, то $h^4(S^6 \setminus W_p) = 0$;
- 2') если $p \in \overline{B}(1, 2, 2) \cup \overline{B}(1, 1, 2, 1, 2)$, то $h^4(S^6 \setminus W_p) = 1$;
- 3') если $p \in \overline{B}(2, 2, 3)$, то $h^4(S^6 \setminus W_p) = 2$;
- 4') если $p \in \overline{B}(1, 1, 1, 2, 2)$, то $h^4(S^6 \setminus W_p) = 3$.

Мы можем считать, что если $p \in \overline{B}(k_1, \dots, k_{2s+1})$, то биквадрика V_p задается системой уравнений (1.2). Тогда индекс-функция $I(\lambda)$ принимает значения так, как указано на рис. 1, 2. На рис. 1 указаны значения индекс-функции для

Рис. 1

точек из компонент $\overline{B}(1)$, $\overline{B}(1, 1, 1)$, $\overline{B}(1, 2, 2)$ соответственно. На рис. 2 указаны значения индекс-функции для точек из компонент $\overline{B}(2, 2, 3)$, $\overline{B}(1, 1, 2, 1, 2)$, $\overline{B}(1, 1, 1, 2, 2)$ соответственно. Заметим, что в точках разрыва индекс-функция будет определена благодаря ее полунепрерывности снизу.

Рис. 2

Применим теперь спектральную последовательность (2.21), получим равенства в утверждениях 1')–4'). Лемма доказана.

Для окончания доказательства предложения нужно рассмотреть точную последовательность (2.20), а затем применить лемму 2.7 и теорему 0.2.

Если $p \in B(1) \cup B(1, 1, 1)$, то $h^1(\mathbb{R}V_p) = 1$, $h^1(W_p) = 0$. Поэтому гомоморфизм

$$\omega: H^1(\mathbb{R}V_p, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^2(\mathbb{R}V_p, \mathbb{F}_2) \quad (2.22)$$

не равен нулю. Если $p \in B(1, 2, 2) \cup B(1, 1, 2, 1, 2)$, то $h^1(\mathbb{R}V_p) = 1$, $h^1(W_p) = 1$. Поэтому гомоморфизм (2.22) равен нулю. Если $p \in B(2, 2, 3)$, то $h^1(\mathbb{R}V_p) = 2$, $h^1(W_p) = 2$. Поэтому гомоморфизм (2.22) не равен нулю. Если $p \in B(1, 1, 1, 2, 2)$, то $h^1(\mathbb{R}V_p) = 2$, $h^1(W_p) = 3$. Поэтому гомоморфизм (2.22) равен нулю. Предложение доказано.

Список литературы

1. M. Reid, *The complete intersection of two or more quadrics*, Ph.D. thesis, Cambridge, 1972; <http://www.warwick.ac.uk/~masda/3folds/qu.pdf>.
2. А. Н. Тюрин, “О пересечении квадрик”, *УМН*, **30:6** (1975), 51–99; англ. пер.: A. N. Tyurin, “On intersections of quadrics”, *Russian Math. Surveys*, **30:6** (1975), 51–105.
3. В. А. Рохлин, “Комплексные топологические характеристики вещественных алгебраических кривых”, *УМН*, **33:5** (1978), 77–89; англ. пер.: V. A. Rokhlin, “Complex topological characteristics of real algebraic curves”, *Russian Math. Surveys*, **33:5** (1978), 85–98.
4. A. Degtyarev, I. Itenberg, V. Kharlamov, *Real Enriques surfaces*, Lecture Notes in Math., **1746**, Springer-Verlag, Berlin, 2000.
5. В. А. Краснов, “О вещественных квадратичных комплексах прямых”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **74:6** (2010), 157–182; англ. пер.: V. A. Krasnov, “On real quadric line complexes”, *Izv. Math.*, **74:6** (2010), 1255–1276.

6. А. А. Аграчев, Р. В. Гамкредидзе, “Квадратичные отображения и гладкие вектор-функции: эйлеровы характеристики множеств уровня”, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Нов. достиж.*, **35**, ВИНТИ, М., 1989, 179–239; англ. пер.: A. A. Agrachev, R. V. Gamkrelidze, “Quadratic maps and smooth vector-valued functions: Euler characteristics of level sets”, *J. Soviet Math.*, **55**:4 (1991), 1892–1928.
7. С. Т. С. Уолл, “Stability, pencils and polytopes”, *Bull. London Math. Soc.*, **12**:6 (1980), 401–421.
8. В. А. Рохлин, “Сравнения по модулю 16 в шестнадцатой проблеме Гильберта”, *Функц. анализ и его прил.*, **6**:4 (1972), 58–64; “Сравнения по модулю 16 в шестнадцатой проблеме Гильберта. II”, **7**:2 (1973), 91–92; англ. пер.: V. A. Rokhlin, “Congruences modulo 16 in Hilbert’s sixtieth problem”, *Funct. Anal. Appl.*, **6**:4 (1972), 301–306; “Congruences modulo 16 in Hilbert’s sixtieth problem. II”, **7**:2 (1973), 163–164.
9. В. М. Харламов, “Новые сравнения для эйлеровой характеристики вещественных алгебраических многообразий”, *Функц. анализ и его прил.*, **7**:2 (1973), 74–78; англ. пер.: V. M. Kharlamov, “New relations for the Euler characteristic of real algebraic manifolds”, *Funct. Anal. Appl.*, **7**:2 (1973), 147–150.
10. Д. А. Гудков, А. Д. Крахнов, “О периодичности эйлеровой характеристики вещественных алгебраических $(M - 1)$ -многообразий”, *Функц. анализ и его прил.*, **7**:2 (1973), 15–19; англ. пер.: D. A. Gudkov, A. D. Krakhnov, “Periodicity of Euler characteristic of real algebraic $(M - 1)$ -manifolds”, *Funct. Anal. Appl.*, **7**:2 (1973), 98–102.
11. А. А. Аграчев, “Топология квадратичных отображений и гессианы гладких отображений”, *Итоги науки и техн. Сер. Алгебра. Топол. Геом.*, **26**, ВИНТИ, М., 1988, 85–124; англ. пер.: A. A. Agrachev, “Topology of quadratic maps and Hessians of smooth maps”, *J. Soviet Math.*, **49**:3 (1990), 990–1013.
12. А. А. Аграчев, “Гомологии пересечений вещественных квадрик”, *Докл. АН СССР*, **299**:5 (1988), 1033–1036; англ. пер.: A. A. Agrachev, “Homology of intersections of real quadrics”, *Soviet Math. Dokl.*, **37**:2 (1988), 493–496.
13. S. López de Medrano, “Topology of the intersection of quadrics in $\mathbb{R}^n$ ”, *Algebraic topology* (Arcata, CA, 1986), *Lecture Notes in Math.*, **1370**, Springer-Verlag, Berlin, 1989, 280–292.
14. Ю. И. Манин, *Кубические формы: алгебра, геометрия, арифметика*, Наука, М., 1972; англ. пер.: Yu. I. Manin, *Cubic forms: algebra, geometry, arithmetic*, North-Holland, Amsterdam–London; Elsevier, New York, 1974.
15. А. В. Алтман, С. И. Клейман, “Foundations of the theory of Fano schemes”, *Compositio Math.*, **34** (1977), 3–47.
16. Ф. Гриффитс, Дж. Харрис, *Принципы алгебраической геометрии*, Мир, М., 1982; пер. с англ.: Ph. Griffiths, J. Harris, *Principles of algebraic geometry*, Wiley, New York, 1978.
17. Ф. Хирцебрух, *Топологические методы в алгебраической геометрии*, Мир, М., 1973; пер. с англ.: F. Hirzebruch, *Topological methods in algebraic geometry*, Springer-Verlag, New York, 1966.
18. Г. Бредон, *Введение в теорию компактных групп преобразований*, Наука, М., 1980; пер. с англ.: G. E. Bredon, *Introduction to compact transformation groups*, Academic Press, New York–London, 1972.

В. А. КРАСНОВ (V. A. KRASNOV)
 Ярославский государственный университет
 им. П. Г. Демидова
 E-mail: krasnov@uniyar.ac.ru

Поступило в редакцию
 11.01.2009
 16.03.2009