Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. С. Волосивец, Модифицированные операторы Харди и Харди–Литтлвуда и их поведение в различных пространствах, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2011, том 75, выпуск 1, 29–52

DOI: <https://doi.org/10.4213/im4078>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 15:25:59

УДК 517.518

С. С. Волосивец

Модифицированные операторы Харди и Харди–Литтлвуда и их поведение в различных пространствах

Изучается поведение модифицированных операторов Харди и Харди–Литтлвуда в $\mathbf{P}$ -ичных пространствах Герца и Гёльдера–Бесова, а также в пространствах, близких к $\mathbf{P}$ -ичным пространствам Харди и ВМО. Кроме того, установлено равенство типа Титчмарша для распределений и получена оценка мультипликативного преобразования Фурье в $\mathbf{P}$ -ичных пространствах Харди.

Библиография: 24 наименования.

Ключевые слова: модифицированный оператор Харди–Литтлвуда, модифицированный оператор Харди, $\mathbf{P}$ -ичные пространства Гёльдера–Бесова, $\mathbf{P}$ -ичные пространства Харди, $\mathbf{P}$ -ичное пространство ВМО.

Введение

Посвящается моему учителю Б. И. Голубову.

Пусть $\mathbf{P} = \{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность натуральных чисел таких, что $2 \leq p_n \leq N$, $n \in \mathbb{N}$. Положим по определению $m_0 = 1$, $m_n = p_1 \cdots p_n$ при $n \in \mathbb{N}$ и $p_{-n} = p_n$, $m_{-n} = m_n^{-1}$ при $n \in \mathbb{N}$. Тогда каждое число $x \in \mathbb{R}_+$ записывается в следующем виде:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_{-n} m_{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} x_n / m_n, \quad x_n \in \mathbb{Z} \cap [0, p_n), \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \quad (1)$$

Здесь первая сумма конечна и для $x = l/m_k$, $l \in \mathbb{Z}_+$, $k \in \mathbb{Z}$, мы выбираем разложение с конечным числом $x_n \neq 0$. Для $x \in [m_{n-1}, m_n)$, $n \in \mathbb{Z}$, положим $|x|_{\mathbf{P}} = m_n$, а $|0|_{\mathbf{P}} = 0$, тогда $N^{-1}|x|_{\mathbf{P}} \leq x \leq |x|_{\mathbf{P}}$ для всех $x \in \mathbb{R}_+$. Для x, y , записанных в виде (1), определим

$$x \oplus y = z := \sum_{n=1}^{\infty} z_{-n} m_{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} z_n / m_n,$$

где $x_n \in \mathbb{Z} \cap [0, p_n)$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ и $z_n \equiv x_n + y_n \pmod{p_n}$. Аналогично определяется $x \ominus y$.

Далее важную роль будут играть множество $\mathbf{P}$ -ичных интервалов $\Omega = \{I_k^n := [k/m_n, (k+1)/m_n), k \in \mathbb{Z}_+, n \in \mathbb{Z}\}$ и пространства G_n функций, постоянных на всех I_k^n , $k \in \mathbb{Z}_+$. Через $\text{supp}(f)$ обозначим множество таких $x \in \mathbb{R}_+$,

для которых $f(x) \neq 0$. Если $\text{supp}(f) \subset [0, m_n)$, то будем записывать $f \in G^n$. В настоящей работе рассматриваются оператор

$$\mathcal{B}(\mathbf{P}, f)(x) = |x|_{\mathbf{P}}^{-1} \int_{|t|_{\mathbf{P}} \leq |x|_{\mathbf{P}}} f(t) dt$$

и сопряженный к нему оператор

$$\mathcal{H}(\mathbf{P}, f)(x) = \int_{|t|_{\mathbf{P}} \geq |x|_{\mathbf{P}}} |t|_{\mathbf{P}}^{-1} f(t) dt,$$

называемые *модифицированными операторами Харди–Литтлвуда и Харди* соответственно. В случае $p_n \equiv 2$ такие операторы ввел Б. И. Голубов [1], [2], который доказал тождества типа Титчмарша для этих операторов и $\mathbf{P}$ -ичного преобразования Фурье, а также ограниченность $\mathcal{B}(\mathbf{P}, f)$ в двоичных пространствах ВМО и VMO на полупрямой и ограниченность $\mathcal{H}(\mathbf{P}, f)$ в двоичном пространстве Харди на $\mathbb{R}_+$. В случае произвольной ограниченной последовательности $\mathbf{P}$ аналоги результатов Б. И. Голубова были получены автором в [3]. Классические операторы Харди и Харди–Литтлвуда для функций f , определенных на $\mathbb{R}_+$, задаются формулами

$$\mathcal{H}(f)(x) = \int_x^\infty t^{-1} f(t) dt, \quad \mathcal{B}(f)(x) = x^{-1} \int_0^x f(t) dt$$

соответственно. Известно, что первый оператор ограничен в $L^p(\mathbb{R}_+)$ при $1 \leq p < \infty$, а второй – в $L^p(\mathbb{R}_+)$ при $1 < p \leq \infty$ (см. [4, теоремы 327, 328]). Как следствие, операторы $\mathcal{H}(\mathbf{P}, f)$ и $\mathcal{B}(\mathbf{P}, f)$ также ограничены в соответствующих пространствах $L^p(\mathbb{R}_+)$ (подробнее об этом см. в [3]). Классические операторы Харди и Харди–Литтлвуда распространяются на всю ось так, чтобы образом четной функции была снова четная функция, а образом нечетной функции – нечетная. Поведение классических операторов Харди и Харди–Литтлвуда в пространствах $\text{Re } H^1(\mathbb{R})$ и $\text{VMO}(\mathbb{R})$ было изучено в работах [5]–[7].

Настоящая работа является продолжением [3]. В § 1 приводятся вспомогательные результаты, часть из которых представляет самостоятельный интерес. В § 2 даются условия ограниченности операторов $\mathcal{B}(\mathbf{P}, f)$ и $\mathcal{H}(\mathbf{P}, f)$ в пространствах Герца. В § 3 изучается поведение этих операторов в пространствах, близких к $\mathbf{P}$ -ичным пространствам Харди и ВМО. В § 4 методами теории приближений исследуется поведение модифицированных операторов Харди и Харди–Литтлвуда в пространствах Гёльдера–Бесова. Наконец, в § 5 обобщается тождество типа Титчмарша–Голубова в случае распределений, в том числе функций из $L^p(\mathbb{R}_+)$, $2 < p < \infty$, и дается оценка преобразования Фурье функций из пространств Харди, обобщающая результаты из [8], [9].

Приведем другие необходимые для дальнейшего определения. Пространства $L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 \leq p < \infty$, состоят из измеримых на $\mathbb{R}_+$ функций с конечной нормой $\|f\|_p = (\int_{\mathbb{R}_+} |f(t)|^p dt)^{1/p}$. Пространство $C^*(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$ состоит из измеримых функций f со свойством $\lim_{h \rightarrow 0} \|f(x \oplus h) - f(x)\|_\infty = 0$, где

$\|f\|_\infty := \sup_{x \in [0, \infty)} |f(x)|$. Пусть $x, y \in \mathbb{R}_+$ записаны в виде (1). Тогда ядро $\chi(x, y)$ определяется равенством

$$\chi(x, y) = \exp \left\{ 2\pi i \left(\sum_{n=1}^{\infty} (x_{-n} y_n + x_n y_{-n}) / p_n \right) \right\}.$$

Для $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ по определению $\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}_+} f(y) \overline{\chi(x, y)} dy$. Если $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 < p \leq 2$, $1/p + 1/p' = 1$, то $\hat{f}(x) := (L^{p'}) \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^m f(y) \overline{\chi(x, y)} dy$ (о корректности последнего определения см. [10, § 6.1]).

Пусть $f \in G_n \cap G^l$ для некоторых $n, l \in \mathbb{Z}$; тогда f принадлежит пространству тест-функций D . Из [10, § 6.2] следует, что при $f \in G_n \cap G^l$ мы имеем $\hat{f} \in G^{-n} \cap G_{-l}$, т. е. D инвариантно относительно $\mathbf{P}$ -ичного преобразования Фурье. Далее будет показано, что если $f \in D$ и $\hat{f}(0) = 0$ (в таком случае записываем $f \in D^0$), то $\mathcal{B}(\mathbf{P}, f) \in D$, а если $f \in D$ и $f(0) = 0$ (записываем $f \in D_0$), то $\mathcal{H}(\mathbf{P}, f) \in D$.

Через D' обозначим множество линейных функционалов на D . Для $f \in D'$ определим $\mathbf{P}$ -ичное преобразование Фурье равенством $(\hat{f}, \varphi) = (f, \hat{\varphi})$ для всех $\varphi \in D$; в частности, так определяется $\hat{f}$ для $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$ при $p > 2$. Если D_1 – некоторое подмножество D и оператор A действует из D_1 в D , то по определению сопряженный оператор A^* действует из D' в D'_1 по формуле $(A^*(f), \varphi) = (f, A(\varphi))$, где $\varphi \in D_1$, $f \in D'$. В частности, согласно лемме 9 определяем $\mathcal{B}(\mathbf{P}, f)$ как оператор из D' в D'_0 , а $\mathcal{H}(\mathbf{P}, f)$ – как оператор из D' в $(D^0)'$. Аналогично, если $f \in D'_0$, то $\hat{f} \in (D^0)'$, и наоборот, поскольку $\varphi \in D^0$ тогда и только тогда, когда $\hat{\varphi} \in D_0$. Изложение свойств D и D' для функций, определенных на поле p -адических чисел, можно найти в [11, гл. 2, § 3] и [12, § 6, 7].

Пусть $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$, $I \in \Omega$ и $f_I = |I|^{-1} \int_I f(t) dt$. Если имеет место $\|f\|_* = \sup_{I \in \Omega} |f - f_I|_I < \infty$, то $f \in \text{ВМО}(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$. Если $\|f\|_{*\delta} = \sup\{|f - f_I|_I : I \in \Omega, 0 < |I| \leq \delta\}$ и $\lim_{\delta \rightarrow 0} \|f\|_{*\delta} = 0$, то $f \in \text{ВМО}(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$. Классические определения $\text{ВМО}(\mathbb{R})$ и $\text{ВМО}(\mathbb{R})$ принадлежат Ф. Джонсу, Л. Ниренбергу [13] и Д. Сарасону [14] соответственно. По аналогии с определением Д. Голдберга [15] введем пространства

$$\text{bmo}(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+) := \left\{ f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+) : \|f\|_{\text{bmo}} = \sup_{|I| \leq 1} |f - f_I|_I + \sup_{|I| \geq 1} |f|_I < \infty \right\},$$

$$\text{vmo}(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+) = \left\{ f \in \text{bmo}(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+) \cap \text{ВМО}(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+) : \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{|I| \geq 1, I \cap [0, m_n) = \emptyset} |f|_I = 0 \right\}.$$

Здесь $I \in \Omega$ и $\text{vmo}(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$ снабжено полунормой $\|f\|_{\text{bmo}}$.

Хорошо известно, что для $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 \leq p \leq \infty$, и $g \in L^1(\mathbb{R}_+)$ свертка $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}_+} f(x \ominus t) g(t) dt$ существует п. в., принадлежит $L^p(\mathbb{R}_+)$ и выполнено неравенство $\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1$. Это верно и для $f \in C^*(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$. Для $D_{m_n}(x) = m_n X_{[0, 1/m_n)}(x)$, $n \in \mathbb{Z}$, где X_E – индикатор E , и $f \in D'$ аналогично [11, с. 125, теорема (3.15)] показывается, что $f * D_{m_n}(x) = (f, D_{m_n}(x \ominus \cdot))$ есть функция

из G_n . В частности, для $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$ и $x \in I_k^n$ имеем равенство

$$f * D_{m_n}(x) = m_n \int_{I_k^n} f(t) dt.$$

Введем две максимальные функции для $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$:

$$M(f)(x) = \sup_{n \in \mathbb{Z}} |f * D_{m_n}(x)|, \quad M_{\text{loc}}(f)(x) = \sup_{n \in \mathbb{Z}_+} |f * D_{m_n}(x)|.$$

Тогда

$$\begin{aligned} H^1(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+) &= \{f \in L^1(\mathbb{R}_+): \|f\|_H := \|M(f)\|_1 < \infty\}, \\ h^1(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+) &= \{f \in L^1(\mathbb{R}_+): \|f\|_H := \|M_{\text{loc}}(f)\|_1 < \infty\}. \end{aligned}$$

При $0 < p \leq 1$, $-1 < \alpha \leq 0$ пространство $H^p_\alpha(\mathbb{R}_+)$ определяется как множество функций $f \in D'$ таких, что

$$\|f\|_{H^p_\alpha} := \|M(f)\|_{p,\alpha} := \left(\int_{\mathbb{R}_+} |M(f)(t)|^p |t|^{\alpha p} dt \right)^{1/p} < \infty.$$

При $p = 1$, $\alpha = 0$ это определение согласуется с данным выше определением пространства $H^1(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$.

Пусть, далее, $B_n := [0, m_n)$, $S_n := [m_{n-1}, m_n)$, $n \in \mathbb{Z}$. Если $\alpha \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$, $0 < q < \infty$, f — измеримая функция и

$$\|f\|_{K(\alpha, p, q; \mathbf{P})} := \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} \|m_l^\alpha X_{S_l} f\|_p^q \right)^{1/q} < \infty,$$

то f принадлежит пространству Герца $K(\alpha, p, q; \mathbf{P})$. Классические пространства Герца определены в [16], а приведенное определение дано Ч. Оневиром в [17], где также определены пространства $\Lambda(\alpha, p, q; \mathbf{P})$, состоящие из функций $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$ таких, что

$$\|f\|_{\Lambda(\alpha, p, q; \mathbf{P})} = \|f\|_p + \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} \|m_l^\alpha (D_{m_l} - D_{m_{l+1}}) * f\|_p^q \right)^{1/q} < \infty.$$

Здесь $\alpha \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$, $0 < q \leq \infty$ и при $q = \infty$ вместо $(\sum_{l \in \mathbb{Z}} \|m_l^\alpha (D_{m_l} - D_{m_{l+1}}) * f\|_p^q)^{1/q}$ берется $\sup_{l \in \mathbb{Z}} \|m_l^\alpha (D_{m_l} - D_{m_{l+1}}) * f\|_p$. В работе [18] дано определение однородных пространств Бесова. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < p, q \leq \infty$; тогда

$$\begin{aligned} B(\alpha, p, q; \mathbf{P}) &= \left\{ f \in (D^0)': \|f\|_{B(\alpha, p, q; \mathbf{P})} \right. \\ &\quad \left. := \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} \|m_l^\alpha (D_{m_l} - D_{m_{l+1}}) * f\|_p^q \right)^{1/q} < \infty \right\}. \end{aligned}$$

Поэтому пространства $\Lambda(\alpha, p, q; \mathbf{P})$ будем называть *пространствами Гёльдера–Бесова*. В лемме 11 будет дано эквивалентное описание $\Lambda(\alpha, p, q; \mathbf{P})$, пригодное для наших целей.

Пусть

$$\mathcal{E}_{m_n}(f)_p = \inf\{\|f - g_n\|_p : g_n \in G_n\},$$

$$\omega_n(f)_p = \sup_{0 < h < 1/m_n} \|f(\cdot \oplus h) - f(\cdot)\|_p, \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Аналогично определяются $\mathcal{E}_{m_n}(f)_H$, $\omega_n(f)_H$, $\mathcal{E}_{m_n}(f)_{\text{VMO}}$, $\omega_n(f)_{\text{VMO}}$ и другие (как следует из леммы 6, пространство $\text{VMO}(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$ сепарабельно). Пусть $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ — убывающая последовательность. Положим по определению

$$H_p^\omega(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+) = \{f \in L^p(\mathbb{R}_+) : \omega_n(f)_p \leq C\omega_n, n \in \mathbb{Z}\}$$

(при $p = \infty$ вместо L^∞ рассматриваем $C^*(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$). Аналогично определяются $H_H^\omega(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$ и $H_{\text{VMO}}^\omega(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$. В работе без ссылок будут использоваться следующие известные факты:

$$\sum_{i=-\infty}^n m_i^\alpha = O(m_n^\alpha), \quad \alpha > 0, \quad \sum_{i=n}^{\infty} m_i^\alpha = O(m_n^\alpha), \quad \alpha < 0,$$

а также то, что для $I, J \in \Omega$ справедливо либо $I \subset J$, либо $J \subset I$, либо $I \cap J = \emptyset$.

§ 1. Вспомогательные утверждения

Приведем три простые технические леммы, установленные в [3]. Их двоичные варианты можно найти в [1], [2].

ЛЕММА 1. Пусть $f \in \text{BMO}(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$, $I, J \in \Omega$, $I \subset J$, $|J| \leq N|I|$. Тогда $|f_I - f_J| \leq N\|f\|_{*,|J|}$. В частности, при $l < n$, $n, l \in \mathbb{Z}$, имеем $|f_{I_0^n} - f_{I_0^l}| \leq N(n-l)\|f\|_{*,m_{-l}}$.

ЛЕММА 2. Пусть $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}$. Тогда существует единственное число $l \in \mathbb{Z}$ такое, что $I_k^n = [k/m_n, (k+1)/m_n) \subset S_l = [m_{l-1}, m_l)$.

ЛЕММА 3. Пусть $\|f\|_\delta^* = \sup_{0 < |I| \leq \delta} \inf_{c \in \mathbb{C}} |f(x) - c|_I$, $\|f\|_*^\delta = \sup_{|I| \geq \delta} |f - f_I|_I$ и квазинорма $\|f\|_*^{\delta*}$ определяется аналогично $\|f\|_*^*$ (везде $I \in \Omega$). Тогда

$$\|f\|_\delta^* \leq \|f\|_*^\delta \leq 2\|f\|_*^*, \quad \|f\|_*^{\delta*} \leq \|f\|_*^\delta \leq 2\|f\|_*^{\delta*}.$$

Далее важную роль будут играть атомарные разложения функций из пространств Харди. Для $H^1(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$ соответствующий результат можно извлечь из работы [19], а используемый нами более общий результат принадлежит Т. Китада [20].

Функция $a(x)$ называется $(p, \infty)_\alpha$ -атомом, если:

- 1) $\text{supp}(a) \subset I_k^n = I$ для некоторых $n \in \mathbb{Z}$ и $k \in \mathbb{Z}_+$;
- 2) $\|a\|_\infty \leq (\mu_\alpha(I))^{-1/p}$, где $d\mu_\alpha(x) = |x|_\mathbf{P}^\alpha dx$;
- 3) $\int_{\mathbb{R}_+} a(x) dx = 0$.

ЛЕММА 4. Пусть $-1 < \alpha \leq 0$ и $0 < p \leq 1$. Тогда $f \in D'$ принадлежит $H_\alpha^p(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$ в том и только в том случае, когда $f = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i a_i$ в D' , где каждая функция a_i есть $(p, \infty)_\alpha$ -атом и $\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^p < \infty$. При этом $\|f\|_{H_\alpha^p}$ эквивалентно $\inf(\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^p)^{1/p}$, где инфимум берется по всем таким представлениям f .

Следующая лемма установлена А. В. Ефимовым [10, § 10.5, теорема 10.5.2].

ЛЕММА 5. Пусть $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 \leq p < \infty$, или $f \in C^*(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$. Тогда

$$\mathcal{E}_{m_n}(f)_p \leq \|f - f * D_{m_n}\|_p \leq \omega_n(f)_p \leq 2\mathcal{E}_{m_n}(f)_p. \quad (2)$$

Несколько следующих лемм посвящены получению аналогов (2) для пространств $\text{VMO}(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$ и $H(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$.

ЛЕММА 6. Пусть $f \in \text{VMO}(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$. Тогда $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{E}_{m_n}(f)_{\text{VMO}} = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varepsilon > 0$. Найдем $n \in \mathbb{N}$ такое, что $\|f\|_{*m_{-n}} < \varepsilon$, и рассмотрим функцию $g = g_n \in G_n$ такую, что $g(x) = f_{I_k^n}$ при $x \in I_k^n$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Оценим $\|f - g\|_*$. Пусть $I = I_k^l$, $l \geq n$. Тогда функция $g(x)$ постоянна на I , в частности $g(x) = g_I$ на I . Значит,

$$|f - g - (f - g)_I|_I \leq |f - f_I|_I + |g - g_I|_I = |f - f_I|_I < \varepsilon.$$

Если $|I| > m_{-n}$, то покроем I полуинтервалами вида I_k^n и обозначим их через $I_1, \dots, I_m$. Тогда

$$|I|^{-1} \int_I |f(x) - g(x) - 0| dx = |I|^{-1} \sum_{j=1}^m \int_{I_j} |f(x) - f_{I_j}| dx < |I|^{-1} \sum_{j=1}^m \varepsilon |I_j| = \varepsilon.$$

Учитывая лемму 3, получаем для всех $I \in \Omega$, что $|f - g - (f - g)_I|_I < 2\varepsilon$. Лемма доказана.

ЛЕММА 7. Пусть $f(x, t) \in \text{VMO}(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$ как функция от x при всех $t \in \mathbb{R}_+$, а интеграл $\Phi_1(x) = \int_{\mathbb{R}_+} |f(x, t)| dt$ существует п. в. и принадлежит $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$. Тогда для $\Phi(x) = \int_{\mathbb{R}_+} f(x, t) dt$ справедливо неравенство $\|\Phi\|_* \leq \int_{\mathbb{R}_+} \|f(\cdot, t)\|_* dt$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $I \in \Omega$. Тогда по теореме Фубини

$$\begin{aligned} |I|^{-1} \int_I |\Phi(x) - \Phi_I| dx &= |I|^{-1} \int_I \left| \int_{\mathbb{R}_+} f(x, t) dt - |I|^{-1} \int_I \int_{\mathbb{R}_+} f(u, t) dt du \right| dx \\ &= |I|^{-1} \int_I \left| \int_{\mathbb{R}_+} \left[f(x, t) - |I|^{-1} \int_I f(u, t) du \right] dt \right| dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}_+} |I|^{-1} \int_I |f(x, t) - |I|^{-1} \int_I f(u, t) du| dx dt \\ &\leq \int_{\mathbb{R}_+} \|f(\cdot, t)\|_* dt. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $f \in \text{VMO}(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$. Тогда при $n \in \mathbb{Z}$ справедливы неравенства

$$\mathcal{E}_{m_n}(f)_{\text{VMO}} \leq \left\| f(\cdot) - m_n \int_0^{1/m_n} f(\cdot \ominus u) du \right\|_* \leq \omega_n(f)_{\text{VMO}} \leq 2\mathcal{E}_{m_n}(f)_{\text{VMO}}. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Правое неравенство доказывается, как в [10, § 10.5, теорема 10.5.2]. Поскольку

$$\int_I m_n \int_0^{1/m_n} |f(x) - f(x \ominus u)| du dx \leq \int_I |f(x)| dx + \int_{I \oplus B_{-n}} |f(x)| dx,$$

где $A \oplus B = \{a \oplus b: a \in A, b \in B\}$, и для любого $I = B_r$ верно $I \oplus B_{-n} = B_{\max(r, -n)}$, то условия леммы 7 выполнены и

$$\left\| f(x) - m_n \int_0^{1/m_n} f(x \ominus u) du \right\|_* \leq m_n \int_0^{1/m_n} \|f(x) - f(x \ominus u)\|_* du \leq \omega_n(f)_{\text{VMO}}.$$

Следствие доказано.

Приведенное далее следствие является аналогом теоремы 1 из [14].

СЛЕДСТВИЕ 2. Для $f \in \text{VMO}(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$ следующие четыре утверждения эквивалентны:

- 1) $f \in \text{VMO}(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$;
- 2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{E}_{m_n}(f)_{\text{VMO}} = 0$;
- 3) функция f принадлежит замыканию $C^*(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+) \cap \text{VMO}(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$ в пространстве $\text{VMO}(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$;
- 4) $\lim_{h \rightarrow 0} \|f(x \oplus h) - f(x)\|_* = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация 1) $\implies$ 2) установлена в лемме 6, утверждение 2) $\implies$ 3) очевидно, а 3) $\implies$ 4) доказывается стандартным образом. Пусть функция $g \in C^*(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+) \cap \text{VMO}(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$ такова, что $\|f - g\|_* < \varepsilon/3$. Тогда

$$\begin{aligned} \|f(x \oplus h) - f(x)\|_* &\leq \|f(x \oplus h) - g(x \oplus h)\|_* + \|g(x \oplus h) - g(x)\|_* + \|g(x) - f(x)\|_* \\ &\leq \frac{2\varepsilon}{3} + 2\|g(x \oplus h) - g(x)\|_\infty. \end{aligned}$$

Ясно, что правая часть последнего неравенства меньше ε при достаточно малых h . Для доказательства 4) $\implies$ 1) по следствию 1 найдем функцию $g(x) = g_n(x) = m_n \int_0^{1/m_n} f(x \ominus u) du$ такую, что $\|f - g\|_* < \varepsilon$. Если $|I| \leq m_{-n}$, то выполнено

$$|I|^{-1} \int_I |f(x) - f_I| dx \leq |I|^{-1} \int_I |f(x) - g(x) - (f - g)_I| dx + |I|^{-1} \int_I |g(x) - g_I| dx < \varepsilon,$$

так как $g(x) = g_I$ на I . Лемма доказана.

Следующая лемма является аналогом леммы 1 из [21, § 4.4] и доказывается близким методом.

ЛЕММА 8. Пусть $f, h \in H^1(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$, $g \in L^1(\mathbb{R}_+)$. Тогда

$$\left\| f * g(x) - h(x) \int_{\mathbb{R}_+} g(t) dt \right\|_H \leq \int_{\mathbb{R}_+} \|f(x \ominus t) - h(x)\|_H |g(t)| dt.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $f \in G_n \cap H^1(\mathbf{P}, \mathbb{R})$. Тогда

$$\begin{aligned}
 \|f * g - h(x)\widehat{g}(0)\|_H &= \left\| \sum_{i=0}^{\infty} \int_{I_i^n} (f(x \ominus t) - h(x))g(t) dt \right\| \\
 &= \left\| \sum_{i=0}^{\infty} (f(x \ominus (i/m_n)) - h(x)) \int_{I_i^n} g(t) dt \right\|_H \\
 &\leq \sum_{i=0}^{\infty} \|f(x \ominus (i/m_n)) - h(x)\|_H \int_{I_i^n} |g(t)| dt \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} \int_{I_i^n} \|f(x \ominus (i/m_n)) - h(x)\|_H |g(t)| dt \\
 &= \int_{\mathbb{R}_+} \|f(x \ominus t) - h(x)\|_H |g(t)| dt.
 \end{aligned}$$

Теперь покажем, что D и, тем более, $\cup_{n=1}^{\infty} G_n$ плотны в $H^1(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$. Из атомарного разложения $f \in H^1(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$ следует, что достаточно доказать возможность приближения элементами D с любой точностью для $\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i(x) \in L^\infty(B_r)$, где $a_i - (1, \infty)_0$ -атомы и r – достаточно большое число ($\text{supp}(a_i) \subset B_r$, $i = 1, \dots, n$). Такая функция приближается элементами из D с любой точностью в $L^p(B_r)$, $1 < p < \infty$. Максимальная функция для функции f , заданной на B_r , совпадает на B_r с сужением максимальной функции для fX_{B_r} , заданной на $\mathbb{R}_+$. В самом деле, пусть $J \in \Omega$ и $J \subset B_r$; тогда $|f_J| \leq M(f)(x)$ для $x \in J$. Если $J \cap B_r = \emptyset$, то $|f_J| = 0 \leq M(f)(x)$ при $x \in J$. Наконец, если $J \supset B_r$, то $|f_J| = |J|^{-1} |\int_{B_r} f(t) dt| \leq m_r^{-1} |\int_{B_r} f(t) dt| \leq M(f)(x)$ для $x \in J$. Поскольку из сходимости в $L^p(B_r)$, $1 < p < \infty$, следует сходимость в $H^1(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$ (см. [21, § 3.3]), из сказанного выше следует плотность D (и, тем более, $\cup_{n=1}^{\infty} G_n$) в $H^1(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$.

Пусть теперь $u_n \in G_n$ таковы, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - u_n\|_H = 0$. Тогда в силу доказанного выше $\|u_m * g - u_n * g\|_H \leq \|u_m - u_n\|_H \|g\|_1$ и последовательность $\{u_n * g\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна в $H^1(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$ и, как следствие, в $L^1(\mathbb{R}_+)$.

Из $\|u_n - f\|_1 \rightarrow 0$ следует, что $u_n * g \rightarrow f * g$ в $L^1(\mathbb{R}_+)$, откуда вытекает, что $f * g \in H^1(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$ и

$$\begin{aligned}
 \|f * g - h\widehat{g}(0)\|_H &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n * g - h\widehat{g}(0)\|_H \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}_+} \|u_n(x \ominus t) - h(x)\|_H |g(t)| dt \\
 &\leq \int_{\mathbb{R}_+} \|f(x \ominus t) - h(x)\|_H |g(t)| dt.
 \end{aligned}$$

Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $f \in H^1(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$. Тогда

$$\mathcal{E}_{m_n}(f)_H \leq \left\| f(\cdot) - m_n \int_0^{1/m_n} f(\cdot \ominus u) du \right\|_* \leq \omega_n(f)_H \leq 2\mathcal{E}_{m_n}(f)_H. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Правое неравенство в (4) доказывается, как в [10, теорема 10.5.2], левое – почти так же, как в [10], но с применением леммы 8 вместо обобщенного неравенства Минковского.

ЛЕММА 9. 1) Пусть $\varphi \in D^0$. Тогда $\mathcal{B}(\mathbf{P}, \varphi) \in D$.

2) Пусть $\varphi \in D_0$. Тогда $\mathcal{H}(\mathbf{P}, \varphi) \in D$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $\text{supp}(\varphi) \subset [0, m_l)$, $l \in \mathbb{Z}$, и $\widehat{\varphi}(0) = \int_0^{m_l} \varphi(t) dt = 0$. Тогда при $k \geq l$ и $x \in S_k$ имеем

$$\mathcal{B}(\mathbf{P}, \varphi)(x) = m_k^{-1} \int_0^{m_k} \varphi(t) dt = 0,$$

т.е. $\mathcal{B}(\mathbf{P}, \varphi) \in G^l$. С другой стороны, если $\varphi \in G_n$ и $k \leq -n$, то на $[0, m_k)$ функция $\varphi(x)$ равна $\varphi(0)$, и тогда на всех S_k , $k \leq -n$, верно следующее:

$$\mathcal{B}(\mathbf{P}, \varphi)(x) = m_k^{-1} \int_0^{m_k} \varphi(t) dt = \varphi(0).$$

Постоянство $\mathcal{B}(\mathbf{P}, \varphi)$ на I_i^n , $i \geq 1$, следует из определения $\mathcal{B}(\mathbf{P}, \varphi)$ и леммы 2.

2) Если $\varphi \in G_n$ и $\varphi(0) = 0$, то $\varphi(x) = 0$ на $[0, m_n^{-1})$, и тогда

$$\mathcal{H}(\mathbf{P}, \varphi)(x) = \sum_{i=k}^{\infty} m_i^{-1} \int_{m_{i-1}}^{m_i} \varphi(t) dt = \sum_{i=-n+1}^{\infty} m_i^{-1} \int_{m_{i-1}}^{m_i} \varphi(t) dt$$

при $x \in S_k$, $k \leq -n+1$, и, тем более, при $x \in [0, m_n^{-1})$. Постоянство $\mathcal{H}(\mathbf{P}, \varphi)$ на I_i^n , $i \geq 1$, следует из определения и леммы 2. Если $\varphi \in G^l$, то $\varphi(t) = 0$ на S_i при $i \geq l+1$, и тогда на S_k , $k \geq l+1$, имеем $\mathcal{H}(\mathbf{P}, \varphi)(x) = 0$. В итоге получаем $\mathcal{H}(\mathbf{P}, \varphi)(x) = 0$ при $x \geq m_l$ или $\mathcal{H}(\mathbf{P}, \varphi) \in G^l$. Лемма доказана.

Следующая лемма является аналогом леммы 2 из [22].

ЛЕММА 10. Пусть $1 \leq p < \infty$, $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ – последовательность такая, что $\omega_n \leq C\omega_{n+1}$ и $\limsup_{n \rightarrow +\infty} p_{n+1}(\omega_{n+1}/\omega_n)^p > 1$, $f \in H_p^\omega$. Тогда

$$\int_0^{1/m_n} |f(t)|^p dt = O(\omega_n^p), \quad n \rightarrow +\infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $J_n = \omega_n^{-p} \int_0^{1/m_n} |f(t)|^p dt$. Поскольку выполнено равенство $(i/m_{n+1}) \oplus I_0^{n+1} = I_i^{n+1}$, $i = 1, \dots, p_{n+1} - 1$, находим, что

$$\begin{aligned} p_{n+1}\omega_{n+1}^p J_{n+1} - \omega_n^p J_n &= p_{n+1} \int_0^{1/m_{n+1}} |f(t)|^p dt - \int_0^{1/m_n} |f(t)|^p dt \\ &= \sum_{i=1}^{p_{n+1}-1} \int_0^{1/m_{n+1}} (|f(t)|^p - |f((i/m_{n+1}) \oplus t)|^p) dt. \end{aligned}$$

Используя неравенство $b^p - a^p \leq p b^{p-1} |b - a|$ при $b = |f(t)|$, $a = |f((i/m_{n+1}) \oplus t)|$ и интегральное неравенство Гёльдера, получаем

$$\begin{aligned} p_{n+1} \omega_{n+1}^p J_{n+1} - \omega_n^p J_n &\leq \sum_{i=1}^{p_{n+1}-1} p \int_0^{1/m_{n+1}} |f(t) - f((i/m_{n+1}) \oplus t)| |f(t)|^{p-1} dt \\ &\leq p \sum_{i=1}^{p_{n+1}-1} \left(\int_0^{1/m_{n+1}} |f(t) - f((i/m_{n+1}) \oplus t)|^p dt \right)^{1/p} \left(\int_0^{1/m_{n+1}} |f(t)|^p dt \right)^{1-1/p} \\ &\leq p N \omega_n (\omega_{n+1}^p J_{n+1})^{1-1/p} \leq C_1 \omega_{n+1}^p J_{n+1}^{1-1/p}. \end{aligned}$$

В итоге имеем

$$J_n \geq (p_{n+1} J_{n+1} - C_1 J_{n+1}^{1-1/p}) (\omega_{n+1}/\omega_n)^p. \quad (5)$$

В силу условия при $n \geq n_0$ и некотором $\varepsilon > 0$ имеем $p_{n+1} (\omega_{n+1}/\omega_n)^p > 1 + \varepsilon$. Пусть $J_{n_0} = K$. Поскольку функция $y = \varepsilon x - C_1 x^{1-1/p}$ положительна при $x > K_1$, то из (5), используя очевидное неравенство $\omega_{n+1}/\omega_n \leq 1$, получаем, что при $J_{n+1} > K_1$ верно $J_n > J_{n+1}$. Пусть последовательность $\{J_n\}_{n=1}^\infty$ не ограничена; тогда найдем $n_1 > n_0$ такое, что $(1 + \varepsilon) J_{n_1+1} - C_1 J_{n_1+1}^{1-1/p} > J_{n_1+1} > \max(K, K_1)$. В силу доказанного выше имеем

$$J_{n_0} > J_{n_0+1} > \dots > J_{n_1+1} > \max(K_1, K) \geq K.$$

Противоречие с выбором K . Значит, последовательность $\{J_n\}_{n=1}^\infty$ ограничена, что и требовалось доказать.

В работе [18] без доказательства приведен ряд норм, для $f \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+)$ эквивалентных норме $\|f\|_{B(\alpha, p, q; \mathbf{P})}$. Мы установим близкий результат с использованием модулей непрерывности, который будет применен в § 4.

ЛЕММА 11. Пусть $\alpha > 0$, $1 \leq p \leq \infty$, $0 < q \leq \infty$. Тогда нормы $\|f\|_{\Lambda(\alpha, p, q; \mathbf{P})}$ и $\|f\|_{\Lambda(\alpha, p, q; \mathbf{P})} := \|f\|_p + (\sum_{l \in \mathbb{Z}} m_l^{\alpha q} \omega_l^q(f)_p)^{1/q}$ эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из неравенства (2) легко следует, что

$$\|f * D_{m_l} - f * D_{m_{l-1}}\|_p \leq \|f - f * D_{m_l}\|_p + \|f - f * D_{m_{l-1}}\|_p \leq 2\omega_{l-1}(f)_p$$

и $\|f\|_{\Lambda(\alpha, p, q; \mathbf{P})} \leq C_1 \|f\|_{\Lambda(\alpha, p, q; \mathbf{P})}$. Согласно (2) также (далее для краткости $\varphi_i = D_{m_i} - D_{m_{i-1}}$) имеем

$$\omega_l(f)_p \leq 2\|f - f * D_{m_l}\|_p \leq 2 \sum_{i=l+1}^{\infty} \|f * \varphi_i\|.$$

При $0 < q \leq 1$ в силу неравенства Йенсена сразу получаем

$$\begin{aligned} \sum_{l \in \mathbb{Z}} m_l^{\alpha q} \omega_l^q(f)_p &\leq 2^q \sum_{l \in \mathbb{Z}} m_l^{\alpha q} \sum_{i=l+1}^{\infty} \|f * \varphi_i\|_p^q \\ &= 2^q \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \|f * \varphi_i\|_p^q \sum_{l=-\infty}^{i-1} m_l^{\alpha q} \leq C_2 \sum_{i=-\infty}^{+\infty} m_i^{\alpha q} \|f * \varphi_i\|_p^q. \end{aligned} \quad (6)$$

При $1 < q < \infty$, следуя идее доказательства теоремы 346 из [4], полагаем $d_l = \sum_{j=-\infty}^l m_j^{\alpha q}$, $A_l = \sum_{i=l+1}^{\infty} \|f * \varphi_i\|_p$. Тогда по теореме Лагранжа

$$\begin{aligned} \sum_{l \in \mathbb{Z}} m_l^{\alpha q} A_l^q &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} (d_l - d_{l+1}) A_l^q = \sum_{l \in \mathbb{Z}} d_l (A_l^q - A_{l+1}^q) \\ &\leq q \sum_{l \in \mathbb{Z}} d_l A_l^{q-1} (A_l - A_{l+1}) \leq C_3 \sum_{l \in \mathbb{Z}} (m_l^{\alpha(q-1)} A_l^{q-1}) (m_l^{\alpha} \|f * \varphi_{l+1}\|_p). \end{aligned}$$

Применяя неравенство Гёльдера с показателями $q' = q/(q-1)$ и q , находим, что

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} m_l^{\alpha q} A_l^q \leq C_3 \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} m_l^{\alpha q} A_l^q \right)^{1-1/q} \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} m_l^{\alpha q} \|f * \varphi_{l+1}\|_p^q \right)^{1/q}. \quad (7)$$

Сокращая обе части (7) на $(\sum_{l \in \mathbb{Z}} m_l^{\alpha q} A_l^q)^{1-1/q}$ (если эта сумма равна нулю, то нужное неравенство очевидно), получаем

$$\begin{aligned} \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} m_l^{\alpha q} \omega_l^q(f)_p \right)^{1/q} &\leq 2 \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} m_l^{\alpha q} A_l^q \right)^{1/q} \leq 2C_3 \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} m_l^{\alpha q} \|f * \varphi_{l+1}\|_p^q \right)^{1/q} \\ &\leq 2C_3 \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} m_l^{\alpha q} \|f * \varphi_l\|_p^q \right)^{1/q}, \end{aligned} \quad (8)$$

поскольку $\alpha q > 0$. Из (6) и (8) следует, что $\|f\|_{\dot{\Lambda}(\alpha, p, q; \mathbf{P})} \leq 2C_3 \|f\|_{\Lambda(\alpha, p, q; \mathbf{P})}$ при всех $\alpha > 0$, $1 \leq p \leq \infty$, $0 < q < \infty$. При $q = \infty$

$$\|f\|_{\dot{\Lambda}(\alpha, p, \infty; \mathbf{P})} = \sup_{l \in \mathbb{Z}} m_l^{\alpha} \omega_l(f)_p \leq 2 \sup_{l \in \mathbb{Z}} \sum_{i=l+1}^{\infty} \|f * \varphi_i\|_p.$$

Однако если $\|f\|_{\Lambda(\alpha, p, q; \mathbf{P})} < \infty$, то $m_l^{\alpha} \|f * \varphi_i\|_p \leq \|f\|_{\Lambda(\alpha, p, q; \mathbf{P})}$ и

$$m_l^{\alpha} \sum_{i=l+1}^{\infty} \|f * \varphi_i\|_p \leq \|f\|_{\Lambda(\alpha, p, q; \mathbf{P})} m_l^{\alpha} \sum_{i=l+1}^{\infty} m_i^{-\alpha} \leq C_4(\alpha) \|f\|_{\Lambda(\alpha, p, q; \mathbf{P})},$$

что и требовалось доказать.

§ 2. Модифицированные операторы Харди и Харди–Литтлвуда в пространствах Герца

ТЕОРЕМА 1. 1) Пусть $1 \leq p < \infty$, $0 < q < \infty$ и $\alpha < 1 - 1/p$. Тогда оператор $B(\mathbf{P}, f)$ ограничен в $K(\alpha, p, q; \mathbf{P})$.

2) Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $0 < q < \infty$ и $\alpha > -1/p$. Тогда оператор $\mathcal{H}(\mathbf{P}, f)$ ограничен в $K(\alpha, p, q; \mathbf{P})$.

3) При $\alpha = 1 - 1/p$ утверждение 1) неверно в общем случае, а при $\alpha = -1/p$ в общем случае неверно утверждение 2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Поскольку оператор $\mathcal{B}(\mathbf{P}, f)$ определен на $\mathbb{R}_+$ для $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$, запишем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{B}(\mathbf{P}, f)\|_{K(\alpha, p, q; \mathbf{P})} &= \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} m_l^{\alpha q} \left\| X_{S_l} m_l^{-1} \int_0^{m_l} f(t) dt \right\|_p^q \right)^{1/q} \\ &\leq \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} m_l^{\alpha q} \left[(m_l - m_{l-1}) \left(m_l^{-1} \int_0^{m_l} |f(t)| dt \right)^p \right]^{q/p} \right)^{1/q} \\ &\leq \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} m_l^{\alpha q + q/p - q} \left(\sum_{i=-\infty}^l \int_{m_{i-1}}^{m_i} |f(t)| dt \right)^q \right)^{1/q}. \end{aligned} \quad (9)$$

Далее положим

$$d_l = \sum_{i=l}^{\infty} m_i^{q(\alpha+1/p-1)}, \quad A_l = \sum_{i=-\infty}^l \int_{m_{i-1}}^{m_i} |f(t)| dt.$$

Воспользуемся теоремой Лагранжа, неравенством Гёльдера и идеей доказательства теоремы 346 из [4]. При $q \geq 1$ получаем

$$\begin{aligned} \sum_{l \in \mathbb{Z}} m_l^{q(\alpha+1/p-1)} A_l^q &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} (d_l - d_{l+1}) A_l^q = \sum_{l \in \mathbb{Z}} d_l (A_l^q - A_{l-1}^q) \\ &\leq \sum_{l \in \mathbb{Z}} d_l q A_l^{q-1} (A_l - A_{l-1}) \leq C_1 \sum_{l \in \mathbb{Z}} m_l^{q(\alpha+1/p-1)} A_l^{q-1} \int_{m_{l-1}}^{m_l} |f(t)| dt \\ &\leq C_1 \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} m_l^{q(\alpha+1/p-1)} A_l^q \right)^{1-1/q} \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} (m_l^{\alpha+1/p-1} \|f X_{S_l}\|_p (m_l - m_{l-1})^{1-1/p})^q \right)^{1/q} \\ &\leq C_1 \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} m_l^{q(\alpha+1/p-1)} A_l^q \right)^{1-1/q} \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} (m_l^\alpha \|f X_{S_l}\|_p)^q \right)^{1/q}. \end{aligned} \quad (10)$$

После сокращения (10) на сомножитель $(\sum_{l \in \mathbb{Z}} m_l^{q(\alpha+1/p-1)} A_l^q)^{1-1/q}$ (если эта сумма равна нулю, то требуемое неравенство очевидно) из (9) и (10) получаем

$$\|\mathcal{B}(\mathbf{P}, f)\|_{K(\alpha, p, q; \mathbf{P})} \leq \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} m_l^{q(\alpha+1/p-1)} A_l^q \right)^{1/q} \leq C_1 \|f\|_{K(\alpha, p, q; \mathbf{P})}, \quad (11)$$

что и требовалось доказать. При $0 < q < 1$, используя неравенство $(\sum a_i)^q \leq \sum a_i^q$, $a_i \geq 0$, получаем аналогично (10):

$$\begin{aligned} \sum_{i=l}^{\infty} m_i^{q(\alpha+1/p-1)} A_i^q &\leq \sum_{i=l}^{\infty} m_i^{q(\alpha+1/p-1)} \sum_{i=-\infty}^l (\|f X_{S_i}\|_p (m_i - m_{i-1})^{1-1/p})^q \\ &\leq \sum_{i=l}^{\infty} m_i^{q(\alpha+1/p-1)} \sum_{i=-\infty}^l \|f X_{S_i}\|_p^q m_i^{q(1-1/p)} \\ &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \|f X_{S_i}\|_p^q m_i^{q(1-1/p)} \sum_{l=i}^{\infty} m_l^{q(\alpha+1/p-1)} \leq C_2 \sum_{i \in \mathbb{Z}} \|f X_{S_i}\|_p^q m_i^{q\alpha}, \end{aligned}$$

откуда вытекает (11) при $0 < q < 1$.

2) Здесь существование оператора $\mathcal{H}(\mathbf{P}, f)$ заранее не очевидно и выводится из полученных ниже оценок. Запишем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{H}(\mathbf{P}, f)\|_{K(\alpha, p, q; \mathbf{P})} &= \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} m_l^{\alpha q} \left\| X_{S_l} \left(\sum_{i=l}^{\infty} m_i^{-1} \int_{m_{i-1}}^{m_i} f(t) dt \right) \right\|_p^q \right)^{1/q} \\ &\leq \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} m_l^{\alpha q} \left[m_l \left(\sum_{i=l}^{\infty} m_i^{-1} \int_{m_{i-1}}^{m_i} |f(t)| dt \right)^p \right]^{q/p} \right)^{1/q} \\ &= \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} m_l^{q(\alpha+1/p)} \left(\sum_{i=l}^{\infty} m_i^{-1} \int_{m_{i-1}}^{m_i} |f(t)| dt \right)^q \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

В этой части доказательства пусть

$$d_l = \sum_{i=-\infty}^l m_i^{q(\alpha+1/p)}, \quad A_l = \sum_{i=l}^{\infty} m_i^{-1} \int_{m_{i-1}}^{m_i} |f(t)| dt$$

– значение $\mathcal{H}(\mathbf{P}, |f|)$ на S_l . Тогда при $q \geq 1$, используя неравенство Гёльдера, находим, что

$$\begin{aligned} \sum_{l \in \mathbb{Z}} m_l^{q(\alpha+1/p)} A_l^q &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} (d_l - d_{l-1}) A_l^q = \sum_{l \in \mathbb{Z}} d_l (A_l^q - A_{l-1}^q) \\ &\leq \sum_{l \in \mathbb{Z}} d_l q S_l^{q-1} (A_l - A_{l-1}) \leq C_3 \sum_{l \in \mathbb{Z}} m_l^{q(\alpha+1/p)} A_l^{q-1} m_l^{-1} \int_{S_l} |f(t)| dt \\ &\leq C_3 \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} m_l^{q(\alpha+1/p)} A_l^q \right)^{1-1/q} \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} (m_l^{\alpha+1/p-1} \|f X_{S_l}\|_p (m_l - m_{l-1})^{1-1/p})^q \right)^{1/q} \\ &\leq C_3 \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} m_l^{q(\alpha+1/p)} A_l^q \right)^{1-1/q} \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} m_l^{\alpha q} \|f X_{S_l}\|_p^q \right)^{1/q}. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь при выполнении преобразования Абеля важно, что $d_l = O(m_l^{q(\alpha+1/p)})$, поэтому ряды $\sum_{l \in \mathbb{Z}} (d_l - d_{l-1}) A_l^q$ и $\sum_{l \in \mathbb{Z}} d_l A_l^q$ сходятся или расходятся одновременно; аналогичное замечание относится к доказательству соотношения (10) и леммы 11. Сокращая (12) на сомножитель $\left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} m_l^{q(\alpha+1/p)} A_l^q \right)^{1-1/q}$, получаем

$$\|\mathcal{H}(\mathbf{P}, f)\|_{K(\alpha, p, q; \mathbf{P})} \leq \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} m_l^{q(\alpha+1/p)} A_l^q \right)^{1/q} \leq C_3 \|f\|_{K(\alpha, p, q; \mathbf{P})} \quad (13)$$

при $\alpha > -1/p$. Если $0 < q < 1$, то аналогично доказательству утверждения 1) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{l \in \mathbb{Z}} m_l^{q(\alpha+1/p)} A_l^q &\leq \sum_{l \in \mathbb{Z}} m_l^{q(\alpha+1/p)} \sum_{i=l}^{\infty} m_i^{-q} (\|f X_{S_i}\|_p m_i^{1-1/p})^q \\ &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \|f X_{S_i}\|_p^q m_i^{-q/p} \sum_{l=-\infty}^i m_l^{q(\alpha+1/p)} \leq C_4 \sum_{i \in \mathbb{Z}} m_i^{q\alpha} \|f X_{S_i}\|_p^q, \end{aligned}$$

откуда вытекает (13) при $0 < q < 1$.

3) Пусть $\alpha = 1 - 1/p$ и $f = X_{[0,1]}$. Тогда

$$\|f\|_{K(\alpha, p, q; \mathbf{P})} = \left(\sum_{l=-\infty}^0 m_l^{\alpha q} (m_l - m_{l-1})^{q/p} \right)^{1/q} < \left(\sum_{l=-\infty}^0 m_l^q \right)^{1/q} \leq C_5 < \infty.$$

С другой стороны,

$$\|\mathcal{B}(\mathbf{P}, f)\|_{K(\alpha, p, q; \mathbf{P})}^q \geq \sum_{l=1}^{\infty} m_l^{\alpha q} [(m_l - m_{l-1})(m_l^{-1})^p]^{q/p} \geq C_6 \sum_{l=1}^{\infty} m_l^{\alpha q + q/p - q} = \infty.$$

Значит, $\mathcal{B}(\mathbf{P}, f)$ не действует в $K(\alpha, p, q; \mathbf{P})$ при $\alpha = 1 - 1/p$.

Пусть теперь $\alpha = -1/p$ и $f(x) = i^{-1-1/q}$ на $[m_{i-1}, m_i]$, $i \geq 1$, и $f(x) = 0$ на интервале $[0, 1)$. Тогда

$$\|f\|_{K(\alpha, p, q; \mathbf{P})}^q = \sum_{l=1}^{\infty} m_l^{-q/p} (m_l - m_{l-1})^{q/p} l^{(-1-1/q)q} \leq \sum_{l=1}^{\infty} l^{-q-1} < \infty.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{H}(\mathbf{P}, f)\|_{K(\alpha, p, q; \mathbf{P})}^q &\geq \sum_{l=1}^{\infty} m_l^{q/p} (m_l - m_{l-1})^{q/p} \left(\sum_{i=l}^{\infty} m_i^{-1} \int_{m_{i-1}}^{m_i} i^{-1-1/q} dt \right)^q \\ &\geq C_7 \sum_{l=1}^{\infty} l^{(-1/q)q} = \infty. \end{aligned}$$

Поэтому $\mathcal{B}(\mathbf{P}, f)$ не действует в $K(\alpha, p, q; \mathbf{P})$ при $\alpha = -1/p$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В работе [17] без доказательства отмечено, что при $p, q \geq 1$ сопряженным пространством к $K(\alpha, p, q; \mathbf{P})$ является $K(-\alpha, p', q'; \mathbf{P})$. Поскольку из ограниченности оператора T в линейном пространстве E следует ограниченность сопряженного оператора T^* в сопряженном пространстве E^* , теорема 1 согласуется с отмеченным в [17] результатом Ч.Оневира.

В заключение параграфа установим

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$, $0 < q < \infty$ и $f \in K(\alpha, p, q; \mathbf{P})$. Тогда $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - f * D_{m_n}\|_{K(\alpha, p, q; \mathbf{P})} = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\sum_{|l| \geq m} m_l^{\alpha q} \|f X_{S_l}\|_p^q < (\varepsilon/4)^q$. Хорошо известно, что L^p -норма $f * D_{m_n}(x) = m_n \int_0^{1/m_n} f(x \oplus t) dt$ на любом $I \in \Omega$ не превосходит L^p -нормы f на этом промежутке. Поэтому

$$\|(f - f * D_{m_n})X_{S_l}\|_p \leq 2\|f X_{S_l}\|_p, \quad \left(\sum_{|l| \geq r} m_l^{\alpha q} \|(f - f * D_{m_n})X_{S_l}\|_p^q \right)^{1/q} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

При $|l| < r$ каждое $\|(f - f * D_{m_n})X_{S_l}\|_p$ стремится к нулю хотя бы в силу неравенств (2), откуда следует данное утверждение.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Вряд ли аналог (2) для $K(\alpha, p, q; \mathbf{P})$ будет иметь место, например, потому, что соответствующая норма не инвариантна относительно сдвига.

§ 3. Операторы $\mathcal{B}(\mathbf{P}, f)$ и $\mathcal{H}(\mathbf{P}, f)$ в пространствах Харди и в пространствах, связанных с $\text{ВМО}(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$

ТЕОРЕМА 2. Оператор $\mathcal{H}(\mathbf{P}, f)$ ограничен в пространствах $H_\alpha^p(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$ при $0 < p \leq 1$ и $-1 < \alpha \leq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 4 об атомарном разложении достаточно показать, что для любого $(p, \infty)_\alpha$ -атома $a(x)$ справедливо неравенство $\|\mathcal{H}(\mathbf{P}, a)\|_{H_\alpha^p} \leq C$. Поскольку при $0 < p \leq 1$ верно $\sum_{i=1}^\infty |\lambda_i| \leq (\sum_{i=1}^\infty |\lambda_i|^p)^{1/p}$, получаем сходимость ряда $\sum_{i=1}^\infty \lambda_i \mathcal{H}(\mathbf{P}, a_i)$ по норме $\|f\|_{H_\alpha^p}$, где $f = \sum_{i=1}^\infty \lambda_i a_i$ есть атомарное разложение из леммы 4.

Пусть I из определения атома a не содержит нуля; тогда по лемме 2 для некоторого $l \in \mathbb{Z}$ верно $I \subset S_l$. В этом случае по определению атома имеем $\int_{S_l} a(t) dt = \int_I a(t) dt = 0$ и, тем более, $\int_{S_i} a(t) dt = 0$ при $i \neq l$. Значит, в этом случае $\mathcal{H}(\mathbf{P}, a) \equiv 0$. Пусть теперь $I = [0, m_n)$. Тогда согласно доказательству леммы 9 имеем $\mathcal{H}(\mathbf{P}, a) = 0$ при $x \geq m_n$. Кроме того,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \mathcal{H}(\mathbf{P}, a)(x) dx &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \int_{m_{i-1}}^{m_i} \mathcal{H}(\mathbf{P}, a)(x) dx \\ &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{j=i}^\infty m_j^{-1} \int_{m_{j-1}}^{m_j} a(y) dy \right) (m_i - m_{i-1}) \\ &= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{i=-\infty}^j (m_i - m_{i-1}) \left(m_j^{-1} \int_{m_{j-1}}^{m_j} a(y) dy \right) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \int_{m_{j-1}}^{m_j} a(y) dy = 0. \end{aligned}$$

Как следствие, получаем $\int_0^{m_n} \mathcal{H}(\mathbf{P}, a)(x) dx = 0$ и $\int_0^{m_k} \mathcal{H}(\mathbf{P}, a)(x) dx = 0$ при $k \geq n$, т.е. для $J = [0, m_k)$, $k \geq n$, верно, что $|J|^{-1} \int_J \mathcal{H}(\mathbf{P}, a)(x) dx = 0$. Если $J = I_i^l$, $i \geq 1$, $l \in \mathbb{Z}$, то по лемме 2 функция $\mathcal{H}(\mathbf{P}, a)$ постоянна на J , т.е. $|J|^{-1} \int_J \mathcal{H}(\mathbf{P}, a)(t) dt = |\mathcal{H}(\mathbf{P}, a)(x)|$ при $x \in J$.

Пусть $J = [0, m_k)$, $k < n$. Тогда

$$\begin{aligned} |J|^{-1} \left| \int_J \mathcal{H}(\mathbf{P}, a)(t) dt \right| &= |J|^{-1} \left| \sum_{i=-\infty}^k \int_{m_{i-1}}^{m_i} \mathcal{H}(\mathbf{P}, a)(t) dt \right| \\ &= m_k^{-1} \left| \left(\sum_{i=-\infty}^k \sum_{j=i}^k + \sum_{i=-\infty}^k \sum_{j=k+1}^n \right) m_j^{-1} \int_{S_j} a(t) dt (m_i - m_{i-1}) \right| \\ &= m_k^{-1} \left| \sum_{j=-\infty}^k \sum_{i=-\infty}^j (m_i - m_{i-1}) m_j^{-1} \int_{S_j} a(t) dt + \sum_{i=-\infty}^k (m_i - m_{i-1}) \mathcal{H}(\mathbf{P}, a)(m_k) \right| \\ &= \left| m_k^{-1} \int_0^{m_k} a(x) dx + \mathcal{H}(\mathbf{P}, a)(m_k) \right|. \end{aligned}$$

Ясно, что для $f \geq 0$ функция $\mathcal{H}(\mathbf{P}, f)(t)$ убывает, поэтому $|\mathcal{H}(\mathbf{P}, a)(m_k)| \leq \mathcal{H}(\mathbf{P}, |a|)(m_k) \leq \mathcal{H}(\mathbf{P}, |a|)(x)$ для $x \in J$. В итоге получаем оценку

$$M(\mathcal{H}(\mathbf{P}, a))(x) \leq M(a)(x) + \mathcal{H}(\mathbf{P}, |a|)(x). \quad (14)$$

Из леммы 4 следует, что $\|M(a)\|_{p,\alpha} \leq C_1$. Осталось оценить $\|\mathcal{H}(\mathbf{P}, |a|)\|_{p,\alpha}$. В силу определения $(p, \infty)_\alpha$ -атомов и условия $0 < p \leq 1$ находим, что

$$\begin{aligned} \|\mathcal{H}(\mathbf{P}, |a|)\|_{p,\alpha}^p &= \sum_{k=-\infty}^n \int_{S_k} |\mathcal{H}(\mathbf{P}, |a|)(x)|^p |x|_p^\alpha dx \\ &\leq C_2 \sum_{k=-\infty}^n m_k^{\alpha+1} \left(\sum_{i=k}^n m_i^{-1} \int_{S_i} |a(x)| dx \right)^p \\ &\leq C_2 \sum_{k=-\infty}^n m_k^{\alpha+1} \sum_{i=k}^n m_i^{-p} (m_i - m_{i-1})^p \mu_\alpha^{-1}(I) \\ &\leq C_3 \sum_{k=-\infty}^n m_k^{\alpha+1} \sum_{i=k}^n m_n^{-\alpha-1} \leq C_4, \end{aligned}$$

поскольку

$$\begin{aligned} \mu_\alpha(I) &= \int_0^{m_n} |x|_{\mathbf{P}}^\alpha dx \geq \int_0^{m_n} x^\alpha dx \geq C_5 m_n^{\alpha+1}, \\ m_n^{-\alpha-1} \sum_{k=-\infty}^n m_k^{\alpha+1} \sum_{i=k}^n 1 &= m_n^{-\alpha-1} \sum_{i=-\infty}^n \sum_{k=-\infty}^i m_k^{\alpha+1} \\ &\leq C_6 m_n^{-\alpha-1} \sum_{i=-\infty}^n m_i^{\alpha+1} = C_7 < \infty. \end{aligned}$$

В итоге из (14) выводим, что $\|M(\mathcal{H}(\mathbf{P}, a))\|_{p,\alpha} \leq C_1 + C_4$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В неравенстве (14) вместо атома a можно брать достаточно произвольную функцию, например $f \in H(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$. В таком виде оценка (14) установлена в [3]. Здесь обоснование (14) дано для полноты изложения.

Для $\mathcal{B}(\mathbf{P}, f)$ и $H(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$ получим более слабый результат.

ТЕОРЕМА 3. Оператор $\mathcal{B}(\mathbf{P}, f)$ ограниченно действует из $H(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$ в пространство $L^1(\mathbb{R}_+)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a(x) - (1, \infty)_0$ -атом. Аналогично доказательству теоремы 2 если мы покажем, что $\|\mathcal{B}(\mathbf{P}, a)\|_1 \leq C_1$, то теорема будет доказана. Пусть $\text{supp}(a) \subset I \in \Omega$ и $0 \notin I$. Тогда $I \subset S_l = [m_{l-1}, m_l]$ для некоторого $l \in \mathbb{Z}$ по лемме 2. При $k \leq l-1$ имеем $m_k^{-1} \int_0^{m_k} a(x) dx = m_k^{-1} \int_0^{m_k} 0 dx = 0$, а при $k \geq l$ также $m_k^{-1} \int_0^{m_k} a(x) dx = m_k^{-1} \int_I a(x) dx = 0$. Значит, в этом случае $\mathcal{B}(\mathbf{P}, a) \equiv 0$. Пусть I из определения атома имеет вид $I = [0, m_n)$. Тогда $m_k^{-1} \int_0^{m_k} a(x) dx = 0$ при $k \geq n$, а при $k < n$ и $x \in S_k$ имеем $|\mathcal{B}(\mathbf{P}, a)(x)| \leq m_k^{-1} \int_0^{m_k} m_n^{-1} dt = m_n^{-1}$. Значит, $|\mathcal{B}(\mathbf{P}, a)(x)| \leq m_n^{-1}$ при всех $x \in [0, m_{n-1})$ и, тем более, при $x \in [0, m_n)$, откуда $\|\mathcal{B}(\mathbf{P}, a)\|_1 \leq 1$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 4. Оператор $\mathcal{H}(\mathbf{P}, f)$ ограниченно действует из $L^\infty(\mathbb{R}_+)$ в пространство $\text{ВМО}(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно, что $\text{ВМО}(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$ есть сопряженное пространство к $H(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$, поэтому результат следствия вытекает из теоремы 3.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Теорема 3 и следствие 4 являются аналогами теорем Ф. Морица [7] для классических операторов Харди и Харди–Литтлвуда и четных функций из соответствующих классов функций, заданных на прямой.

ТЕОРЕМА 4. Оператор $\mathcal{H}(\mathbf{P}, f)$ ограничен в $h^1(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$, а оператор $\mathcal{B}(\mathbf{P}, f)$ ограничен в $\text{bmo}(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При доказательстве (14) (или см. [3, доказательство теоремы 4]) было показано, что для $x \in J \in \Omega$ либо $|J|^{-1} \left| \int_J \mathcal{H}(\mathbf{P}, f)(t) dt \right| = |\mathcal{H}(\mathbf{P}, f)(x)|$ в случае $0 \notin J$, либо

$$|J|^{-1} \left| \int_J \mathcal{H}(\mathbf{P}, f)(t) dt \right| = \left| \mathcal{H}(\mathbf{P}, f)(m_k) + m_k^{-1} \int_0^{m_k} f(x) dx \right|$$

в случае $J = [0, m_k)$. Поэтому мы получаем

$$M_{\text{loc}}(\mathcal{H}(\mathbf{P}, f))(x) = \sup_{|J| \leq 1, x \in J} |J|^{-1} \left| \int_J \mathcal{H}(\mathbf{P}, f)(t) dt \right| \leq M_{\text{loc}}(f)(x) + \mathcal{H}(\mathbf{P}, |f|)(x)$$

и, как следствие, в силу [3, лемма 8] имеем

$$\|\mathcal{H}(\mathbf{P}, f)\|_{h^1} \leq \|f\|_{h^1} + \|\mathcal{H}(\mathbf{P}, f)\|_1 \leq \|f\|_{h^1} + \|f\|_1 \leq 2\|f\|_{h^1}.$$

Здесь использован тот факт, что $f * D_{m_n}(x) \rightarrow f(x)$ при $n \rightarrow +\infty$ п. в. на $\mathbb{R}_+$ для $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$, поэтому $\sup_{n \geq 0} |f * D_{m_n}(x)| \geq |f(x)|$ п. в. на $\mathbb{R}_+$. Пусть теперь $I \in \Omega$, $|I| \leq 1$. Тогда если $0 \notin I$, то функция $\mathcal{B}(\mathbf{P}, f)$ постоянна на I и $|\mathcal{B}(\mathbf{P}, f) - c_0(I)|_I = 0$ для подходящего $c_0(I)$. С другой стороны, для $I = [0, m_n) = I_0^{(-n)}$, $n \leq 0$, по лемме 1 имеем

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}(\mathbf{P}, f) - f_I|_I &= m_n^{-1} \sum_{i=-\infty}^n \int_{m_{i-1}}^{m_i} |\mathcal{B}(\mathbf{P}, f)(x) - f_{I_0^{(-n)}}| dx \\ &= m_n^{-1} \sum_{i=-\infty}^n (m_i - m_{i-1}) |f_{I_0^{(-n)}} - f_{I_0^{(-i)}}| \\ &\leq N m_n^{-1} \sum_{i=-\infty}^n (n-i)(m_i - m_{i-1}) \|f\|_{*m_n} \leq N \|f\|_{\text{bmo}}, \end{aligned}$$

ПОСКОЛЬКУ

$$\begin{aligned} \sum_{i=-\infty}^n (n-i)(m_i - m_{i-1}) &= \sum_{i=-\infty}^n \sum_{j=i+1}^n (m_i - m_{i-1}) \\ &= \sum_{j=-\infty}^n \sum_{i=-\infty}^{j-1} (m_i - m_{i-1}) = \sum_{j=-\infty}^n m_{j-1} < m_n. \end{aligned}$$

В силу леммы 3

$$\|\mathcal{B}(\mathbf{P}, f)\|_{*1} \leq 2\|\mathcal{B}(\mathbf{P}, f)\|_1^* \leq 2N\|f\|_{\text{bmo}}. \quad (15)$$

Теперь пусть $|I| \geq 1$. Если $0 \notin I$, то $I \subset [m_{k-1}, m_k)$, причем $m_k > 1$, и тогда

$$|\mathcal{B}(\mathbf{P}, f)|_I = \left| m_k^{-1} \int_0^{m_k} f(t) dt \right| \leq \|f\|_{\text{bmo}}.$$

Если $I = [0, m_k)$, $k \geq 0$, то

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}(\mathbf{P}, f)|_I &= m_k^{-1} \left(\int_0^1 |\mathcal{B}(\mathbf{P}, f)(t)| dt + \int_1^{m_k} |\mathcal{B}(\mathbf{P}, f)(t)| dt \right) \\ &= m_k^{-1} \left(\int_0^1 |\mathcal{B}(\mathbf{P}, f)(t) - f_{[0,1)}| dt + |f_{[0,1)}| + \sum_{i=1}^k \int_{m_{i-1}}^{m_i} \left| m_i^{-1} \int_0^{m_i} f(u) du \right| dt \right) \\ &\leq m_k^{-1} \left(\|f\|_1^* + \|f\|_{\text{bmo}} + \sum_{i=1}^k (m_i - m_{i-1}) \|f\|_{\text{bmo}} \right) \leq 2\|f\|_{\text{bmo}}. \end{aligned} \quad (16)$$

Из (15) и (16) следует, что

$$\|\mathcal{B}(\mathbf{P}, f)\|_{\text{bmo}} = \|\mathcal{B}(\mathbf{P}, f)\|_{*1} + \sup_{|I| \geq 1} |\mathcal{B}(\mathbf{P}, f)|_I \leq (2N + 2)\|f\|_{\text{bmo}}.$$

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 5. Оператор $\mathcal{B}(\mathbf{P}, f)$ отображает $\text{vmo}(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$ в себя, и его норма не превосходит $2N + 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in \text{vmo}(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$, $|I| \geq 1$, $I \cap [0, m_n) = \emptyset$. Тогда $I \subset S_l$ для некоторого $l \geq 1$ и $\mathcal{B}(\mathbf{P}, f) = m_l^{-1} \int_0^{m_l} f(t) dt$ на I . Имеем

$$|\mathcal{B}(\mathbf{P}, f)|_I = \left| m_l^{-1} \int_0^{m_l} f(t) dt \right| \leq m_l^{-1} \left(\left| \int_0^1 f(t) dt \right| + \sum_{i=2}^{m_l} \int_{i-1}^i |f(t)| dt \right). \quad (17)$$

Если $f \in \text{vmo}(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$, то из определения следует, что $\int_{i-1}^i |f(t)| dt \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$. По теореме о регулярности $(C, 1)$ -метода правая часть (17) стремится к нулю при $l \rightarrow +\infty$ (т.е. при $n \rightarrow +\infty$). В результате получаем

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{|I| \geq 1, I \cap [0, m_n) = \emptyset} |\mathcal{B}(\mathbf{P}, f)|_I = 0.$$

Осталось отметить, что по теореме 4 имеем $\mathcal{B}(\mathbf{P}, f) \in \text{bmo}(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$, а согласно [3, доказательство теоремы 3] (см. также теорему 7 настоящей работы) верно, что $\mathcal{B}(\mathbf{P}, f) \in \text{VMO}(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$. Следствие доказано.

§ 4. Операторы $\mathcal{B}(\mathbf{P}, f)$ и $\mathcal{H}(\mathbf{P}, f)$ в пространствах Гёльдера–Бесова

Сначала изучим действие операторов в $H_p^\omega(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$, $1 \leq p \leq \infty$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $f \in H_p^\omega(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$, $1 < p \leq \infty$, и $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \downarrow$. Тогда имеем $\mathcal{B}(\mathbf{P}, f) \in H_p^\omega(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\omega_n(f)_p \leq C_1\omega_n$. Тогда согласно (2) существует функция $g_n \in G_n$ такая, что $\|f - g_n\|_p \leq C_1\omega_n$. По доказательству леммы 9 имеем $\mathcal{B}(\mathbf{P}, g_n) \in G_n$. Поскольку оператор $\mathcal{B}(\mathbf{P}, f)$ ограничен в пространствах $L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 < p \leq \infty$, то

$$\mathcal{E}_{m_n}(\mathcal{B}(\mathbf{P}, f))_p \leq \|\mathcal{B}(\mathbf{P}, f) - \mathcal{B}(\mathbf{P}, g_n)\|_p \leq C_2\|f - g_n\|_p \leq C_2C_1\omega_n.$$

Снова применяя (2), получаем $\omega_n(\mathcal{B}(\mathbf{P}, f))_p \leq 2C_2C_1\omega_n$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $f \in H_p^\omega(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$, $1 \leq p < \infty$, $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \downarrow$, $\omega_n \leq C\omega_{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}$, и $\liminf_{n \rightarrow \infty} p_{n+1}(\omega_{n+1}/\omega_n)^p > 1$. Тогда $\mathcal{H}(\mathbf{P}, f) \in H_p^\omega(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\omega_n(f) \leq C_1\omega_n$. Найдем функцию $g_n \in G_n$ такую, что $\|f - g_n\|_p \leq C_1\omega_n$. Если $g_n(0) \neq 0$, то пусть $g_n^0(x) = 0$ на $[0, 1/m_n)$ и $g_n^0(x) = g_n(x)$ на $[1/m_n, \infty)$. Тогда по лемме 10 имеем

$$\begin{aligned} \|f - g_n^0\|_p &\leq \|(f - g_n^0)X_{[0, 1/m_n)}\|_p + \|(f - g_n^0)X_{[1/m_n, +\infty)}\|_p \\ &\leq \left(\int_0^{1/m_n} |f(t)|^p dt \right)^{1/p} + \|f - g_n\|_p \leq C_2\omega_n. \end{aligned}$$

Согласно доказательству леммы 9 имеем $\mathcal{H}(\mathbf{P}, g_n^0) \in G_n$. Поскольку оператор $\mathcal{H}(\mathbf{P}, f)$ ограничен в $L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 \leq p < \infty$, то

$$\mathcal{E}_{m_n}(\mathcal{H}(\mathbf{P}, f))_p \leq \|\mathcal{H}(\mathbf{P}, f) - \mathcal{H}(\mathbf{P}, g_n^0)\|_p \leq C_3\|f - g_n^0\|_p \leq C_3C_2\omega_n,$$

и в итоге получаем $\omega_n(\mathcal{H}(\mathbf{P}, f))_p \leq 2C_3C_2\omega_n$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 6. В условиях теоремы 5 имеем $\omega_n(\mathcal{B}(\mathbf{P}, f)) \leq C\omega_n(f)$. Если $f \in H_p^\omega(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$, $1 \leq p < \infty$, и $\omega_n \equiv \omega_n(f)_p$ удовлетворяет условиям теоремы 6, то $\omega_n(\mathcal{H}(\mathbf{P}, f)) \leq C\omega_n(f)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Условие теоремы 6 выполняется для классов $\text{Lip}(\alpha, p)$, $0 < \alpha < 1/p$, т.е. при $\omega_n = m_n^{-\alpha}$, $0 < \alpha < 1/p$. Близкий результат для оператора $\Phi(f) = \int_x^\pi f(u) \text{ctg}(u/2) du$ и функции $f \in L_{2\pi}^p$ доказан А. А. Конюшковым [23].

СЛЕДСТВИЕ 7. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$, $0 < q \leq \infty$ и $\dot{\Lambda}(\alpha, p, q; \mathbf{P})$ – пространство функций с конечной нормой $\|\cdot\|_{\dot{\Lambda}(\alpha, p, q; \mathbf{P})}$. Тогда из $f \in \dot{\Lambda}(\alpha, p, q; \mathbf{P})$ следует, что $\mathcal{B}(\mathbf{P}, f) \in \dot{\Lambda}(\alpha, p, q; \mathbf{P})$. В частности, если $\alpha > 0$, то из $f \in \Lambda(\alpha, p, q; \mathbf{P})$ следует $\mathcal{B}(\mathbf{P}, f) \in \Lambda(\alpha, p, q; \mathbf{P})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из следствия 6 и определения $\|\cdot\|_{\dot{\Lambda}(\alpha, p, q; \mathbf{P})}$.

Поскольку принятое в настоящей работе определение $\text{VMO}(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$ отличается от определения из [3] отметим следующий результат, соответствующий [3, теорема 3].

ТЕОРЕМА 7. Пусть $f \in \text{VMO}(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$. Тогда $\mathcal{B}(\mathbf{P}, f) \in \text{VMO}(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 6 найдем функции $g_n \in G_n$, $n \in \mathbb{Z}$, такие, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - g_n\|_* = 0$. Согласно [3, теорема 2] оператор $\mathcal{B}(\mathbf{P}, f)$ ограничен

в $\text{ВМО}(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$, поэтому $\|\mathcal{B}(\mathbf{P}, f) - \mathcal{B}(\mathbf{P}, g - n)\|_* \leq C_1 \|f - g_n\|_*$, а по лемме 9 имеем $\mathcal{B}(\mathbf{P}, g_n) \in G_n$. Значит, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{m_n}(\mathcal{B}(\mathbf{P}, f)) = 0$, и по следствию 2 находим, что $\mathcal{B}(\mathbf{P}, f) \in \text{ВМО}(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$.

Аналогично теореме 5 с использованием теоремы 7 или [3, теорема 2] доказывается

ТЕОРЕМА 8. Пусть $f \in H_{\text{ВМО}}^\omega(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$, где $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \downarrow$. Тогда имеем $\mathcal{B}(\mathbf{P}, f) \in H_{\text{ВМО}}^\omega(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$.

ТЕОРЕМА 9. Пусть $f \in H_H^\omega(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$, $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \downarrow$, $\omega_n \leq C\omega_{n+1}$ при $n \in \mathbb{Z}$ и $\liminf_{n \rightarrow \infty} p_{n+1}\omega_n/\omega_{n+1} > 1$. Тогда $\mathcal{H}(\mathbf{P}, f) \in H_H^\omega(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\omega_n(f)_H \leq C_1\omega_n$, $n \in \mathbb{Z}$. Для любого $n \in \mathbb{Z}$ найдем функцию $g_n \in G_n$ такую, что $\|f - g_n\|_H \leq C_1\omega_n$. Если $g_n(0) \neq 0$, то пусть $h_n(x) = g_n(0)$ при $x \in [0, 1/m_{n+1})$, $h_n(x) = -g_n(0)/(p_{n+1} - 1)$ при $x \in [1/m_{n+1}, 1/m_n)$ и $h_n(x) = 0$ при $x \in [1/m_n, +\infty)$. Тогда $h_n \in G_{n+1}$ и $\int_0^{1/m_n} h_n(x) dx = 0$. Согласно [9, лемма 4.1] верно, что $h_n \in H(\mathbf{P}, \mathcal{R}_+)$ и норма $\|h_n\|_H$ не превосходит $m_n^{-1}|g_n(0)|$ (если $|h_n(x)| \leq |g_n(0)|$, то $M(h_n)(x) \leq |g_n(0)|$, $x \in \mathbb{R}_+$, и так как $\int_0^{1/m_n} h_n(x) dx = 0$, то вне интервала $[0, 1/m_n)$ выполнено $M(h_n)(x) = 0$). В силу леммы 10 и неравенства $\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_H$ получаем

$$\begin{aligned} \|f - (g_n - h_n)\|_H &\leq \|f - g_n\|_H + \|h_n\|_H \leq C_1\omega_n + |g_n(0)|m_n^{-1} \\ &= C_1\omega_n + \|g_n X_{[0, 1/m_n)}\|_1 \\ &\leq C_1\omega_n + \|(f - g_n)X_{[0, 1/m_n)}\|_1 + \|fX_{[0, 1/m_n)}\|_1 \\ &\leq (2C_1 + C_2)\omega_n. \end{aligned}$$

Далее согласно лемме 9 и условию $\omega_n \leq C\omega_{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}$, имеем $\mathcal{H}(\mathbf{P}, g_n - h_n) \in G_{n+1}$ и

$$\mathcal{E}_{m_n}(\mathcal{H}(\mathbf{P}, f))_H \leq \|\mathcal{H}(\mathbf{P}, f) - \mathcal{H}(\mathbf{P}, g_n - h_n)\|_H \leq C_3 \|f - g_n + h_n\|_H \leq C_4\omega_{n+1}.$$

В силу произвольности n из (4) находим, что $\mathcal{H}(\mathbf{P}, f) \in H_H^\omega(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Условие теоремы 9 выполняется для $f \in \text{Lip}(\alpha, 1)$, $0 < \alpha < 1$.

ТЕОРЕМА 10. 1) Пусть $f \in H_H^\omega(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$, $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \downarrow$. Тогда имеем $\mathcal{B}(\mathbf{P}, f) \in H_1^\omega(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$.

2) Пусть $f \in H^\omega(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$, $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \downarrow$ и $f(0) = 0$. Тогда $\mathcal{H}(\mathbf{P}, f) \in H_{\text{ВМО}}^\omega(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1) доказывается аналогично теореме 5 с использованием теоремы 3.

Докажем утверждение 2). Пусть $g_n \in G_n$, $\|f - g_n\|_\infty \leq C_1\omega_n$ и $f(0) = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \|g_n(0)X_{[0, 1/m_n)}\|_\infty &\leq \|f - g_n\|_\infty + \|fX_{[0, 1/m_n)}\|_\infty \\ &\leq C_1\omega_n + \sup_{x \in [0, 1/m_n)} |f(x) - f(0)| \leq C_2\omega_n. \end{aligned}$$

Снова полагаем $g_n^0 = g_n(1 - X_{[0,1/m_n)})$, и тогда

$$\|f - g_n^0\|_\infty \leq \|f - g_n\|_\infty + \|g_n - g_n^0\|_\infty \leq C_1\omega_n + \|g_n(0)X_{[0,1/m_n)}\|_\infty \leq (C_1 + C_2)\omega_n.$$

Поскольку по лемме 9 верно, что $\mathcal{H}(\mathbf{P}, g_n^0) \in G_n$, используя следствие 4, получаем

$$\mathcal{E}_{m_n}(\mathcal{H}(\mathbf{P}, f))_{\text{VMO}} \leq \|\mathcal{H}(\mathbf{P}, f) - \mathcal{H}(\mathbf{P}, g_n^0)\|_* \leq C_3\|f - g_n^0\|_\infty \leq C_3(C_1 + C_2)\omega_n,$$

и согласно (3) получаем $\mathcal{H}(\mathbf{P}, f) \in H_{\text{VMO}}^\omega(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$. Теорема доказана.

Можно определить $\dot{\Lambda}(\alpha, \text{VMO}, q; \mathbf{P})$ для $\alpha \in \mathbb{R}$, $q \in (0, \infty)$ как пространство функций f с конечной квазинормой

$$\|f\|_{\dot{\Lambda}(\alpha, \text{VMO}, q; \mathbf{P})} = \|f\|_* + \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} (m_n^\alpha \omega_n(f)_{\text{VMO}})^q \right)^{1/q}$$

и аналогично ввести пространства $\dot{\Lambda}(\alpha, H, q; \mathbf{P})$.

СЛЕДСТВИЕ 8. 1) Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$, $q \in (0, \infty)$, $f \in \dot{\Lambda}(\alpha, \text{VMO}, q; \mathbf{P})$. Тогда имеем $\mathcal{B}(\mathbf{P}, f) \in \dot{\Lambda}(\alpha, \text{VMO}, q; \mathbf{P})$.

2) Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$, $q \in (0, \infty)$, $f \in \dot{\Lambda}(\alpha, H, q; \mathbf{P})$. Тогда $\mathcal{B}(\mathbf{P}, f) \in \dot{\Lambda}(\alpha, 1, q; \mathbf{P})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала из теоремы 8 и теоремы 10 получаем

$$\omega_n(\mathcal{B}(\mathbf{P}, f))_{\text{VMO}} \leq C_1\omega_n(f)_{\text{VMO}}, \quad \omega_n(\mathcal{B}(\mathbf{P}, f))_1 \leq C_1\omega_n(f)_H$$

соответственно, затем по определению пространств $\dot{\Lambda}$ получаем утверждение следствия.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Результаты теорем 5, 6 можно записать как ограниченность операторов в соответствующих пространствах $H_p^\omega(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$. То же относится к другим результатам.

§ 5. Заключительные замечания

В работе [1] доказаны равенства

$$\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{P}, f)(x) = \mathcal{H}(\mathbf{P}, \hat{f})(x), \quad \widehat{\mathcal{H}}(\mathbf{P}, f)(x) = \mathcal{B}(\mathbf{P}, \hat{f})(x) \quad (18)$$

для п. в. $x \in \mathbb{R}_+$ при условии $p_i \equiv 2$ и $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 < p \leq 2$. Автор распространил [3, теорема 1] этот результат на ограниченные последовательности $\mathbf{P}$. Обобщением равенств (18) является

ТЕОРЕМА 11. Пусть $f \in D'$. Тогда:

- 1) $\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{P}, f) = \mathcal{H}(\mathbf{P}, \hat{f})$ в пространстве $(D^0)'$;
- 2) $\widehat{\mathcal{H}}(\mathbf{P}, f)(x) = \mathcal{B}(\mathbf{P}, \hat{f})$ в пространстве D'_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Как указано во введении, имеем $\mathcal{B}(\mathbf{P}, f) \in D'_0$, а $\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{P}, f) \in (D^0)'$. Для $\varphi \in D^0$ по определениям преобразования Фурье и сопряженного оператора для распределения имеем

$$(\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{P}, f), \varphi) = (\mathcal{B}(\mathbf{P}, f), \widehat{\varphi}) = (f, \mathcal{H}(\mathbf{P}, \widehat{\varphi})). \quad (19)$$

В силу (18), а также определений преобразования Фурье и сопряженного оператора получаем

$$(f, \mathcal{H}(\mathbf{P}, \widehat{\varphi})) = (f, \widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{P}, \varphi)) = (\widehat{f}, \mathcal{B}(\mathbf{P}, \varphi)) = (\mathcal{H}(\mathbf{P}, \widehat{f}), \varphi). \quad (20)$$

Важно то, что благодаря лемме 9 имеют место включения $\mathcal{B}(\mathbf{P}, \varphi), \widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{P}, \varphi) \in D$ и что $f, \widehat{f} \in D'$, $\mathcal{H}(\mathbf{P}, \widehat{f}) \in (D^0)'$.

2) Как указано во введении, $\mathcal{H}(\mathbf{P}, f) \in (D^0)'$, $\widehat{\mathcal{H}}(\mathbf{P}, f) \in D'_0$, поэтому, используя определения и равенства (18), для $\varphi \in D_0$ получаем

$$\begin{aligned} (\widehat{\mathcal{H}}(\mathbf{P}, f), \varphi) &= (\mathcal{H}(\mathbf{P}, f), \widehat{\varphi}) = (f, \mathcal{B}(\mathbf{P}, \widehat{\varphi})) = (f, \widehat{\mathcal{H}}(\mathbf{P}, \varphi)) \\ &= (\widehat{f}, \mathcal{H}(\mathbf{P}, \varphi)) = (\mathcal{B}(\mathbf{P}, \widehat{f}), \varphi). \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь важно, что по лемме 9 справедливы включения $\mathcal{H}(\mathbf{P}, \varphi), \widehat{\mathcal{H}}(\mathbf{P}, \varphi) \in D$ и $\mathcal{B}(\mathbf{P}, \widehat{f}) \in D'_0$, $f, \widehat{f} \in D'$. Из (19) и (20) вытекает первое равенство теоремы, а из (21) – второе. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 9. Пусть $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $2 < p \leq \infty$. Тогда имеют место утверждения теоремы 11.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Было бы интересным дать такое определение $\widehat{f}$ для $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $2 < p \leq \infty$, чтобы равенства (18) выполнялись п. в. на $\mathbb{R}_+$.

Как отмечалось во введении, неравенство $\|\widehat{f}(x)x^{-1}\|_1 \leq C\|f\|_H$ для $f \in H^1(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$ было доказано в [8] при $p_i \equiv 2$ и в [9] для ограниченных $\mathbf{P}$. Распространим его на $H^p_0(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$, $0 < p < 1$.

ТЕОРЕМА 12. Пусть $f \in H^p(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+) := H^p_0(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$, $0 < p < 1$. Тогда существует продолжение оператора $F(f) = \widehat{f}$ с пространства $L^1(\mathbb{R}_+) \cap H^p(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$ на $H^p(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$ и для этого продолжения справедливо неравенство

$$\|F(f)\|_{p,p-2} \leq C\|f\|_{H^p_0}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a(x) - (p, \infty)_0$ -атом и $I = I^n_k$ – полуинтервал из определения атома. Согласно [10, § 1.5, теорема 1.5.4] при $x \in [0, m_n)$ ядро $\chi(x, t)$ постоянно на всех I^n_i , $i \in \mathbb{Z}_+$. Поэтому при $x \in [0, m_n)$ имеем

$$\widehat{a}(x) = \int_{\mathbb{R}_+} a(t) \overline{\chi(x, t)} dt = \sum_{i=0}^{\infty} \int_{I^n_i} a(t) \overline{\chi(x, t)} dt = \overline{\chi(x, k/m_n)} \int_{I^n_k} a(t) dt = 0.$$

При остальных x верна оценка $|\widehat{a}(x)| \leq \int_I |a(t)| dt \leq m_n^{1/p-1}$, откуда выводим, что

$$\int_{\mathbb{R}_+} |\widehat{a}(x)|^p |x|^{p-2} dx = \sum_{i=n+1}^{\infty} \int_{m_{i-1}}^{m_i} |\widehat{a}(x)|^p dx m_i^{p-2} \leq m_n^{1-p} \sum_{i=n+1}^{\infty} m_i^{p-1} \leq C_1,$$

поскольку $p - 1 < 0$. Пусть $f \in L^1(\mathbb{R}_+) \cap H^p(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$ и $f = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i a_i$ в D' , где $a_i - (p, \infty)_0$ -атомы и $C_2 \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^p \leq \|f\|_{H_0^p}^p < \infty$. Тогда $\hat{f} \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+) \subset D'$ и для любой функции $\varphi \in D$ имеем $(\hat{f} - \sum_{i=1}^n \lambda_i \hat{a}_i, \varphi) = (f - \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i, \hat{\varphi}) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$, так как $\hat{\varphi} \in D$. Значит, $\hat{f} = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \hat{a}_i$ в D' . Поскольку $\|g_1 + g_2\|_{p,p-2}^p \leq \|g_1\|_{p,p-2}^p + \|g_2\|_{p,p-2}^p$ и $\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^p < \infty$, то ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \hat{a}_i$ сходится в $L_{p-2}^p(\mathbb{R}_+)$. Отсюда следует существование подпоследовательности $\{\sum_{i=1}^{n_j} \lambda_i \hat{a}_i\}_{j=1}^{\infty} =: \{F_j\}_{j=1}^{\infty}$, сходящейся п. в. к некоторой измеримой функции Φ из $L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+)$ (иначе Φ не задает линейный функционал на D). Из равенств $(\hat{f} - \Phi, \varphi) = 0$ для всех $\varphi \in D$ следует, что $\hat{f}(x) = \Phi(x)$ п. в. (см. [10, теоремы 2.8.3, 2.8.4] при $p_i \equiv 2$). Поэтому

$$|\hat{f}(x)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i| |\hat{a}_i(x)|,$$

$$\int_{\mathbb{R}_+} |\hat{f}(x)|^p |x|_{\mathbf{P}}^{p-2} dx \leq \int_{\mathbb{R}_+} \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^p |\hat{a}_i(x)|^p |x|_{\mathbf{P}}^{p-2} dx \leq C_1 \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^p \leq C_3 \|f\|_{H_0^p}^p.$$
(22)

Поскольку согласно [20] пространство $L^1(\mathbb{R}_+) \cap H^p(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$ плотно в $H^p(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$, то существует продолжение F по непрерывности на все $H^p(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$, для которого также выполняется неравенство (22). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Для действительных пространств $\text{Re } H^p(\mathbb{R})$, $0 < p \leq 1$, аналогичное неравенство известно (см. [24, гл. 3, следствие 7.23]).

Список литературы

1. Б. И. Голубов, “О двоичных аналогах операторов Харди и Харди–Литтлвуда”, *Сиб. матем. журн.*, **40**:6 (1999), 1244–1252; англ. пер.: B. I. Golubov, “On the binary analogs of the Hardy and Hardy–Littlewood operators”, *Siberian Math. J.*, **40**:6 (1999), 1051–1058.
2. Б. И. Голубов, “Об ограниченности двоичных операторов Харди и Харди–Литтлвуда в двоичных пространствах H и BMO ”, *Anal. Math.*, **26**:4 (2000), 287–298.
3. S. S. Volosivets, “On $\mathbf{P}$ -adic analogs of Hardy and Hardy–Littlewood operators”, *East J. Approx.*, **11**:1 (2005), 57–72.
4. Г. Харди, Дж. Литтлвуд, Г. Полиа, *Неравенства*, ИЛ, М., 1948; пер. с англ.: G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1934.
5. D. V. Giang, F. Móricz, “The Cesàro operator is bounded on the Hardy space H^1 ”, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **61**:1–4 (1995), 535–544.
6. Б. И. Голубов, “Об ограниченности операторов Харди и Харди–Литтлвуда в пространствах $\text{Re } H^1$ и BMO ”, *Матем. сб.*, **188**:7 (1997), 93–106; англ. пер.: B. I. Golubov, “Boundedness of the Hardy and the Hardy–Littlewood operators in the spaces $\text{Re } H^1$ and BMO ”, *Sb. Math.*, **188**:7 (1997), 1041–1054.
7. F. Móricz, “The harmonic Cesàro and Copson operators on the spaces L^p , $1 \leq p \leq \infty$, H^1 and BMO ”, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **65**:1–2 (1999), 293–310.
8. Б. И. Голубов, “Об аналоге неравенства Харди для преобразования Фурье–Уолша”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **65**:3 (2001), 3–14; англ. пер.: B. I. Golubov, “On

- an analogue of Hardy's inequality for the Walsh–Fourier transform”, *Izv. Math.*, **65**:3 (2001), 425–435.
9. С. С. Волосивец, “Модифицированный $\mathbf{P}$ -ичный интеграл и модифицированная $\mathbf{P}$ -ичная производная для функций, определенных на полуоси”, *Изв. вузов. Матем.*, 2005, № 6, 28–39; англ. пер.: S. S. Volosivets, “A modified P -adic integral and a modified P -adic derivative for functions defined on a half-axis”, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **49**:6 (2005), 25–36.
 10. Б. И. Голубов, А. В. Ефимов, В. А. Скворцов, *Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения*, Наука, М., 1987; англ. пер.: B. Golubov, A. Efimov, V. Skvortsov, *Walsh series and transforms. Theory and applications*, Math. Appl. (Soviet Ser.), **64**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1991.
 11. M. H. Taibleson, *Fourier analysis on local fields*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1975.
 12. В. С. Владимиров, И. В. Волович, Е. И. Зеленов, *p -адический анализ и математическая физика*, Наука, М., 1994; англ. пер.: V. S. Vladimirov, I. V. Volovich, E. I. Zelenov, *p -adic analysis and mathematical physics*, Ser. Soviet East European Math., **1**, World Scientific, River Edge, NJ, 1994.
 13. F. John, L. Nirenberg, “On functions of bounded mean oscillation”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **35**:3 (1961), 415–426.
 14. D. Sarason, “Functions of vanishing mean oscillation”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **207** (1975), 391–405.
 15. D. Goldberg, “A local version of real Hardy spaces”, *Duke Math. J.*, **46**:1 (1979), 27–42.
 16. C. S. Herz, “Lipschitz spaces and Bernstein's theorem on absolutely convergent Fourier transforms”, *J. Math. Mech.*, **18**:4 (1968), 283–323.
 17. C. W. Onneweer, “Generalized Lipschitz spaces and Herz spaces on certain totally disconnected groups”, *Martingale theory in harmonic analysis and Banach spaces* (Cleveland, Ohio, 1981), Lecture Notes in Math., **939**, Springer-Verlag, Berlin, 1982, 106–121.
 18. C. W. Onneweer, W. Su, “Homogeneous Besov spaces on locally compact Vilenkin groups”, *Studia Math.*, **93**:1 (1989), 17–39.
 19. R. R. Coifman, G. Weiss, “Extensions of Hardy spaces and their use in analysis”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **83**:4 (1977), 569–645.
 20. T. Kitada, “Weighted H^p multipliers on locally compact Vilenkin groups”, *Monatsh. Math.*, **110**:3–4 (1990), 283–295.
 21. F. Schipp, W. R. Wade, P. Simon, *Walsh series. An introduction to dyadic harmonic analysis*, Adam Hilger, Bristol, 1990.
 22. B. Kuttner, “Some theorems on fractional derivatives”, *Proc. London Math. Soc.* (3), **3** (1953), 480–497.
 23. А. А. Конюшков, “О классах Липшица”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **21**:3 (1957), 423–448.
 24. J. Garcia-Cuerva, J. L. Rubio de Francia, *Weighted norm inequalities and related topics*, North-Holland Math. Stud., **116**, North-Holland, Amsterdam–New York–Oxford, 1985.

С. С. ВОЛОСИВЕЦ (S. S. VOLOSIVETS)
 Саратовский государственный университет
 им. Н. Г. Чернышевского
 E-mail: volosivetsss@mail.ru

Поступило в редакцию
 21.01.2009