Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Аристов, О задаче Коши для уравнения соболевского типа с квадратичной нелинейностью, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2011, том 75, выпуск 5, 3–18

DOI: <https://doi.org/10.4213/im4079>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 16:26:03

УДК 517.955.8

А. И. Аристов

О задаче Коши для уравнения соболевского типа с квадратичной нелинейностью

Проведено исследование асимптотики при $t \rightarrow \infty$ решения задачи Коши для уравнения соболевского типа с квадратичной нелинейностью. Развита идея, использовавшаяся И. А. Шипмаревым и другими авторами для исследования классических и соболевских уравнений. Найдены условия, при которых удастся рассмотреть любую размерность пространственной переменной.

Библиография: 5 наименований.

Ключевые слова: нелинейные уравнения с частными производными, уравнения соболевского типа, асимптотическое поведение решений, теория возмущений.

§ 1. Введение

Работа посвящена изучению асимптотики при $t \rightarrow \infty$ обобщенного решения следующей задачи Коши:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta u - u) + b\Delta u - au + (\chi + (\lambda, \nabla))u^2 = 0, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x). \quad (2)$$

Здесь u – действительная функция, зависящая от действительного N -мерного ($N \geq 1$) вектора пространственных переменных x и времени $t > 0$. Параметры $a, b, \chi \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}^N$ не зависят от координат и времени. При этом предполагается, что $0 < a < b < 2a$. Уравнение (1) описывает давление жидкости в пористой среде или потенциал в полупроводнике.

Для понимания качественного поведения решений задач Коши для нелинейных уравнений большое значение имеет исследование их асимптотик при $t \rightarrow \infty$. Поскольку рассматривается поведение решений при стремлении времени к бесконечности, подобные результаты затруднительно получить в ходе численных экспериментов.

В настоящей работе получают развитие идеи, лежащие в основе статей [1]–[3]. В [1] и [2] найдены асимптотики решений задачи Коши для обобщенных уравнений Колмогорова–Петровского–Пискунова (КПП). В [3] рассмотрена задача Коши для соболевского уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta u - u) + \alpha\Delta u + \beta u^3 = 0,$$

выведена асимптотическая формула при $t \rightarrow \infty$. В [1] и [3] исследованы уравнения с кубическими нелинейностями, при этом были наложены ограничения снизу для размерности N независимой пространственной переменной. В [2]

допускается квадратичная нелинейность, но рассматривается только случай $N = 1$. В настоящей работе показано, что в случае квадратичной нелинейности специальным выбором условий для коэффициентов при линейных членах можно добиться расширения множества возможных N до всего множества натуральных чисел.

Введем обозначения, необходимые для изложения рассуждений: x, p, q – действительные N -мерные векторы, $m(p) = \min(1, |p|)$, $M(p) = \max(1, |p|)$,

$$\bar{k}(p) = c_1 m^2(p), \quad c_1 \in \left(0, \min\left(\frac{1}{4}, \frac{a}{2}\right)\right),$$

$$\bar{k}_n(p) = \bar{k}\left(\frac{p}{n+1}\right),$$

где n – целое неотрицательное число,

$$K(p) = \frac{a + b|p|^2}{1 + |p|^2}, \quad D(p) = \frac{\chi + i(\lambda, p)}{1 + |p|^2}, \quad \delta = \sup_{p \in \mathbb{R}^N} |D(p)|.$$

Преобразование Фурье вводится по правилу

$$\hat{f}(p) = F[f(x)] = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i(p, x)} f(x) dx.$$

Через коэффициенты c , помеченные целыми нижними индексами, обозначаются некоторые положительные константы.

На начальные данные налагаются следующие условия:

1°) $u_0(x) \in L_1(\mathbb{R}^N)$;

2°) $|\hat{u}_0(p)| \leq \varepsilon M^{-s-\alpha}(p)$, где $p \in \mathbb{R}^N$;

3°) $|\hat{u}_0(p) - \hat{u}_0(q)| \leq \varepsilon |p - q|^{\sigma_2} M^{-s}(q)$, где $p, q \in \mathbb{R}^N$, $|p - q| \leq 1$.

Здесь $\varepsilon > 0$ – достаточно малый параметр, $s > N$, $\alpha \geq 0$, $\sigma_2 \in (0, 1]$.

Поясним смысл параметра ε . Он характеризует предполагаемую малость начальных данных. Образ Фурье решения будет представлен в виде степенного ряда:

$$\hat{u}(p, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{n+1} v_n(p, t),$$

для функций v_n будут выведены рекуррентные формулы. Затем будет доказано предложение 1, представляющее собой оценку величины v_n . Из этой оценки будет следовать существование такой постоянной $A_1 \geq 1$, что $|v_n(p, t)| \leq A_1^n$ для любого n . Значит, существует такая окрестность нуля, что если ε находится в этой окрестности, то ряд, мажорирующий $\hat{u}$, сходится. Поэтому можно перейти от $\hat{u}$ к u и с помощью оценок для v_n получить требуемую асимптотическую формулу.

Приведем пример нетривиальных начальных данных, удовлетворяющих условиям 1°)–3°). Пусть

$$u_0(x) = A \left(\frac{B}{\pi}\right)^N \prod_{k=1}^N \frac{1}{x_k^2 + B^2}, \quad (3)$$

где B – произвольное положительное число; условия, налагаемые на действительный параметр A , сформулируем позже.

1. Проводя непосредственные вычисления, убедимся в том, что $\|u_0\|_{L_1(\mathbb{R}^N)} = |A| < \infty$.

С помощью леммы Жордана можно доказать, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ip_k x_k} (x_k^2 + B^2)^{-1} dx_k = \frac{\pi e^{-B|p_k|}}{B},$$

поэтому $\hat{u}_0(p) = A e^{-B(|p_1| + \dots + |p_N|)}$.

2. Перепишем ограничение 2°), налагаемое на $\hat{u}_0$, в следующем виде:

$$M^{s+\alpha}(p) \leq \frac{\varepsilon}{|A|} e^{B(|p_1| + \dots + |p_N|)}. \quad (4)$$

Если $|p| \leq 1$, то неравенство (4) будет верно при $\varepsilon/|A| \geq 1$. Пусть $|p| \geq 1$, и пусть ζ – произвольное положительное число. Оценим правую часть в (4):

$$\frac{\varepsilon}{|A|} e^{B(|p_1| + \dots + |p_N|)} \geq \frac{\varepsilon}{|A|} \zeta^{-\zeta} B^\zeta (|p_1| + \dots + |p_N|)^\zeta \geq \frac{\varepsilon}{|A|} \left(\frac{B}{\zeta}\right)^\zeta |p|^\zeta.$$

Последнее выражение (а значит, и правая часть в (4)) будет больше или равно $|p|^{s+\alpha}$, например, если $\zeta = s + \alpha$ и $\varepsilon|A|^{-1}(B/\zeta)^\zeta \geq 1$. Следовательно, ограничение 2°) будет выполняться, если $|A| \max(1, ((s + \alpha)/B)^{(s+\alpha)}) \leq \varepsilon$.

3. Пусть $p, q \in \mathbb{R}^N$, причем $|p - q| \leq 1$. Положим $d = |\hat{u}_0(p) - \hat{u}_0(q)|$. Применяя теорему Лагранжа, получим

$$d = |A| B e^{-B\xi} \left| \sum_{k=1}^N |p_k| - \sum_{k=1}^N |q_k| \right|,$$

где ξ – число, находящееся между $\sum_{k=1}^N |p_k|$ и $\sum_{k=1}^N |q_k|$. Положим $\rho = \sqrt{N^2 - N + 4}/2$. Заметим, что $|p| \leq \sum_{k=1}^N |p_k| \leq \rho|p|$ для любого $p \in \mathbb{R}^N$. Поэтому $d \leq |A| B \rho |p - q| e^{-B\xi}$. Отметим, что

$$\sum_{k=1}^N (|q_k| - |p_k|) \leq \sum_{k=1}^N |q_k - p_k| \leq \rho|q - p| \leq \rho.$$

Следовательно,

$$\xi \geq \max\left(\sum_{k=1}^N |p_k|, \sum_{k=1}^N |q_k|\right) \geq \sum_{k=1}^N |q_k| - \rho.$$

Таким образом, $e^{B\xi} \geq e^{B(|q_1| + \dots + |q_N| - \rho)} \geq e^{B|q|} e^{-B\rho}$.

Для того чтобы продолжить оценку выражения $e^{B\xi}$, рассмотрим два случая. Во-первых, если $|q| \leq 1$, то

$$e^{B|q|} e^{-B\rho} \geq e^{-B\rho} \geq e^{-B\rho} \min\left(1, \left(\frac{B}{s}\right)^s\right) M^s(q), \quad s > N.$$

Во-вторых, если $|q| \geq 1$, то

$$e^{B|q|} e^{-B\rho} \geq e^{-B\rho} \left(\frac{B|q|}{s}\right)^s \geq e^{-B\rho} \min\left(1, \left(\frac{B}{s}\right)^s\right) M^s(q).$$

С учетом этих оценок получим, что

$$d \leq |A| B \rho |p - q| e^{B\rho} \max\left(1, \left(\frac{s}{B}\right)^s\right) M^{-s}(q).$$

Значит, оценка 3°) будет верна, если, например, $\sigma_2 = 1$ и $|A|B\rho e^{B\rho} \times \max(1, (s/B)^s) \leq \varepsilon$.

Таким образом, ε и $|A|$ связаны условием

$$|A| \max\left(1, \left(\frac{s+\alpha}{B}\right)^{(s+\alpha)}, B\rho e^{B\rho} \max\left(1, \left(\frac{s}{B}\right)^s\right)\right) \leq \varepsilon.$$

Отсюда видно, что для любого ε можно подобрать такое значение A , что функция вида (3) будет соответствовать предполагаемым ограничениям 1°)– 3°).

Прежде чем определить обобщенное решение, сделаем формально некоторые преобразования. Применим к левой и правой частям исходного уравнения (1) оператор Фурье, домножим на величину $e^{K(p)t}/(1+|p|^2)$ и проинтегрируем от 0 до t с учетом начальных условий (2). Таким образом, получим интегральное уравнение

$$\hat{u}(p, t) = e^{-K(p)t} \hat{u}_0(p) + D(p) \int_0^t e^{-K(p)(t-\tau)} d\tau \int_{\mathbb{R}^N} \hat{u}(p-q, \tau) \hat{u}(q, \tau) dq. \quad (5)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Обобщенным решением задачи (1), (2) называется преобраз Фурье $u(x, t)$ решения уравнения (5), где $u(x, t)$ удовлетворяет следующим условиям:

- (i) $u(x, t)$ непрерывно по всем аргументам и ограничено;
- (ii) $u(x, t) \in L_1(\mathbb{R}^N)$.

Сформулируем основной результат работы.

ТЕОРЕМА. Пусть $a, b, \chi \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}^N$ в задаче (1), (2), причем $0 < a < b < 2a$, и пусть, кроме того, начальные данные (2) удовлетворяют условиям 1°)– 3°). Тогда обобщенное решение задачи (1), (2), (5) при $t \rightarrow \infty$ имеет следующую асимптотику:

$$u(x, t) = (4\pi(b-a))^{-\frac{N}{2}} A_0 t^{-\frac{N}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4(b-a)t}} e^{-at} + O(t^{-\frac{N}{2}-\theta} e^{-at}),$$

равномерно по $t^{-\frac{1}{2}}x$, где $A_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{at} \int_{\mathbb{R}^N} u(x, t) dx$, θ – некоторая положительная постоянная.

Заметим, что с помощью предложения 1, которое будет доказано далее, и принципа сжимающих отображений можно доказать, что обобщенное решение существует и единственно.

§ 2. Формулы для $v_n(p, t)$ и вспомогательные утверждения

Из общих положений математического анализа тривиально получаются следующие два утверждения.

ЛЕММА 1. Функция $K(p)$ обладает следующими свойствами:

- 1) $K(p) \geq a + 2\bar{k}(p) \geq a + 2\bar{k}_n(p)$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$;
- 2) $|p_1 - p_2| \leq 1 \Rightarrow |K(p_1) - K(p_2)| \leq c_2 |p_1 - p_2| M(p_2)$, где $c_2 = 3(b-a) > 0$.

ЛЕММА 2. При всех положительных α, μ имеем $e^{-\alpha} \leq (\mu^{-1}\alpha)^{-\mu}$.

Воспользуемся теорией возмущений. Пусть

$$\hat{u}(p, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{n+1} v_n(p, t), \quad \hat{u}_0(p) = \varepsilon v(p).$$

Подставим последние выражения в интегральное уравнение (5):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{n+1} v_n(p, t) = \varepsilon v(p) e^{-K(p)t} + D(p) \int_0^t e^{-K(p)(t-\tau)} dt \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{n+1} v_n(p-q, \tau) \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k+1} v_k(q, \tau) dq. \quad (6)$$

Поскольку ε – достаточно малый параметр, уравнение (6) можно привести к следующему виду:

$$\sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^{s+1} v_s(p, t) = \varepsilon v(p) e^{-K(p)t} + D(p) \sum_{n,k \geq 0} \varepsilon^{n+k+2} \int_0^t e^{-K(p)(t-\tau)} dt \int_{\mathbb{R}^N} v_n(p-q, \tau) v_k(q, \tau) dq.$$

Сгруппируем слагаемые с одинаковыми степенями ε :

а) для ε^1 имеем

$$v_0(p, t) = v_0(p) e^{-K(p)t};$$

б) для ε^{s+1} , где $s+1 \geq 2$, имеем

$$v_s(p, t) = D(p) \sum_{n,k} \int_0^t e^{-K(p)(t-\tau)} dt \int_{\mathbb{R}^N} v_n(p-q, \tau) v_k(q, \tau) dq. \quad (7)$$

В соотношении (7) индексы суммирования связаны равенством $n+k+2 = s+1$, т.е. $n+k = s-1$. Положим $k = (s-\alpha) \in [0, s-1]$. Тогда $\alpha \in [1, s]$, $n = \alpha-1$. Значит, в уравнении (7) имеем $\sum_{n,k} = \sum_{\alpha=1}^s$. Таким образом, имеют место следующие рекуррентные формулы:

$$v_0(p, t) = v(p) e^{-K(p)t},$$

$$v_n(p, t) = D(p) \sum_{k=1}^n \int_0^t e^{-K(p)(t-\tau)} dt \int_{\mathbb{R}^N} v_{k-1}(p-q, \tau) v_{n-k}(q, \tau) dq, \quad n \geq 1.$$

ЛЕММА 3. Для любых положительных γ, s_1 выполняются следующие неравенства:

$$1) M^{-s_1}(p-q) M^{-s_1}(q) \leq 2^{s_1} M^{-s_1}(p) (M^{-s_1}(p-q) + M^{-s_1}(q));$$

2) $(n-k+1)^{-\gamma} k^{-\gamma} \leq 2^\gamma (n+1)^{-\gamma} ((n-k+1)^{-\gamma} + k^{-\gamma})$, где n и k – натуральные числа, причем $k \leq n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию $F(r) = r^h$. Оценим выражение $F(b_1 r + b_2 s)$, где $b_1, b_2 \geq 0$, $b_1 + b_2 = 1$, предположив дополнительно, что $r \leq s$ (противоположный случай рассматривается аналогично):

$$F(b_1 r + b_2 s) \leq F(b_1 s + b_2 s) = F(s) \leq F(s) + F(r).$$

Если положить $r = M(p-q)$, $s = M(q)$, $b_1 = b_2 = 1/2$, $h = s_1$, то получим, что $((M(p-q) + M(q))/2)^{s_1} \leq M^{s_1}(p-q) + M^{s_1}(q)$. Кроме того, $M(p-q) + M(q) \geq M(p)$. Следовательно, выполнено неравенство $(M(p)/2)^{s_1} \leq M^{s_1}(p-q) + M^{s_1}(q)$, которое равносильно утверждению 1). Утверждение 2) доказывается аналогично (здесь надо положить $r = n-k+1$, $s = k$, $b_1 = b_2 = 1/2$, $h = \gamma$). Лемма доказана.

§ 3. Оценки для $v_n(p, t)$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Для любого $\gamma > 1$ существует такая постоянная $A_1 \geq 1$, что

$$|v_n(p, t)| \leq A_1^n (n+1)^{-\gamma} M^{-s-\alpha}(p) e^{-\bar{k}_n(p)t} e^{-at} \quad \forall n \geq 0,$$

где $s > N$, $\alpha \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем утверждение по индукции. При $n = 0$ имеем

$$|v_0(p, t)| = |\varepsilon^{-1} \hat{u}_0(p) e^{-K(p)t}| \leq M^{-s-\alpha}(p) e^{-2\bar{k}(p)t} e^{-at}.$$

Здесь использованы лемма 1, формальное выражение теории возмущений (7) и условия $1^\circ) - 3^\circ)$, налагаемые на начальные данные (2).

При $n \geq 1$ имеем

$$\begin{aligned} |v_n(p, t)| &= \left| D(p) \int_0^t e^{-K(p)(t-\tau)} d\tau \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{k=1}^n v_{k-1}(p-q, \tau) v_{n-k}(q, \tau) dq \right| \\ &\leq \delta \int_0^t e^{-K(p)(t-\tau)} d\tau \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{k=1}^n A_1^{k-1} k^{-\gamma} M^{-s-\alpha}(p-q) e^{-\bar{k}_{k-1}(p-q)\tau} e^{-a\tau} \\ &\quad \times A_1^{n-k} (n-k+1)^{-\gamma} M^{-s-\alpha}(q) e^{-\bar{k}_{n-k}(q)\tau} e^{-a\tau} dq \\ &\leq \delta A_1^{n-1} \sum_{k=1}^n k^{-\gamma} (n-k+1)^{-\gamma} \int_0^t e^{-K(p)(t-\tau)} e^{-2a\tau} d\tau \\ &\quad \times \int_{\mathbb{R}^N} M^{-s-\alpha}(p-q) M^{-s-\alpha}(q) e^{-\bar{k}_{k-1}(p-q)\tau} e^{-\bar{k}_{n-k}(q)\tau} dq. \end{aligned}$$

С помощью леммы 3 продолжим преобразование. Таким образом,

$$\begin{aligned} |v_n(p, t)| &\leq \delta A_1^{n-1} \sum_{k=1}^n 2^\gamma (n+1)^{-\gamma} (k^{-\gamma} + (n-k+1)^{-\gamma}) \\ &\quad \times \int_0^t e^{-K(p)(t-\tau)} e^{-2a\tau} d\tau \int_{\mathbb{R}^N} 2^{s+\alpha} M^{-s-\alpha}(p) (M^{-s-\alpha}(p-q) + M^{-s-\alpha}(q)) \\ &\quad \times e^{-\bar{k}_{k-1}(p-q)\tau} e^{-\bar{k}_{n-k}(q)\tau} dq. \end{aligned}$$

Оценим произведение экспонент, используя неравенство $K(p) \geq a + 2\bar{k}(p)$:

$$\begin{aligned} e^{-K(p)(t-\tau)} e^{-2a\tau} e^{-\bar{k}_{k-1}(p-q)\tau} e^{-\bar{k}_{n-k}(q)\tau} \\ \leq e^{-at+a\tau-2\bar{k}(p)t+2\bar{k}(p)\tau-2a\tau-\bar{k}_{k-1}(p-q)\tau-\bar{k}_{n-k}(q)\tau} \leq e^{2\bar{k}(p)\tau-a\tau} e^{-\bar{k}_n(p)t-at}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-K(p)(t-\tau)} e^{-2a\tau} e^{-\bar{k}_{k-1}(p-q)\tau} e^{-\bar{k}_{n-k}(q)\tau} d\tau &\leq e^{-\bar{k}_n(p)t-at} \int_0^t e^{2\bar{k}(p)\tau-a\tau} d\tau \\ &\leq e^{-\bar{k}_n(p)t-at} \int_0^t e^{2c_1\tau-a\tau} d\tau \leq \frac{e^{-\bar{k}_n(p)t-at}}{a-2c_1}, \end{aligned} \quad (8)$$

поскольку $c_1 < a/2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из оценок (8) видно, что требование $a > 0$ существенно.

Следовательно,

$$|v_n(p, t)| \leq CA_1^{n-1}(n+1)^{-\gamma} \sum_{k=1}^n (k^{-\gamma} + (n-k+1)^{-\gamma}) \\ \times M^{-s-\alpha}(p) \int_{\mathbb{R}^N} (M^{-s-\alpha}(p-q) + M^{-s-\alpha}(q)) dq e^{-\bar{k}_n(p)t-at},$$

где C – некоторая положительная постоянная, а интеграл и сумма равномерно ограничены. Отсюда непосредственно получаем требуемое утверждение. Предложение доказано.

С помощью предложения 1 и принципа сжимающих отображений можно доказать, что обобщенное решение рассматриваемой задачи существует и единственно. Подробно этот метод описан в [4, с. 7, 8; 13, 14].

ЛЕММА 4. Если $|p_2| \leq |p_1|$ и $|p_1 - p_2| \leq 1$, то для любых $n \in \mathbb{N}$, $\nu \in (0, 1]$ имеем

$$|e^{-K(p_1)t} - e^{-K(p_2)t}| \leq 2(c_2|p_1 - p_2|t)^\nu M^\alpha(p_2)e^{-2\bar{k}(p_2)t-at}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству соответствующего утверждения в [1].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если $|p_2| \leq |p_1|$ и $|p_1 - p_2| \leq 1$, то для любого n

$$|v_n(p_1, t) - v_n(p_2, t)| \leq c_3 A_2^n (n+1)^{-\gamma} (1+t^\nu) |p_1 - p_2|^{\sigma_1} M^{-s}(p_2) e^{-\bar{k}_n(p_2)t} e^{-at}, \quad (9)$$

где $\nu \in (0, 1]$, $\sigma_1 = \min(\sigma_2, \nu)$, $c_3 = 1 + 2c_2^\nu$, $A_2 = C \geq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем утверждение по индукции. При $n = 0$ имеем

$$|v_0(p_1, t) - v_0(p_2, t)| = \frac{1}{\varepsilon} |\hat{u}_0(p_1)e^{-K(p_1)t} - \hat{u}_0(p_2)e^{-K(p_2)t}| \\ \leq \frac{1}{\varepsilon} |\hat{u}_0(p_1) - \hat{u}_0(p_2)| e^{-2K(p_1)t-at} + \frac{1}{\varepsilon} |\hat{u}_0(p_2)| |e^{-K(p_1)t} - e^{-K(p_2)t}| \\ \leq |p_1 - p_2|^{\sigma_2} M^{-s}(p_2) e^{-2\bar{k}(p_1)t-at} \\ + M^{-s-\alpha}(p_2) 2c_2^\nu |p_1 - p_2|^\nu t^\nu M^\alpha(p_2) e^{-2\bar{k}(p_2)t-at} \\ \leq (1 + 2c_2^\nu) |p_1 - p_2|^\sigma (1+t^\nu) M^{-s}(p_2) e^{-2\bar{k}(p_2)t-at},$$

т. е. в этом случае утверждение верно.

При $n \geq 1$, учитывая рекуррентную формулу, преобразуем оцениваемую разность следующим образом:

$$|v_n(p_1, t) - v_n(p_2, t)| = \left| D(p_1) \int_0^t e^{-K(p_1)(t-\tau)} d\tau \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{k=1}^n v_{k-1}(p_1 - q, \tau) v_{n-k}(q, \tau) dq \right. \\ \left. - D(p_2) \int_0^t e^{-K(p_2)(t-\tau)} d\tau \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{k=1}^n v_{k-1}(p_2 - q, \tau) v_{n-k}(q, \tau) dq \right| \\ = \left| D(p_1) \int_0^t e^{-K(p_1)(t-\tau)} d\tau \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{k=1}^n v_{k-1}(p_1 - q, \tau) v_{n-k}(q, \tau) dq \right. \\ \left. - D(p_1) \int_0^t e^{-K(p_1)(t-\tau)} d\tau \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{k=1}^n v_{k-1}(p_2 - q, \tau) v_{n-k}(q, \tau) dq \right.$$

$$\begin{aligned}
& + D(p_1) \int_0^t e^{-K(p_1)(t-\tau)} d\tau \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{k=1}^n v_{k-1}(p_2 - q, \tau) v_{n-k}(q, \tau) dq \\
& - D(p_2) \int_0^t e^{-K(p_2)(t-\tau)} d\tau \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{k=1}^n v_{k-1}(p_2 - q, \tau) v_{n-k}(q, \tau) dq \Big| \\
& = \left| D(p_1) \int_0^t e^{-K(p_1)(t-\tau)} d\tau \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{k=1}^n (v_{k-1}(p_1 - q, \tau) - v_{k-1}(p_2 - q, \tau)) v_{n-k}(q, \tau) dq \right. \\
& \quad + \left(D(p_1) \int_0^t e^{-K(p_1)(t-\tau)} d\tau - D(p_2) \int_0^t e^{-K(p_2)(t-\tau)} d\tau \right) \\
& \quad \times \left. \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{k=1}^n v_{k-1}(p_2 - q, \tau) v_{n-k}(q, \tau) dq \right| \\
& \leq \delta \int_0^t e^{-K(p_1)(t-\tau)} d\tau \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{k=1}^n c_3 A_2^{k-1} k^{-\gamma} (1 + \tau^\nu) |p_1 - p_2|^{\sigma_1} M^{-s}(p_2 - q) \\
& \quad \times e^{-\bar{k}_{k-1}(p_2 - q)\tau} e^{-a\tau} A_1^{n-k} (n - k + 1)^{-\gamma} M^{-s}(q) e^{-\bar{k}_{n-k}(q)\tau} e^{-a\tau} dq \\
& \quad + \left| (D(p_1) - D(p_2)) \int_0^t e^{-K(p_2)(t-\tau)} d\tau \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{k=1}^n v_{k-1}(p_2 - q, \tau) v_{n-k}(q, \tau) dq \right| \\
& \quad + \left| D(p_2) \int_0^t (e^{-K(p_1)(t-\tau)} - e^{-K(p_2)(t-\tau)}) d\tau \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{k=1}^n v_{k-1}(p_2 - q, \tau) v_{n-k}(q, \tau) dq \right| \\
& \leq \delta \int_0^t e^{-K(p_1)(t-\tau)} d\tau \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{k=1}^n c_3 A_2^{n-1} k^{-\gamma} (n - k + 1)^{-\gamma} (1 + \tau^\nu) |p_1 - p_2|^{\sigma_1} \\
& \quad \times M^{-s}(p_2 - q) M^{-s}(q) e^{-\bar{k}_{k-1}(p_2 - q)\tau} e^{-\bar{k}_{n-k}(q)\tau} e^{-2a\tau} dq \\
& \quad + C |p_1 - p_2|^{\sigma_1} \int_0^t e^{-K(p_1)(t-\tau)} d\tau \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{k=1}^n A_1^{k-1} k^{-\gamma} M^{-s-\alpha}(p_2 - q) \\
& \quad \times e^{-\bar{k}_{k-1}(p_2 - q)\tau} e^{-a\tau} A_1^{n-k} (n - k + 1)^{-\gamma} M^{-s-\alpha}(q) e^{-\bar{k}_{n-k}(q)\tau} e^{-a\tau} dq \\
& \quad + \delta \int_0^t 2c_2^\nu |p_1 - p_2|^\nu (t - \tau)^\nu M^\alpha(p_2) e^{-2\bar{k}(p_2)t + 2\bar{k}(p_2)\tau - at + a\tau} d\tau \\
& \quad \times \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{k=1}^n A_1^{n-1} M^{-s-\alpha}(p_2 - q) M^{-s-\alpha}(q) k^{-\gamma} (n - k + 1)^{-\gamma} \\
& \quad \times e^{-\bar{k}_{k-1}(p_2 - q)\tau} e^{-\bar{k}_{n-k}(q)\tau} e^{-2a\tau} dq \\
& = \delta I_1 + C |p_1 - p_2|^{\sigma_1} I_2 + \delta I_3,
\end{aligned}$$

где I_1 , I_2 и I_3 — соответственно модули первого, второго и третьего интегралов, а C — некоторая положительная постоянная. Здесь использовано соотношение $|D(p_1) - D(p_2)| \leq 3|\lambda| |p_1 - p_2|^{\sigma_1}$. Оно следует непосредственно из определения функции $D(\cdot)$. Оценим по отдельности выражения I_1 , I_2 и I_3 .

1) Сначала оценим I_1 :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^t e^{-K(p_1)(t-\tau)} d\tau \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{k=1}^n c_3 A_2^{n-1} k^{-\gamma} (n - k + 1)^{-\gamma} (1 + \tau^\nu) |p_1 - p_2|^{\sigma_1} \\
& \quad \times M^{-s}(p_2 - q) M^{-s}(q) e^{-\bar{k}_{k-1}(p_2 - q)\tau} e^{-\bar{k}_{n-k}(q)\tau} e^{-2a\tau} dq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq c_3 A_2^{n-1} (1+t^\nu) |p_1 - p_2|^{\sigma_1} \int_0^t e^{-2\bar{k}_n(p_1)t} e^{2\bar{k}_n(p_1)\tau} e^{-a\tau} e^{a\tau} d\tau \\
&\quad \times \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{k=1}^n k^{-\gamma} (n-k+1)^{-\gamma} M^{-s}(p_2-q) M^{-s}(q) e^{-\bar{k}_{k-1}(p_2-q)\tau - \bar{k}_{n-k}(q)\tau} e^{-2a\tau} dq \\
&\leq c_3 A_2^{n-1} (1+t^\nu) |p_1 - p_2|^{\sigma_1} e^{-2\bar{k}_n(p_1)t} e^{-at} \sum_{k=1}^n k^{-\gamma} (n-k+1)^{-\gamma} \\
&\quad \times \int_{\mathbb{R}^N} M^{-s}(p_2-q) M^{-s}(q) dq \int_0^t e^{2\bar{k}_n(p_1)\tau} e^{a\tau} e^{-\bar{k}_{k-1}(p_2-q)\tau - \bar{k}_{n-k}(q)\tau} e^{-2a\tau} d\tau.
\end{aligned}$$

Несложно убедиться в том, что имеет место следующая оценка:

$$\int_0^t e^{2\bar{k}_n(p_1)\tau} e^{a\tau} e^{-\bar{k}_{k-1}(p_2-q)\tau - \bar{k}_{n-k}(q)\tau} e^{-2a\tau} d\tau \leq \frac{1}{a-2c_1} = C,$$

кроме того, по лемме 3

$$\int_{\mathbb{R}^N} M^{-s}(p_2-q) M^{-s}(q) dq \leq C M^{-s}(p_2), \quad \sum_{k=1}^n k^{-\gamma} (n-k+1)^{-\gamma} \leq C(n+1)^{-\gamma},$$

поэтому

$$I_1 \leq c_3 A_2^{n-1} (1+t^\nu) |p_1 - p_2|^{\sigma_1} e^{-2\bar{k}_n(p_1)t} e^{-at} (n+1)^{-\gamma} M^{-s}(p_2).$$

2) Теперь оценим I_2 :

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^t e^{-K(p_1)(t-\tau)} d\tau \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{k=1}^n A_1^{n-1} k^{-\gamma} (n-k+1)^{-\gamma} \\
&\quad \times M^{-s}(p_2-q) M^{-s}(q) e^{-\bar{k}_{k-1}(p_2-q)\tau - \bar{k}_{n-k}(q)\tau} e^{-2a\tau} dq \\
&\leq A_1^{n-1} \int_0^t e^{-2\bar{k}_n(p_1)t} e^{2\bar{k}_n(p_1)\tau} e^{-at} e^{a\tau} d\tau \\
&\quad \times \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{k=1}^n k^{-\gamma} (n-k+1)^{-\gamma} M^{-s}(p_2-q) M^{-s}(q) e^{-\bar{k}_{k-1}(p_2-q)\tau - \bar{k}_{n-k}(q)\tau} e^{-2a\tau} dq.
\end{aligned}$$

Далее оценка проводится так же, как в п. 1).

3) Наконец оценим I_3 :

$$\begin{aligned}
I_3 &\leq 2c_2' |p_1 - p_2|^\nu A_1^{n-1} t^\nu e^{-2\bar{k}_n(p_1)t} M^\alpha(p_2) e^{-at} \sum_{k=1}^n k^{-\gamma} (n-k+1)^{-\gamma} \\
&\quad \times \int_{\mathbb{R}^N} M^{-s-\alpha}(p_2-q) M^{-s-\alpha}(q) dq \int_0^t e^{2\bar{k}_n(p_1)\tau} e^{-a\tau} e^{-\bar{k}_{k-1}(p_2-q)\tau - \bar{k}_{n-k}(q)\tau} \\
&\leq 2c_2' |p_1 - p_2|^\nu A_1^{n-1} t^\nu e^{-2\bar{k}_n(p_1)t} e^{-at} (n+1)^{-\gamma} M^{-s}(p_2).
\end{aligned}$$

Поскольку $|v_n(p_1, t) - v_n(p_2, t)| \leq \delta I_1 + C|p_1 - p_2|^{\sigma_1} I_2 + \delta I_3$, из доказанных оценок для I_1 , I_2 , I_3 и тривиальных неравенств $1 \leq 1+t^\nu$ и $t^\nu \leq 1+t^\nu$ получаем требуемое неравенство (9). Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если $|p| \leq 1$, то для любого n

$$|v_n(p, t)e^{K(p)t} - v_n(0, t)e^{at}| \leq c_4 A_2^n (n+1)^{2N+2-\gamma} t^{-\frac{N}{2}-\theta_1} |p|^{-N+\theta_2} e^{K(p)t-at}, \quad (10)$$

где $c_4 > 0$, $\theta_1, \theta_2 > 0$, причем эти числа не зависят от n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем утверждение по индукции. При $n = 0$ имеем

$$|v_0(p, t)e^{K(p)t} - v_0(0, t)e^{at}| = |v(p) - v(0)| \leq |p|^{\sigma_2} M^{-s}(p).$$

Заметим, что:

1) $1 = e^{K(p)t} e^{-K(p)t} \leq e^{K(p)t} (\mu^{-1} K(p)t)^{-\mu}$ для любого $\mu > 0$;

2) $K(p) \geq 2k(p) + a = 2c_1 m^2(p) + a$.

Выберем параметры $\theta_1, \theta_2, \mu, c_4$ из условий

$$0 < \theta_1 < \frac{\sigma_2}{2}, \quad \theta_2 = \sigma_2 - 2\theta_1, \quad \mu = \frac{N}{2} + \theta_1, \quad c_4 \geq (2c_1 \mu^{-1})^{-\mu};$$

тогда при $n = 0$ неравенство (10) верно. При $n \geq 1$ имеем

$$\begin{aligned} & |v_n(p, t)e^{K(p)t} - v_n(0, t)e^{at}| \\ &= \left| D(p) \int_0^t e^{K(p)\tau} d\tau \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{k=1}^n v_{k-1}(p-q, \tau) v_{n-k}(q, \tau) dq \right. \\ & \quad \left. - \chi \int_0^t e^{at} d\tau \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{k=1}^n v_{k-1}(-q, \tau) v_{n-k}(q, \tau) dq \right| \\ &= \left| D(p) \int_0^t e^{K(p)\tau} d\tau \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{k=1}^n v_{k-1}(p-q, \tau) v_{n-k}(q, \tau) dq \right. \\ & \quad - D(p) \int_0^t e^{K(p)\tau} d\tau \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{k=1}^n v_{k-1}(-q, \tau) v_{n-k}(q, \tau) dq \\ & \quad + D(p) \int_0^t e^{K(p)\tau} d\tau \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{k=1}^n v_{k-1}(-q, \tau) v_{n-k}(q, \tau) dq \\ & \quad - D(p) \int_0^t e^{a\tau} d\tau \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{k=1}^n v_{k-1}(-q, \tau) v_{n-k}(q, \tau) dq \\ & \quad + D(p) \int_0^t e^{a\tau} d\tau \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{k=1}^n v_{k-1}(-q, \tau) v_{n-k}(q, \tau) dq \\ & \quad \left. - \chi \int_0^t e^{at} d\tau \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{k=1}^n v_{k-1}(-q, \tau) v_{n-k}(q, \tau) dq \right| \\ &\leq |D(p)| I_1 + |D(p)| I_2 + |D(p) - \chi| I_3, \end{aligned}$$

где

$$I_1 = \int_0^t e^{K(p)\tau} d\tau \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{k=1}^n |(v_{k-1}(p-q, \tau) - v_{k-1}(-q, \tau)) v_{n-k}(q, \tau)| dq,$$

$$I_2 = \int_0^t |e^{K(p)\tau} - e^{a\tau}| d\tau \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{k=1}^n |v_{k-1}(-q, \tau) v_{n-k}(q, \tau)| dq,$$

$$I_3 = \int_0^t e^{a\tau} d\tau \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{k=1}^n |v_{k-1}(-q, \tau) v_{n-k}(q, \tau)| dq.$$

Из предложений 1, 2 получаем следующие неравенства:

$$\begin{aligned} |v_{k-1}(-q, \tau) v_{n-k}(q, \tau)| &\leq A_1^{n-1} \cdot 2^\gamma (n+1)^{-\gamma} \\ &\quad \times (k^{-\gamma} + (n-k+1)^{-\gamma}) M^{-2s-2\alpha}(q) e^{-\bar{k}_{k-1}(q)\tau - \bar{k}_{n-k}(q)\tau} e^{-2a\tau}, \\ |(v_{k-1}(p-q, \tau) - v_{k-1}(-q, \tau)) v_{n-k}(q, \tau)| &\leq c_3 A_2^{n-1} \cdot 2^\gamma (n+1)^{-\gamma} \\ &\quad \times (k^{-\gamma} + (n-k+1)^{-\gamma}) M^{-s-\alpha}(q) (1 + \tau^\nu) |p|^\sigma e^{-\bar{k}_{k-1}(q)\tau - \bar{k}_{n-k}(q)\tau} e^{-2a\tau}. \end{aligned}$$

Кроме того, из леммы 4 следует, что

$$|e^{K(p)\tau} - e^{a\tau}| \leq 2e^{K(p)\tau} (c_2 |p|^{\sigma_1} \tau)^\nu M^\alpha(p) e^{-2\bar{k}(p)\tau - a\tau}.$$

С учетом этих неравенств и леммы 3 можно получить следующие соотношения:

$$\begin{aligned} I_1 &\leq c_3 \cdot 2^\gamma A_2^{n-1} |p|^\sigma (n+1)^{-\gamma} \sum_{k=1}^n (k^{-\gamma} + (n-k+1)^{-\gamma}) \\ &\quad \times \int_{\mathbb{R}^N} M^{-s-\alpha}(q) dq \int_0^t (1 + \tau^\nu) e^{K(p)\tau - \bar{k}_{k-1}(q)\tau - \bar{k}_{n-k}(q)\tau} e^{-2a\tau} d\tau, \\ I_2 &\leq 2c_2^\nu \cdot 2^\gamma A_1^{n-1} |p|^{\sigma_1 \nu} (n+1)^{-\gamma} \sum_{k=1}^n (k^{-\gamma} + (n-k+1)^{-\gamma}) \\ &\quad \times \int_{\mathbb{R}^N} M^{-2s-2\alpha}(q) dq \int_0^t e^{K(p)\tau - 2\bar{k}(p)\tau - a\tau} e^{-\bar{k}_{k-1}(q)\tau - \bar{k}_{n-k}(q)\tau} e^{-2a\tau} \tau^\nu d\tau, \\ I_3 &\leq 2^\gamma A_1^{n-1} (n+1)^{-\gamma} \sum_{k=1}^n (k^{-\gamma} + (n-k+1)^{-\gamma}) \\ &\quad \times \int_{\mathbb{R}^N} M^{-2s-2\alpha}(q) dq \int_0^t e^{-\bar{k}_{k-1}(q)\tau - \bar{k}_{n-k}(q)\tau} e^{-a\tau} d\tau. \end{aligned}$$

Интегралы от 0 до t в последних трех выражениях обозначим соответственно через J_1 , J_2 и J_3 . Пусть ω – некоторое число из интервала $(0, 2a - b)$. Легко убедиться в том, что выражения $(1 + \tau^\nu) e^{-\omega\tau}$ и $\tau^\nu e^{-\omega\tau}$ ограничены. Кроме того, $e^{B(p)}$, где $B(p) = K(p) - a$, не меньше единицы. Поэтому

$$\begin{aligned} J_1 &\leq C \int_0^t e^{(\omega-a)\tau} e^{B(p)\tau} e^{-\bar{k}_{n-k}(q)\tau} d\tau, \\ J_2 &\leq C \int_0^t e^{(\omega-a)\tau} e^{B(p)\tau} e^{-2\bar{k}(p)\tau - \bar{k}_{k-1}(q)\tau - \bar{k}_{n-k}(q)\tau - a\tau} d\tau, \\ J_3 &\leq \int_0^t e^{B(p)\tau} e^{-\bar{k}_{k-1}(q)\tau - \bar{k}_{n-k}(q)\tau - a\tau} d\tau. \end{aligned}$$

Положим $j = \int_0^t e^{B(p)\tau - (a-\omega)\tau} d\tau$. Тогда $J_{1,2,3} \leq Cj$. Преобразуем j :

$$j = \frac{e^{B(p)t - (a-\omega)t} - 1}{B(p) - a + \omega} = \frac{1 - e^{B(p)t - (a-\omega)t}}{a - \omega - B(p)}. \quad (11)$$

Несложно убедиться в том, что $\inf(a - \omega - B(p)) = 2a - b - \omega > 0$.

Оценим числитель последней дроби в (11):

$$1 - e^{B(p)t - \frac{at}{2}} \leq 1 = e^{B(p)t} e^{-B(p)t} \leq e^{B(p)t} (\mu^{-1} B(p)t)^{-\mu}.$$

Поскольку рассматриваются p , по модулю не превосходящие единицу, то

$$(B(p))^{-\mu} = (b-a)^{-\mu}(1+|p|^2)^{\mu}|p|^{-2\mu} \leq \left(\frac{2}{b-a}\right)^{\mu}|p|^{-2\mu}.$$

Таким образом,

$$j \leq \frac{1}{2a-b-\omega} \left(\frac{2\mu}{b-a}\right)^{\mu} e^{B(p)t} t^{-\mu} |p|^{-2\mu}.$$

Полагая $\mu = N/2 + \theta_1$, получаем

$$J_{1,2,3} \leq C e^{B(p)t} t^{-\frac{N}{2}-\theta_1} |p|^{-N-2\theta_1}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из оценок для j и $J_{1,2,3}$ видно, что требование $b < 2a$ существенно.

Продолжим оценивать $I_{1,2,3}$. Так как сумма $\sum_{k=1}^n (k^{-\gamma} + (n-k+1)^{-\gamma})$ равномерно ограничена и интеграл $\int_{\mathbb{R}^N} M^{-s-\alpha}(q) dq$ сходится, то

$$\begin{aligned} I_1 &\leq C A_2^{n-1} |p|^{\sigma} (n+1)^{-\gamma} e^{B(p)t} t^{-\frac{N}{2}-\theta_1} |p|^{-N-2\theta_1}, \\ I_2 &\leq C A_1^{n-1} |p|^{\sigma_1 \nu} (n+1)^{-\gamma} e^{B(p)t} t^{-\frac{N}{2}-\theta_1} |p|^{-N-2\theta_1}, \\ I_3 &\leq C A_1^{n-1} (n+1)^{-\gamma} e^{B(p)t} t^{-\frac{N}{2}-\theta_1} |p|^{-N-2\theta_1}. \end{aligned}$$

Поскольку

$$|v_n(p, t) e^{K(p)t} - v_n(0, t) e^{at}| \leq |D(p)| I_1 + |D(p)| I_2 + |D(p) - \chi| I_3$$

и $|D(p) - \chi| \leq 3|\lambda| |p|^{\sigma_1}$, то, полагая $\theta_2 = \min(\sigma - 2\theta_1, \sigma_1 \nu - 2\theta_1, \sigma_1 - 2\theta_1) > 0$, приходим к требуемому неравенству (10). Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Существует предел $\varphi_n = \lim_{t \rightarrow \infty} v_n(0, t) e^{at}$, причем

$$|v_n(0, t) e^{at} - \varphi_n| \leq c_5 A_1^n (n+1)^{2N-\gamma t-\theta_3}, \quad (12)$$

где c_5 и θ_3 – положительные числа, не зависящие от n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем предложение по индукции. При $n = 0$

$$v_0(0, t) e^{at} = v(0),$$

где $v(0)$ не зависит от t .

Теперь рассмотрим случай $n \geq 1$. Пусть $t > t_1 > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} &|v_n(0, t) e^{at} - v_n(0, t_1) e^{at_1}| \\ &= \left| D(0) e^{at} \int_0^t e^{-a(t-\tau)} d\tau \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{k=1}^n v_{k-1}(-q, \tau) v_{n-k}(q, \tau) dq \right. \\ &\quad \left. - D(0) e^{at_1} \int_0^{t_1} e^{-a(t_1-\tau)} d\tau \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{k=1}^n v_{k-1}(-q, \tau) v_{n-k}(q, \tau) dq \right| \\ &= |\chi| \left| \int_{t_1}^t e^{a\tau} d\tau \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{k=1}^n v_{k-1}(-q, \tau) v_{n-k}(q, \tau) dq \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq |\chi| \int_{t_1}^t e^{a\tau} d\tau \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{k=1}^n 2^\gamma A_1^{n-1} (n+1)^{-\gamma} (k^{-\gamma} + (n-k+1)^{-\gamma}) \\
&\quad \times M^{-2s-2\alpha}(q) e^{-\bar{k}_{k-1}(q)\tau - \bar{k}_{n-k}(q)\tau} e^{-2a\tau} dq \\
&= 2^\gamma |\chi| (n+1)^{-\gamma} A_1^{n-1} \sum_{k=1}^n (k^{-\gamma} + (n-k+1)^{-\gamma}) \\
&\quad \times \int_{\mathbb{R}^N} M^{-2s-2\alpha}(q) dq \int_{t_1}^t e^{-\bar{k}_{k-1}(q)\tau - \bar{k}_{n-k}(q)\tau} e^{-a\tau} d\tau \\
&\leq 2^\gamma |\chi| (n+1)^{-\gamma} A_1^{n-1} \sum_{k=1}^n (k^{-\gamma} + (n-k+1)^{-\gamma}) \int_{\mathbb{R}^N} M^{-2s-2\alpha}(q) dq \int_{t_1}^t e^{-a\tau} d\tau \\
&\leq C A_1^{n-1} (n+1)^{-\gamma} \int_{t_1}^t (\mu^{-1} a \tau)^{-\mu} d\tau = C A_1^{n-1} (n+1)^{-\gamma} \frac{1}{1-\mu} (t^{1-\mu} - t_1^{1-\mu}).
\end{aligned}$$

Здесь была использована ограниченность суммы и интеграла по $\mathbb{R}^N$.

Пусть $\mu > 1$. Положим $\theta_3 = \mu - 1$. Тогда в силу критерия Коши предел φ_n существует, причем верна требуемая оценка (12). Предложение доказано.

§ 4. Вывод основной формулы

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Для любого n при $t \rightarrow \infty$ имеем

$$(2\pi)^N \psi_n(x, t) = \varphi_n t^{-\frac{N}{2}} e^{-at} \int_{\mathbb{R}^N} e^{i(y, \eta) - (b-a)|\eta|^2} d\eta + A_3^n O(t^{-\frac{N}{2} - \theta} e^{-at}),$$

где $A_3 \geq 1$, $\theta > 0$, причем эти числа не зависят от n , $\psi_n(x, t) = F^{-1}[v_n(p, t)]$, $y = t^{-1/2}x$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выражение $(2\pi)^N \psi_n(x, t)$ представим в виде суммы $I_1 + I_2 + I_3 + I_4$, где

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{|p| \geq 1} e^{i(p, x)} v_n(p, t) dp, \\
I_2 &= \int_{|p| \leq 1} e^{i(p, x) - K(p)t} (v_n(p, t) e^{K(p)t} - v_n(0, t) e^{at}) dp, \\
I_3 &= \int_{|p| \leq 1} e^{i(p, x) - K(p)t} (v_n(0, t) e^{at} - \varphi_n) dp, \\
I_4 &= \varphi_n \int_{|p| \leq 1} e^{i(p, x) - K(p)t} dp.
\end{aligned}$$

Рассмотрим подробнее эти выражения.

1. С помощью предложения 1 и определения $\bar{k}_n(p)$ несложно получить следующее неравенство:

$$|I_1| \leq A_1^n (n+1)^{-\gamma} e^{-\frac{c_1 t}{(n+1)^2}} e^{-at} \int_{|p| \geq 1} M^{-s-\alpha}(p) dp.$$

Используя лемму 2, получим

$$|I_1| \leq C A_1^n (n+1)^{-\gamma} \left(\mu^{-1} \frac{c_1 t}{(n+1)^2} \right)^{-\mu} e^{-at} \leq C \cdot 2^{2\mu} A_1^n (n+1)^{-\gamma+2\mu} t^{-\mu} e^{-at}.$$

Положим $\mu = N/2 + \theta_1$. Тогда

$$|I_1| = c_6 A_1^n (n+1)^{N+2\theta_1-\gamma} t^{-\frac{N}{2}-\theta_1} e^{-at}.$$

2. С помощью предложения 3 оценим подынтегральное выражение в I_2 .

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \int_{|p| \leq 1} e^{-K(p)t} c_4 A_2^n (n+1)^{2N+2-\gamma} t^{-\frac{N}{2}-\theta_1} |p|^{-N+\theta_2} e^{K(p)t-at} dp \\ &= c_4 A_2^n (n+1)^{2N+2-\gamma} t^{-\frac{N}{2}-\theta_1} e^{-at} \int_{|p| \leq 1} |p|^{-N+\theta_2} dp \\ &\leq c_7 A_2^n (n+1)^{2N+2-\gamma} t^{-\frac{N}{2}-\theta_1} e^{-at}. \end{aligned}$$

3. С помощью предложения 4 оценим подынтегральное выражение в I_3 :

$$\begin{aligned} |I_3| &\leq \int_{|p| \leq 1} e^{-K(p)t} c_5 A_1^n (n+1)^{2N-\gamma} t^{-\theta_3} dp \\ &= c_5 A_1^n (n+1)^{2N-\gamma} t^{-\theta_3} \int_{|p| \leq 1} e^{-K(p)t} dp \\ &\leq c_5 A_1^n (n+1)^{2N-\gamma} t^{-\theta_3} \int_{|p| \leq 1} e^{-2\bar{k}(p)t-at} dp \\ &= c_5 A_1^n (n+1)^{2N-\gamma} t^{-\theta_3} e^{-at} \int_{|p| \leq 1} e^{-2c_1|p|^2 t} dp \\ &\leq c_5 A_1^n (n+1)^{2N-\gamma} t^{-\theta_3} e^{-at} C(2c_1 t)^{-\frac{N}{2}} = c_8 A_1^n (n+1)^{2N-\gamma} t^{-\frac{N}{2}-\theta_3} e^{-at}. \end{aligned}$$

4. Представим I_4 в следующем виде:

$$\begin{aligned} I_4 &= \varphi_n \left(\int_{|p| \leq t^{-1/4}} e^{i(p,x)-(b-a)|p|^2 t-at} dp \right. \\ &\quad \left. + \int_{|p| \leq t^{-1/4}} e^{i(p,x)-(b-a)|p|^2 t-at} (e^{O(|p|^4)t} - 1) dp + \int_{t^{-1/4} \leq |p| \leq 1} e^{i(p,x)-K(p)t} dp \right). \end{aligned}$$

Такое представление верно в силу того, что $K(p) = a + (b-a)|p|^2 + O(|p|^4)$ при достаточно малых $|p|$. Обозначим эти слагаемые (без множителя φ_n) соответственно через J_1 , J_2 и J_3 .

(а) Рассмотрим слагаемое J_1 :

$$\begin{aligned} \left| J_1 - e^{-at} \int_{\mathbb{R}^N} e^{i(p,x)-(b-a)|p|^2 t} dp \right| &\leq e^{-at} \int_{|p| \geq t^{-1/4}} e^{-(b-a)|p|^2 t} dp \\ &\leq e^{-at} e^{-\frac{b-a}{2}\sqrt{t}} \int_{|p| \geq t^{-1/4}} e^{-\frac{b-a}{2}|p|^2 t} dp \leq e^{-at} \left((\mu')^{-1} \frac{b-a}{2} \sqrt{t} \right)^{-\mu'} C t^{-\frac{N}{2}} \\ &\leq C e^{-at} t^{-\frac{N}{2}-\frac{\mu'}{2}}. \end{aligned}$$

(б) Заметим, что при $|p| \leq t^{-1/4}$ $O(|p|^4)t \leq C$ имеем $|e^{O(|p|^4)t} - 1| \leq C|p|^4 t$. Поэтому

$$|J_2| \leq C t \int_{|p| \leq t^{-1/4}} e^{-|p|^2 t-at} |p|^4 dp \leq C t^{-\frac{N}{2}-1} e^{-at}.$$

(с) С помощью леммы 1 и определения $\bar{k}(p)$ несложно получить, что

$$\begin{aligned} |J_3| &\leq \int_{t^{-1/4} \leq |p| \leq 1} e^{-2c_1|p|^2 t - at} dp \leq C e^{-2c_1 t^{\frac{1}{2}} - at} \leq C e^{-at} (\mu^{-1} \cdot 2c_1 \sqrt{t})^{-\mu} \\ &\leq C t^{-\frac{\mu}{2}} e^{-at}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\left| I_4 - \varphi_n t^{-\frac{N}{2}} e^{-at} \int_{\mathbb{R}^N} e^{i(y, \eta) - (b-a)|\eta|^2} d\eta \right| \leq c_9 t^{-\frac{N}{2} - 1} e^{-at},$$

где $y = t^{-1/2}x$, $\eta = \sqrt{t}p$. Теперь выберем μ и μ' из условий $\mu/2 = N/2 + \mu'/2 = N/2 + 1$, т.е. $\mu = N + 2$, $\mu' = 2$. Кроме того, положим $\theta = \min(\theta_1, \theta_3, 1) > 0$, $A_3 = bA_2$, причем

$$b^n \geq \max(1, c_6(n+1)^{N+2\theta_1-\gamma}, c_7(n+1)^{2N+2-\gamma}, c_8(n+1)^{2N-\gamma}, A_2^{-n}c_9).$$

Отсюда следует, что утверждение верно. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. При $t \rightarrow \infty$

$$u(x, t) = A_0 (2\pi)^{-N} t^{-\frac{N}{2}} e^{-at} \int_{\mathbb{R}^N} e^{i(y, \eta) - (b-a)|\eta|^2} d\eta + O(t^{-\frac{N}{2} - \theta} e^{-at}),$$

где $A_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{at} \int_{\mathbb{R}^N} u(x, t) dx$, $y = t^{-1/2}x$, $\theta > 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Конкретное значение константы A_0 можно найти с помощью так называемой диаграммной техники, изложенной в [5, с. 159–177] на примере обобщенного уравнения КПП с квадратичной нелинейностью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 6. Преобразование Фурье решения $\hat{u}(p, t)$ было представлено в виде $\hat{u}(p, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{n+1} v_n(p, t)$. Из этого соотношения и предложения 1 видно, что при $\varepsilon < 1/A < 1/A_1$ ряд сходится равномерно на $\mathbb{R}^N \times [0, \infty)$ и удовлетворяет интегральному уравнению (5). Заметим, что $|\varphi_n| = \lim_{t \rightarrow \infty} |v_n(0, t)e^{at}| \leq A_1^n$. Следовательно,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{n+1} \varphi_n = \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{u}(0, t)e^{at} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{at} \int_{\mathbb{R}^N} u(x, t) dx.$$

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{n+1} A_3^n$ сходится. Таким образом,

$$u(x, t) = F^{-1}[\hat{u}(p, t)] = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{n+1} \psi_n(x, t),$$

поэтому

$$(2\pi)^N u(x, t) = A_0 t^{-\frac{N}{2}} e^{-at} \int_{\mathbb{R}^N} e^{i(y, \eta) - (b-a)|\eta|^2} d\eta + O(t^{-\frac{N}{2} - \theta} e^{-at}).$$

Предложение доказано.

Докажем основную теорему. Приведем ее формулировку в упрощенном виде.

ТЕОРЕМА. Асимптотика, полученная в предложении 6, приводится к виду

$$u(x, t) = (4\pi(b-a))^{-\frac{N}{2}} A_0 t^{-\frac{N}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4(b-a)t}} e^{-at} + O(t^{-\frac{N}{2} - \theta} e^{-at}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Преобразуем интеграл, стоящий в формулировке предложения 6:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} e^{i(y,\eta)-(b-a)|\eta|^2} d\eta &= \int_{\mathbb{R}^N} e^{iy_1\eta_1+\dots+iy_N\eta_N-(b-a)\eta_1^2-\dots-(b-a)\eta_N^2} d\eta_1 \dots d\eta_N \\ &= \prod_{k=1}^N \int_{\mathbb{R}} e^{iy_k\eta_k-(b-a)\eta_k^2} d\eta_k. \end{aligned}$$

С помощью линейных замен интеграл сводится к произведению интегралов Пуассона. Значит,

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{i(y,\eta)-(b-a)|\eta|^2} d\eta = e^{-\frac{|x|^2}{4(b-a)t}} \frac{1}{(\sqrt{b-a})^N} (\sqrt{\pi})^N.$$

Отсюда непосредственно получаем требуемое утверждение. Теорема доказана.

Список литературы

1. K. Mochizuki, I. A. Shishmarev, “Large time asymptotics of small solutions to generalized Kolmogorov–Petrovskii–Piskunov equation”, *Funkcial. Ekvac.*, **44**:1 (2001), 99–117.
2. В. В. Конотоп, И. А. Шишмарев, “Об асимптотике решений обобщенного уравнения Колмогорова–Петровского–Пискунова при больших временах”, *Дифференц. уравнения*, **34**:5 (1998), 668–681; англ. пер.: V. V. Konotop, I. A. Shishmarev, “Asymptotics of solutions of the generalized Kolmogorov–Petrovskij–Piskunov equation for large values of time”, *Differ. Equ.*, **34**:5 (1998), 669–682.
3. И. А. Шишмарев, “Об одном нелинейном уравнении типа Соболева”, *Дифференц. уравнения*, **41**:1 (2005), 138–140; англ. пер.: I. A. Shishmarev, “On a nonlinear Sobolev type equation”, *Differ. Equ.*, **41**:1 (2005), 146–149.
4. N. Hayashi, E. I. Kaikina, P. I. Naumkin, I. A. Shishmarev, *Asymptotics for dissipative nonlinear equations*, Lecture Notes in Math., **1884**, Springer-Verlag, Berlin, 2006.
5. P. I. Naumkin, I. A. Shishmarev, *Nonlinear nonlocal equations in the theory of waves*, Transl. Math. Monogr., **133**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

А. И. АРИСТОВ (A. I. ARISTOV)
E-mail: ai_aristov@mail.ru

Поступило в редакцию
26.01.2009
05.05.2010